

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

ZÁKLADNÍ FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM

FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM II.  
PRO OBOR OBECNÁ FYZIKA

---

## **IV. Meranie malých odporov**

---

*Autor:*  
Samuel Kočiščák

19. októbra 2016

## 1 Pracovné úlohy

1. Zmerajte priemery šiestich drôtov na pracovnej doske.
2. Zmerajte odpor šiestich drôtov Wheatsonovym a Thomsonovym mostíkom Metra-MTW. Vysvetlite rozdiely vo výsledkoch merania. Súčasne určite odpor prívodných vodičov a odpor na svorkách v prípade merania Wheatsonovym mostíkom.
3. Zmerajte odpory v štvorbodovom zapojení pomocou multimetra KEITHLEY 2010.
4. Určite merný odpor jednotlivých vzoriek aj s príslušnou chybou výsledku. Stanovené hodnoty porovnajte s hodnotami uvedenými v tabuľkách.

## 2 Teoretická časť

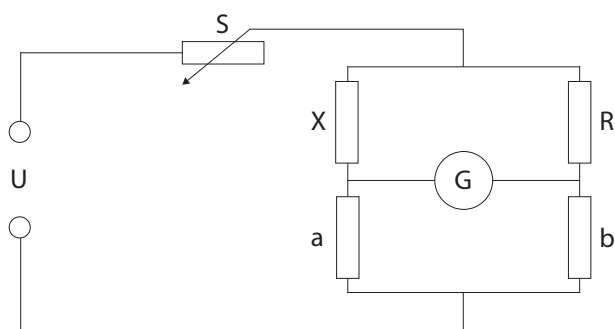
### 2.1 Wheatstonov mostík

Wheatstonov mostík je zapojenie, ktoré využíva dva paralelné deliče napätia tak, ako na obrázku 1. Hodnotu neznámeho odporu  $X$  zistíme vyvážením mostíka - nastavením rovnakého deliaceho pomeru (napríklad úpravou hodnoty odporu  $R$ ) na oboch paralelných deličoch napätia. Mostík je vyvážený, ak galvanometrom  $G$  netečie prúd, vtedy musí byť deliaci pomer oboch deličov napätia rovnaký, a teda (podľa [St]) musí platiť:

$$\frac{X}{a} = \frac{R}{b} \quad (1)$$

z čoho možno ručiť hodnotu neznámeho odporu  $X$ :

$$X = R \frac{a}{b} \quad (2)$$



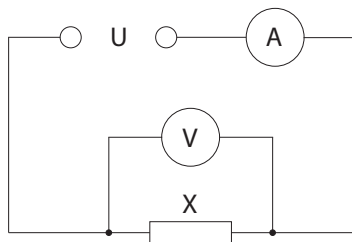
Obr. 1: Meranie neznámeho odporu Wheatstonovym mostíkom

## 2.2 Štvorbodová metóda

Pri meraní odporu štvorbodovou metódou (ako na obrázku 2) určujeme prúd neznámym odporom (na obrázku 2 označenom  $X$ ) a napätový úbytok na ňom. Zdrojom zapojeným v obvode s neznámym odporom zabezpečíme počas merania nemenný prúd odporom  $X$ , ktorý určujeme ampérmetrom (na obrázku 2 označenom  $A$ ) zapojeným do série s týmto odporom. Na samostatné svorky umiestnené čím bližšie pri odpore  $X$  pripojíme voltmeter  $V$ . Voltmeter má veľký vnútorný odpor, teda odpor prívodných vodičov medzi neznámym odporom a voltmetrom je voči nemu zanedbateľný. Použitím Ohmovho zákona v tvare:

$$X = \frac{U}{I} \quad (3)$$

vieme z veľkosti prúdu  $I$  odporom a napätového úbytku  $U$  na ňom určiť jeho veľkosť  $X$ .



Obr. 2: Meranie neznámeho odporu štvorbodovou metódou

## 2.3 Thomsonov mostík

Meranie Thomsonovym mostíkom spája dve vyššie uvedené metódy. Základný princíp je, že medzi vonkajšími svorkami neznámeho odporu  $R_x$  necháme pretekať prúd a vnútorné svorky pripojíme do mostíka, ktorý vyvážíme. Možno to urobiť napríklad tak, ako ukazuje obrázok 3. Ak je mostík vyvážený (galvanometrom  $G$  netečie žiadny prúd), tak zjavne nemôže prúd tiecť ani odpormi  $p$  a  $q$ . Potom, podobne ako vo Wheatstonovom mostíku, platí (podľa [St]) rovnosť:

