XXI Měření tíhového zrychlení

Pracovní úkol

1. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou matematického kyvadla.
2. Změřte závislost doby kmitu fyzického kyvadla na poloze čočky. Měření proveďte pro obě osy otáčení. Graficky znázorněte.
3. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou reverzního kyvadla.
4. Vypočítejte chybu, které se dopouštíte idealizací reálného kyvadla v rámci modelu kyvadla matematického. Srovnejte moment setrvačnosti reálného kyvadla s jeho matematickou idealizací.
5. Vypočítejte vzdálenost těžiště reálného kyvadla od osy otáčení a porovnejte s délkou matematického kyvadla.

Teorie

Fyzické kyvadlo

Libovolné těleso se může v tíhovém poli Země kývat kolem osy neprocházející jeho těžištěm, přičemž jeho periodu T_F lze aproximativně vyjádřit vztahem[1]

$$T_F = 2\pi\sqrt{\frac{J_F}{m g_F d}}\left(1 + \frac{1}{4} sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \tag{1}$$

kde J_F je moment setrvačnosti vůči ose otáčení, m je hmotnost kyvadla, d vzdálenost těžiště od osy otáčení, g místní tíhové zrychlení a α maximální úhlová výchylka těžiště z rovnovážné polohy.
Takové kyvadlo se nazývá fyzické kyvadlo.

Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo je idealizovaným modelem tvořeným hmotným bodem o hmotnosti m_k umístěným na konci nehmotného závěsu délky l, který se může volně otáčet kolem osy procházející druhým koncem závěsu.

Pro moment setrvačnosti J_M matematického kyvadla platí

$$J_M = m_k l^2 \tag{2}$$

Periodu T_M matematického kyvadla lze pro malé výchylky vypočítat ze vztahu

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_M}} \tag{3}$$

V našem případě představuje kyvadlo těžkou kouli kývající se na tenkém, lehkém a pevném vlákně, čímž se velmi přibližujeme podmínkám, za kterých byl odvozen vztah (3).
Tíhové zrychlení pak můžeme vyjádřit jako

$$g_M = \frac{4\pi^2 l}{{T_M}^2} \tag{4}$$

Otázkou zůstává, jaké chyby se dopouštíme, měříme-li tíhové zrychlení s využitím modelu matematického kyvadla místo fyzického kyvadla.
K výpočtu této chyby potřebujeme znát moment setrvačnosti kyvadla a vzdálenost těžiště od osy otáčení.

Pro moment setrvačnosti homogenní koule o poloměru r a hmotnosti m_k vůči ose procházející těžištěm platí vztah

$$J_{0koule} = \frac{2}{5} m_k r^2 \tag{5}$$

Pro moment setrvačnosti homogenní tyče délky L a hmotnosti m_t vzhledem k ose kolmé k délce tyče a procházející těžištěm platí vztah

$$J_{0tyč} = \frac{1}{12} m_t L^2 \tag{6}$$

Moment setrvačnosti J vzhledem k libovolné ose je pak podle Steinerovy věty vyjádřen vztahem

$$J = J_0 + Ma^2 \tag{7}$$

kde M je hmotnost tělesa soustředěná v těžišti a a je vzdálenost obou os.

Chybu, které se dopouštíme idealizací, pak vypočítáme pomocí vztahu

$$\sigma_{sys} = \frac{g_F - g_M}{g_F} \tag{8}$$

Reverzní kyvadlo

Fyzické kyvadlo se kývá se stejnou dobou kmitu kolem dvou rovnoběžných os ležících v rovině procházející těžištěm kyvadla, pokud jsou tyto osy od sebe vzdáleny o redukovanou délku fyzického kyvadla.
Nalezneme-li pro kyvadlo dvě rovnoběžné osy ležící v rovině procházející těžištěm tak, že jejich poloha vzhledem k těžišti není symetrická, a kyvadlo kolem nich kývá se stejnou periodou, pak vzdálenost těchto dvou os je redukovanou délkou kyvadla značenou l_r.

Pro dobu kmitu fyzického kyvadla pak platí

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}} \tag{9}$$

Výsledky měření

Podmínky měření v laboratoři jsme stanovili jako:
t = (24,4 ± 0,1) °C
p = (98 500,0 ± 0,1) Pa
φ_r = (28,2 ± 0,1) %

Tyto veličiny však nemají na výsledky měření zásadní vliv.

Matematické kyvadlo

Měření tíhového zrychlení metodou matematického kyvadla jsme realizovali pomocí malého těžkého závaží tvaru koule zavěšeného na pevné, ale lehké, dlouhé niti.

