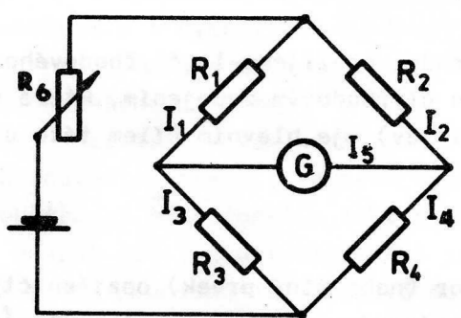


1 Pracovní úkoly

1. Změřte průměry šesti drátů na pracovní desce.
2. Změřte odpor šesti drátů Wheatstoneovým a Thomsonovým můstkem Metra - MTW. Vysvětlete rozdíly ve výsledcích měření. Současně určete odpor přívodních vodičů a odpor na svorkách v případě měření Wheatstoneovým můstkem.
3. Změřte odpory ve čtyřbodovém zapojení pomocí multimetru KEITHLEY 2010.
4. Určete měrný odpor jednotlivých vzorků i s příslušnou chybou výsledku. Stanovené hodnoty porovnejte s hodnotami uváděnými v tabulkách.

2 Teoretická část

Malé odpory můžeme měřit pomocí Wheatstonova můstku, který je zobrazen na obrázku 1 [1]



Obrázek 1: Wheatstoneův můstek

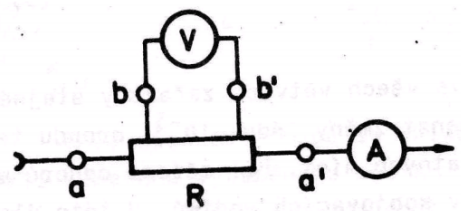
Během měření budeme pracovat s můstkem Metra - MTW, který používá značení odporů $R_1 = X$, $R_2 = R$, $R_3 = a$ a $R_4 = b$. Pokud v tomto zapojení teče galvanometrem G nulový proud, tak pro měřený odpor X platí rovnice

$$X = \frac{a}{b} R \quad (1)$$

Odpory a , b nastavíme tak, abychom mohli využít všech míst na pětimístné dekádě R a upravujeme odpor R , dokud nebude výchylka na galvanometru nulová.

Vodiče se průchodem proudu zahřívají, a tak je vždy třeba měřit co nejkratší dobu. Měření je také ovlivněno systematickou chybou způsobenou odpory přívodních vodičů a odpory na svorkách, které v případě, kdy měříme malé odpory, nemusí být zanedbatelné.

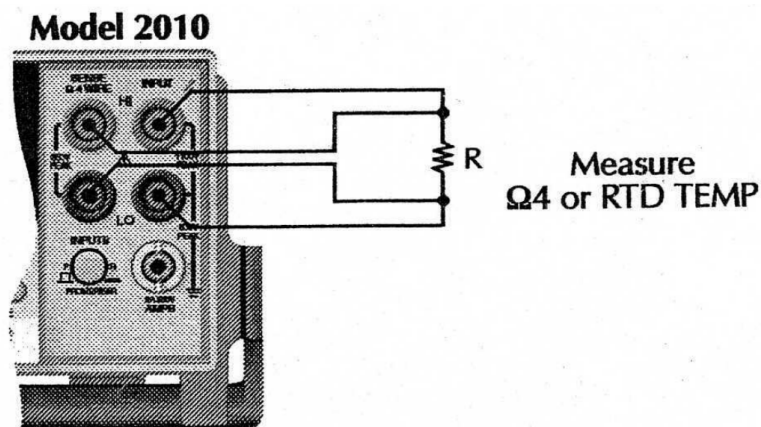
Vliv přívodních vodičů můžeme eliminovat, pokud budeme měřit při čtyřbodovém zapojení rezistoru, které je znázorněno na obrázku 2. [1]



Obrázek 2: Čtyřbodové zapojení rezistoru

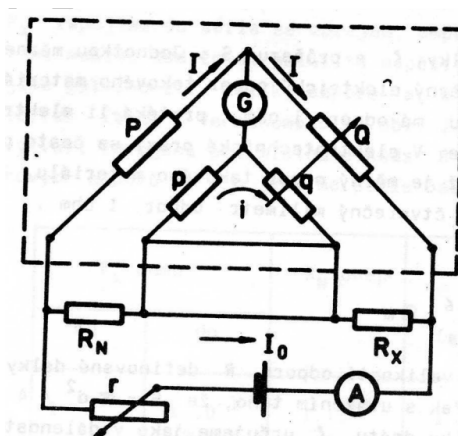
Rezistor musí mít čtyři kontakty. Vnější kontakty jsou zapojené sériově se zdrojem a mezi vnitřními kontakty se měří napětí. Pokud je odpor použitého voltmetru mnohonásobně větší než měřený odpor, tak se odpory přívodních vodičů v tomto zapojení vůbec neprojeví.

