1 Pracovní úkoly

1. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou reverzního kyvadla.
2. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou matematického kyvadla.
3. Vypočítejte chybu, které se dopouštíte idealizací reálného kyvadla v rámci modelu kyvadla matematického.

2 Teoretický úvod

2.1 Fyzické kyvadlo

Každé těleso zavěšené na ose neprocházející jeho těžištěm může konat kmity. Obecná rovnice pomocí které můžeme určit minimální dobu kmitu tělesa (které je v podstatě fyzickým kyvadlem) je pro relativně malé úhlové výchylky α

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgx}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right), \tag{1}$$

kde I je moment setrvačnosti fyzického kyvadla vůči ose, kolem které se kmity konají, m je hmotnost kyvadla, g je tíhové zrychlení a x je vzdálenost těžiště od osy otáčení. Obecně by ovšem byl vzorec nekonečnou řadou, jejíž členy se ovšem velice rychle blíží k 0 pro malé úhly rozkmitu α a vzorec můžeme proto v našem případě používat v tomto tvaru.

Momenty setrvačnosti, které se budou hodit pro výpočet celkového momentu setrvačnosti kyvadla, jsou moment setrvačnosti koule o průměru d procházející jejím těžištěm je

$$I_{koule} = \frac{2}{5}m_{koule}\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{10}m_{koule}d^2, \tag{2}$$

moment setrvačnosti tenké homogenní tyče (provázku) délky l procházející těžištěm a kolmé na tyč je

$$I_{tyc} = \frac{1}{12}m_{tyc}l^2 \tag{3}$$

a moment setrvačnosti válce vůči ose procházející těžištěm a kolmé na osu symetrie

$$I_{valec} = \frac{1}{4}m_{valec}\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{3}c^2\right), \tag{4}$$

kde a je průměr válce, c je výška válce a m_i jsou příslušné hmotnosti.

Pomocí Steinerovy věty pak můžeme zjistit moment setrvačnosti vůči ose posunuté o délku h_0 od těžiště. Moment setrvačnosti vůči posunuté ose je

$$I = I_0 + m_i h_0^2, \tag{5}$$

kde m_i je hmotnost tělesa a I_0 je moment setrvačnosti tělesa vůči ose procházející jeho těžištěm.

2.2 Matematické kyvadlo

Pokud zavěsíme dostatečně malý předmět (tak malý, abychom ho mohli aproximovat jako hmotný bod) na velice lehké pevné vlákno (které můžeme aproximovat nehmotným vláknem) délky l, pak moment setrvačnosti kyvadla je roven

$$I_{bodu} = m_k l^2, \tag{6}$$

A/cm	$10\,T_d$/s	$10\,T_n$/s
3,319	19,8001	18,7306
7,278	20,1072	20,4616

Tabulka 1: Naměřené hodnoty sloužící pro grafickou interpolaci

kde m_k je hmotnost hmotného bodu. Z toho pak plyne rovnice pro dobu kmitu matematického kyvadla

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right). \tag{7}$$

Pro malé výchylky α můžeme vztah ještě zjednodušit na

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{8}$$

Z tohoto vztahu můžeme vyjádřit tíhové zrychlení

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_M^2}. \tag{9}$$

2.3 Reverzní kyvadlo

Pro dobu kmitu reverzního kyvadla platí

$$T_{rev} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \tag{10}$$

kde L je redukovaná délka fyzického kyvadla. Tíhové zrychlení v tomto případě vypočítáme jako

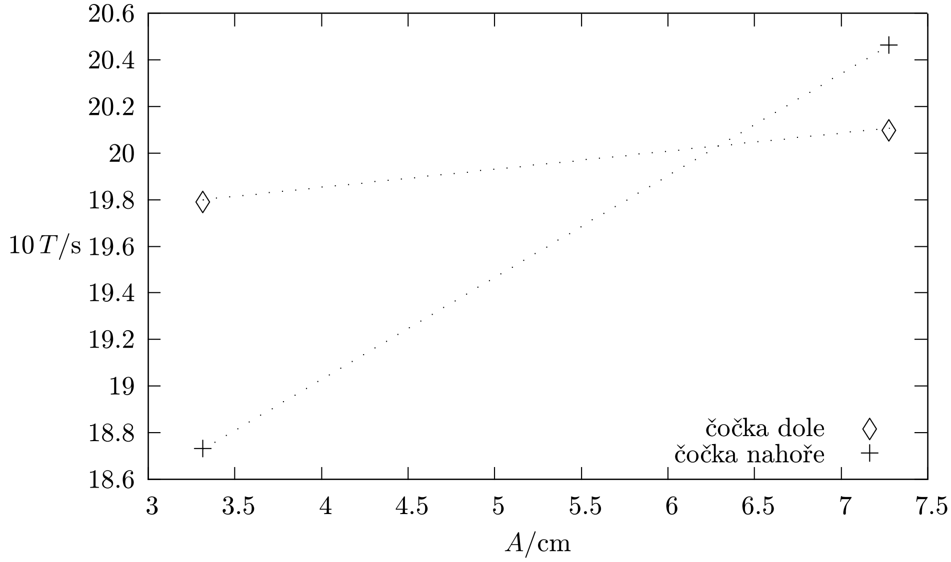
$$g = \frac{4\pi^2 L}{T_{rev}^2}. \tag{11}$$

