

1 Pracovní úkoly

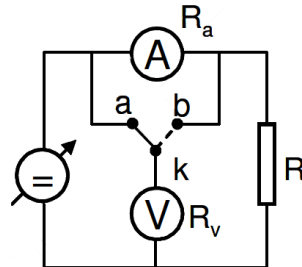
1. Změřte pomocí digitálního multimetru vnitřní odpor analogových měřících přístrojů, které budou použity k měření odporu vlákna žárovky v bodě 2 na všech rozsazích do povolených hodnot dané žárovky.
2. Změřte metodou přímou závislost odporu vlákna žárovky na proudu, který jím protéká. K měření použijte stejnoměrné napětí v rozsahu do povolených hodnot dané žárovky. Výsledky vnitřních odporů multimetrů naměřených v úkolu 1 použijte ke korekci naměřených hodnot odporů.
3. Změřte substituční metodou vnitřní odpor měřících přístrojů použitých v úkolu 2 alespoň na jednom rozsahu.
4. Metodou substituční změřte závislost odporu vlákna žárovky na proudu v rozsahu povolených hodnot dané žárovky. Porovnejte přesnost výsledků s přesností dosaženou v úkolu 2. Odpor vlákna žárovky změřte též digitálním ohmmetrem.
5. Výsledky zpracujte graficky a diskutujte vliv měřících přístrojů
6. Stanovte odpor vlákna žárovky při pokojové teplotě. K extrapolaci odporu vlákna na pokojovou teplotu použijte graf závislosti odporu vlákna na proudu pro malé proudy do $2mA$ příkonu žárovky (do grafu vyznačte chybu měření).

2 Teoretická část

Elektrický odpor je definován vztahem [1]

$$R = \frac{U}{I} \quad (1)$$

kde U značí napětí mezi konci vodiče a I proud procházející vodičem. Tyto veličiny můžeme změřit metodou přímou při zapojení podle obrázku 1.



Obrázek 1: Zapojení obvodu pro měření metodou přímou

Zapojení měřících přístrojů do obvodu však ovlivňuje výsledky. Při zapojení v poloze a) měříme správně proud procházející odporem R , ale zároveň měříme součet napětí na odporu R a ampérmetru, neboť všechny reálné měřící přístroje mají nenulový vnitřní odpor. Při zapojení v poloze b) měříme správně napětí na odporu R , ale měříme součet proudů procházející voltmetrem a odporem R .

Vzorec (1) pro výpočet R při tomto zapojení můžeme použít pouze pokud je chyba způsobena zapojením měřících přístrojů zanedbatelná. V poloze a) to nastane pokud je odpor ampérmetru zanedbatelný v porovnání s odporem R , a v poloze b) naopak pokud je odpor R zanedbatelný v porovnání s odporem voltmetru. Jinak vzorec (1) použít nelze a naměřené hodnoty musíme korigovat.

Při zapojení v poloze a) je skutečné napětí U_k na odporu R dané vztahem

$$U_k = U - R_a I \quad (2)$$

kde R_a značí vnitřní odpor ampérmetru a U , I naměřené hodnoty napětí, resp. proudu. Odpor R lze vypočítat z naměřených hodnot jako

$$R = \frac{U}{I} - R_a \quad (3)$$

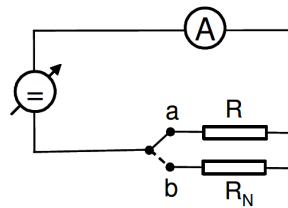
Při zapojení v poloze b) je skutečný proud I_k procházející odporem R roven

$$I_k = I - \frac{U}{R_v} \quad (4)$$

kde R_v značí vnitřní odpor voltmetru a U , I naměřené hodnoty napětí, resp. proudu. Odpor R lze vypočítat z naměřených hodnot jako

$$R = \frac{UR_v}{IR_v - U} \quad (5)$$

Odpor R můžeme také změřit metodou substituční, kde se neprojeví vnitřní odpory měřících přístrojů. Zapojení obvodu pro tuto metodu ukazuje obrázek 2.



