

Pracovní úkoly

1. Změřte účinník rezistoru, kondenzátoru ($C = 10 \mu\text{F}$) a cívky.
2. Spočítejte fázový posun proudu a napětí. Určete chybu měření. Diskutujte shodu výsledků s teoretickými hodnotami pro ideální prvky.
3. Pro cívku vypočítejte indukčnost a odpor v sériovém a paralelním náhradním zapojení.
4. Změřte účinník sériového a paralelního zapojení rezistoru a kondenzátoru pro kapacity v intervalu $C = 1\text{--}10 \mu\text{F}$ a spočítejte fázový posuv. Výsledky zpracujte graficky. Z naměřených hodnot stanovte odpor rezistoru a porovnejte ho s hodnotou přímo naměřenou digitálním multimetrem. Určete chyby měření a rozhodněte, které z obou zapojení je v daném případě vhodnější pro stanovení odporu.
5. Změřte závislost proudu a výkonu na velikosti kapacity zařazené do sériového RLC obvodu pro kapacity do $10 \mu\text{F}$. Výsledky zpracujte graficky, v závislosti na zařazené kapacitě vynesete účinník, fázový posuv napětí vůči proudu a výkon.
6. V průběhu měření sériového RC obvodu připojte na kondenzátor digitální osciloskop Tektronix a pozorujte změnu fáze napětí na kondenzátoru vzhledem k průběhu napětí zdroje v závislosti na velikosti nastavené kapacity v intervalu $1\text{--}10 \mu\text{F}$. Popište kvalitativně pozorované jevy a vysvětlete je.

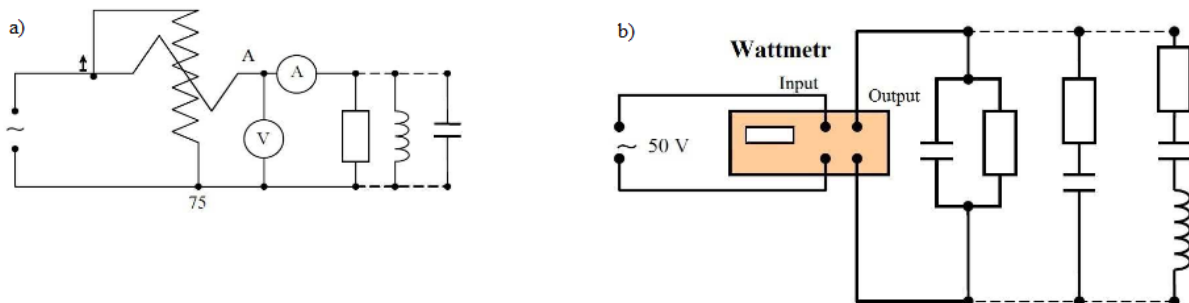
Teoretická část

Výkon a jeho měření

Pro výkon ve střídavém obvodu s harmonickým průběhem proudu a napětí, vůči sobě posunutých o fázi φ platí

$$P = U I \cos\varphi, \quad (1)$$

kde U a I jsou efektivní hodnoty proudu a napětí. Výraz $\cos\varphi$ nazýváme účinníkem. Měření výkonu provádíme pomocí wattmetru (obrázek 1).¹



Obrázek 1. Schéma wattmetru. Vlevo (a) je schéma a zapojení wattmetru pro měření účinníku jednotlivých prvků R , L a C . Vpravo (b) je zapojení digitálního wattmetru. Čárkované spojení jsou alternativní zapojení pro měření různých kombinací.¹

Impedance sériových a paralelních RLC obvodů

V sériovém obvodu RLC (obrázek 2) je komplexní impedance daná vzorcem

$$Z^* = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (2)$$

kde R je hodnota odporu resistoru, j komplexní jednotka, L indukčnost zařazené cívky a C kapacita kondenzátoru.¹

Pro fázové posunutí v takovém obvodu platí

$$tg\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (3)$$

Pokud máme pouze obvod RC, stačí ve vztazích (2) a (3) dosadit $\omega L = 0$, pokud máme obvod RL, dosadíme $\frac{1}{\omega C} = 0$.¹

