

Pracovní úkoly

1. Změřte průměry šesti drátů na pracovní desce.
2. Změřte odpor šesti drátů Wheatstoneovým a Thomsonovým můstkem Metra - MTW. Vysvětlete rozdíly ve výsledcích měření. Současně určete odpor přívodních vodičů a odpor na svorkách v případě měření Wheatstoneovým můstkem.
3. Změřte odpory ve čtyřbodovém zapojení pomocí multimetru KEITHLEY 2010.
4. Určete měrný odpor jednotlivých vzorků i s příslušnou chybou výsledku. Stanovené hodnoty porovnejte s hodnotami uváděnými v tabulkách.

Teoretická část

Wheatstoneův můstek

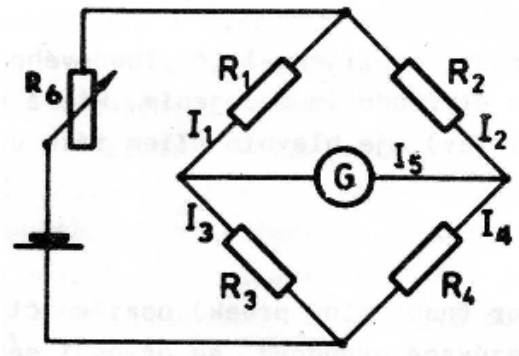
Pro přesné měření odporů lze využít Wheatstoneův můstek, který je schématicky znázorněn na obrázku 1. Pokud galvanometrem G teče nulový proud, je můstek v rovnováze a platí

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \quad (1)$$

Pomocí tří známých odporů tedy můžeme určit měřený odpor R_1

$$R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4}. \quad (2)$$

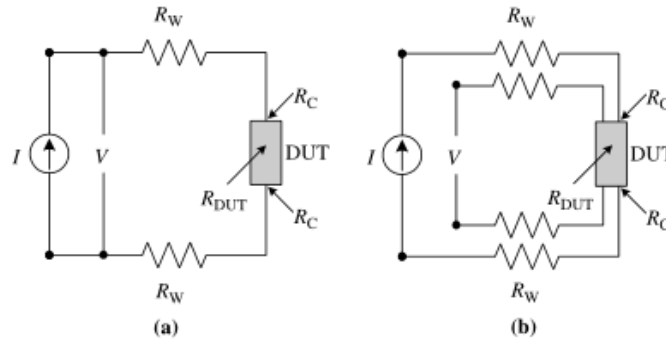
Odpor R_6 slouží k nastavení velikosti proudu a tedy regulaci citlivosti měření. Největší citlivosti můstku dosáhneme, když jsou ve všech větvích zařazeny stejné hodnoty odporů. Měření malých odporů (řádově $< 10^0 \Omega$) je ovlivněno odporem přívodních vodičů a jejich kontaktním odporem. Čím menší odpor měříme, tím větší vzniká relativní systematická chyba.¹



Obr. 1 Wheatstoneův můstek.

Čtyřbodová metoda

Měření čtyřbodovou metodou (obrázek 2b) vyloučíme odpor přívodů k proudovým kontaktům R_W a přechodový odpor R_C . Vysoký vnitřní odpor na voltmetru V (oproti měřeným odporům) způsobí průtok jen velmi malého proudu a tedy i malé úbytky napětí na větvi s voltmetrem, které můžeme na rozdíl od dvoubodového měření (obrázek 2a) zanedbat.²



