1 Pracovní úkol

1. Změřte momenty setrvačnosti kvádru vzhledem k hlavním osám setrvačnosti.
2. Určete složky jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy rotace kvádru v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti.
3. Vypočítejte moment setrvačnosti kvádru vzhledem k zadané obecné ose rotace. Výsledek ověřte měřením.
4. Měrně ověřte Steinerovu větu.

2 Teoretický úvod

Pro měření momentu setrvačnosti tuhého tělesa lze užít metody torzních kmitů, která spočívá v zavěšení tělesa na torzní závěs (standardně ocelový drát) a následném rozkývání kolem osy procházející drátem.

2.1 Torze

Z Hookeova zákona vyplývá (podle [5]), že moment síly, kterým drát působí na tuhé těleso, je přímo úměrný úhlovému vychýlení φ z rovnovážné polohy (podle osy otáčení) a konstantou úměrnosti je direkční moment drátu D, který závisí na jeho parametrech (délce, poloměru a modulu pružnosti ve smyku). Podle [3] tedy můžeme psát

$$\ddot{\varphi} = \frac{D}{I}\varphi \,, \tag{1}$$

kde I je moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení. Tato pohybová rovnice teoreticky platí pro libovolnou úhlovou výchylku, ale protože při větších deformacích přestává platit Hookeův zákon případně může dokonce dojít k permanentnímu poškození drátu, omezíme se na nevelké úhlové výchylky (ne víc, jak 90°). Řešením této pohybové rovnice můžeme snadno dostat výraz pro periodu (podle [1]), která nezávisí na maximální výchylce

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \,. \tag{2}$$

Jediný problém je, že direkční moment není známý. Lze jej ale z rovnic eliminovat, pokud necháme na stejném vlákně kmitat druhé těleso o známém momentu setrvačnosti. Podělením vztahů (2) pro jednotlivé tělesa a následnou algebraickou úpravou dostáváme

$$I = \frac{T^2}{T_{\mathrm{T}}^2} I_{\mathrm{T}} \,, \tag{3}$$

kde I_{T} je známý moment setrvačnosti druhého tělesa a T_{T} je jeho perioda kmitů. Jako referenční těleso bude použit homogenní válec o poloměru R a hmotnosti M. Jeho moment setrvačnosti I_{v} vůči jeho ose je dán vztahem [3]

$$I_{\mathrm{v}} = \frac{1}{2} M R^2 \,. \tag{4}$$

Složením (3) a (4) máme

$$I = \frac{T^2}{2T_{\mathrm{T}}^2} M R^2 \,. \tag{5}$$

2.2 Moment setrvačnosti obecně

Moment setrvačnosti je obecně tenzor druhého řádu, jehož složky lze rozložit do jednotlivých (hlavních) os tvořících ortonormální bázi. Moment setrvačnosti vůči obecné ose procházející těžištěm, která je určena jednotkovým vektorem, jehož složky v_x, v_y a v_z leží na příslušných hlavních osách, lze složit následujícím vztahem

$$I = v_x^2 I_x + v_y^2 I_y + v_z^2 I_z \,, \tag{6}$$

kde I_x, I_y a I_z jsou momenty setrvačnosti vůči hlavním osám [1].

Pro homogenní kvádr jsou hlavní osy kolmé na jeho stěny a samozřejmě prochází těžištěm (středem kvádru) [1]. Stačí tedy znát momenty setrvačnosti kolem tří hlavních os a potom moment setrvačnosti kvádru vzhledem k jeho libovolné ose lze dopočíst jednoduchou geometrií. Pro tělesovou úhlopříčku jsou jednotlivé složky vektoru následující

$$v_{x\mathrm{t}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \,, \tag{7}$$

$$v_{y\mathrm{t}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \,, \tag{8}$$

$$v_{z\mathrm{t}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \,, \tag{9}$$

kde a, b a c jsou délky stran kvádru. Pro přehlednost je při měření budeme značit tak, aby $a > b > c$. Pro jednotkový vektor ve směru stěnové úhlopříčky (posunuté tak, aby procházela středem kvádru) kolmé na stranu c platí

$$v_{x\mathrm{s}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \,, \tag{10}$$

$$v_{y\mathrm{s}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \,, \tag{11}$$

$$v_{z\mathrm{s}} = 0. \tag{12}$$

2.3 Steinerova věta

Steinerova věta [3] udává vztah mezi momentem setrvačnosti I_0 tuhého tělesa vzhledem k ose procházející těžištěm a momentem setrvačnosti I_2 vzhledem k ose s ní rovnoběžnou

$$I_0 = I_2 - md^2 \,, \tag{13}$$

kde m je hmotnost tuhého tělesa a d je vzdálenost os.