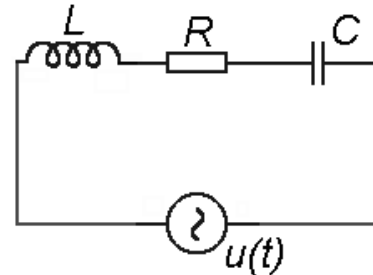
Pro paralelní RLC obvod se hodí zavést převrácenou hodnotu impedance, tzv. admitanci Y , pro její komplexní vyjádření platí

$$Y^* = \frac{1}{Z^*} = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad (4)$$

pro fázové posunutí proudu vůči napětí φ' v paralelním RLC obvodu pak platí

$$tg\varphi' = \omega RC - \frac{R}{\omega L} \quad (5)$$

Opět zde platí, že pokud v obvodu není kondenzátor nebo cívka, tak příslušný člen nahrazujeme nulou. Pro fázové posunutí napětí vůči proudu pak platí $\varphi = -\varphi'$.¹



Obrázek 2. Sériový RLC obvod²

Náhradní zapojení

Zatím jsme uvažovali pouze ideální cívku, u které nepočítáme s vlastním odporem. Reálnou cívku nebo pak představujeme jako sériové nebo paralelní zapojení ideálního prvku s rezistorem.

Pro náhradní zapojení RL obvodů využijeme vzorců

$$R_S = \frac{U}{I} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{P}{I^2} \quad (6)$$

$$R_P = \frac{U}{I} \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{U^2}{P} \quad (7)$$

$$L_S = \frac{U}{\omega I} \frac{\tan^2 \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{U}{\omega I} \sqrt{1 - \left(\frac{P}{UI} \right)^2} \quad (8)$$

$$L_P = \frac{U}{\omega I} \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \varphi}{\tan^2 \varphi}} = \frac{U}{\omega I} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{P}{UI} \right)^2}} \quad (9)$$

kde dolní index S odpovídá sériovému zapojení a dolní index P zapojení paralelnímu. Vzorce pro odpor můžeme použít i pro měření vlastností RC obvodů.¹

Výsledky měření

Chyba měření analogovým wattmetrem odhadujeme jako 0,25 W, což odpovídá dvěma dílkům na stupnici. Třída přesnosti je .2, vzhledem k nečitelnosti rysky a tedy vysoké pravděpodobnosti špatného odečtení chybu nadhodnocujeme.

Digitální wattmetr HM-8115-2 měří výkon s přesností $0,5\% \pm 10 \text{ dg}$, napětí s přesností $\pm 0,4\% \pm 5 \text{ dg}$ a procházející proud s přesností $\pm 0,4 \pm 5 \text{ dg}$.

Napětí při měření analogovým wattmetrem bylo měřeno multimetrem Metex MXD-4660A. Jeho přesnost je v rámci hodnot našeho měření výrobcem udaná jako $\pm 0,8\% \pm 0,1 \text{ V}$.

Měření proudu a přímé měření odporu bylo prováděno multimetrem Metex M-3270D. Pro měření proudu výrobce uvádí přesnost (opět v rámci hodnot našeho měření) $\pm 1,5\% \pm 1 \text{ mA}$. Měření odporu multimetrem bylo prováděno zejména pro porovnání s dopočtenými hodnotami, proto se chybou takto změřeného odporu nebudeme zabývat.

Jako úhlovou frekvenci uvažujeme $\omega = 2\pi f = (314 \pm 4) \text{ s}^{-1}$.

Měření účinníků a fázových posunů jednotlivých prvků

V zapojení podle schémat na obrázku 1a) byly s digitálním a analogovým wattmetrem naměřeny hodnoty výkonu P , procházejícího efektivního proudu I a napětí na zdroji I a podle (1) dopočten účinník. (tabulka 1). Dále byly pomocí vzorce (1) určeny účinníky měřených součástek, které jsou uvedeny spolu s naměřenými hodnotami.

Tabulka 1. Naměřené a dopočtené hodnoty měření účinníků. R je měření rezistoru, C měření kondenzátoru a L měření cívky.

Měření analogovým wattmetrem				
	$P [W]$	$U_{eff} [V]$	$I_{eff} [mA]$	$\cos \varphi$
R	$2,56 \pm 0,25$	$51,1 \pm 0,5$	51 ± 2	$0,99 \pm 0,10$
C	$0,0125 \pm 0,25$	$50,6 \pm 0,5$	155 ± 3	$0,00 \pm 0,03$
L	$0,59 \pm 0,25$	$50,6 \pm 0,5$	30 ± 1	$0,38 \pm 0,16$
Měření digitálním wattmetrem				
	$P [W]$	$U_{eff} [V]$	$I_{eff} [mA]$	$\cos \varphi$
R	$2,58 \pm 0,02$	$50,5 \pm 0,7$	51 ± 5	$0,99 \pm 0,10$
C	$0,015 \pm 0,01$	$50 \pm 0,7$	160 ± 6	$0,00 \pm 0,00$
L	$0,609 \pm 0,01$	$50,8 \pm 0,7$	30 ± 5	$0,40 \pm 0,07$