Obrázek 2: Zapojení obvodu pro měření substituční metodou

Postupujeme tak, že nejdříve zapojíme odpor R a nastavíme proud. Je vhodné volit takovou velikost proudu, abychom měřili ve 2/3 stupnice zapojeného ampérmetru. Pak přepneme přepínač do polohy b) a na odporové dekádě nastavíme takový odpor R_N , aby jí protékal stejný proud jako odporem R .

Přesnost měření zde tak není ovlivněna vnitřním odporem měřících přístrojů, ale je především dána nejmenším dílkem na odporové dekádě, při které jsme schopni rozlišit změnu na ampérmetru.

3 Výsledky měření

Během celého měření používám zdroj DIAMETRAL 02-84685 a měřím odpor R žárovky s povolenými hodnotami napětí 24 V a proudu 50 mA.

Při měření vnitřních odporů analogových přístrojů byl použit digitální multimetr MY-68, který má při měření do 326 Ω přesnost $\pm 0.8\% + 3 \text{ dig}$ a při měření vyšších hodnot přesnost $\pm 0.8\% + 1 \text{ dig}$. Naměřené hodnoty pro miliampérmetr 02-9062 Tř. přesnosti 0,2 jsou uvedené v tabulce 1 a pro voltmetr 01-174 Metra Blansko, tř. př. 0,2 v tabulce 2. Tyto analogové měřící přístroje byly použity při měření metodou přímou.

Tabulka 1: Vnitřní odpor analogového miliampérmetru, měřeno digitálním multimetrem

$\frac{I_{max}}{mA}$	$\frac{R_a}{\Omega}$	$\frac{\sigma_{R_a}}{\Omega}$
1,5	111,1	1,2
3,0	83,2	1,0
7,5	40,2	0,6
15,0	21,5	0,5
30,0	11,3	0,4
75,0	4,6	0,3

Tabulka 2: Vnitřní odpor analogového voltmetru, měřeno digitálním multimetrem

$\frac{U_{max}}{V}$	$\frac{R_v}{k\Omega}$	$\frac{\sigma_{R_v}}{k\Omega}$
1,5	0,787	0,007
3,0	1,51	0,01
7,5	3,76	0,04
15,0	7,52	0,07
30,0	15,0	0,1

Metodou přímou při zapojení a) podle obrázku (1) jsem určil závislost odporu vlákna žárovky na procházejícím proudu. Změřené a dopočítané hodnoty jsou vidět v tabulce 3 a grafické zpracování naměřených hodnot je znázorněno v grafu 1. Hodnoty jsou proloženy polynomem pouze pro lepší přehlednost.

Sloupce U_{max} a I_{max} uvádí použitý rozsah voltmetru, resp. miliampérmetru a sloupce U , I ukazují naměřené hodnoty. Chybu analogových přístrojů σ_U , resp. σ_I jsem určil z jejich třídy přesnosti p a použitého rozsahu X podle [2] jako

$$\sigma_{U,I} = \frac{pX}{100} \quad (6)$$

Hodnoty R jsou počítány bez korekce na měřící přístroje podle vzorce (1). Chyba výsledku je pak dána zákonem šíření chyb [2]