$$\frac{R_n}{R_x} = \frac{P}{Q} \quad (4)$$

A teda viem eurčiť neznámy odpor  $X$  ako:

$$R_x = R_n \frac{Q}{P} \quad (5)$$

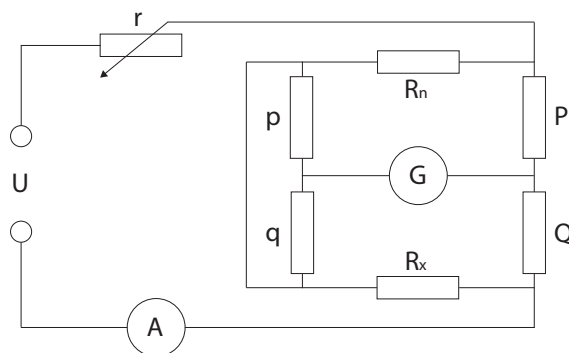
## 2.4 Merný elektrický odpor

Merný odpor  $\rho$  je veličinou popisujúcou materiál, z ktorého je (odporový) vodič vyrobený, bez ohľadu na jeho skutočné geometrické parametre. Zavádzame<sup>[5]</sup> ho ako:

$$\rho = \frac{R_X S}{l}, \quad (6)$$

kde  $l$  je dĺžka vodiča,  $S$  je plocha jeho prierezu (predpokladajúc, že táto je konštantou po celej dĺžke vodiča) a  $R_X$  jeho odpor. Ak je vodič kruhového prierezu s priemerom  $d$ , tak platí vzťah:

$$\rho = \frac{R_X \pi d^2}{4l}, \quad (7)$$



Obr. 3: Meranie neznámeho odporu Thomsonovým mostíkom

## 3 Výsledky merania

Meranie prebehlo v laboratóriu za okolitej teploty  $25,2^\circ\text{C}$ , tlaku vzduchu  $990\text{hPa}$  a relatívnej vlhkosti vzduchu  $36,5\%$ . Podmienky neboli nemenné, no okrem teploty nemali vplyv na meranie. Ku vplyvu teploty sa vrátíme v diskusii.

K dispozícii sme mali laboratórny Wheatstonov-Thomsonov mostík vybavený zdvojenou päťmiestnou dekadou a dvomi odpormi (na obrázku 1 označenými ako  $a$ ;  $b$ ) nastaviteľnými na hodnoty  $1\ \Omega$ ,  $10\ \Omega$ ,  $100\ \Omega$  alebo  $1000\ \Omega$  s presnosťou  $\pm 0,2\%$ .

### 3.1 Meranie Wheatstonovým mostíkom

Pri meraní Wheatstonovým mostíkom sme použili hodnotu  $a = 1 \pm 0,0002\ \Omega$  a  $b = 100 \pm 0,02\ \Omega$ . Na dekáde (na obrázku 1 označenej  $R$ ) sme menili odpor, a po každej zmene sme obvod na krátky čas zapojil a sledovali výchylku galvanometra  $G$ . Odpory sme menili kým galvanometer neprestal pri zapojení ukazovať výchylku. Tento bod bolo možné určiť len vyhľadávaním medzi hodnotami nastaviteľnými na dekáde, teda hodnota  $R$  je určená len s presnosťou na poslednú platnú cifru, čo nám

zároveň umožní zanedbať nepresnosť dekády, ktorá je oveľa nižšia, než jej posledná cifra.

Na výsledné určenie neznámeho odporu  $X$  sme využili vyššie odvodený vzťah 2, pričom odchýlku určenia odporu možno stanoviť zrejme ako:

$$\sigma_X^2 = \left(\frac{X}{R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{X}{a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{X}{b}\right)^2 \sigma_b^2 \quad (8)$$

Výsledky merania všetkých vodičov Wheatsonovým mostíkom (vrátane merania odporu prírodných vodičov - merania na prázdno) a merania korigovaného o odpor prírodných vodičov vidno v tabuľke 1:

Tabuľka 1: Meranie Whetsonovym mostíkom

|            | $a$ [ $\Omega$ ] | $b$ [ $\Omega$ ] | $R$ [ $\Omega$ ] | $X$ [ $\Omega$ ]  |
|------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|
| wolfram    | $1 \pm 0,0002$   | $100 \pm 0,02$   | $16,7 \pm 0,1$   | $0,167 \pm 0,001$ |
| meď        | $1 \pm 0,0002$   | $100 \pm 0,02$   | $4,2 \pm 0,1$    | $0,042 \pm 0,001$ |
| kanthal    | $1 \pm 0,0002$   | $100 \pm 0,02$   | $624,5 \pm 0,1$  | $6,245 \pm 0,001$ |
| železo     | $1 \pm 0,0002$   | $100 \pm 0,02$   | $150,9 \pm 0,1$  | $1,509 \pm 0,001$ |
| mosadz     | $1 \pm 0,0002$   | $100 \pm 0,02$   | $25,3 \pm 0,1$   | $0,253 \pm 0,001$ |
| chrómnikel | $1 \pm 0,0002$   | $100 \pm 0,02$   | $120,4 \pm 0,1$  | $1,204 \pm 0,001$ |
| na prázdno | $1 \pm 0,0002$   | $100 \pm 0,02$   | $2,4 \pm 0,1$    | $0,024 \pm 0,001$ |

V tabuľke 2 možno vidieť hodnotu odporu jednotlivých vodičov zistenú Wheatsonovým mostíkom korigovanú o odpor prírodných vodičov (z hodnôt z tabuľky 1):

Tabuľka 2: Korigované meranie Whetsonovym mostíkom

|            | $X_{korigovane}$ [ $\Omega$ ] |
|------------|-------------------------------|
| wolfram    | $0,143 \pm 0,002$             |
| meď        | $0,018 \pm 0,002$             |
| kanthal    | $6,221 \pm 0,002$             |
| železo     | $0,485 \pm 0,002$             |
| mosadz     | $0,229 \pm 0,002$             |
| chrómnikel | $0,180 \pm 0,002$             |

### 3.2 Meranie Štvorbodovou metódou

Pri meraní štvorbodovou metódou sme použili multimeter *KEITHLEY 2010*, ktorého presnosť určenia odporu je podľa výrobcu<sup>[KM]</sup> pri rozsahu do  $10 \Omega$  po roku od kalibrácie  $10^{-4} \Omega$ . Pri zapojení ako na obrázku 2 za použitia vzťahu 3 vieme určiť hodnotu  $X$  neznámeho odporu, túto hodnotu vidno v tabuľke 3:

Tabuľka 3: Meranie štvorbodovou metódou

|            | $R [\Omega]$        |
|------------|---------------------|
| wolfram    | $0,1392 \pm 0,0001$ |
| meď        | $0,0171 \pm 0,0001$ |
| kanthal    | $6,2330 \pm 0,0001$ |
| železo     | $1,4872 \pm 0,0001$ |
| mosadz     | $0,2215 \pm 0,0001$ |
| chrómnikel | $1,1795 \pm 0,0001$ |

### 3.3 Meranie Thomsonovym mostíkom

Pri meraní Thomsonovym mostíkom sme v prúdovom obvode nastavili prúd (napätím na zdroji a pomocou reostatu, na obrázku 3 označeného  $r$ ) približne 200mA, čo je prúd pri ktorom sa vodiče nemohli nezanedbateľne ohriať (k čomu sa vrátíme v diskusii). Výsledný odpor vodičov, ktorý možno vidieť v tabuľke 4 sme určili podľa vzťahu 5 a chybu preniesli podľa:

$$\sigma_{R_x}^2 = \left(\frac{R_x}{Q}\right)^2 \sigma_Q^2 + \left(\frac{R_x}{P}\right)^2 \sigma_P^2 + \left(\frac{R_x}{R_n}\right)^2 \sigma_{R_n}^2 \quad (9)$$

Tabuľka 4: Meranie Thomsonovym mostíkom

|            | $Q [\Omega]$ | $P [\Omega]$   | $R_n [\Omega]$    | $R_x [\Omega]$    |
|------------|--------------|----------------|-------------------|-------------------|
| wolfram    | $1373 \pm 1$ | $1000 \pm 0,2$ | $0,1 \pm 10^{-5}$ | $0,137 \pm 0,001$ |
| meď        | $168 \pm 1$  | $1000 \pm 0,2$ | $0,1 \pm 10^{-5}$ | $0,017 \pm 0,001$ |
| kanthal    | $6234 \pm 1$ | $100 \pm 0,02$ | $0,1 \pm 10^{-5}$ | $6,234 \pm 0,001$ |
| železo     | $1491 \pm 1$ | $100 \pm 0,02$ | $0,1 \pm 10^{-5}$ | $1,491 \pm 0,001$ |
| mosadz     | $2198 \pm 1$ | $1000 \pm 0,2$ | $0,1 \pm 10^{-5}$ | $0,220 \pm 0,001$ |
| chrómnikel | $1180 \pm 1$ | $100 \pm 0,02$ | $0,1 \pm 10^{-5}$ | $1,180 \pm 0,001$ |