Obr. 2 (a) Zapojení pro dvoubodové měření (b) Zapojení pro čtyřbodové měření

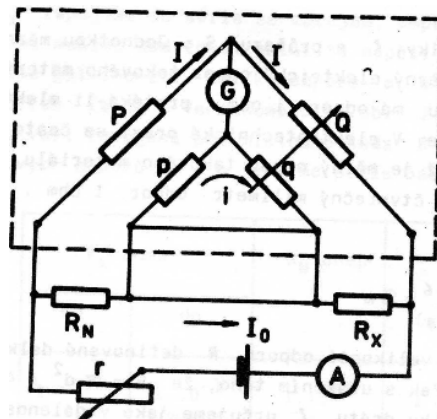
Thomsonův můstek

Měření Thomsonovým můstkem (obrázek 3) kombinuje obě metody. Vnější spojky připojíme na proudovou větev, vnitřní spojky do můstku (zapojení tedy odpovídá čtyřbodovému), díky řádově mnohem vyššímu odporu v můstku pak dochází k zanedbatelným úbytkům napětí a měření není zatíženo popsanou systematickou chybou. Pokud platí

$$\frac{P}{p} = \frac{Q}{q}, \quad (3)$$

a galvanometrem neprochází žádný proud (můstek je tedy v rovnováze), lze měřený odpor R_X určit pomocí vzorce¹

$$R_X = \frac{Q}{P} R_N. \quad (4)$$



Obr. 3 Thomsonův můstek

Měrný elektrický odpor

Měrný elektrický odpor (resistivita) ρ je definovaný jako

$$\rho = \frac{RS}{l}, \quad (5)$$

R je odpor vodiče délky l a průřezu S . Pro vodič kruhového průřezu nahrazujeme

$$S = \frac{\pi d^2}{4}. \quad (6)$$

Měrný elektrický odpor je materiálová konstanta popisující schopnost bránit transportu náboje bez ohledu na geometrické vlastnosti.¹

Výsledky měření**Laboratorní podmínky**

Teplota v místnosti byla změřena jako $T_{RT} = (24,0 \pm 0,4)^\circ\text{C}$, v průběhu měření ale nebyla zajištěna její neměnnost.

Měření odporu

Pro měření můstkovými metodami byl použit laboratorní Thomsonův-Wheatstoneův můstek. Při měření Wheatstoneovým můstkem je odpor R_2 (na přístroji označený jako R) tvořen pětimístným dekádovým odporem a za odpory R_3 (na přístroji a) a R_4 (na přístroji b) můžeme volit hodnoty 1, 10, 100 a 1000 Ω . Měřený odpor je na přístroji označen jako R_X . Nejistota odporů v laboratorním můstku je 0,2%.

Byly použity hodnoty $R_3 = a = (1 \pm 0,0002)\Omega$ a $R_4 = b = (1000 \pm 0,02)\Omega$. Na pětimístné dekádě byl následně nalezen takový odpor, aby byla splněna podmínka rovnováhy můstku. Podle (2) byly dopočteny odpory jednotlivých drátů a odpor kontaktů (měřením „na prázdno“).

Tabulka 1. Hodnoty odporů určené pomocí Wheatstoneova můstku

	R_X [Ω]	σ_{R_X} [Ω]
Wolfram	0,2472	0,0005
Měď	0,1166	0,0002
Kanthal	6,34	0,01
Železo	1,591	0,003
Mosaz	0,3314	0,0007
Chromnikl	1,288	0,003
Odpor kontaktů	0,1233	0,0002

Chyba byla určena podle

$$\sigma_{R_X} = R_X \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2}.$$

Odečtením odporu kontaktů od odporů změřených Wheatstoneovým můstkem můžeme provést korekci naměřených hodnot.

Tabulka 2: Hodnoty odporů podle Wheatstoneova můstku po korekci odporu přívodních vodičů

	R_{W-kor} [Ω]	$\sigma_{R_{W-kor}}$ [Ω]
Wolfram	0,1239	0,0007
Měď	-0,0067	0,0004
Kanthal	6,2172	0,01
Železo	1,4676	0,003
Mosaz	0,2081	0,0009
Chromnikl	1,1644	0,003

Záporná hodnota odporu mědi po korekci odporu přívodních vodičů ukazuje, že se zřejmě stále dopouštíme systematické chyby, jedná se pravděpodobně o teplotní závislost rezistivity a zahřívání vodičů.

