Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I

Úloha č.XXI

Název: Měření tíhového zrychlení

Pracovala: Jana Ringelová stud. skup. F/1-Y/15 dne 10.3.2005

Odevzdal dne: .... vráceno: ....

Odevzdal dne: .... vráceno: ....

Odevzdal dne: ....

Posuzoval:..................................... dne .... výsledek klasifikace ....

Připomínky:

Pracovní úkoly

1. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou reverzního kyvadla.
2. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou matematického kyvadla
3. Vypočítejte chybu, které se dopouštíte idealizací reálného kyvadla v rámci modelu kyvadla matematického.

Teoretická část

Matematické a fyzické kyvadlo

Pojmem matematické kyvadlo rozumíme hmotný bod hmotnosti m na nehmotném závěsu délky l, který se může volně otáčet kolem osy procházející jeho druhým koncem. Pro periodu T_M matematického kyvadla platí vztah [1]:

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \tag{1}$$

kde g je tíhové zrychlení a α je rozkmit kyvadla. Omezíme-li se na malé hodnoty α (do $5°$), můžeme vztah (1) přepsat:

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{2}$$

Přesnějším modelem je fyzické kyvadlo. Pro periodu T_F fyzického kyvadla platí vztah:

$$T_F = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \tag{3}$$

kde I je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení a d je vzdálenost těžiště od této osy. Vztah (3) můžeme za stejných podmínek uvedených pro matematické kyvadlo nahradit rovnicí:

$$T_F = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{4}$$

V experimentu byla použita jako model matematického kyvadla malá těžká koule na tenkém vlákně. Moment setrvačnosti I takového kyvadla lze určit podle vztahů uvedených v [1]:

$$I = I_k + I_t = m_k\left[\frac{2}{5}r^2 + (L+r+h)^2\right] + \frac{1}{3}m_t L^2 \tag{5}$$

kde I_k je moment setrvačnosti koule, I_t je moment setrvačnosti závěsu, m_k je hmontost koule, m_t je hmotnost závěsu, r je poloměr koule a L je délka vlákna a h je délka háčku, za který se koule zavěšuje. Dosazením (5) do (4) dostaneme periodu kyvadla.

Ze vztahů (2) a (4) lze vyjádřit hodnotu tíhového zrychlení g_M a g:

$$g_M = \frac{4\pi^2(L+r+h)}{T_M^2} \tag{6}$$

$$g = \frac{4\pi^2\left(m_k\left(\frac{2}{5}r^2+(L+r+h)^2\right)\right)+\frac{1}{3}m_t L^2)}{T_F^2(m_k+m_t)(L+r+h)} \tag{7}$$

Relativní systematickou chybu, které se dopouštíme při aproximaci fyzického kyvadla matematickým kyvadlem, vypočteme ze vztahu (8)

$$\eta_{sys} = \frac{g-g_M}{g} \tag{8}$$

Reverzní kyvadlo

Pokud fyzické kyvadlo kývá se stejnou periodou kolem dvou rovnoběžných os, které nejsou symetricky položeny vzhledem k těžišti, je vzdálenost mezi osami nazývána redukovaná délka fyzického kyvadla l_r [1]. Pro dobu kmitu kyvadla potom platí [1]:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g_r}} \tag{9}$$

Z toho plyne

$$g = \frac{4\pi^2 l_r}{T^2} \tag{10}$$

V našem experimentu používáme reverzní kyvadlo, kterým je tyč s těžkým závažím na jednom konci. Tím je dosažena nesymetrie v poloze těžiště vzhledem k osám. Na tyči jsou v pevné vzdálenosti D dva břity, kolem kterých může kyvadlo kývat. Posouváním závaží můžeme upravovat polohu těžiště tak, aby byla perioda kmitu kolem obou břitů stejná. Potom je vzdálenost D rovna redukované délce kyvadla l_r a tíhové zrychlení určíme ze vztahu (10).