### 3.4 Určenie merného odporu

Na určenie merného odporu sme najprv zistili priemer drôtu (meraný na troch miestach, v tabuľke 5 uvádzame iba jedno číslo, všetky 3 možno nájsť v príložených poznámkach z merania) a jeho dĺžku (medzi vnútornými svorkami). Na určenie priemeru drôtu sme použili mikrometer, na určenie dĺžky pásmo. Namerané hodnoty priemeru  $d$ , dĺžky  $l$ , hodnoty odporu  $R_x$  určené meraním Thomsonovym mostíkom a výsledný merný odpor  $\rho$  určený podľa 7 jednotlivých vodičov možno vidieť v tabuľke 5. Chybu sme preniesli ako:

$$\sigma_\rho^2 = \left(\frac{\rho}{R_x}\right)^2 \sigma_{R_x}^2 + \left(\frac{2\rho}{d}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{\rho}{l}\right)^2 \sigma_l^2 \quad (10)$$

Tabuľka 5: Určenie merného odporu

|            | $d$ [mm]        | $l$ [m]           | $R_X$ [ $\Omega$ ] | $\rho$ [ $\Omega m$ ]           |
|------------|-----------------|-------------------|--------------------|---------------------------------|
| wolfram    | $0,68 \pm 0,01$ | $0,899 \pm 0,001$ | $0,137 \pm 0,001$  | $(5,5 \pm 0,2) \cdot 10^{-8}$   |
| meď        | $1,10 \pm 0,01$ | $0,898 \pm 0,001$ | $0,017 \pm 0,001$  | $(1,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-8}$   |
| kanthal    | $0,49 \pm 0,01$ | $0,900 \pm 0,001$ | $6,234 \pm 0,001$  | $(1,30 \pm 0,05) \cdot 10^{-6}$ |
| železo     | $0,40 \pm 0,01$ | $0,901 \pm 0,001$ | $1,491 \pm 0,001$  | $(2,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-7}$   |
| mosadz     | $0,59 \pm 0,01$ | $0,899 \pm 0,001$ | $0,220 \pm 0,001$  | $(6,7 \pm 0,2) \cdot 10^{-8}$   |
| chrómnikel | $1,00 \pm 0,01$ | $0,900 \pm 0,001$ | $1,180 \pm 0,001$  | $(1,03 \pm 0,02) \cdot 10^{-6}$ |

V tabuľke 6 vidno porovnanie nameraných hodnôt  $\rho$  merného odporu s tabuľkovou hodnotou  $\rho_{tab}$  (wolfram, meď, kanthal a železo podľa [W], mosadz a chrómnikel podľa [C]):

Tabuľka 6: Porovnanie merného odporu s tabuľkovou hodnotou

|            | $\rho$ [ $\Omega m$ ]           | $\rho_{tab}$ [ $\Omega m$ ] |
|------------|---------------------------------|-----------------------------|
| wolfram    | $(5,5 \pm 0,2) \cdot 10^{-8}$   | $5,36 \cdot 10^{-8}$        |
| meď        | $(1,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-8}$   | $1,69 \cdot 10^{-8}$        |
| kanthal    | $(1,30 \pm 0,05) \cdot 10^{-6}$ | $1,4 \cdot 10^{-6}$         |
| železo     | $(2,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-7}$   | $0,9 \cdot 10^{-7}$         |
| mosadz     | $(6,7 \pm 0,2) \cdot 10^{-8}$   | $7,5 \cdot 10^{-8}$         |
| chrómnikel | $(1,03 \pm 0,02) \cdot 10^{-6}$ | $1,08 \cdot 10^{-6}$        |

## 4 Diskusia výsledkov

Výsledky merania Wheatsonovým mostíkom sa líšia od výsledkov merania Thomsonovým mostíkom, resp. štvorbodovou metódou. Chybu pri meraní Wheatsonovým mostíkom spôsobuje odpor prívodných vodičov, ktorý je voči odporu samotného meraného vodiča nezanedbateľný. Po určení a následnom odčítaní odporu prívodných vodičov zapojením Wheatsonovho mostíka na prázdno (bez samotného meraného drôtu) sme však boli schopní získať dobrú zhodu medzi výsledkami merania Wheatsonovým mostíkom, Thomsonovým mostíkom a multimetrom v štvorbodovom zapojení. Najpresnejším z týchto meraní je meranie multimetrom štvorbodovou metódou.