Čtyřbodovou metodou můžeme měřit odpory rezistorů přímo pomocí přesného multimetru. My použijeme multimetr KEITHLEY 2010, jehož zapojení je zobrazeno na obrázku 3. [1]



Obrázek 3: Multimetr KEITHLEY 2010

Ve čtyřbodovém zapojení však můžeme odpory měřit také můstkovou metodou pomocí Thomsonova můstku, který je znázorněn na obrázku 4. [1]



Obrázek 4: Thomsonův můstek

Abychom měřili čtyřbodovou metodou, tak je třeba zapojit vnitřní kontakty rezistorů R_N a R_X na odpory P, p, Q, q a vnější kontakty sériově se zdrojem, což na obrázku 4 není vyznačeno. Pokud v tomto zapojení prochází galvanometrem G nulový proud a platí podmínka $p/P = q/Q$, tak můžeme měřený odpor R_X vyjádřit jako [1]

$$R_X = \frac{Q}{P} R_N \quad (2)$$

kde R_N je odpor použitého normálu.

Dráty, které budeme měřit, mají délku l a jsou kruhového průřezu o průměru d , takže pokud změříme jejich odpor R , můžeme vypočítat jejich měrný elektrický odpor

$$\rho = \frac{\pi R d^2}{4l} \quad (3)$$

3 Výsledky měření

V místnosti byla naměřena teplota $22,5^\circ\text{C}$. Během měření však vodiči procházel proud a zahřívaly se, takže nemohu tvrdit, že jejich teplota byla přesně rovna pokojové teplotě. Snažil jsem se, aby vodiči procházel proud vždy co nejkratší dobu, ale systematickou chybu způsobenou zahříváním jsem tak určitě zcela neeliminoval.

Délky drátů jsem změřil posuvným měřidlem s nejmenším dílkem $0,1\text{ cm}$, jelikož však dráty nebyly přesně rovné a přímo napnuté mezi kontakty, tak počítám s chybou $\sigma_l = 0,1\text{ cm}$. Pro všechny dráty jsem naměřil hodnotu $l = (89,8 \pm 0,1)\text{ cm}$.

Průměry drátů jsem změřil pomocí mikrometru s nejmenším dílkem $0,01\text{ mm}$. Pro každý drát jsem změřil jeho průměr celkem pět krát, vždy na různém místě, a vypočítal aritmetický průměr \bar{d} , který je uveden v tabulce 1. Chybu výsledku jsem určil podle vzorce:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} + \sigma_P^2 \quad (4)$$

kde počítám s chybou měřícího přístroje $\sigma_P = 0,01\text{ mm}$. Jelikož se v rámci chyby měření naměřené hodnoty d_i moc neměnily, tak byla statistická chyba zanedbatelná a pro všechny dráty vyšlo $\sigma_d = 0,01\text{ mm}$.

Tabulka 1: Rozměry použitých drátů

drát	$\frac{d}{mm}$	$\frac{\sigma_d}{mm}$	$\frac{l}{cm}$	$\frac{\sigma_l}{cm}$
wolfram	0,68	0,01	89,8	0,1
měď	1,34	0,01	89,8	0,1
kanthal	0,49	0,01	89,8	0,1
železo	0,40	0,01	89,8	0,1
mosaz	0,58	0,01	89,8	0,1
chromnikl	0,99	0,01	89,8	0,1

3.1 Wheatstoneův můstek

Pro změření odporů drátů Wheatstoneovým můstkem jsem použil můstek Metra - MTW. Obvod byl zapojen podle obrázku 1. Použil jsem laboratorní zdroj STATRON 2229 a galvanometr MG5. Odporová dekáda R umožňovala nastavit odpory 1000, 10, 1 a 0,1 Ω . Odpory na můstku měly na štítku uvedenou chybu $\pm 0,1\%$ pro nejmenší rozsah a 0,02% pro ostatní. Odpor a jsem nastavil na hodnotu $a = (1,0000 \pm 0,0002) \Omega$ a odpor b na hodnotu $b = (1000,0 \pm 0,2) \Omega$.

