

1 Pracovní úkol

1. Změřte průměry šesti drátů na pracovní desce.
2. Změřte odpor šesti drátů Wheatstoneovým a Thomsonovým můstkem Metra - MTW. Vysvětlete rozdíly ve výsledcích měření. Současně určete odpor přívodních vodičů a odpor na svorkách v případě měření Wheatstoneovým můstkem.
3. Změřte odpory ve čtyřbodovém zapojení pomocí multimetru KEITHLEY 2010.
4. Určete měrný odpor jednotlivých vzorků i s příslušnou chybou výsledku. Stanovené hodnoty porovnejte s hodnotami uváděnými v tabulkách.

2 Teoretický úvod

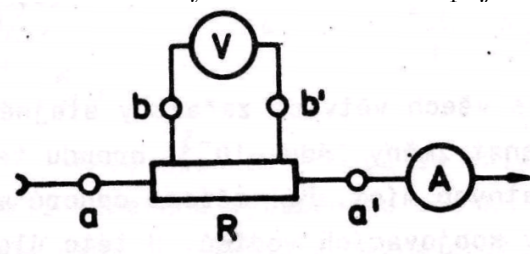
Odpory standardních velikostí se obvykle měří přímou metodou a sice, že do jednoduchého stejnosměrného obvodu připojíme ampérmetr sériově a voltmetr paralelně s měřeným odporem. Odpor posléze dopočítáme podle Ohmova zákona [1] a případně započteme korekci napětí nebo proudu, pokud ampérmetr má nezanedbatelný vnitřní odpor a nebo voltmetr má moc malý odpor (viz úloha 2 [2]). Extrémně malé či velké odpory se touto metodou však měří špatně, protože narazíme na limity měřících přístrojů a přívodní vodiče začnou mít nezanedbatelný odpor.

Pro měření malých odporů (menších než $1\ \Omega$) se používá metoda čtyřbodového zapojení a měření pomocí Wheatstoneova nebo Thomsonova můstku.

2.1 Čtyřbodové zapojení rezistoru

V čtyřbodovém zapojení je rezistor opatřen čtyřmi výstupními svorkami jako na obrázku 1. Na svorkách a a a' měříme proud (přes tyto svorky je rezistor připojen ke zdroji), na vnitřní výstupy b a b' připojíme voltmetr, čímž zařídíme, že změříme pouze napětí mezi body, ve kterých jsou svorky b a b' připojeny k rezistoru (v našem případě k odporovému drátu), tedy odpor přívodních vodičů ke svorkám a , a' se neuplatní a zároveň pokud je odpor voltmetru dostatečný¹, neuplatní se ani odpory kontaktů b , b' a přívodů k voltmetru.

Obrázek 1: Čtyřbodová metoda zapojení



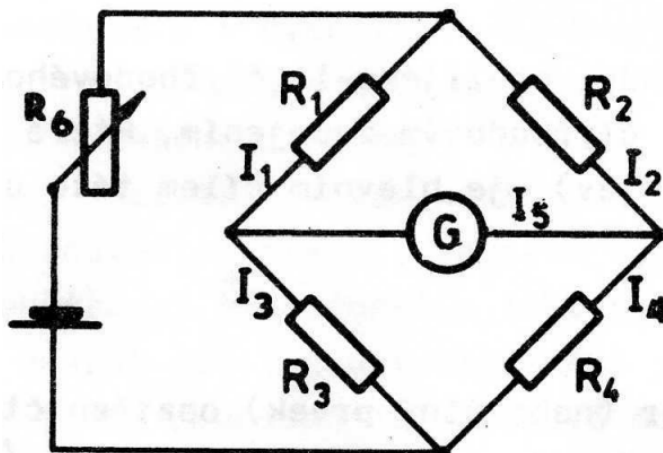
2.2 Wheatstoneův můstek

Schéma zapojení můstku je na obrázku 1, kde rezistory R_2 , R_3 a R_4 jsou součástí můstku a R_1 je měřený odpor. Odpor R_6 slouží k nastavení velikosti proudu. Při měření je potřeba nastavit velikosti odporů Wheatstoneova můstku tak, aby galvanometrem G neprocházel proud. Potom pro velikosti odporů platí [2] vztah

$$R_1 = \frac{R_3}{R_4} R_2. \quad (1)$$

¹To je v případě měření malých odporů jistě splněno.