Pri určovaní merného odporu jednotlivých materiálov sme dosiahli dobrú zhodu pre všetky materiály okrem železa, kde sme dosiahli iba rádovú zhodu s tabuľkovou hodnotou, čo však možno pripísať neznámemu zloženiu drôtu, keďže železo je dostupné v mnohých zliatinách.

Teplota v laboratórou nebola konštantná, no teplotný koeficient odporu je<sup>[C]</sup> pre všetky merané kovy menší než  $0,01 K^{-1}$ , teda zmena teploty o rádovo jednotky  $^{\circ}C$  má za následok zmenu odporu o rádovo percentá, čo je zhruba na úrovni presnosti nášho merania. Pre presnejšie meranie by sme museli zabezpečiť konštantnú známú teplotu v miestnosti.

Pri meraní použitý odporový normál  $R_n = 0,1 \Omega$  má oveľa nižší teplotný koeficient odporu, než merané drôty, teda zmenu jeho odporu možno bezpečne zanedbať.

Keďže odpory  $a$ ;  $b$  sú umiestnené v krabici mostíka, sú na zmenu teploty náchylné ešte menej, než okolitému prostrediu voľne vystavené drôty. Zmenu ich teploty mohol spôsobiť hlavne pretekajúci prúd, čomu sme sa však snažili vyvarovať tak, že sme mostík zapájali vždy len na veľmi krátku dobu, ktorá stačila na to, aby sme určili, či galvanometrom  $G$  preteká prúd a ktorým smerom. Hodnota odporu  $a$  a  $b$  je však platná pri  $20^{\circ}\text{C}$ , teda pre presnejšie meranie by mala byť aparátúra vystavená okoliu tejto teploty.

Tepelný výkon vodičov možno odhadnúť ako  $P = I^2 R$ . Keďže najväčší odpor drôtu použitého pri meraní bol  $6\ \Omega$  a prúd pretekajúci ním pri meraní Thomsonovým mostíkom bol  $0,2\ \text{A}$ , tak tepelný výkon vodičov bol zhruba  $0,3\ \text{W}$  alebo menší. Najmä pri vodičoch s vyšším odporom by bolo vhodné zvoliť menší prúd pretekajúci prúdovým obvodom, no pri nižšom prúde značne klesala rozlišovacia schopnosť galvanometra, preto sme zvolili kompromis medzi nízkym tepelným výkonom a vysokou rozlišovacou schopnosťou. Drôty sa nezahrievali znateľne, teda ich teplota bola veľmi blízka teplote okolitého vzduchu.

## 5 Záver

Určili sme priemer  $d$  a dĺžku  $l$  vodičov, ich odpor metódou Wheatsonovho mostíka, Thomsonovho mostíka a štvorbodovým meraním multimetrom, pričom sme dosiahli zhodu výsledku všetkými tromi metódami.

Určili sme merný odpor jednotlivých kovov na:

$$\rho_W = (5,5 \pm 0,2) \cdot 10^{-8}$$

$$\rho_{Cu} = (1,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-8}$$

$$\rho_{kanthal} = (1,30 \pm 0,05) \cdot 10^{-6}$$

$$\rho_{Fe} = (2,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-7}$$

$$\rho_{mosadz} = (6,7 \pm 0,2) \cdot 10^{-8}$$

$$\rho_{chromnikel} = (1,03 \pm 0,02) \cdot 10^{-6},$$

čo je až na železo (ktorého presné zloženie nepoznáme) v dobrej zhode s tabuľkovými hodnotami.



## 6 Zoznam použitej literatúry

- [St] Kolektív ZFP KVOF MFF UK. *Študijný text k meraniu: Měření malých odporů*. [cit. 2016-10-19]. URL: <[http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/texty/txt\\_204.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_204.pdf)>.
- [KM] A Tektonix Company. *Low Noise 7½-Digit Autoranging Multimeter* [cit. 2016-10-19]. URL: <<http://www.tek.com/sites/tek.com/files/media/media/resources/2010.pdf>>.
- [W] Kolektív WIKIMEDIA project. *Wikipedie: Rezistivita* [cit. 2016-10-19]. URL: <<https://cs.wikipedia.org/wiki/Rezistivita>>.
- [C] kolektív conVERTER. *Povrchové napětí* [cit. 2016-10-19]. URL: <<http://www.converter.cz/tabulky/merny-odpor.htm>>.