Při měření Thomsonovým můstkem je podmínka (3) zajištěna výrobcem, na dekádě nastavujeme odpor Q , odpor P můžeme volit mezi hodnotami 1, 10, 100 a 1000 Ω a odpor $R_N = 0,1 \Omega$ je zprostředkován odporovým normálem. Podle (4) byly dopočteny hodnoty měřených odporů.

Tabulka 3: Hodnoty odporů změřené Thomsonovým můstkem

	P [Ω]	R_X [Ω]	σ_{R_X} [Ω]
Wolfram	1000	0,1390	0,0001
Měď	1000	0,0111	0,0001
Kanthal	100	6,250	0,002
Železo	100	1,500	0,001
Mosaz	1000	0,2220	0,0001
Chromnikl	100	1,185	0,001

Chyba byla určena podle

$$\sigma_{R_X} = R_X \sqrt{\left(\frac{\sigma_Q}{Q}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_P}{P}\right)^2},$$

chybu normálu zanedbáváme (je v řádu $10^{-5} \Omega$), pro chybu hodnoty P platí $\sigma_P = 0,2\%$ z hodnoty a pro chybu hodnoty Q bereme $\sigma_Q = 1 \Omega$, kvůli menší citlivosti měření a zahřívání obvodu.

Dále byl odpor měřen pomocí přístroje KEITHLEY 2010 čtyřbodovou metodou. Zapojení bylo podle obrázku 2b. Měřeno bylo na rozsahu 10 Ω , chyba měření je 100 ppm z hodnoty + 10 ppm z rozsahu.

Tabulka 4: Hodnoty odporů naměřené pomocí KEITHLEY 2010

	$R [\Omega]$	$\sigma_R [\Omega]$
Wolfram	0,1385	0,0001
Měď	0,0110	0,0001
Kanthal	6,2410	0,0007
Železo	1,4829	0,0002
Mosaz	0,2211	0,0001
Chromnikl	1,1789	0,0002

Tyto hodnoty budeme používat v dalších výpočtech resistivity.

Resistivita

Pro určení resistivity byla nejprve určena délka drátů jako $l = (89,8 \pm 0,3) \text{ cm}$ pro všechny dráty, chyba byla odhadnuta – na aparatuře nešlo přímo určit umístění kontaktů, jako místo kontaktu tedy předpokládáme rysku na aparatuře. Dále byly určeny průměry drátů pomocí mikrometru. Předpokládáme-li jejich kruhový průřez, kombinací vzorců (5) a (6) dostáváme resistivitu jednotlivých materiálů.

Tabulka 5: Naměřené průměry drátů – průměr pěti naměřených hodnot a chyba měření

	$d [\text{mm}]$	$\sigma_d [\text{mm}]$
Wolfram	0,67	0,01
Měď	1,34	0,01
Kanthal	0,50	0,01
Železo	0,40	0,01
Mosaz	0,58	0,01
Chromnikl	1,00	0,01

Tabulka 6: Naměřené hodnoty resistivity a porovnání s tabulkovými hodnotami^{3,4}

	$\rho [10^{-8} \cdot \Omega \text{ m}]$	$\sigma_\rho [10^{-8} \cdot \Omega \text{ m}]$	$\rho_{\text{tabul}} [10^{-8} \cdot \Omega \text{ m}]$
Wolfram	5,5	0,1	5,3 ³
Měď	1,74	0,03	1,75 ⁴
Kanthal	138	8	140 ⁴
Železo	21	1	9,8 ⁴
Mosaz	6,6	0,2	7,5 ⁴
Chromnikl	102	2	110 ³

Chyba resistivity byla spočtena jako

$$\sigma_{\rho} = \rho \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2}.$$