Jako hodnoty fázového posunu uvažujeme hodnoty zatížené menší chybou. Pro fázový posuv rezistoru je to hodnota určená analogově, pro cívku a kondenzátor hodnota určena digitálním wattmetrem. Dostáváme $\varphi_R = (0,2 \pm 0,6)$, $\varphi_C = (1,569 \pm 0,001)$ a $\varphi_L = -(1,16 \pm 0,08)$. Chyba hodnot fázového posunu byla určena podle vzorce odvozeného ze zákona přenosu chyby

$$\sigma_{\varphi} = \frac{\sigma_{\cos \varphi}}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} \quad (10)$$

Pro cívku jsme dále určili podle vzorců (6)-(9) indukčnost a vlastní odpor pro náhradní sériové a paralelní zapojení. Použili pouze hodnoty z měření digitálním wattmetrem pro jejich větší přesnost.

Tabulka 2. Vlastnosti cívky určené z měření digitálním wattmetrem. Chyba u indukčností odpovídá přenesené chybě hodnoty pod odmocninou a hodnoty před ní (vzorce 8 a 9). Chyba odporů odpovídá přenosu relativní chyby jednotlivých hodnot.

R_S^L [k Ω]	R_P^L [k Ω]	L_S [H]	L_P [H]
$0,6 \pm 0,2$	$4,2 \pm 0,1$	4 ± 1	6 ± 2

Digitálním multimetrem jsme naměřili odpor na cívce $R_{Lm} = 16,3 \Omega$.

Sériový a paralelní RC obvod

Dále byly proměřeny závislosti na kapacitě RC obvodu v sériovém a paralelním zapojení. Účinník je určen podle (1), odpor resistoru v různých zapojeních podle (6) a (7). Ve výpočtech zanedbáváme odpor kondenzátoru (považujeme jej za ideální). Měříme pouze na digitálním wattmetru.

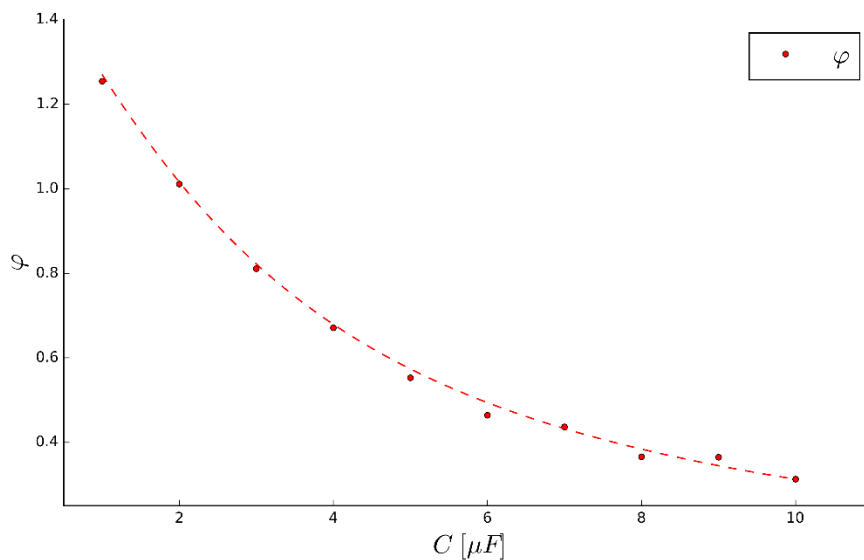
Tabulka 3. Měření závislosti účinníku na kapacitě kondenzátoru v sériovém RC obvodu. Hodnoty účinníku jsou zaokrouhleny na dvě platné číslice pro zdůraznění naměřené závislosti.