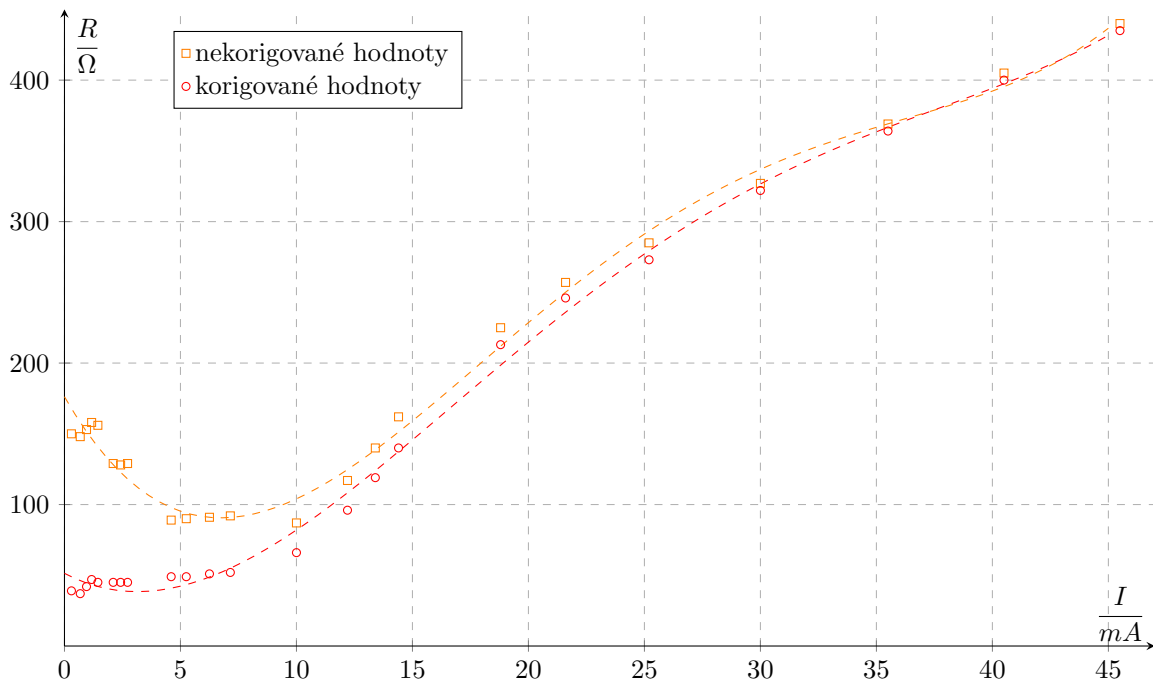
$$\sigma_R = \frac{1}{I^2} \sqrt{U^2 \sigma_I^2 + \sigma_U^2} \quad (7)$$

Korigované hodnoty jsou označeny R_k a počítány podle (3), jejich směrodatná odchylka je rovna

$$\sigma_{R_k} = \sqrt{\frac{U^2}{I^4} \sigma_I^2 + \frac{1}{I^2} \sigma_U^2 + \sigma_{R_a}^2} \quad (8)$$

Skutečné napětí na žárovce U_k je počítáno dle (2) a jeho chyba je dána vztahem

$$\sigma_{U_k} = \sqrt{\sigma_U^2 + I^2 \sigma_{R_a}^2 + R_a^2 \sigma_I^2} \quad (9)$$



Graf 1: Výsledky přímé metody, zapojení a)

Tabulka 3: Výsledky přímé metody, zapojení a)

$\frac{U_{max}}{V}$	$\frac{I_{max}}{mA}$	$\frac{U}{V}$	$\frac{\sigma_U}{V}$	$\frac{I}{mA}$	$\frac{\sigma_I}{mA}$	$\frac{R}{\Omega}$	$\frac{\sigma_R}{\Omega}$	$\frac{R_k}{\Omega}$	$\frac{\sigma_{R_k}}{\Omega}$	$\frac{U_k}{V}$	$\frac{\sigma_{U_k}}{V}$
1,5	1,5	0,045	0,003	0,300	0,003	150	10	39	10	0,012	0,003
1,5	1,5	0,100	0,003	0,675	0,003	148	4	37	5	0,025	0,003
1,5	1,5	0,145	0,003	0,950	0,003	153	3	42	3	0,039	0,003
1,5	1,5	0,185	0,003	1,170	0,003	158	3	47	3	0,055	0,003
1,5	1,5	0,225	0,003	1,440	0,003	156	2	45	2	0,065	0,003
1,5	3,0	0,270	0,003	2,100	0,006	129	1	45	2	0,095	0,004
1,5	3,0	0,310	0,003	2,420	0,006	128	1	45	2	0,109	0,004
1,5	3,0	0,350	0,003	2,720	0,006	129	1	45	1	0,124	0,004
1,5	7,5	0,410	0,003	4,60	0,02	89	1	49	1	0,225	0,004
1,5	7,5	0,470	0,003	5,25	0,02	90	1	49	1	0,259	0,004
1,5	7,5	0,570	0,003	6,25	0,02	91	1	51	1	0,319	0,005
1,5	7,5	0,660	0,003	7,15	0,02	92	1	52	1	0,373	0,005
1,5	15	0,870	0,003	10,00	0,03	87	1	66	1	0,655	0,006
1,5	15	1,430	0,003	12,20	0,03	117	1	96	1	1,168	0,007
3,0	15	1,880	0,006	13,40	0,03	140	1	119	1	1,592	0,009
3,0	15	2,330	0,006	14,40	0,03	162	1	140	1	2,020	0,009
7,5	30	4,23	0,02	18,80	0,06	225	1	213	1	4,01	0,02
7,5	30	5,55	0,02	21,60	0,06	257	1	246	1	5,31	0,02
7,5	30	7,18	0,02	25,20	0,06	285	1	273	1	6,89	0,02
15	75	9,80	0,03	30,0	0,2	327	2	322	2	9,66	0,02
15	75	13,10	0,03	35,5	0,2	369	2	364	2	12,94	0,03
30	75	16,40	0,06	40,5	0,2	405	2	400	2	16,21	0,06
30	75	20,00	0,06	45,5	0,2	440	2	435	2	19,79	0,06
30	75	21,20	0,06	49,5	0,2	428	2	424	2	20,97	0,06