Pro každý z šesti drátů jsem pak určil odpor R , pro který protékal nulový proud galvanometrem. Pro malé odpory je chyba měření tohoto odporu σ_R dána nejmenším dílkem na odporové dekádě, tedy 0,1 Ω . Pro větší odpory, tedy železo, kanthal a chromnikl, jsem ji určil jako nejmenší dílek na odporové dekádě, pro který jsem byl schopen zaregistrovat změnu na galvanometru.

Odpor X byl spočítán podle rovnice (1) a chyba ze zákona šíření chyb jako

$$\sigma_X = \frac{a}{b} \sigma_R \quad (5)$$

Jelikož se však při tomto měření projevují odpory přírodních vodičů, tak jsem spojil konce jednotlivých přírodních vodičů ve Wheatsonově můstku bez zapojení měřených drátů a určil jím odpovídající odpor na odporové dekádě $R_p = (23,0 \pm 0,1) \Omega$. Odpor přírodních vodičů a odpor na svorkách nebude pro každé měření přesně rovno R_p , ale mohu aspoň přibližně změřené hodnoty korigovat a skutečný odpor drátů určit jako

$$X_k = \frac{a}{b} (R - R_p) \quad (6)$$

a jeho chybu

$$\sigma_{X_k} = X_k \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R - R_p}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{R_p}}{R - R_p}\right)^2} \quad (7)$$

změřené hodnoty R a vypočítané hodnoty X a X_k jsou uvedeny v tabulce 2 společně s jejich směrodatnými odchylkami.

Tabulka 2: Wheatstoneův můstek

drát	$\frac{R}{\Omega}$	$\frac{\sigma_R}{\Omega}$	$\frac{X}{m\Omega}$	$\frac{\sigma_X}{m\Omega}$	$\frac{X_k}{m\Omega}$	$\frac{\sigma_{X_k}}{m\Omega}$
wolfram	164,5	0,1	164,5	0,1	141,5	0,1
měď	34,3	0,1	34,3	0,1	11,3	0,1
kanthal	6261	1	6261	2	6238	2
železo	1500,7	0,2	1500,7	0,5	1477,7	0,5
mosaz	245,0	0,1	245,0	0,1	222,0	0,2
chromnikl	1203,7	0,2	1203,7	0,4	1180,7	0,4

3.2 Thomsonův můstek

Pro změření odporů Thomsonovým můstkem jsem můstek Metra - MTW přepojil podle obvodu na obrázku 4. Použil jsem čtyřbodové zapojení tak, jak bylo popsáno v teorii. Zapojil jsem stejný zdroj a galvanometr jako v případě Wheatstoneova můstku. Jako normál jsem zapojil odpor $R_N = 0,1 \Omega$ a tuto hodnotu považuji za přesnou. Výrobce můstku byla zajištěna platnost podmínky $p/P = q/Q$. Jako odpor P jsem zapojil buď $(1000,0 \pm 0,2) \Omega$ nebo $(100,00 \pm 0,02) \Omega$, tak aby mi stačil rozsah pro měření zapojeného drátu a odpor Q jsem nastavoval na pětimístné odporové dekádě.

Postupně byly pro všech šest drátů změřeny odpory Q a P , pro které protékal galvanometrem nulový proud. Odpor R_N se neměnil. Jelikož se ve čtyřbodovém zapojení neprojeví odpory přívodních vodičů, tak nebylo nutné provádět žádnou korekci. Odpor drátů pak byl určen podle rovnice (2) a chyba výsledku ze zákona šíření chyb

$$\sigma_{R_X} = R_X \sqrt{\left(\frac{\sigma_Q}{Q}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_P}{P}\right)^2} \quad (8)$$

kde chyba σ_Q byla určena obdobně jako v případě Wheatstoneova můstku, tedy pro malé odpory byla rovna nejmenšímu dílku na dekádě $0,1 \Omega$ a pro větší odpory byla rovna nejmenšímu dílku na dekádě, pro který jsem byl schopen zaregistrovat změnu na galvanometru. Změřené hodnoty Q , P a vypočítané hodnoty R_X jsou uvedeny v tabulce 3.

