Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I – Mechanika a molekulová fyzika

Úloha č. XXI

Název: Měření tíhového zrychlení

Pracoval: Jiří Vackář stud. skup. 11 dne 10. 3. 2008

Odevzdal dne: 17. 3. 2008

Hodnocení:......................................

Připomínky:

Kapitola referátu	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0 – 3	
Výsledky měření	0 – 9	
Diskuse výsledků	0 – 5	
Závěr	0 – 2	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval: .... dne ....

1 Pracovní úkoly

1. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou reverzního kyvadla.
2. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou matematického kyvadla.
3. Vypočítejte chybu, které se dopouštíte idealizací reálného kyvadla v rámci modelu kyvadla matematického.

2 Teoretická část

2.1 Měření tíhového zrychlení z doby kmitu kyvadla

Tuhé těleso otočně upevněné k ose, která neprochází jeho těžištěm, nazýváme *fyzické kyvadlo*. Označíme-li m hmotnost tělesa, d vzdálenost jeho těžiště od osy, α maximální výchylku těžiště z rovnovážné polohy, g místní tíhové zrychlení a I moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení, můžeme podle [1] dobu kmitu T vyjádřit s dostatečnou přesností jako

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}) \tag{1}$$

2.2 Reversní kyvadlo

Fyzické kyvadlo se kývá se stejnou periodou podle dvou různých rovnoběžných os, pokud tyto osy leží symetricky vzhledem k těžišti nebo jsou-li tyto osy vzdáleny o *redukovanou délku* fyzického kyvadla. Pro experimentální použití je důležitý druhý případ. Známe-li dvě osy, okolo kterých se kyvadlo kývá se stejnou periodou, je jejich vzdálenost *redukovanou délkou* kyvadla l_r a pro dobu kmitu platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} \tag{2}$$

K experimentu máme k dispozici homogenní tyč se dvěma pevnými rovnoběžnými břity ve vzdálenosti$D$, které slouží jako osy otáčení. Na jenom konci tyče je posuvně upevněná těžká kovová čočka, jejímž posouváním se mění poloha těžiště vůči břitům. Změříme-li dobu kmitu podle obou os (závaží nejprve nad těžištěm, pak pod) pro dvě krajní polohy závaží a vyneseme tyto hodnoty do grafu, můžeme grafickou interpolací najít polohu závaží, při níž bude kyvadlo kývat podle obou os se stejnou periodou. Délka D je pak redukovanou délkou kyvadla l_R a pro tíhové zrychlení g vyplývá z vzorce 2 vztah

$$g = \frac{4\pi^2 l_r}{T^2} \tag{3}$$

2.3 Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo je teoretický model hmotného bodu o hmotnosti m zavěšeného na nehmotném závěsu konstantní délky l. Moment setrvačnosti vůči ose na opačném konci závěsu je

$$I_M = ml^2 \tag{4}$$

Z vzorců 1 a 4 plyne

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(a + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}) \tag{5}$$

pro malé výchylky můžeme zjednodušit na

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{6}$$

2.4 Přiblížení se matematickému kyvadlu

V experimentu jsem použil těžkou mosaznou kouli s háčkem zavěšenou na niti. Pokud tuto soustavu aproximujeme matematickým kyvadlem a omezíme se na malé výchylky, určíme gravitační zrychlení jako

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \tag{7}$$

Abychom určili chybu měření způsobenou touto aproximací, vyjádříme si moment setrvačnosti této soustavy. Spočteme objem koule a objem háčku, z podílu hmotnosti a součtu těchto objemů určíme hustotu slitiny (hustota mosazi závisí na množství jednotlivých složek, proto tabulky udávají poměrně velký rozsah hodnot). Moment setrvačnosti háčku vyjádříme jako moment setrvačnosti válce stejné hmotnosti a výšky, moment setrvačnosti nitě jako moment tenké dlouhé tyče.