Měřili jsme periodu T_M tohoto kyvadla. Měření bylo prováděno pomocí čítače, který po spuštění začal měřit čas, jakmile kyvadlo prošlo přes optické čidlo, a po vypnutí měření zastavil po opětovném průchodu čidlem. Měřili jsme vždy 10 period.
Výsledky tohoto měření shrnuje Tabulka 1:

Tabulka 1: Perioda matematického kyvadla

Měření	T_M [s]
1	2,0200
2	2,0212
3	2,0214
4	2,0195
5	2,0189
6	2,0201

Chybu měření periody uvažujeme 0,0002 s.

Z takto získaných hodnot jsme stanovili T_M = (2,0202 ± 0,0005) s.

Ze vztahu (4) nyní můžeme určit tíhové zrychlení jako g_M = (9,673 ± 0,097) m·s^{-2}.

Chyba byla vypočítána ze vztahu

$$\sigma_{g_M}{}^2 = \left(\frac{\bar{g}}{l}\right)^2 \sigma_l{}^2 - 2\left(\frac{\bar{g}}{T_M}\right)^2 \sigma_{T_M}{}^2 \tag{10}$$

kde σ_l je chyba určení délky závěsu a σ_{T_M} je chyba určení periody kyvadla.

Reverzní kyvadlo

Reverzní kyvadlo v našem experimentu představuje dlouhá tyč se dvěma břity, na jejímž konci se nachází těžká čočka, jejímž posouváním můžeme upravovat polohu těžiště kyvadla.
Našim cílem je nastavit polohu čočky tak, aby kyvadlo kývalo se stejnou periodou kolem obou břitů; jejich vzdálenost potom můžeme označit jako redukovanou délku kyvadla l_r.

K určení správné polohy čočky bylo užito metody grafické interpolace.
Nejdřív jsme změřili periodu kmitů kolem obou os pro 5 různých poloh čočky. Výsledky jsou vypsány v Tabulce 2a, 2b:

Tabulka 2a: Závislost periody na poloze čočky pro čočku dole

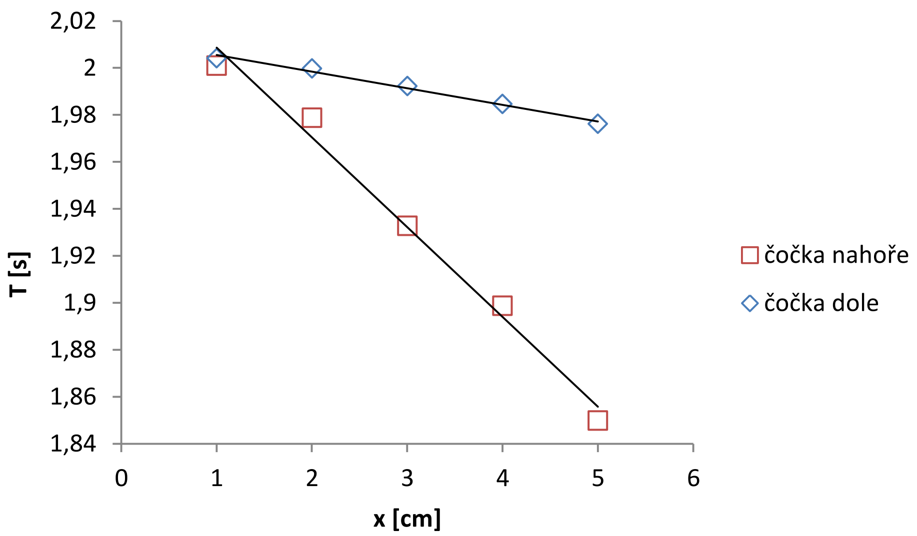
x [cm]	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
T [s]	2,0040	1,9997	1,9922	1,9847	1,9762

Tabulka 2b: Závislost periody na poloze čočky pro čočku nahoře

x [cm]	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
T [s]	2,0010	1,9787	1,9328	1,8987	1,8498

Veličina x zde udává vzdálenost čočky od bližšího konce tyče.
Chyba určení periody je opět ± 0,0002 s, chyba určení polohy čočky ± 0,2 cm.

Výsledek grafické interpolace ukazuje Graf 1:



Graf 1: Grafická interpolace

Z grafu vidíme, že polohu čočky bychom měli nastavit na přibližně 1,1 cm.

Po korekci jsme změřili dobu kmitu pětkrát pro každou osu a z dílčích výsledků vypočítali celkovou střední hodnotu periody T. Výsledky jsou shrnuty v Tabulce 3:

Tabulka 3: Perioda reverzního kyvadla

Čočka nahoře					
Měření	1	2	3	4	5
T [s]	2,0041	2,0042	2,0043	2,0042	2,0044
Čočka dole					
Měření	1	2	3	4	5
T [s]	2,0044	2,0043	2,0040	2,0041	2,0044

Určíme tedy periodu reverzního kyvadla jako T = (2,0042 ± 0,0002) s.