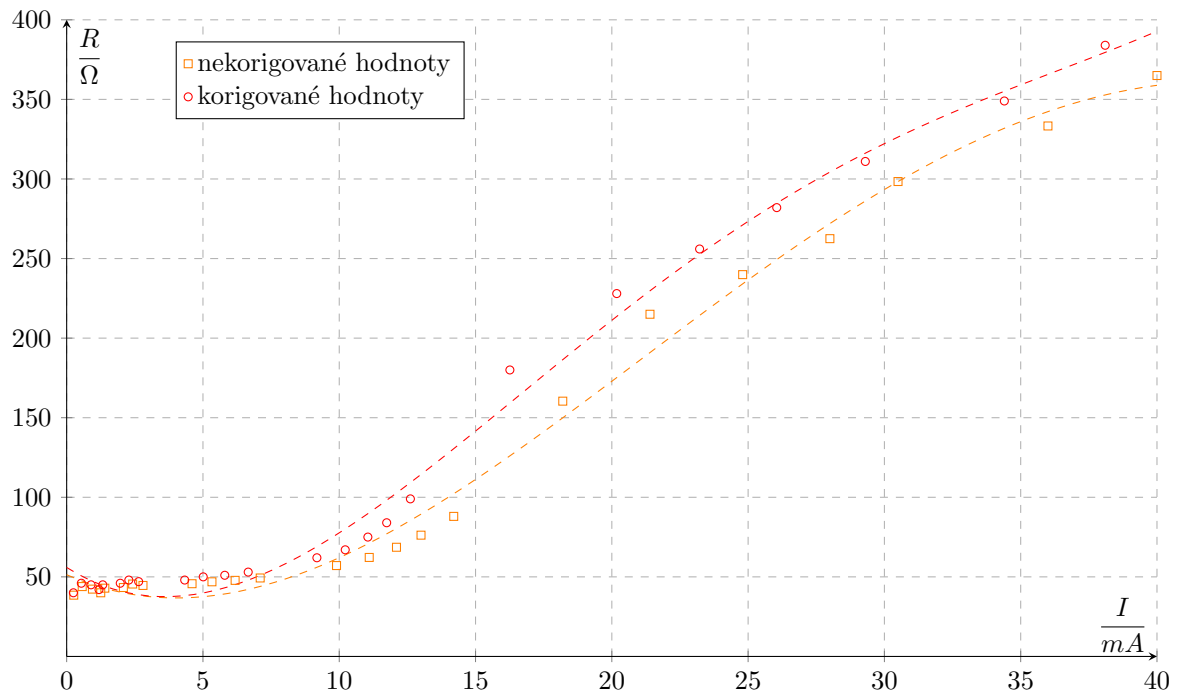
Dále jsem určil závislost odporu vlákna žárovky na procházejícím proudu při zapojení b) podle obrázku (1). Změřené a dopočítané hodnoty jsou vidět v tabulce 4 a grafické zpracování naměřených hodnot je znázorněno v grafu 2. Polynomiální fit je zde opět pouze orientační.