C [μF]	P [W]	U [V]	I [mA]	$\cos \varphi$	φ/π	R_p [k Ω]
10	$2,27 \pm 0,02$	$49,7 \pm 0,7$	48 ± 5	$0,95 \pm 0,10$	$0,1 \pm 0,3$	$1,0 \pm 0,2$
9	$2,33 \pm 0,02$	$50,9 \pm 0,7$	49 ± 5	$0,93 \pm 0,10$	$0,1 \pm 0,3$	$1,0 \pm 0,2$
8	$2,19 \pm 0,02$	$49,9 \pm 0,7$	47 ± 5	$0,93 \pm 0,10$	$0,1 \pm 0,3$	$1,0 \pm 0,2$
7	$2,08 \pm 0,02$	$49,9 \pm 0,7$	46 ± 5	$0,91 \pm 0,10$	$0,1 \pm 0,2$	$1,0 \pm 0,2$
6	$2,04 \pm 0,02$	$50,7 \pm 0,7$	45 ± 5	$0,89 \pm 0,10$	$0,1 \pm 0,2$	$1,0 \pm 0,2$
5	$1,78 \pm 0,02$	$49,8 \pm 0,7$	42 ± 5	$0,85 \pm 0,10$	$0,12 \pm 0,2$	$1,0 \pm 0,2$
4	$1,5 \pm 0,02$	$49,1 \pm 0,7$	39 ± 5	$0,78 \pm 0,10$	$0,2 \pm 0,2$	$1,0 \pm 0,3$
3	$1,22 \pm 0,02$	$50,6 \pm 0,7$	35 ± 5	$0,68 \pm 0,10$	$0,3 \pm 0,1$	$1,0 \pm 0,3$
2	$0,71 \pm 0,01$	$49,8 \pm 0,7$	27 ± 5	$0,53 \pm 0,10$	$0,3 \pm 0,1$	$1,0 \pm 0,4$
1	$0,24 \pm 0,01$	$50,4 \pm 0,7$	15 ± 5	$0,31 \pm 0,10$	$0,4 \pm 0,1$	$1,0 \pm 0,7$

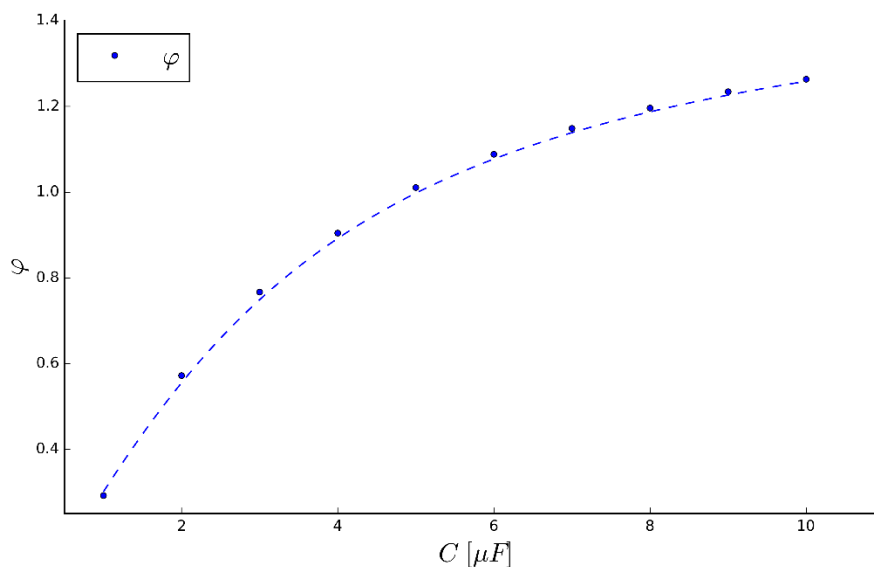
Tabulka 4. Měření závislosti účinníku na kapacitě kondenzátoru v paralelním zapojení RC obvodu.

C [μF]	P [W]	U [V]	I [mA]	$\cos \varphi$	φ/π	R_p [k Ω]
10	$2,52 \pm 0,02$	$49,6 \pm 0,7$	168 ± 6	$0,30 \pm 0,01$	$0,40 \pm 0,01$	$0,98 \pm 0,03$
9	$2,61 \pm 0,02$	$50,7 \pm 0,7$	156 ± 6	$0,33 \pm 0,01$	$0,39 \pm 0,01$	$0,98 \pm 0,03$
8	$2,48 \pm 0,02$	$49,5 \pm 0,7$	137 ± 6	$0,37 \pm 0,02$	$0,38 \pm 0,02$	$0,99 \pm 0,03$
7	$2,58 \pm 0,02$	$50,4 \pm 0,7$	125 ± 6	$0,41 \pm 0,02$	$0,37 \pm 0,02$	$0,98 \pm 0,03$
6	$2,47 \pm 0,02$	$49,3 \pm 0,7$	108 ± 5	$0,46 \pm 0,02$	$0,35 \pm 0,03$	$0,98 \pm 0,03$
5	$2,56 \pm 0,02$	$50,2 \pm 0,7$	96 ± 5	$0,53 \pm 0,03$	$0,32 \pm 0,04$	$0,98 \pm 0,03$
4	$2,54 \pm 0,02$	$50,1 \pm 0,7$	82 ± 5	$0,62 \pm 0,04$	$0,29 \pm 0,05$	$0,99 \pm 0,03$
3	$2,51 \pm 0,02$	$49,8 \pm 0,7$	70 ± 5	$0,72 \pm 0,06$	$0,24 \pm 0,08$	$0,99 \pm 0,03$
2	$2,60 \pm 0,02$	$50,7 \pm 0,7$	61 ± 5	$0,84 \pm 0,07$	$0,18 \pm 0,14$	$0,99 \pm 0,03$
1	$2,46 \pm 0,02$	$49,4 \pm 0,7$	52 ± 5	$0,96 \pm 0,09$	$0,09 \pm 0,34$	$0,99 \pm 0,03$