Tabulka 3: Thomsonův můstek

drát	$\frac{Q}{\Omega}$	$\frac{\sigma_Q}{\Omega}$	$\frac{P}{\Omega}$	$\frac{\sigma_P}{\Omega}$	$\frac{R_X}{m\Omega}$	$\frac{\sigma_{R_X}}{m\Omega}$
wolfram	1374,0	0,1	1000	0,2	137,40	0,03
měď	107,8	0,1	1000	0,2	10,78	0,01
kanthal	6240	2	100	0,02	6240	2
železo	1487,5	0,2	100	0,02	1477,5	0,4
mosaz	2205,9	0,1	1000	0,2	220,59	0,05
chromnikl	1179,6	0,2	100	0,02	1179,6	0,3

3.3 Multimetr KEITHLEY 2010

Nakonec byly odpory drátů změřeny ve čtyřbodovém zapojení přímo pomocí multimetru KEITHLEY 2010. Dráty byly k přístroji připojeny podle obrázku 3. Měřil jsem na nejmenším možném rozsahu přístroje 10Ω , na kterém je podle přiložených materiálů chyba měření 100 ppm z hodnoty a 10 ppm z rozsahu. Výsledky měření jsou uvedeny v tabulce 4.

Tabulka 4: Multimetr KEITHLEY

drát	$\frac{R}{m\Omega}$	$\frac{\sigma_R}{m\Omega}$
wolfram	137,1	0,1
měď	10,7	0,1
kanthal	6242,0	0,7
železo	1476,7	0,2
mosaz	220,7	0,1
chromnikl	1180,3	0,2

3.4 Měrný elektrický odpor

Z naměřených hodnot jsem vypočítal měrné elektrické odpory drátů podle rovnice (3). Použil jsem naměřené odpory X_k ve Wheatstonově můstku a výsledek označil jako ρ_W . Obdobně ρ_T , resp. ρ_K značí měrný elektrický odpor, který byl vypočítán z odporů měřených Thomsonovým můstkem, resp. multimetrem KEITHLEY. Chyba byla určena ze zákona šíření chyb dle rovnice

$$\sigma_\rho = \rho \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2} \quad (9)$$

Vypočítané hodnoty jsou uvedeny v tabulce 5.

Tabulka 5: Měrný elektrický odpor drátů

drát	$\frac{\rho_W}{10^{-6}\Omega m}$	$\frac{\sigma_{\rho_W}}{10^{-6}\Omega m}$	$\frac{\rho_T}{10^{-6}\Omega m}$	$\frac{\sigma_{\rho_T}}{10^{-6}\Omega m}$	$\frac{\rho_K}{10^{-6}\Omega m}$	$\frac{\sigma_{\rho_K}}{10^{-6}\Omega m}$
wolfram	0,057	0,002	0,055	0,002	0,055	0,002
měď	0,0176	0,0003	0,0168	0,0003	0,0167	0,0003
kanthal	1,31	0,05	1,31	0,05	1,31	0,05
železo	0,21	0,01	0,21	0,01	0,21	0,01
mosaz	0,066	0,002	0,066	0,002	0,066	0,002
chromnikl	1,02	0,02	1,02	0,02	1,02	0,02

Pro porovnání uvádím tabelované hodnoty měrných elektrických odporů příslušných kovů v tabulce 6. Hodnoty jsou uváděny pro teplotu $20^\circ C$. Pro čisté železo je v tabulkách uváděna hodnota $0,098 \cdot 10^{-6} \Omega m^{[3]}$, což je výrazně odlišná hodnota od hodnoty naměřené pro drát označený "železo", proto v tabulce 6 uvádím typický rozsah měrného elektrického odporu oceli.

Tabulka 6: Tabelované hodnoty měrného elektrického odporu

drát	$\frac{\rho}{10^{-6}\Omega m}$
wolfram	0,055 ^[2]
měď	0,0168 ^[2]
kanthal	1,45 ^[4]
železo	0,1 – 0,2 ^[3]
mosaz	0,075 ^[4]
chromnikl	1,1 ^[3]

4 Diskuse

Relativní chyba výsledných měrných elektrických odporů uvedených v tabulce 5 je poměrně velká, což bylo především způsobeno měřením průměru drátů. Jelikož však průměry byly měřeny mikrometrem s nejmenším dílkem $0,01\text{ mm}$ a průměry drátů byly řádově $0,1\text{ mm}$, tak je toto měření zatíženo poměrně velkou relativní chybou. Pro větší přesnost by bylo třeba měřit průměry drátů jiným způsobem, který by nám dovolil měřit s větší přesností.