Většina veličin a jejich chyby jsou stejné jako v tabulce 3, pouze zde korigovaný odpor počítám podle (5) a jeho chybu jako

$$\sigma_{R_k} = \frac{1}{(IR_v - U)^2} \sqrt{U^2 R_v^4 \sigma_I^2 + I^2 R_v^4 \sigma_U^2 + U^4 \sigma_{R_v}^2} \quad (10)$$

a skutečný proud procházející žárovkou I_k je dán (4), jeho chyba

$$\sigma_{I_k} = \sqrt{\sigma_I^2 + \frac{1}{R_v^2} \sigma_U^2 + \frac{U^2}{R_v^4} \sigma_{R_v}^2} \quad (11)$$



Graf 2: Výsledky přímé metody, zapojení b)

Tabulka 4: Výsledky přímé metody, zapojení b)

$\frac{U_{max}}{V}$	$\frac{I_{max}}{mA}$	$\frac{U}{V}$	$\frac{\sigma_U}{V}$	$\frac{I}{mA}$	$\frac{\sigma_I}{mA}$	$\frac{R}{\Omega}$	$\frac{\sigma_R}{\Omega}$	$\frac{R_k}{\Omega}$	$\frac{\sigma_{R_k}}{\Omega}$	$\frac{I_k}{mA}$	$\frac{\sigma_{I_k}}{mA}$
1,5	1,5	0,010	0,003	0,260	0,003	38,5	11,5	40	13	0,247	0,005
1,5	1,5	0,025	0,003	0,570	0,003	43,9	5,3	46	6	0,538	0,005
1,5	1,5	0,040	0,003	0,945	0,003	42,3	3,2	45	4	0,894	0,005
1,5	1,5	0,050	0,003	1,250	0,003	40,0	2,4	42	3	1,186	0,005
1,5	1,5	0,060	0,003	1,400	0,003	42,9	2,1	45	2	1,324	0,005
1,5	3,0	0,090	0,003	2,080	0,006	43,3	1,4	46	2	1,966	0,007
1,5	3,0	0,110	0,003	2,420	0,006	45,5	1,2	48	1	2,280	0,007
1,5	3,0	0,125	0,003	2,800	0,006	44,6	1,1	47	1	2,641	0,007
1,5	7,5	0,210	0,003	4,60	0,02	45,7	0,7	48	1	4,33	0,02
1,5	7,5	0,250	0,003	5,33	0,02	46,9	0,6	50	1	5,01	0,02
1,5	7,5	0,295	0,003	6,18	0,02	47,8	0,5	51	1	5,80	0,02
1,5	7,5	0,350	0,003	7,10	0,02	49,3	0,4	53	1	6,66	0,02
1,5	15	0,565	0,003	9,90	0,03	57,1	0,3	62	1	9,18	0,03
1,5	15	0,690	0,003	11,10	0,03	62,2	0,3	67	1	10,22	0,03
1,5	15	0,830	0,003	12,10	0,03	68,6	0,3	75	1	11,05	0,03
1,5	15	0,990	0,003	13,00	0,03	76,2	0,3	84	1	11,74	0,03
1,5	15	1,250	0,003	14,20	0,03	88,0	0,3	99	1	12,61	0,03
3,0	30	2,920	0,006	18,20	0,06	160,4	0,6	180	1	16,26	0,06
7,5	30	4,60	0,02	21,40	0,06	215,0	0,9	228	1	20,18	0,06
7,5	30	5,95	0,02	24,80	0,06	239,9	0,8	256	1	23,22	0,06
7,5	30	7,35	0,02	28,00	0,06	262,5	0,8	282	1	26,05	0,06
15	75	9,10	0,03	30,5	0,2	298,4	1,8	311	2	29,3	0,2
15	75	12,00	0,03	36,0	0,2	333,3	1,6	349	2	34,4	0,2
15	75	14,60	0,03	40,0	0,2	365,0	1,6	384	2	38,1	0,2