Pro periodu kmitu T_K fyzického kyvadla platí [1]

$$T_\mathrm{K} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\mathrm{K}}{mgd_\mathrm{K}}} \,, \tag{14}$$

kde m je hmotnost kyvadla, I_K je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení a d_K je vzdálenost těžiště od osy otáčení

$$I_\mathrm{K} = \frac{mgdT_\mathrm{K}^2}{4\pi^2} \,. \tag{15}$$

3 Měření

Z důvodu minimalizace chyby měřidla (tedy lidské reakce spínání stopek) byl měřen vždy čas deseti nebo dvaceti period. Skutečnou hodnotu periody pak dostaneme jednoduše vydělením deseti, resp. dvaceti. Každé měření bylo prováděno třikrát z důvodu eliminace hrubých chyb (např. nesprávného počtu period).

3.1 Moment setrvačnosti kvádru

Měřené těleso sice nebyl přesný kvádr, ale naše výpočty nezáleží na tvaru měřeného tělesa, protože nikde nepoužíváme vzorec pro moment setrvačnosti kvádru, jen měříme momenty vůči jednotlivým hlavním osám. Měřeným tělesem byl hranol, jehož podstava měla tvar osmiúhelníku, což byl vlastně obdélník s „uříznutými rohy“. Těleso bylo s dostatečnou přesností symetrické, takže hlavní osy zůstávají stejné (jakoby to byl kvádr). Protože u symetrických těles jsou hlavní osy totožné s osami symetrie. Pro další výpočty jsou důležité pouze hlavní tři rozměry kvádru. Přesné parametry „usekaných“ částí nejsou důležité.

Délky jednotlivých stran „kvádru“ byly měřeny posuvným měřidlem s uvedenou přesností 0,03 mm. Měření bylo opakováno pokaždé pětkrát na různých místech, protože „kvádr“ není vyrobený tak, že jeho šířka, resp. tloušťka, resp. délka je ve všech místech úplně stejná, jak je vidět z naměřených hodnot, někde se až o desetiny milimetru liší. V tabulce jsou uvedeny naměřené rozměry kvádru a průměr $2R$ referenčního válce.

Tabulka 1: Rozměry těles

měření	$\frac{a}{\text{mm}}$	$\frac{b}{\text{mm}}$	$\frac{c}{\text{mm}}$	$\frac{2R}{\text{mm}}$
1	$127{,}83 \pm 0{,}03$	$64{,}02 \pm 0{,}03$	$19{,}02 \pm 0{,}03$	$107{,}99 \pm 0{,}03$
2	$127{,}81 \pm 0{,}03$	$63{,}97 \pm 0{,}03$	$19{,}05 \pm 0{,}03$	$107{,}98 \pm 0{,}03$
3	$127{,}85 \pm 0{,}03$	$63{,}99 \pm 0{,}03$	$19{,}16 \pm 0{,}03$	$107{,}96 \pm 0{,}03$
4	$127{,}86 \pm 0{,}03$	$63{,}99 \pm 0{,}03$	$19{,}07 \pm 0{,}03$	$107{,}97 \pm 0{,}03$
5	$127{,}90 \pm 0{,}03$	$64{,}03 \pm 0{,}03$	$19{,}04 \pm 0{,}03$	$107{,}97 \pm 0{,}03$
průměr	$127{,}85 \pm 0{,}04$	$64{,}00 \pm 0{,}03$	$19{,}07 \pm 0{,}04$	$107{,}97 \pm 0{,}03$

Na posledním řádku je uveden aritmetický průměr naměřených hodnot včetně nejistoty spočítané složením chyby měřidla a výběrové směrodatné odchylky aritmetického průměru (podle [4] str. 16). Ve všech případech je směrodatná odchylka menší, než chyba měřidla (avšak řádově podobná). Byl naměřen i průměr drátu (mikrometrem), na kterém byla tělesa zavěšena, $d_\mathrm{d} = (0{,}510 \pm 0{,}005)$ mm, ale ve výpočtech nevystupuje, takže dále nebude potřeba.