Pro určení odporu je vhodnější paralelní zapojení, výsledná chyba je menší a měření můžeme považovat za přesnější. Odpor rezistoru jsme pomocí paralelního zapojení určili jako $R = (986 \pm 9) \Omega$. Chyba odpovídá chybě z aritmetického průměru naměřených hodnot.



Obrázek 3. Závislost fázového posunutí na zařazené kapacitě v sériovém RC obvodu. Proložená křivka odpovídá teoretické závislosti (3) s dopočtenou hodnotou R .



Obrázek 4. Závislost fázového posunutí na zařazené kapacitě v paralelním RC obvodu. Proložená křivka odpovídá teoretické závislosti (5) s dopočtenou hodnotou R .

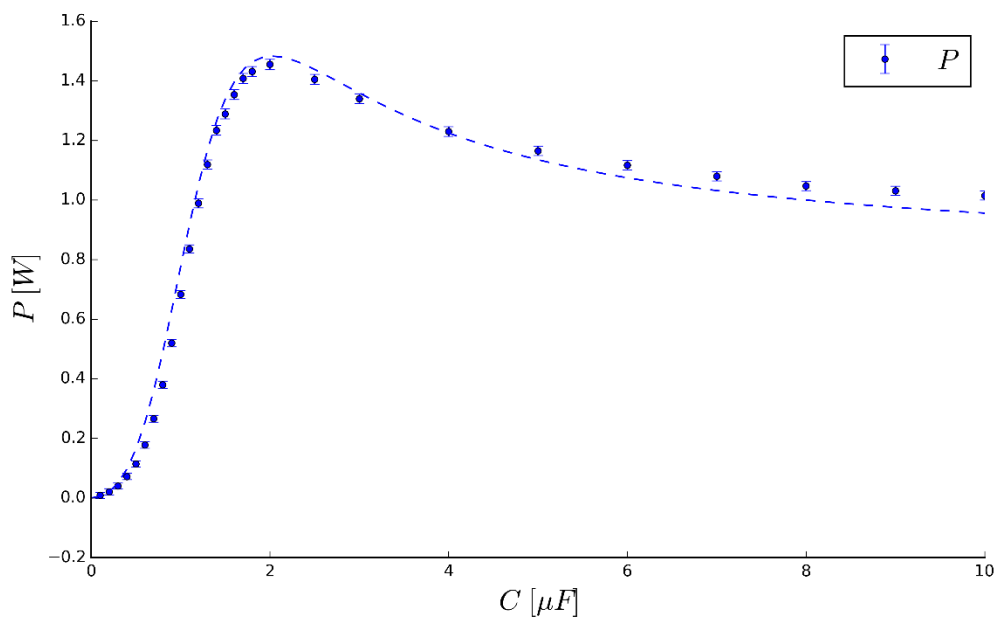
Sériový RLC obvod

V sériovém RLC obvodu byla pomocí digitálního wattmetru měřena závislost výkonu na zařazené kapacitě. V dalších výpočtech budeme uvažovat hodnoty R a L určené z předchozích měření. Kvůli sudosti funkce cosinus byly vypočteny pouze absolutní hodnoty fázového posunutí.