Popis metody měření

1. Měření doby deseti kmitů matematického kyvadla.
2. Změření délky a hmotnosti závěsu, průměru a hmotnosti kuličky.
3. Měření doby deseti kmitů na obou břitech reverzního kyvadla.
    - Pro obě krajní polohy čočky.
    - Grafickou interpolací se postupně určuje s vyšší a vyšší přesností poloha čočky, při níž jsou obě periody stejné. Tuto polohu čočky nepotřebujeme znát. Důležitá je co nejpřesnější hodnota periody.
4. Změření vzdálenosti břitů.

Podmínky experimentu

Místo měření: Praha
(Kromě zeměpisné polohy žádný z dalších faktorů nehraje v hodnotě tíhového zrychlení významnou roli.)

Použité měřicí přístroje a pomůcky

Uvedeny v tabulce 1.

Měřicí přístroj	**Nejmenší dílek**
Elektronický čítač	10^{-4} s
Pásové měřidlo	1 mm
Posuvné měřítko	0,1 mm
Váha 1	0,1 g
Váha 2	10^{-4} g

Tabulka 1: Použité měřicí přístroje

10 T_{Mi} [s]	T_{Mi} [s]	σ_i [s]
20.0545	2.0055	2.4e-005
20.0575	2.0057	0.000276
20.0543	2.0054	4.4e-005
20.0557	2.0056	9.6e-005
20.0541	2.0054	6.4e-005
20.0546	2.0055	1.4e-005
20.0544	2.0054	3.4e-005
20.0536	2.0054	0.000114
20.0556	2.0056	8.6e-005
20.0531	2.0053	0.000164

Tabulka 2: Naměřené hodnoty period kmitů matematického kyvadla T_{Mi}. σ_i jsou odchylky od střední hodnoty

Naměřené hodnoty

Matematické kyvadlo

Z tabulky 2 lze vypočítat:

$$T_M = (2{,}0055 \pm 0{,}0001)\,\mathrm{s}$$

Dále bylo naměřeno:

$$L = (974 \pm 2)\,\mathrm{mm} \quad r = (11{,}7 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm} \quad h = (7{,}9 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm}$$

Ze vztahu (6) se potom vypočte tíhové zrychlení

$$g_M = (9{,}75 \pm 0{,}02)\,\mathrm{ms}^{-2}, \text{ s relativní chybou } \eta_M = 0{,}2\,\%$$

Fyzické kyvadlo

Budeme-li považovat kuličku na niti za fyzické kyvadlo, pak využijeme vztah (7). Vezmeme zřejmě $T_F = T_M$. Dále bylo naměřeno

$$m_k = (55{,}5 \pm 0{,}1)\,\mathrm{g} \quad m_t = (0{,}0622 \pm 0{,}0001)\,\mathrm{g}$$

Pak dostáváme tíhové zrychlení

$$g = (9{,}74 \pm 0{,}03)\,\mathrm{ms}^{-2}, \text{ s relativní chybou } \eta_F = 0{,}3\,\%$$

Porovnání modelů matematického a fyzického kyvadla

Považováním fyzického kyvadla za matematické jsme se dopustili relativní systematické chyby dané vztahem (8), tedy

$$\eta_{sys} = \ -0{,}1\%.$$

Reverzní kyvadlo

x [mm]	10 T_1 [s]	T_1 [s]	10 T_2 [s]	T_2 [s]
80.2	20.1242	2.0124	20.5539	2.0554
30	19.7236	1.9724	18.3556	1.8356
60.75	20.0126	2.0013	19.894	1.9894
70.4	20.0728	2.0073	20.2388	2.0239
70	20.0392	2.0039	20.0286	2.0029
70.1	20.0449	2.0045	20.0405	2.0041
70.1	20.0399	2.004	20.0432	2.0043
70.1	20.0418	2.0042	20.0435	2.0044
70.1	20.0495	2.005	20.0446	2.0045
70.1	20.0448	2.0045	20.0402	2.004

Tabulka 3: Naměřené periody T_1 pro polohu čočky dole a T_2 pro čočku nahoře. Vzdálenost x čočky od břitu je zde pouze pro ilustraci.