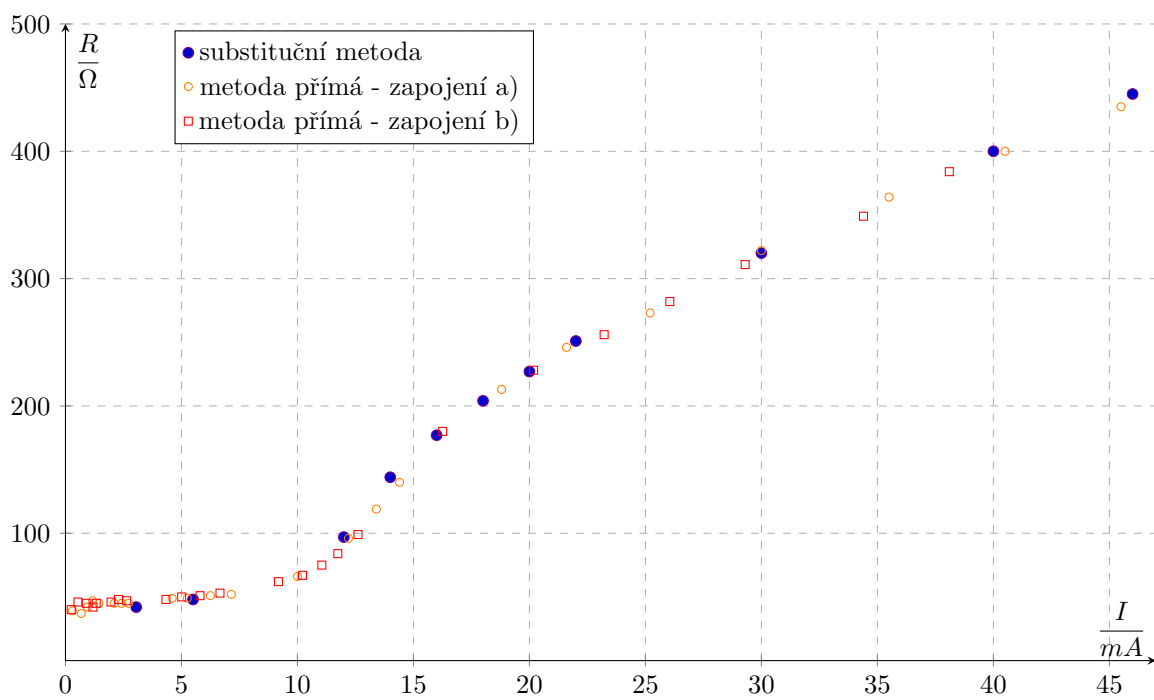
Podle zapojení na obrázku (2) jsem substituční metodou určil vnitřní odpor analogového miliampérmetru při rozsahu 1,5 mA na hodnotu $R_a = (109 \pm 1) \Omega$ a vnitřní odpor analogového voltmetru při rozsahu 1,5 V na hodnotu $R_v = (780 \pm 10) \Omega$.

Stejně zapojení jsem použil pro změření závislosti odporu vlákna žárovky na procházejícím proudu metodou substituční. Změřené hodnoty uvádí tabulka 5. Graf 3 znázorňuje naměřené hodnoty a zároveň ukazuje korigované hodnoty naměřené metodou přímou pro porovnání přesností obou metod.

K měření proudu byl použit analogový miliampérmetr bez IČ. Metra Blansko, tř. př. 0,5. a pro změření odporu odporová dekáda 02-8355. Chybu měření proudu zde počítám ze třídy přesnosti a použitého rozsahu dle vzorce (6), ovšem jako chybu určení odporu σ_R zde uvádím nejmenší dílek na odporové dekádě, pro který jsem byl schopen rozeznat změnu výchylky ampérmetru.

Tabulka 5: Výsledky substituční metody

$\frac{I}{mA}$	$\frac{\sigma_I}{mA}$	$\frac{R}{\Omega}$	$\frac{\sigma_R}{\Omega}$
3,05	0,03	42	1
5,50	0,03	48	1
12,0	0,1	97	1
14,0	0,1	144	1
16,0	0,1	177	1
18,0	0,1	204	1
20,0	0,1	227	1
22,0	0,1	251	1
30,0	0,6	320	2
40,0	0,6	400	2
46,0	0,6	445	2