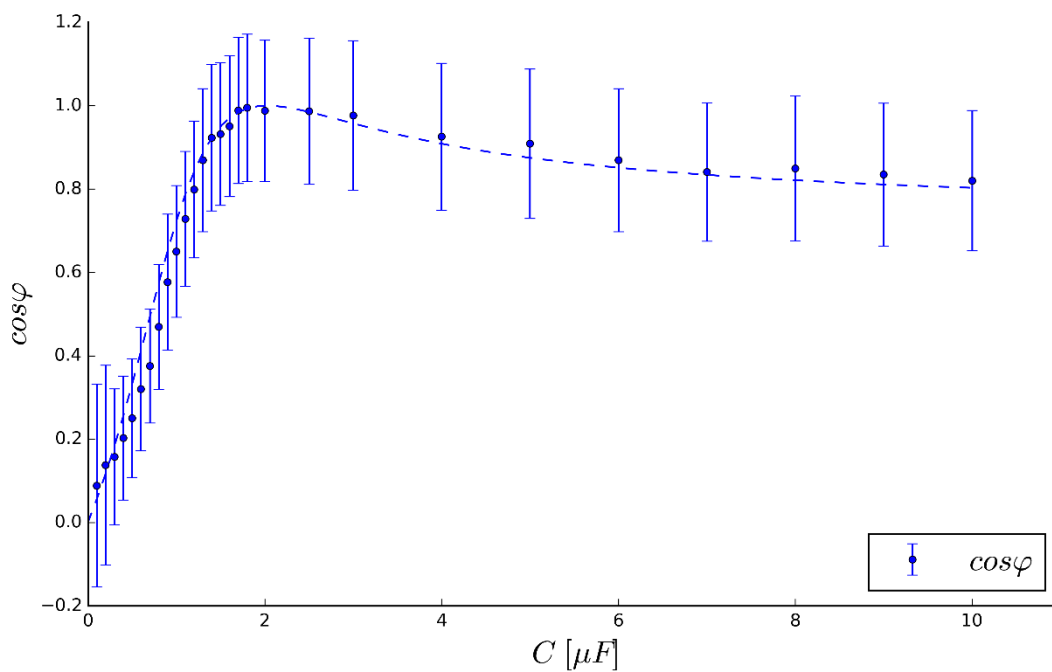
Tabulka 5. Naměřené hodnoty výkonu, napětí a proudu v sériovém RLC obvodu a dopočtený účinník a fázové posunutí v závislosti na kapacitě.

C [μF]	P [W]	U [V]	I [mA]	$\cos \varphi$	φ
0,1	$0,009 \pm 0,01$	$50,8 \pm 0,7$	2 ± 5	$0,1 \pm 0,2$	$1,5 \pm 0,2$
0,2	$0,02 \pm 0,01$	$50,8 \pm 0,7$	3 ± 5	$0,1 \pm 0,2$	$1,4 \pm 0,2$
0,3	$0,04 \pm 0,0$	$50,8 \pm 0,7$	5 ± 5	$0,2 \pm 0,2$	$1,4 \pm 0,2$
0,4	$0,07 \pm 0,01$	$50,7 \pm 0,7$	7 ± 5	$0,2 \pm 0,1$	$1,3 \pm 0,2$
0,5	$0,11 \pm 0,01$	$50,6 \pm 0,7$	9 ± 5	$0,3 \pm 0,1$	$1,3 \pm 0,1$
0,6	$0,18 \pm 0,01$	$50,5 \pm 0,7$	11 ± 5	$0,3 \pm 0,1$	$1,2 \pm 0,2$
0,7	$0,27 \pm 0,01$	$50,6 \pm 0,7$	14 ± 5	$0,4 \pm 0,1$	$1,2 \pm 0,1$
0,8	$0,38 \pm 0,01$	$50,6 \pm 0,7$	16 ± 5	$0,5 \pm 0,1$	$1,1 \pm 0,2$
0,9	$0,52 \pm 0,01$	$50,1 \pm 0,7$	18 ± 5	$0,6 \pm 0,2$	$1,0 \pm 0,2$
1	$0,68 \pm 0,01$	$50,0 \pm 0,7$	21 ± 5	$0,7 \pm 0,2$	$0,9 \pm 0,2$
1,1	$0,84 \pm 0,01$	$49,9 \pm 0,7$	23 ± 5	$0,7 \pm 0,2$	$0,8 \pm 0,2$
1,2	$1,00 \pm 0,01$	$49,5 \pm 0,7$	25 ± 5	$0,8 \pm 0,2$	$0,6 \pm 0,3$
1,3	$1,12 \pm 0,02$	$49,5 \pm 0,7$	26 ± 5	$0,9 \pm 0,2$	$0,5 \pm 0,3$
1,4	$1,23 \pm 0,02$	$49,5 \pm 0,7$	27 ± 5	$0,9 \pm 0,2$	$0,4 \pm 0,5$
1,5	$1,29 \pm 0,02$	$49,4 \pm 0,7$	28 ± 5	$0,9 \pm 0,2$	$0,4 \pm 0,5$
1,6	$1,35 \pm 0,02$	$49,1 \pm 0,7$	29 ± 5	$1,0 \pm 0,2$	$0,3 \pm 0,5$
1,7	$1,41 \pm 0,02$	$49,1 \pm 0,7$	29 ± 5	$1,0 \pm 0,2$	$0,2 \pm 1$
1,8	$1,43 \pm 0,02$	$49,1 \pm 0,7$	29 ± 5	$1,0 \pm 0,2$	$0,1 \pm 2$
2	$1,46 \pm 0,02$	$49,1 \pm 0,7$	30 ± 5	$1,0 \pm 0,2$	$0,2 \pm 1$
2,5	$1,41 \pm 0,02$	$49,1 \pm 0,7$	29 ± 5	$1,0 \pm 0,2$	$0,2 \pm 1$
3	$1,34 \pm 0,02$	$49,0 \pm 0,7$	28 ± 5	$1,0 \pm 0,2$	$0,2 \pm 0,8$
4	$1,23 \pm 0,02$	$49,2 \pm 0,7$	27 ± 5	$1,0 \pm 0,2$	$0,4 \pm 0,5$
5	$1,17 \pm 0,02$	$49,3 \pm 0,7$	26 ± 5	$0,9 \pm 0,2$	$0,4 \pm 0,4$
6	$1,12 \pm 0,02$	$49,4 \pm 0,7$	26 ± 5	$0,9 \pm 0,2$	$0,5 \pm 0,3$
7	$1,08 \pm 0,02$	$49,4 \pm 0,7$	26 ± 5	$0,8 \pm 0,2$	$0,6 \pm 0,3$
8	$1,05 \pm 0,02$	$49,3 \pm 0,7$	25 ± 5	$0,8 \pm 0,2$	$0,6 \pm 0,3$
9	$1,03 \pm 0,02$	$49,4 \pm 0,7$	25 ± 5	$0,8 \pm 0,2$	$0,6 \pm 0,3$
10	$1,02 \pm 0,02$	$49,5 \pm 0,7$	25 ± 5	$0,8 \pm 0,2$	$0,6 \pm 0,3$