Obrázek 2: Wheatstoneův můstek



V tomto případě se však při měření malých odporů nepříznivě uplatňuje vliv spojovacích vodičů.

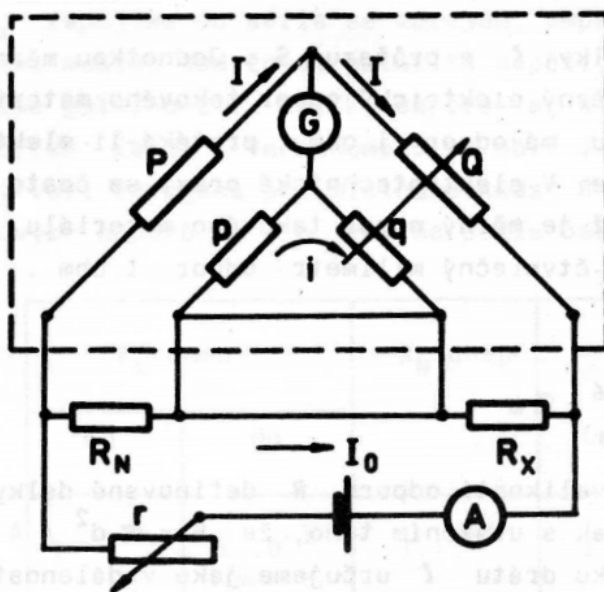
2.3 Thomsonův můstek

Tento můstek dokáže s použitím čtyřbodové metody eliminovat vliv odporu přívodních vodičů. Schéma zapojení můstku je znázorněno na obrázku 2 a tato metoda také spočívá v nastavení odporů P , p , Q a q tak, aby galvanometrem G neprotékal proud. Můstkem naměříme poměr velikostí odporů R_X a R_N , které jsou do obvodu zapojeny čtyřbodově. V našem případě bude R_X měřený odpor a R_N normovaný odpor, vůči kterému bude odpor R_X porovnáván.

Pokud je výrobcem zaručena shoda poměru odporů $\frac{p}{P} = \frac{q}{Q}$, můžeme vypočítat odpor R_X podle zjednodušeného vztahu [2]

$$R_X = \frac{Q}{P} R_N. \tag{2}$$

Graf 1: Thomsonův můstek



2.4 Měrný odpor

Měrný odpor ρ je vlastnost látky definovaná vztahem

$$\rho = \frac{RS}{l}, \quad (3)$$

kde R je celkový odpor homogenního vodiče délky l a průřezu S . Průřez S válcového drátu vypočteme jako

$$S = \frac{\pi d}{4}, \quad (4)$$

kde d je jeho průměr.

3 Měření

Byl měřen odpor celkem šesti různých drátů z jiného materiálu.

Během měření byla teplota

$$T = (23,10 \pm 0,05)^\circ\text{C}, \quad (5)$$

tlak $(999,90 \pm 0,05)$ hPa a relativní vlhkost vzduchu 36%, avšak pro naše účely bude důležitá pouze teplota.

K měření byl použit můstek METRA MTW, který umožňoval přepínat mezi Wheatstonovým a Thomsonovým můstkem. K němu byl připojen Galvanometr MG5. Byl použit stejnosměrný zdroj s nastavitelným proudovým či napěťovým limitem.

3.1 Měření Wheatstoneovým můstkem

Můstek byl zapojen podle schématu na obrázku 2. Jako odpory R_3 a R_4 bylo možné nastavit hodnoty $1\ \Omega$, $10\ \Omega$, $100\ \Omega$ nebo $1000\ \Omega$ s přesností 0,2 %. Po celou dobu měření byl zapojen co nejmenší poměr $R_3/R_4 = (1,000 \pm 0,003) \cdot 10^{-3}$, jehož nejistota je spočtena pomocí gaussova zákona šíření nejistot.² Jako odpor R_2 byla zapojena odporová dekáda, na která jsme nastavovali takovou hodnotu, aby galvanometrem procházel nulový proud. Rozlišení dekády bylo $0,1\ \Omega$ a její rozsah $10\ \text{k}\Omega$.

V některých případech bylo potřeba nejdříve snížit přesnost galvanometru (zvýšit rozsah stupnice), abychom se mohli dostat blízko ke hledané hodnotě a teprve potom nastavit na galvanometru maximální přesnost a doladit velikost odporu na odporové dekádě. Nepřesnost dekády můžeme zanedbat, protože je nižší, než její rozlišení. Jako nejistotu dekády budeme brát poslední její cifru (nikoliv polovinu nejmenšího dílku, protože často nebylo z galvanometru úplně zřejmé, jaký přesně odpor dává menší velikost proudu).