Vzdálenost obou břitů, tedy redukovanou délku kyvadla, jsme pomocí pásma určili jako l_r = (100 ± 1) cm.

Ze vztahu (9) nyní určíme velikost tíhového zrychlení jako g = (9,828 ± 0,098) $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Chyba je určena analogicky dle vztahu (10).

Na závěr uveďme pro porovnání tabelovanou[2] hodnotu g = 9,814 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ pro Prahu.

Matematické vs. fyzické kyvadlo

Zajímalo by nás, jaké systematické chyby se dopouštíme, používáme-li při výpočtu tíhové zrychlení místo vztahů pro fyzické kyvadlo model matematického kyvadla.

Byly určený následující hodnoty:

Hmotnost závaží m_k= (62,3 ± 0,1) g
Hmotnost závěsu m_t= (0,490 ± 0,003) g
Délka závěsu l = L = (100 ± 1) cm
Poloměr závaží r = (13,10 ± 0,01) mm

Moment setrvačnosti matematického kyvadla J_M určíme podle vztahu (2) jako
J_M = (0,0623 ± 0,0001) $\mathrm{kg \cdot m^2}$.

Moment setrvačnosti J_F můžeme vyjádřit na základě vztahu (7) jako

$$J_F = \frac{2}{5} m_k r^2 + m_k (L + r)^2 + \frac{1}{12} m_t L^2 + m_t \left(\frac{L}{2}\right)^2 \tag{11}$$

Dostaneme hodnotu J_F = (0,0641 ± 0,0001) kg·m². Chyba je zde víceméně odhadem.

Vidíme, že hodnoty momentů setrvačnosti se příliš neliší, což znamená, že matematické kyvadlo je v tomto případě poměrně přijatelnou aproximací.

Vzdálenost d odhadneme jako součet délky nitě l a poloměru r, tedy dostáváme d = (101,31 ± 1,1) cm (délka háčku nebyla měřena).

Zanedbáme-li výchylku kyvadla (předpokládáme, že je menší než 5°), můžeme ze vztahu (1) vypočítat velikost tíhového zrychlení jako g_F = (9,747 ± 0,096) m·s⁻², kde chybu vypočítáme ze vztahu

$$\sigma_{g_F}{}^2 = \left(\frac{\bar{g}}{J_F}\right)^2 \sigma_{J_F}{}^2 - 2\left(\frac{\bar{g}}{T_M}\right)^2 \sigma_{T_M}{}^2 - \left(\frac{\bar{g}}{m}\right)^2 \sigma_m{}^2 - \left(\frac{\bar{g}}{d}\right)^2 \sigma_d{}^2 \tag{12}$$

kde za m dosazujeme $m_k + m_t$.

Systematickou chybu σ_{sys} vypočítáme ze vztahu (8).

Zjišťujeme, že činí asi 0,76%.

Diskuze výsledků

Hodnoty tíhového zrychlení vypočítané pomocí reverzního a fyzického kyvadla v rámci chyby odpovídají tabelované hodnotě tíhového zrychlení. Tíhové zrychlení změřené pomocí matematického kyvadla se od tabelované hodnoty liší o víc než 1σ, ale o méně než 2σ.
U matematického kyvadla bylo hlavním zdrojem nepřesnosti zanedbání rozměrů závaží a hmotnosti závěsu.
U reverzního kyvadla je nejvýznamnějším zdrojem chyby nepřesné nastavení polohy čočky, v důsledku čehož nemuselo kyvadlo kývat kolem obou os se shodnou periodou.
Vyšší přesnosti by se dalo dosáhnout také lepší korekcí výchylek kyvadla nebo započítáním odporu vzduchu, který na kyvadlo působí.
Nejméně se do nepřesnosti výsledku promítlo měření doby period, použití čítače totiž eliminovalo chybu v důsledku reakčního času experimentátora.

Závěr

Za pomocí modelu matematického kyvadla jsme určili velikost tíhového zrychlení g_M = (9,673 ± 0,097) m·s^{-2}, měřením pomocí reverzního kyvadla jsme získali hodnotu tíhového zrychlení g = (9,828 ± 0,098) m·s^{-2}. Zjistili jsme, že použitím matematického kyvadla místo fyzického se dopouštíme chyby asi 0,76%.

Seznam použité literatury

[1] Kolektiv ZFP KVOF MFF UK. Studijní text k Měření tíhového zrychlení [cit. 27. 3. 2018]. URL: http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_121.pdf

[2] Wikipedie, otevřená encyklopedie. Tíhové zrychlení [cit. 27. 3. 2018]. URL: https://cs.wikipedia.org/wiki/T%C3%ADhov%C3%A9_zrychlen%C3%AD