3 Měření

3.1 Metoda reverzního kyvadla

Pro určení tíhového zrychlení pomocí reverzního kyvadla bylo použito kyvadlo, které mělo pevnou vzdálenost mezi osami otáčení. Naměřená vzdálenost mezi těmito osami je $L = 99,5\,\mathrm{cm}$. Vzhledem k tomu, že bylo použito pásové měřidlo na takovou délku, pak odhaduji chybu měření jako $s_L = 0,1\,\mathrm{cm}$. Na kyvadle byla pohyblivé čočka s jejíž pomocí bylo potřeba těžiště kyvadla dostat do takové polohy, aby vzdálenost mezi osami kyvadla byla skutečně redukovanou délkou kyvadla (tj. kmity kolem obou os by měly trvat stejně dlouho), což se provádělo pomocí grafické interpolace. Nejprve byla čočka nastavena co nejdále od středu tyče. Pro tuto polohu byly změřeny doby kmitu pro závěs kyvadla s čočkou dole T_d a nahoře T_n a také byla změřena vzdálenost A mezi šroubem a kovovým výstupkem na kyvadlu (který slouží jako osa otáčení z druhé strany). Poté se čočka posunula značně blíže a naměřily se stejné charakteristiky. Naměřené hodnoty, které byly použity pro grafickou interpolaci jsou v tabulce č. 1 a jsou naneseny v grafu č. 1.

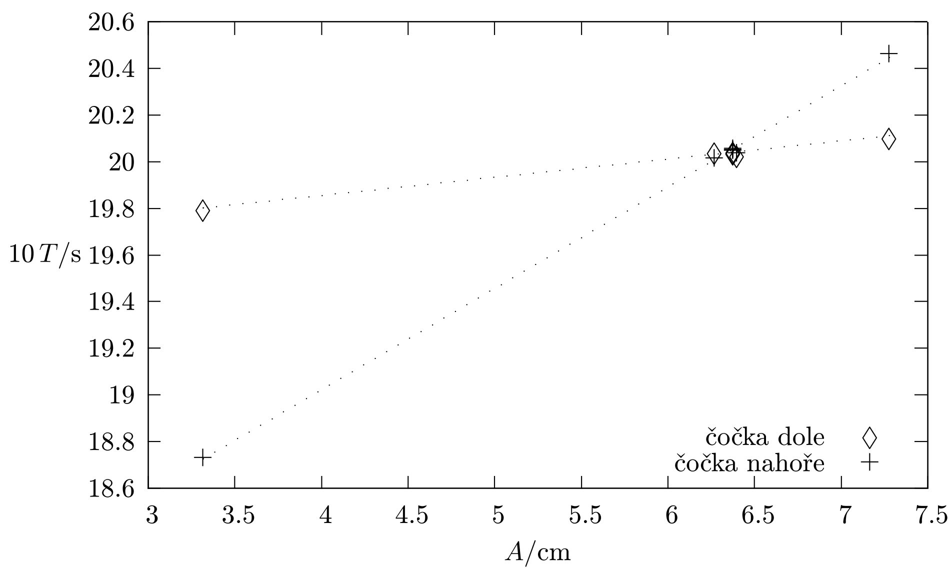
Výpočtem průsečíku obou proložených přímek vyšel bod, blízko něhož je pozice čočky zajistí to, že kyvadlo bude opravdu reverzním kyvadlem (v této konkrétní situaci vyšel průsečík pro $A = 6,263\,\mathrm{cm}$). Dále pak byla prováděna měření blízkosti této polohy čočky. Naměřené hodnoty jsou v tabulce č. 2 a graf s proložením hodnot má č. 2.