Tabulka 1 udává naměřené hodnoty s vypočteným odporem drátu podle 1³

Tabulka 1: Wheatstoneův můstek

materiál	$\frac{R_2}{\Omega}$	$\frac{R_1}{\Omega}$	$\frac{R_{\text{kor}}}{\Omega}$
wolfram	$163,5 \pm 0,1$	$0,1635 \pm 0,0006$	$0,1415 \pm 0,0007$
měď	$33,3 \pm 0,1$	$0,0333 \pm 0,0002$	$0,0113 \pm 0,0003$
kanthal	$6245,9 \pm 0,1$	$6,25 \pm 0,02$	$6,23 \pm 0,02$
železo	$1505,5 \pm 0,1$	$1,506 \pm 0,005$	$1,484 \pm 0,005$
mosaz	$243,6 \pm 0,1$	$0,2436 \pm 0,0008$	$0,2216 \pm 0,0009$
chromnikl	$1200,6 \pm 0,1$	$1,201 \pm 0,004$	$1,379 \pm 0,004$
samotné vodiče	$22,2 \pm 0,1$	$0,0220 \pm 0,0002$	0

²Tedy jako $\sigma_{\frac{R_3}{R_4}} = \frac{R_3}{R_4} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{R_3}}{R_3}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{R_4}}{R_4}\right)^2}$.

³Nejistota měřeného odporu R_1 byla vypočtena podle gaussova zákona šíření nejistot $\sigma_{R_1} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{R_2}}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{R_3/R_4}}{R_3/R_4}\right)^2}$.

V posledním řádku v tabulce 2 jsou naměřené hodnoty při zapojení na prázdko, tedy odpor samotných přívodních vodičů kterými byl odporový drát připojen a v posledním sloupci jsou hodnoty odporu drátu se započtenou korekcí eliminující vliv přívodních vodičů.

3.2 Měření Thomsonovým můstkem

Zapojení bylo sestaveno podle obrázku 1 a pomocí reostatu byl nastaven takový proud, aby se dráty příliš nezahřívali (přibližně 250 mA). Jako referenční hodnota odporu byl použit rezistor o odporu $R_N = 0,1 \Omega$. Nebyla u něj uvedena přesnost, tak nejistotu této hodnoty odhadneme na 0,1 %. Místo odporu Q byla použita odporová dekáda stejná jako v předchozím měření a odpor P bylo možno nastavovat po řádech od 1 do 1000 ohmů s přesností 0,2 %.

Tabulka 2: Thomsonův můstek

materiál	$\frac{P}{\Omega}$	$\frac{Q}{\Omega}$	$\frac{R_X}{\Omega}$
wolfram	1000 ± 2	$1375,0 \pm 0,1$	$0,138 \pm 0,001$
měď	1000 ± 2	$104,7 \pm 0,1$	$0,011 \pm 0,001$
kanthal	$100 \pm 0,2$	$6242,0 \pm 0,1$	$6,24 \pm 0,01$
železo	$100 \pm 0,2$	$1481,5 \pm 0,1$	$1,482 \pm 0,003$
mosaz	1000 ± 2	$2210,0 \pm 0,1$	$0,221 \pm 0,001$
chromnikl	$100 \pm 0,2$	$1180,3 \pm 0,1$	$1,180 \pm 0,003$

Odpor R_X byl vypočten podle (2). Výsledná nejistota odporu R_X byla spočtena následovně

$$\sigma_{R_X}^2 = \frac{Q^2 R_N^2}{P^2} \left(\frac{\sigma_Q^2}{Q^2} + \frac{\sigma_{R_N}^2}{R_N^2} + \frac{\sigma_P^2}{P^2} \right).$$

3.3 Měření multimetrem KEITHLEY 2010

Měřený odpor zapojíme čtyřbodově do multimetru KEITHLEY 2010, který měří poměrně přesně. Dokáže navíc eliminovat vliv zahřívání drátu, protože do něj pouští opravdu malé proudy. Naměřené hodnoty jsou v tabulce 3

Tabulka 3: Digitální multimetr

materiál	$\frac{R}{\Omega}$
wolfram	$0,1376 \pm 0,0001$
měď	$0,0109 \pm 0,0001$
kanthal	$6,2416 \pm 0,0007$
železo	$1,4797 \pm 0,0002$
mosaz	$0,2211 \pm 0,0001$
chromnikl	$1,1804 \pm 0,0002$

kde nejistota měření multimetru byla vypočtena z oficiální tabulky určující přesnost multimetru podle rozsahu. Pro všechna měření pracoval multimetr na rozsahu 10 Ω . Byly použity hodnoty odpovídající dvoum letům po poslední kalibraci, ačkoliv použitý multimetr údajně nebyl kalibrován déle (ale větší čas po kalibraci tabulka neuváděla).