Graf 3: Výsledky substituční metody

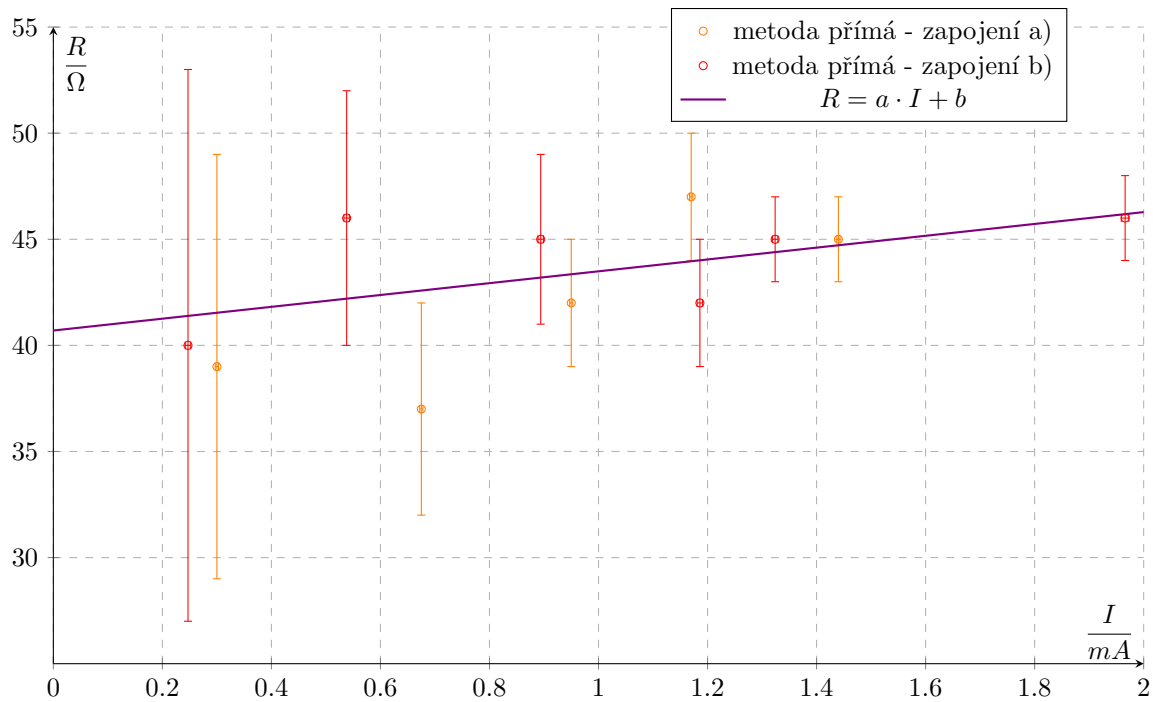
Graf 4 ukazuje naměřené hodnoty metodou přímou pro proudy menší než 2 mA , které byly použity k extrapolaci odporu vlákna na pokojovou teplotu. Naměřené hodnoty byly proloženy přímkou $R = a \cdot I + b$ a parametry lineární regrese a , b spočítány podle [2]

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{I_i^2}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{I_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{I_i R_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{I_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{I_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \quad \sigma_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \frac{I_i^2}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{I_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{I_i}{\sigma_i^2} \right)^2}} \quad (12)$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{I_i R_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{I_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{I_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{I_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \quad \sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{I_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{I_i}{\sigma_i^2} \right)^2}} \quad (13)$$

kde σ_i značí chybu určení odporu R_i . Číselně vychází $b = (40 \pm 3) \Omega$, $a = (3 \pm 2) \cdot 10^3 \Omega \cdot A^{-1}$. Odpor vlákna za pokojové teploty odpovídá parametru b , tedy $R = (40 \pm 3) \Omega$.

Odpor vlákna za pokojové teploty jsem také určil multimetrem MY-68 na hodnotu $R = (44 \pm 1) \Omega$.



Graf 4: Extrapolace odporu na pokojovou teplotu

4 Diskuse

Vnitřní odpory použitých analogových přístrojů jsem během měření pokládal za konstantní, i když platí, že obecně s rostoucím proudem, a tedy teplotou, by dané odpory měly růst. Předpokládám však, že oproti žárovce jsou tyto měřicí přístroje vyrobeny z materiálů, které mají malý teplotní součinitel odporu a tato chyba je tedy zanedbatelná.