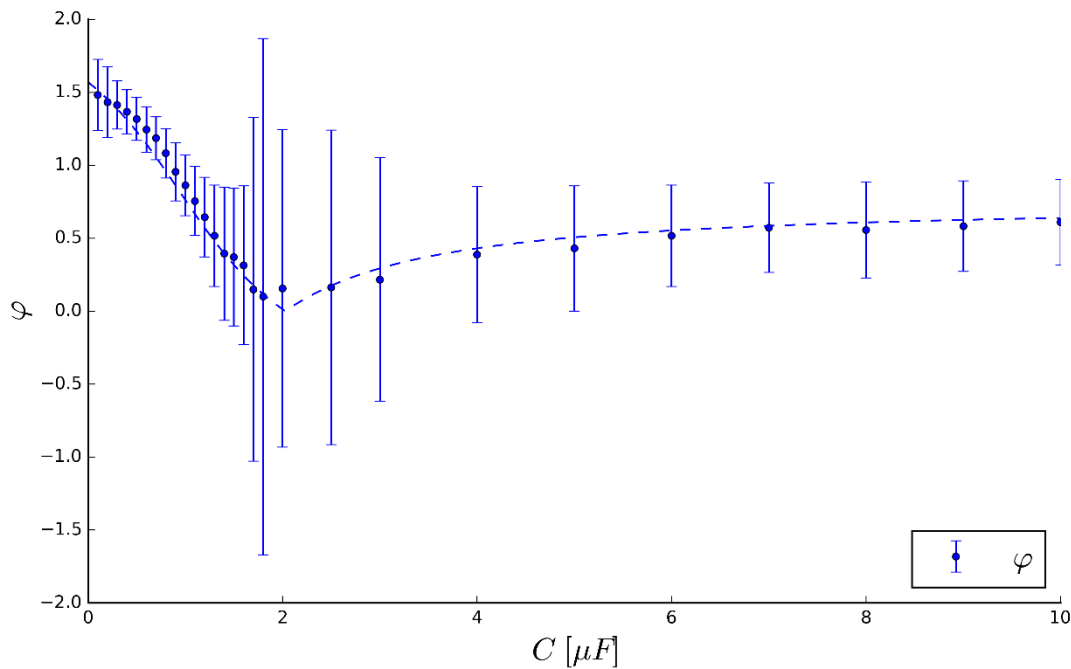
Při prokládání teoretickými závislostmi používáme naměřené hodnoty R_S^L , L_S parametrů cívky, a odpor R rezistoru, odpor kondenzátoru považujeme za zanedbatelný. Napětí v teoretických závislostech uvažujeme $U = 50 V$.