Potřebné momenty setrvačnosti jsou dle [2] pro homogenní kouli vzhledem k ose procházející středem

$$I_{koule} = \frac{2mr^2}{5}$$

pro homogenní válec vzhledem k ose procházející těžištěm kolmé na osu rotační souměrnosti

$$I_{valec} = \frac{1}{12} m(3r^2 + v^2)$$

pro tenkou tyč vzhledem k ose procházející jejím koncem

$$I_{tyc} = \frac{ml^2}{3}$$

Podle Steinerovy věty určíme moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení soustavy, která je od těžiště tělesa hmotnosti m ve vzdálenosti a.

$$I = I_0 + ma^2$$

Nyní spočítáme hodnoty jednotlivých členů rovnice 1 a jejich odchylky oproti hodnotám použitým v rovnici matematického kyvadla.

Těžiště soustavy určíme jako vážený průměr vzdáleností těžišť jejích částí. Označme vzdálenost těžišť nitě, háčku a koule pořadě a_{nit}, a_{hacek}, a_{koule}.

$$d = \frac{a_{nit} m_{nit} + a_{hacek} m_{hacek} + a_{koule} m_{koule}}{m_{nit} + m_{hacek} + m_{koule}} \tag{8}$$

Moment setrvačnosti soustavy je součtem momentů těles, ze kterých se skládá.

$$I_c = \frac{m_{nit} l^2}{3} + \frac{1}{12} m_{hacek}(3r^2 + v^2) + m_{hacek} a_{hacek}^2 + \frac{2mr^2}{5} + m_{koule} a_{koule}^2 \tag{9}$$

Úhel α určíme z horizontální výchylky p koule z rovnovážné polohy. Při daných výchylkách lze s dostatečnou přesností aproximovat kyv pohybem po odvěsně pravoúhlého trojúhelníka a použít funkci arcsin.

Korekce zohledňující závislost doby kyvu na výchylce kyvadla

$$\zeta = (1 + \frac{1}{4}(\frac{p}{d})^2)^2 \tag{10}$$

S dostatečnou přesností můžeme získat relativní odchylku měření jako součet relativních odchylek jednotlivých členů

$$\delta_U = |\frac{I_c - I_m}{I_m}| + |\frac{d - l}{l}| + |\frac{\zeta - 1}{1}| \tag{11}$$

3 Výsledky měření

3.1 Reverzní kyvadlo

Nejdříve jsem naměřil čas deseti kmitů v obou krajních polohách čočky.

vzdálenost čočky	$0 \pm 0.01 mm$				
poloha závaží	nahoře		dole		
doba kmitů	20,5093 s	20,5076 s	20,1056 s	20,1118 s	20,1152 s
odhadnutá výchylka	1 cm	1 cm	1,5 cm	1 cm	1,2 cm

vzdálenost čočky	$50.76 \pm 0.01mm$			
poloha závaží	nahoře		dole	
doba kmitů	18,3563 s	18,3635	19,7340	19,7281
odhadnutá výchylka	1,2 cm	1,2 cm	2 cm	2 cm

Grafickou interpolací (viz příloha) byla odhadnuta poloha, ve které by se kyvadlo mělo kývat podle obou os se stejnou periodou, na 10,7 mm. Kvůli nepřesnostem byla nutná další korekce – při prvním nastavení byly naměřeny delší časy při poloze čočky dole a bylo tedy nutné čočku posunout blíž ke konci tyče. Při vzdálenosti čočky 10,0 mm se časy téměř vyrovnaly, jak je zřejmé z následující tabulky.

vzdálenost čočky	$10 \pm 0.01mm$			
poloha závaží	nahoře		dole	
doba kmitů	20,0396 s	20,0390	20,0445	20,0437
odhadnutá výchylka	2,2 cm	2,2 cm	2,5 cm	2,5 cm

Vzdálenost břitů reversního kyvadla byla změřena 995 ± 0.5 mm.

Gravitační zrychlení vypočítané podle vzorce 3

$$g_R = (9,78 \pm 0,01)\ \mathrm{ms}^{-2}$$

Do nejistoty měření se promítá nejvíce nejistota měření vzdálenosti hrotů (0,05%), ostatní veličiny byly změřeny řádově přesněji.