Obrázek 1: Grafická interpolace

A/cm	$10\,T_d$/s	$10\,T_n$/s
6,268	20,0419	20,0166
6,398	20,0294	20,0375
6,376	20,0405	20,0566
6,376	20,0450	20,0495
6,376	20,0435	20,0524

Tabulka 2: Doby kmitu reverzního kyvadla



Obrázek 2: Naměřené hodnoty

koule průměr d/cm	háček šířka x a/cm	háček max šířka oka b/cm	háček výška c/cm	celá koule hmotnost m_k/g
2,324	0,202	0,63	0,98	55,4612
2,344	0,220			
2,346				
2,360				
2,362				

Tabulka 3: Naměřené parametry koule s háčkem

hmotnost provázků		délka provázků	
m_p1/g =	0,1261	l_1/cm =	100,1
m_p2/g =	0,1099	l_2/cm =	98,9

Tabulka 4: Naměřené parametry závěsu

Chyba měření s_f (pro veličinu f) je určena jako

$$s_f = \sqrt{s_{stat}^2 + s_{mer}^2}, \tag{12}$$

kde s_{stat} je statistická chyba a s_{mer} je chyba měřidla. Metoda přenosu chyb je pak pro veličinu vypočtenou z n jiných naměřených

$$s_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}^2 s_{x_i}^2 \right)} \tag{13}$$

Po výpočtu chyby vychází pro dobu kyvu reverzního kyvadla $T = (2,00 \pm 0,08)$ s. Z toho plyne velikost tíhového zrychlení $(9,78 \pm 0,39)\,\mathrm{ms}^{-2}$

3.2 Metoda matematického kyvadla

Metoda matematického kyvadla byla realizována pomocí koule s háčkem, která byla zavěšena na provázku. Parametry koule jsou: hmotnost celé koule s háčkem $m_k = 55,4612\,\mathrm{g}$, výška háčku $c = 0,98\,cm$, průměr koule (průměrný - naměřené hodnoty viz. tabulka 3) $d = 2,347\,\mathrm{cm}$. Dalším parametrem je největší vnější šířka oka háčku $b = 0,63\,\mathrm{cm}$. Šířka háčku je rozměr kolmý na jeho výšku a maximální šířku oka a průměrná hodnota je $a = 0,21\,\mathrm{cm}$. Délky byly měřeny pomocí měřidla s přesnosti na $0,01$cm, hmotnost byla určena na velmi přesných vahách (s chybou na poslední platné cifře).

Pro měření byly použity postupně dva závěsy, které měly parametry viz. tabulka č. 4. Hmotnost provázků byla změřena na velmi přesných vahách a délka závěsu byla určena pomocí pásového měřítka (jedná se o vzdálenost mezi osou otáčení a vrchní stranou háčku)

Nejprve vypočtěme tíhové zrychlení pomocí vztahu (8). Délku závěsu pro tento vzorec můžeme aproximovat jako délku provázku + výšku háčku + $\frac{1}{2}$ průměru kuličky. V tomto případě nám vyjde tíhové zrychlení pro první závěs $(9,78 \pm 0,01)\,\mathrm{ms}^{-2}$ a pro druhý závěs $(9,80 \pm 0,01)\,\mathrm{ms}^{-2}$.

Vypočítejme ještě jednou tíhové zrychlení z těchto měření, ale bez několika zanedbání. Použijeme vzorec (1) pro fyzické kyvadlo a budeme uvažovat, že maximální rozkmit byl vždy menší než 4 cm a tedy úhel je zhruba $\alpha = 2°$.

Kyvadlo si aproximujeme jako tyč (provázek), válec (místo háčku) a kouli. U háčku předpokládáme, že je homogenním válcem a má poloměr a a výšku c. Moment setrvačnosti kyvadla pak je

$$I = m_{koule}\left(\frac{1}{10}d^2 + \left(\frac{1}{2}d + c + l\right)^2\right) + m_{hacek}\left(\frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{12}c^2 + \left(\frac{1}{2}c + l\right)^2\right) + \frac{1}{3}m_p l^2. \tag{14}$$

Musíme ovšem rozlišovat hmotnost celé koule s háčkem m_k a naměřenou hmotnost samotné koule bez háčku m_{koule}. Jednotlivé hmotnosti spočítáme tak, že sečteme objem obou těles a každé těleso (za předpokladu homogenity) bude vážit úměrně k poměru objemu, který má.