Přesnost měření měrného elektrického odporu bychom také mohli zvýšit, kdybychom pracovali s dráty, které by byly napjaté rovně mezi kontakty, nebyly by různě prohnuté a měly přesný kruhový průřez. Všechny tyto faktory mohly ovlivnit přesnost měření jejich průměru d a jejich délky l .

Odpory změřené Wheatstoneovým můstkem byly částečně ovlivněny ohříváním vodičů. Můstek Metra - MTW měl zapojený spínač, který nám dovoľoval zapínat proud drátem pouze na krátké intervaly, ale zahřívání vodičů se nedalo zcela zabránit. Jelikož se však tato chyba špatně odhaduje, tak pro ní nebyla provedena žádná korekce. Je tedy možné, že naměřené odpory uvedené v tabulce 2 jsou vyšší než hodnota odporu drátů za pokojové teploty. To platí i pro odpor přírodních vodičů R_p .

Měření odporů Wheatstoneovým můstkem je ovlivněno odpory přírodních vodičů a odpory na svorkách. Pro tuto systematickou chybu byla provedena korekce, jak bylo popsáno dříve, podle rovnice (6). Je ovšem možné, že odpor R_p se liší pro měření jednotlivých drátů v závislosti na tom, jak přesně jsou přírodní vodiče k drátům připojeny. Určení skutečného odporu drátů X_k je tedy stále zatíženo systematickou chybou, která je způsobena především odporem na svorkách.

Při měření odporů Thomsonovým můstkem procházel vodiči proud neustále, a tak jejich ohřívání mohlo mít ještě větší vliv než při měření Wheatstoneovým můstkem, i když jsem se snažil měřit s malým proudem a co nejrychleji. Pro tuto chybu žádná korekce provedena nebyla, a proto opět platí, že naměřené hodnoty R_X uvedené v tabulce 3 budou větší než odpory drátů za pokojové teploty.

Když porovnáme hodnoty odporů drátů naměřené Wheatstoneovým můstkem, Thomsonovým můstkem a multimetrem KEITHLEY, tak si v rámci chyby měření odpovídají. Nejvíce se odchylují hodnoty naměřené Wheatstoneovým můstkem, především pro wolfram a měď, což bylo pravděpodobně způsobeno odpory na svorkách. Měření multimetrem KEITHLEY a měření Thomsonovým můstkem se dobře shodují a případné rozdíly byly s největší pravděpodobností způsobeny zahříváním vodičů v Thomsonově můstku.

Jelikož chyba určení měrného elektrického odporu závisí především na chybě průměru, tak všechny tři měření dávají v rámci chyby měření stejnou hodnotu měrného elektrického odporu, jak je vidět z hodnot v tabulce 5. Naměřené hodnoty měrného elektrického odporu pro wolfram, měď a železo se shodují s tabelovanými hodnotami uvedenými v tabulce 6. Pro ostatní dráty se naměřené hodnoty neshodují s tabelovanými. Neznáme však přesné složení drátů z kanthalu, mosazi a chromniklu, a jelikož měrný odpor je výrazně ovlivněn příměsemi a závisí také na mechanickém a tepelném zpracování, tak to pravděpodobně způsobilo neshodu s tabelovanými hodnotami.

5 Závěr

Odpory drátů z wolframu, mědi, kanthalu, železa, mosazi a chromniklu byly změřeny třemi různými metodami - Wheatstoneovým můstkem, Thomsonovým můstkem a multimetrem KEITHLEY přímo. V rámci chyby měření se výsledky shodovaly. Byla také určena jejich délka, průměr a vypočítán jejich měrný elektrický odpor.

6 Seznam použité literatury

- [1] Měření malých odporů. Fyzikální praktikum [online]. [cit. 30-11-2018]. https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_204.pdf
- [2] Resistivity of metals. The Physics Factbook. [online]. [cit. 30-11-2018]. <https://hypertextbook.com/facts/2004/DeannaStewart.shtml>
- [3] Konstanty a hodnoty důležitých veličin. Elektross. [online]. [cit. 30-11-2018]. <http://elektross.gjn.cz/konstanty.html>
- [4] Měrný odpor. conVERTER. [online]. [cit. 30-11-2018]. <http://www.converter.cz/tabulky/merny-odpor.htm>