3.2 Matematické kyvadlo

Během experimentu jsem naměřil tyto hodnoty

Hmotnost koule $278,7 \pm 0,05$ g

Změřené hodnoty průměru koule

$2r$ [mm]	39,80	39,90	39,90	39,96	40,28	39,91

$r = 19,98 \pm 0,04$ mm

Parametry háčku

šířka [mm]	$5 \pm 0,2$
výška [mm]	$2,7 \pm 0,2$
délka [mm]	$13 \pm 0,1$
rozvinutá délka [mm]	24 ± 4
materiál	mosaz (8300–8600 kg/m^3[3])
objem [mm^3]	324 ± 24

Parametry závěsu

délka k háčku [mm]	982 ± 2
hmotnost nitě [g]	$0,101 \pm 0,0005$

Kývání

výchylka [mm]	30 ± 5
period	10
čas [s]	$20,1982 \pm 0,002$

Gravitační zrychlení podle vzorce 7

$$g_M = (9,82 \pm 0,02)\ \mathrm{ms}^{-2}$$

3.3 Chyba způsobená idealizací matematickým kyvadlem

Objem koule vychází 33410 mm^3, objem háčku 324 mm^3. Hustota mosazi tedy vychází 8261 kg/m^3. Zpětně dopočítáme hmotnost kuličky na 276 g a háčku 2,68 g.

Dopočteme vzdálenosti těžiště nitě, háčku a koule od osy otáčení: $a_{nit} = 491$ mm, $a_{hacek} = 995$ mm a $a_{koule} = 1015$ mm.

Po dosazení hodnot do vzorců 9, 8 a 10 dopočteme odchylku podle rovnice 11 a dostaneme

$$\delta_U = 0,001 = 0,1\%$$

4 Diskuse výsledků

Hodnota místního tíhového zrychlení určená metodou reverzního kyvadla je vzhledem ke své přestnosti značně vychýlena od tabulkové hodnoty pro Prahu g = 9,810ms$^-$2[3]. Systematická chyba je určitě způsobena vlivem dispersních sil – tření o vzduch a v závěsu zpomaluje kývání a tudíž vychází menší tíhové zrychlení. Dále homogenní tyč s těžkým závažím na jednom konci má vůči zvoleným dvěma osám výrazně odlišné momenty setrvačnosti. Domnívám se, že užití obdobného korekčního vztahu jako u modelu matematického kyvadla by měření zpřesnilo.

Metoda grafické interpolace poskytuje překvapivě přesné určení hledaného průsečíku, je-li provedena dostatečně pečlivě.

Model matematického kyvadla umožnil naměřit místní tíhové zrychlení, které se v rámci chyby dobře shoduje s obecně užívanou hodnotou na tři platné cifry.

Vypočítaná systematická chyba, kterou se dopouštíme idealizací reálného kyvadla je vůči statictické chybě určení tíhového zrychlení touto metodou zanedbatelná.

Přesnost čítače umožňuje spolu se zvětšným počtem měřených period velice efektivně minimalizovat chybu měření času, která je u reverzního kyvadla způsobena tím, že úhel výkyvu se po každém otočení kyvadla mírně liší - bylo by dobré stojan kyvadla doplnit v rovině optické brány čítače horizontálním měřítkem nebo zarážkou. Chyby ostatních veličin jsou uspokojivé (ani celková relativní chyba vypočítaných zrychlení nedosahuje zdaleka jedno procento).

5 Závěr

Metodou reversního kyvadla bylo změřeno místní tíhové zrychlení

$$g_R = (9,78 \pm 0,01)\ \mathrm{ms}^{-2}$$

Metodou matematického kyvadla bylo změřeno místní tíhové zrychlení

$$g_M = (9,82 \pm 0,02)\ \mathrm{ms}^{-2}$$

Relativní chyba určení tíhového zrychlení vzniklá idealizací skutečného kyvadla matematickým byla vypočítána 0,1 %

Reference

[1] Studijní text fyzikálního praktika http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt_121.pdf

[2] Wikipedia – List of moments of inertia http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_moments_of_inertia

[3] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980