$$m_{koule} = \frac{V_{koule}}{V_k} \cdot m_k = \frac{\frac{1}{6}\pi d^3}{\frac{1}{6}\pi d^3 + \frac{1}{4}\pi a^2 c} m_k = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}\frac{a^2 c}{d^3}} m_k \tag{15}$$

$$m_{hacek} = \frac{V_{hacek}}{V_k} \cdot m_k = \frac{\frac{1}{4}\pi a^2 c}{\frac{1}{6}\pi d^3 + \frac{1}{4}\pi a^2 c} m_k = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\frac{d^3}{a^2 c}} m_k \tag{16}$$

Těžiště se nalézá ve vzdálenosti x od osy otáčení

$$x = \frac{m_{koule}\left(l + c + \frac{d}{2}\right) + m_{hacek}\left(l + \frac{c}{2}\right) + m_p \frac{l}{2}}{m_{koule} + m_{hacek} + m_p} \tag{17}$$

Z toho již můžeme určit dobu kmitu, pokud známe g, nebo, jako v našem případě, tíhové zrychlení. To vyjde pro první závěs $(9,79 \pm 0,01)\,\mathrm{ms^{-2}}$ a pro druhý závěs $(9,80 \pm 0,01)\,\mathrm{ms^{-2}}$. Chyby určené pro tyto hodnoty jsou ovšem pouze kvalifikované odhady, protože rovnice pro výpočet chyby tohoto měření by zabrala asi stránku. Na chybu můžeme usuzovat podle veličiny naměřené s nejmenší přesností, což je délka závěsu.

Z těchto výsledků můžeme určit, že aproximace matematického kyvadla pro naše kyvadlo tvořené relativně malou koulí vůči dlouhému závěsu je oprávněná. Chyba, která touto aproximací vzniká je menší než 0,3%.

4 Diskuse

Jak bylo již zmíněno v teorii, vztahy pro dobu kmitu jsou minimálními dobami kmitu, protože jednak zanedbáváme další kladné členy řady a pak také zanedbáváme odpor vzduchu a další odporové síly, které kromě toho, že v průběhu pohybu mají za následek disipaci energie a tedy i snižování maximální výchylky, tak mají za následek prodloužení doby kmitu.

Relativně velmi vysoká (vzhledem k použité metodě) byla chybu u reverzního kyvadla. Prakticky celá je určeno statistickým zpracováním. To je nejspíše způsobeno ne příliš velkým opakováním měření, započtením i dvou měření, která původně sloužila pouze pro grafickou interpolaci a která se nalézají daleko od polohy, kdy se kyvadlo chová jako reverzní a hlavně citlivostí celého kyvadla na dotažení šroubu (relativně malá odchylka v poloze čočky při poloze nahoře a dole může mít za následek nepřesnost měření, která se může na jinak obvykle velmi přesném měření projevit).

Tabelovaná hodnota tíhového zrychlení pro Prahu je $9,811\,\mathrm{ms^{-2}}$. Hodnoty získané měřeními jsou o něco menší, což bude právě zanedbáním odporových sil.

Pokud srovnáme výsledky pro matematické a fyzické kyvadlo, pak docházíme k relativně dobré shodě, ale pokud chceme určovat tíhové zrychlení na 3 a více platných cifer, tak už musíme uvažovat rovnici fyzického kyvadla.

5 Závěr

Tíhové zrychlení výpočtem pomocí matematického kyvadla nejhrubší aproximací

$$(9,78 \pm 0,01)\,\mathrm{ms}^{-2}$$

$$(9,80 \pm 0,01)\,\mathrm{ms}^{-2}$$

Tíhové zrychlení určené pomocí výpočtu fyzického kyvadla

$$(9,79 \pm 0,01)\,\mathrm{ms}^{-2}$$

$$(9,80 \pm 0,01)\,\mathrm{ms}^{-2}$$

Tíhové zrychlení pomocí reverzního kyvadla

$$(9,78 \pm 0,39)\,\mathrm{ms}^{-2}$$

6 Literatura

[1] *J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch:* **Fyzikální a matematické tabulky**
SNTL, Praha 1980

[2] *Wikipedia contributors:* **Pendulum (mathematics)** [**online**]
Wikipedia, The Free Encyclopedia,
`http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pendulum_(mathematics)&oldid=344584072`
17 February 2010, 09:43 UTC, [accessed 23 March 2010]