Naměřené hodnoty period jsou zdokumentovány v tabulce 3. U tohoto měření mělo smysl provádět grafickou interpolaci pouze v prvních 5 krocích, a to z důvodu omezené přesnosti posuvného měřítka a omezené možnosti přesného nastavení čočky (dotažení šroubů apod.) Pro poslední polohu čočky byla perioda změřena vícekrát, tyto hodnoty byly zprůměrovány, z čehož byla stanovena výsledná perioda T a odchylky σ.
Z tabulky 4 vypočítáme

$$T = (2{,}0043 \pm 0{,}0001)\,\mathrm{s}$$

Dále byla naměřena vzdálenost břitů $D = l_r$ s výsledkem

$$l_r = (994 \pm 1)\,\mathrm{mm}$$

Ze vztahu (10) určíme tíhové zrychlení

$$g_r = (9{,}77 \pm 0{,}01)\,\mathrm{ms}^{-2},$$

s relativní chybou $\eta_r = 0{,}1\,\%$.

Diskuse

Všechny hodnoty tíhového zrychlení byly naměřeny s poměrně malou relativní statistickou chybou. To je způsobeno použitím přesných měřicích přístrojů (analytické váhy, čítač -

$10T_1$[s]	T_1[s]	σ [s]	10 T_2 [s]	T_2 [s]	σ [s]
20.0449	2.0045	7.2e-005	20.0405	2.0041	0.00019
20.0399	2.004	0.000428	20.0432	2.0043	8e-005
20.0418	2.0042	0.000238	20.0435	2.0044	0.00011
20.0495	2.005	0.000532	20.0446	2.0045	0.00022
20.0448	2.0045	6.2e-005	20.0402	2.004	0.00022

Tabulka 4: Tabulka naměřených hodnot periody pro nalezenou správnou polohu čočky, kdy $T_1 = T_2$. σ jsou opět odchylky od aritmetického průměru T, který je počítán přes hodnoty T_1 i T_2 v této nalezené poloze.

díky němuž není měření zatíženo reakční dobou experimentátora, posuvné měřidlo). To, že se naměřené hodnoty liší od tabulkové hodnoty (dle [2] je tíhové zrychlení pro Prahu asi 9,81 ms^{-2}) nad rámec chyby měření, musí tedy být způsobeno chybou systematickou. Prvním možným pachatelem této systematické chyby je rozkmit. Jeho velikost jsem testovala pouze na začátku, nikoliv při každém jednotlivém měření, takže v průběhu experimentu mohl být i větší. Při uvažování většího rozkmitu α by podle (1) vycházelo tíhové zrychlení větší. U matematického kyvadla se navíc mohlo stát, že naměřená délka vlákna je menší, než je ve skutečnosti. Tuto délku jsem totiž měřila až v nenapjatém stavu. Když na vlákně visela kulička, bylo díky zatížení delší, a tak podle (6) mělo zrychlení g_M vyjít větší než vyšlo. Kdybychom ještě k tomu vzali do úvahy odpor vzduchu, získané hodnoty tíhového zrychlení by ještě trochu vzrostly.

Závěr

Metodou reverzního kyvadla jsem naměřila hodnotu tíhového zrychlení

$$g_r = (9{,}77 \pm 0{,}01)\,\mathrm{ms}^{-2},$$

metodou matematického kyvadla jsem dospěla k hodnotě

$$g_M = (9{,}75 \pm 0{,}02)\,\mathrm{ms}^{-2}.$$

Odlišnost obou hodnot od tabulkové hodnoty je způsobena systematickou chybou.
Použitím modelu matematického kyvadla se vzhledem k fyzickému kyvadlu (pro danou kuličku a vlákno) dopouštíme chyby asi 0,1%.

Reference

[1] Studijní text k Fyzikálnímu praktiku I, Úloha XXI
http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt121.htm

[2] G. W. C. Kaye, T. H. Laby, Tables of Physical and Chemical Constants, Longman, London 1966

[3] J. Englich, prezentace k semináři Úvod do praktické fyziky
http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/mereni.zip