Z grafu 1 je zřejmé, že při zapojení a) nemůžeme během měření malých proudů použít vzorec (1) a opravdu musíme dané hodnoty korigovat. Naopak pro měření větších proudů se tato korekce stává méně důležitou. To je v souladu s našimi předpoklady, neboť pro malé rozsahy má použitý ampérmetr více než dvakrát větší odpor než žárovka a vnáší tak do měření značnou chybu. Při největším rozsahu ampérmetru je jeho odpor přibližně řádově menší než odpor žárovky, a tak nemá takový vliv na výsledky.

Podobně z grafu 2 můžeme usoudit, že při zapojení b) je korekce naměřených hodnot důležitá zejména při měření větších proudů. V tomto případě však poměr R/R_v není zanedbatelný ani při měření malých proudů, takže korekci musíme provést v každém případě.

Pro nejmenší rozsahy analogových měřících přístrojů jsem změřil jejich vnitřní odpory metodou substituční a výsledky se shodují v rámci jedné směrodatné odchylky s výsledky získanými pomocí měření digitálním ohmmetrem. Ověřil jsem tak správnost hodnot vnitřních odporů uvedených v tabulkách 1 a 2 aspoň pro nejmenší rozsahy.

Závislost $R(I)$ pro žárovku jsem změřil také substituční metodou. Když porovnáme chyby měření uvedené v tabulce 5 s chybami měření metodou přímou, mohu usoudit, že v tomto případě jsou obě metody srovnatelně přesné. Substituční metoda sice není ovlivněna vnitřními odpory měřících přístrojů, ale zase vyžaduje velmi citlivý ampérmetr a přesné odečítání ze stupnice. Často však bylo obtížné odečítat odchylky, které byly menší než polovina dílku na stupnici ampérmetru, a proto jsem nemohl tvrdit, že bych odpor změřil s větší přesností než $\pm 1 \Omega$. Přesnost substituční metody bychom mohli vylepšit, pokud bychom použili přesnější ampérmetr, nejlépe digitální pro snadné odečítání hodnot. Použitá odporová dekáda má také určitou chybu uvedených odporů, podle výrobce by však tato chyba neměla být větší než 0,1 % (pro odpory větší než 1 Ω) a tuto chybu tedy považuji za zanedbatelnou.

V grafu 3 vidíme, že metoda přímá v obou zapojeních i substituční metoda dávají přibližně stejné výsledky a žádná z nich se svým průběhem výrazně neliší od ostatních. Můžeme zde také vidět, že odpor žárovky roste s proudem, což se shoduje s našimi předpoklady. Nejdříve roste pomalu a od určité hodnoty je závislost $R(I)$ téměř lineární, což odpovídá chování řadě kovů.

Extrapolovaná hodnota odporu vlákna žárovky za pokojové teploty z hodnot pro proudy menší než 2 mA se shoduje v rámci jedné směrodatné odchylky s hodnotou změřenou multimetrem. V grafu 4 však můžeme vidět, že především hodnoty pro nejmenší proudy jsou zatíženy velkou relativní chybou, což je způsobeno tím, že jsem měřil v dolní části stupnice analogových přístrojů. Kdybychom chtěli tuto chybu zmenšit, bylo by zapotřebí použít měřicí přístroje s menším rozsahem hodnot.

5 Závěr

Metodou přímou byla proměřena závislost odporu vlákna žárovky na procházejícím proudem pro dvě různá zapojení, přičemž naměřené hodnoty byly korigovány na vnitřní odpory měřících přístrojů. Výsledky těchto měření shrnují tabulky 3, 4 a grafy 1, 2. Stejná závislost odporu vlákna žárovky na procházejícím proudem byla také proměřena metodou substituční, viz. tabulka 5, graf 3.

Odpor vlákna žárovky při pokojové teplotě byl pomocí lineární regrese určen z naměřených hodnot metodou přímou na hodnotu $R = (40 \pm 3) \Omega$ a měřením digitálním multimetrem na hodnotu $R = (44 \pm 1) \Omega$.

6 Seznam použité literatury

- [1] Měření odporů. Fyzikální praktikum [online]. [cit. 12-10-2018]. https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_202.pdf
- [2] English, Jiří. Úvod do praktické fyziky I. 1. vyd. Praha: MATFYZPRESS, 2006, 145 s. ISBN 80-86732-93-2.