Obrázek 5. Závislost výkonu na zařazené kapacitě. Graf je proložen křivkou odpovídající rovnici (1), kde je φ vyjádřeno pomocí (3) a proud I jako podíl napětí U a hodnoty impedance $|Z|$.



Obrázek 6. Závislost účinníku na zařazené kapacitě. Graf je proložen křivkou danou jako kosinus arkustangenty vzorce (3).



Obrázek 7. Závislost fázového posunutí na zařazené kapacitě. Uvažujeme absolutní hodnotu fázového posunutí, proložená křivka pak odpovídá arkustangentě vzorce (3).

Diskuze

Měření analogovým wattmetrem je zatíženo zejména chybou vzniklou právě odečítáním z wattmetru. I když je odečítání hodnot proudu a napětí z digitálních multimetrů při měření analogovým wattmetrem přesnější, než odečítání těchto veličin z měřících přístrojů digitálního wattmetru, chyba vzniklá na analogovém wattmetru dělá měření méně přesné, než na digitálním. Zároveň, měření proudu a napětí na digitálním wattmetru je přístrojově korigované na vnitřní odpory digitálního wattmetru a proto jej upřednostňujeme před měřením přesnějšími digitálními multimetry.

Z měření vidíme, že kondenzátor můžeme považovat za ideální prvek, zatímco cívka má z výpočtů podle náhradního zapojení nezanedbatelný odpor. Pro měření odporu rezistoru je vhodnější paralelní zapojení, ve kterém dostáváme menší chybu. Odpor cívky a rezistoru byl také orientačně změřen přímo pomocí digitálního multimetru, pro rezistor dostáváme hodnotu $R_{Rm} = 975 \text{ k}\Omega$, pro cívku $R_{Lm} = 16,3 \Omega$. Hodnota odporu rezistoru s tímto měřením souhlasí, zatímco námi určený odpor cívky se od přímo naměřeného liší téměř o dva řády.

Při měření sériově zapojeného RC obvodu byl k obvodu zapojen osciloskop Tektronix. Při změnách kapacity pozorujeme změny napětí a fáze na kondenzátoru oproti zdroji. S rostoucí kapacitou se napětí na kondenzátoru snižuje a jeho peak se zpožďuje – dochází ke změně impedance vlivem změny kapacity a tedy fázovému posuvu.

Závěr

Pro jednotlivé prvky R, L a C byl určen účinník, příslušné fázové posunutí byly určeny jako $\varphi_R = (0,2 \pm 0,6)$, $\varphi_C = (1,569 \pm 0,001)$ a $\varphi_L = -(1,16 \pm 0,08)$. Pro rezistor a kondenzátor odpovídají naměřené hodnoty téměř ideálnímu prvku, pro cívku vidíme vliv odporu vinutí a vlastní kapacity právě v rozdílném fázovém posunutí. Odpor vinutí byl určen pro sériové a paralelní náhradní zapojení, s měřením digitálním multimetrem se však určené hodnoty neshodují.

Odpor rezistoru byl určen jako $R = (986 \pm 9) \Omega$.

Dále byla změřena závislost účinníku a fázového posunutí na kapacitě v RC obvodech. V sériovém RC obvodu účinník s rostoucí kapacitou roste, v paralelním obvodu účinník s rostoucí kapacitou klesá. Při měření sériového RC obvodu bylo na osciloskopu pozorováno fázové posunutí a rozdíly v napětí, způsobené změnami impedance (viz. vzorec (2)).

V sériovém RLC obvodu byly naměřeny závislosti výkonu, účinníku a fázového posuvu na zařazené kapacitě kondenzátoru, u výkonu (a tedy i účinníku) pozorujeme maximum kolem $2 \mu\text{F}$, je zde tedy nejmenší fázové posunutí.

Použité zdroje

¹ Studijní text k Fyzikálnímu Praktiku II. 6. Měření účinníku. [online] [cit. 2018-12-6]. Dostupné online z: https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_206.pdf.

² J. Kekule. Obvod střídavého proudu s R, L, C, Elektross. [online] [cit. 2018-12-6]. Dostupné online z: <http://elektross.gjn.cz/sesit/sesit11.html>.