3.4 Měření průměru drátů

Odpor drátů d byly měřeny mikrometrem s přesností 0,01 mm. Jelikož má tato hodnota na výsledný měrný odpor největší vliv, bylo pro každý drát provedeno celkem pět měření. Každé měření probíhalo v jiném místě

drátu pro případ, kdyby nebyl jeho průřez úplně konstantní. Jejich délka l byla změřena svinovacím metrem, ale jelikož se metr nedal za jedné straně zachytit v místě napojení kontaktu b (byla měřena samozřejmě vzdálenost napojení b a b'), uvádíme nejistotu 1 mm.

Výsledky měření jsou v následující tabulce. U jednotlivých měření mikrometrem není uváděna nejistota, protože je pořád stejná, a sice 0,005 mm. d_1 až d_5 jsou naměřené hodnoty a d je jejich průměr včetně nejistoty složené s nejistoty měřícího přístroje a směrodatné odchyšky aritmetického průměru.

Tabulka 4: Měření a výpočet průřezu

materiál	$\frac{l}{\text{cm}}$	$\frac{d_1}{\text{mm}}$	$\frac{d_2}{\text{mm}}$	$\frac{d_3}{\text{mm}}$	$\frac{d_4}{\text{mm}}$	$\frac{d_5}{\text{mm}}$	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{S}{\text{mm}^2}$
wolfram	$90,0 \pm 0,1$	0,68	0,68	0,68	0,69	0,67	$0,680 \pm 0,008$	$0,363 \pm 0,009$
měď	$90,0 \pm 0,1$	1,34	1,34	1,34	1,34	1,34	$1,340 \pm 0,005$	$1,410 \pm 0,011$
kanthal	$90,0 \pm 0,1$	0,51	0,49	0,50	0,50	0,50	$0,500 \pm 0,008$	$0,196 \pm 0,006$
železo	$90,0 \pm 0,1$	0,40	0,41	0,40	0,40	0,41	$0,400 \pm 0,007$	$0,126 \pm 0,004$
mosaz	$90,0 \pm 0,1$	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	$0,590 \pm 0,005$	$0,273 \pm 0,005$
chromnikl	$90,0 \pm 0,1$	1,02	1,00	1,00	0,99	1,01	$1,000 \pm 0,011$	$0,785 \pm 0,018$

Průřez byl vypočten podle (4) a jeho nejistota podle

$$\sigma_S = \frac{\pi d}{2} \sigma_d.$$

3.5 Výpočet měrného odporu

Nyní už konečně můžeme spočítat měrný odpor podle (5)⁴

Tabulka 5: Porovnání měrných odporů

materiál	$\frac{\varrho_{\text{Whea}}}{\text{n}\Omega\text{m}}$	$\frac{\varrho_{\text{WhKor}}}{\text{n}\Omega\text{m}}$	$\frac{\varrho_{\text{Thom}}}{\text{n}\Omega\text{m}}$	$\frac{\varrho_{\text{multi}}}{\text{n}\Omega\text{m}}$	$\frac{\varrho_{\text{tab}}}{\text{n}\Omega\text{m}}$
wolfram	$66 \pm 1,6$	$57,1 \pm 1,6$	$55,5 \pm 1,3$	$55,5 \pm 1,3$	$53,6 \pm 0,1$
měď	$52,2 \pm 0,5$	$17,7 \pm 0,5$	$17,2 \pm 0,1$	$17,1 \pm 0,2$	$16,9 \pm 0,1$
kanthal	1360 ± 40	1358 ± 40	1360 ± 40	1360 ± 40	1400 ± 100
železo	210 ± 7	207 ± 7	207 ± 7	207 ± 7	$99,6 \pm 0,1$
mosaz	$74 \pm 1,3$	$67,3 \pm 1,3$	$67,1 \pm 1,1$	$67,2 \pm 1,1$	75 ± 1
chromnikl	1050 ± 20	1030 ± 20	1030 ± 20	1030 ± 20	1100 ± 100