Diskuze

Měření Wheatstoneovým můstkem se od měření můstkem Thomsonovým liší zejména kvůli kontaktnímu odporu a odporu vodičů. Další rozdíl vzniká díky teplotní závislosti resistivity (a tím i odporu), při měření Wheatstoneovým můstkem byl proud obvodem pouštěn vždy jen malý moment, při měření Thomsonovým můstkem procházel proud drátem neustále. Odpor měřený Thomsonovým můstkem byl tedy pravděpodobně měřen za vyšší teploty vodiče, čemuž by i odpovídaly vyšší hodnoty odporů než byly hodnoty odporů z Wheatstoneova můstku po korekci. U korekce měděného drátu dostáváme zápornou hodnotu odporu, což naznačuje že i měření odporu kontaktů bylo provedeno za teploty vyšší, než byla jejich teplota při měření odporů (v tabulkách jsou měření seřazena chronologicky). Pro vodiče s vyšším odporem by šla snížit chyba vzniklá teplotními změnami snížením proudu (tepelný výkon je dostatečně dobře dán vzorcem $P = R I^2$), tím by ale došlo ke snížení citlivosti měření. Teplotní změny na drátech při průchodu proudu očekáváme v řádu jednotek K. U normálu R_N nemusíme teplotní změny uvažovat, normály jsou konstruované pro minimální změny odporu vlivem vnějších jevů, pro odpory uvnitř laboratorního můstku můžeme předpokládat nějaké změny v teplotě a tím i vzniklou chybu pouze při měření Wheatstoneovým můstkem, při měření Thomsonovým šel do můstku velmi malý proud na výraznější změnu vodivých vlastností vlivem teploty.

Při měření přístrojem KEITHLEY 2010 byl odpor odečten krátce po zapojení obvodu, tím je chyba vzniklá teplotními změnami minimalizována. Zároveň tento přístroj poskytuje nejpřesnější měření z použitých metod, proto byly naměřené hodnoty použity pro výpočet resistivity.

Tabulkové hodnoty resistivity jsou pro vzorky při 20°C, což neodpovídá teplotě v laboratoři a zahřívání vlivem Jouleova tepla. Shoda s tabulkovými hodnotami je až na měď, železo a mosaz v rámci 3 směrodatných odchylek. U mědi je tato neshoda způsobena pravděpodobně právě teplotními vlivy, u železa a mosazi má vliv i jejich složení a nečistoty ve vzorku.

Závěr

Pomocí můstkových metod a čtyřbodové metody byly určeny odpory jednotlivých materiálů. Dále byly určeny příslušné resistivity

$$\rho_{\text{wolfram}} = (5,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-8} \Omega m$$

$$\rho_{\text{měď}} = (1,74 \pm 0,03) \cdot 10^{-8} \Omega m$$

$$\rho_{\text{kanthal}} = (138 \pm 8) \cdot 10^{-8} \Omega m$$

$$\rho_{\text{železo}} = (21 \pm 1) \cdot 10^{-8} \Omega m$$

$$\rho_{\text{mosaz}} = (6,6 \pm 0,2) \cdot 10^{-8} \Omega m$$

$$\rho_{\text{chromnikl}} = (102 \pm 2) \cdot 10^{-8} \Omega m$$

Rozdíly mezi měřením Wheatstoneovým můstkem a Thomsonovým můstkem byly způsobené odporem kontaktních vodičů. Na měření se dále negativně projevíly teplotní změny způsobené Jouleovým teplem.

Použité zdroje

[1] Bakule, R., Šternberk, J. : Fyzikální praktikum II., SPN, Praha, 1989.

[2] SCHRODER, Dieter K. Semiconductor material and device characterization / Dieter K. Schroder. Third Edition. 2006. ISBN 0471739065.

[3] Kekule, J. Konstanty a hodnoty důležitých veličin. Dostupné online na <http://elektross.gjn.cz/konstanty.html> [cit. 2018-10-20].

[4] Kolektiv conVERTER. Měrný odpor. Dostupné online na <http://www.converter.cz/tabulky/merny-odpor.htm> [cit. 2018-10-20].