V tabulce 5 je ϱ_{Thom} měrný odpor naměřený Thomsonovým můstkem, ϱ_{Whea} je naměřen Wheatstoneovým můstkem, ϱ_{WhKor} je naměřen Wheatstoneovým můstkem s uvážením korekce na odpor přívodních kabelů a ϱ_{multi} je naměřený multimetrem. V posledním sloupci je tabulková hodnota [3] pro teplotu 20 °C, jako její nejistota je uvedena poslední cifra, se kterou je hodnota v tabulkách uvedena.

4 Diskuze výsledků

Z tabulky 5, kde jsou porovnané hodnoty naměřené jednotlivými metodami vidíme, že hodnoty naměřené thomsonovou metodou jsou téměř shodné s hodnotami naměřenými digitálním multimetrem. Tyto dvě metody jsou nejpřesnější a na výslednou nejistotu mají menší vliv, než nejistota měření rozměrů drátů. Wheatstonova metoda má po korekci také schodné výsledky v rámci nejistot. Ale bez korekce na odpor přívodních vodičů dává relativně dobré výsledky jen pro kanthal, železo a chromnikl, ostatní hodnoty jsou systematicky

⁴Jeho nejistota byla vypočítána jako $\sigma_e^2 = \frac{R^2 S^2}{l^2} \left(\frac{\sigma_S^2}{S^2} + \frac{\sigma_R^2}{R^2} + \frac{\sigma_l^2}{l^2} \right)$

posunuty do vyšších hodnot. To je z toho důvodu, odpory těchto tří drátů jsou vyšší, než $1\ \Omega$ (dráty mají malý poloměr) a proto se tolik neuplatní odpor přírodních vodičů.

Při porovnání s tabulkovými hodnotami dostáváme pro wolfram, měď, kanthal a chromnikl shodu v rámci nejistot měření. Avšak pro mosaz je naměřená hodnota o 10 % menší, než hodnota tabulková a naměřená hodnota železa je dokonce o 208 % vyšší.

Laboratorní teplotu můžeme považovat za konstantní, ale teplota drátů se může během měření měnit, protože jsou zahřívány procházejícím proudem. Odporový normál R_N by měl zaručovat konstantní odpor a měl by být konstruovaný tak, aby se nezahříval, jeho změnu odporu tedy můžeme bezpečně zanedbat. Odpory uvnitř můstku mohli být též zahřívány procházejícím proudem. Těmto změnám teploty jsme se snažili vyhnout zapojováním můstku jen na dobu nezbytně nutnou pro nastavení správného odporu na odporové dekádě.

Galvanometrem má vyšší rozlišovací schopnosti, když jím prochází vyšší proud, proto jsme se pokusili volit takovou hodnotu proudu (přibližně 250 mA), aby se dráty příliš nezahřívaly, ale abychom zároveň neztráceli přesnost měření na galvanometru.

5 Závěr

Byl změřen odpor šesti různých drátů třemi různými metodami (Wheatstoneův můstek, Thomsonův můstek a přesný digitální multimetr). Naměřené odpory jsou v posledním sloupci tabulek 1, 2 a 3 pro jednotlivé metody. Odpor přírodních vodičů a na svorkách byl určen Wheatstoneovým můstkem při zapojení naprázdno, tato hodnota je v tabulce 1.

Nakonec byly naměřeny rozměry drátů, jejich hodnoty jsou v tabulce 4 a byly vypočteny měrné odpory jednotlivých materiálů. Hodnoty vypočtené pomocí jednotlivých metod jsou porovnané v tabulce 5 i s tabulkovými hodnotami.

Pokud jsi dočetl moje praktikum až sem, gratuluji a řeš online.fyziklani.cz!

6 Seznam použité literatury

- [1] B. SEDLÁK, I. ŠTOLL. *Elektřina a magnetismus*. Praha: Academia, 2002
- [2] R. BAKULE, J. ŠTERNBERK. *Fyzikální praktikum II*. Praha: SPN, 1989.
- [3] J. MIKULČÁK, J. CHARVÁT, M. MACHÁČEK a F. ZEMÁNEK. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003
- [4] BROŽ, J. a KOL. *Základy fyzikálních měření I*. 1. vyd. Praha: SPN, 1983, 669 s.