Dále byly naměřeny následující hodnoty period pro jednotlivé závěsy. Jelikož doba deseti resp. dvaceti period byla měřena stopkami, je u hodnot uvedena chyba lidské reakce 0,3 s.

Tabulka 2: Perioda pro různé závěsy

měření	$\frac{10T_\mathrm{a}}{\text{s}}$	$\frac{10T_\mathrm{b}}{\text{s}}$	$\frac{10T_\mathrm{c}}{\text{s}}$	$\frac{10T_\mathrm{u}}{\text{s}}$	$\frac{20T_\mathrm{v}}{\text{s}}$
1	$38{,}9 \pm 0{,}3$	$71{,}2 \pm 0{,}3$	$79{,}2 \pm 0{,}3$	$47{,}7 \pm 0{,}3$	$148{,}1 \pm 0{,}3$
2	$39{,}0 \pm 0{,}3$	$71{,}1 \pm 0{,}3$	$79{,}5 \pm 0{,}3$	$47{,}7 \pm 0{,}3$	$148{,}1 \pm 0{,}3$
3	$39{,}0 \pm 0{,}3$	$71{,}1 \pm 0{,}3$	$79{,}3 \pm 0{,}3$	$47{,}7 \pm 0{,}3$	$148{,}2 \pm 0{,}3$
průměr	$39{,}0 \pm 0{,}3$	$71{,}1 \pm 0{,}3$	$79{,}3 \pm 0{,}3$	$47{,}7 \pm 0{,}3$	$148{,}1 \pm 0{,}3$

T_a, T_b a T_c jsou periody kmitu kolem příslušných hlavních os, T_u je perioda kmitu kolem úhlopříčky a T_v je perioda kmitu referenčního válce. Vidíme, že měření ani nebylo potřeba provádět třikrát, protože směrodatná odchylka je malá v porovnání s chybou měřidla (reakčním časem). Po přepočtení na jednu periodu dostáváme

$$T_\mathrm{a} = (3{,}90 \pm 0{,}03)\ \mathrm{s}\,, \tag{16}$$

$$T_\mathrm{b} = (7{,}11 \pm 0{,}03)\ \mathrm{s}\,, \tag{17}$$

$$T_\mathrm{c} = (7{,}93 \pm 0{,}03)\ \mathrm{s}\,, \tag{18}$$

$$T_\mathrm{u} = (4{,}77 \pm 0{,}03)\ \mathrm{s}\,, \tag{19}$$

$$T_\mathrm{v} = (7{,}41 \pm 0{,}02)\ \mathrm{s}\,. \tag{20}$$

Hmotnost referenčního válce byla naměřena na laboratorních vahách

$$M = (903{,}6 \pm 0{,}1)\ \mathrm{g}\,. \tag{21}$$

Jeho poloměr je znám z předchozího měření

$$R = (53{,}99 \pm 0{,}02)\ \mathrm{mm}\,. \tag{22}$$

Dosazením hodnot do (5) lze spočítat momenty setrvačností příslušející jednotlivým osám

$$I_\mathrm{x} = (3{,}65 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2\,, \tag{23}$$

$$I_\mathrm{y} = (12{,}12 \pm 0{,}12) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2\,, \tag{24}$$

$$I_\mathrm{z} = (15{,}08 \pm 0{,}14) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2\,, \tag{25}$$

$$I_\mathrm{u} = (5{,}46 \pm 0{,}09) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2\,, \tag{26}$$

kde jednotlivé chyby jsou vypočítány Gaussovým zákonem o šíření chyb (podle [4]), tedy jako odmocnina ze součtu druhých mocnin součinů parciálních derivací daného výrazu podle každé veličiny a její příslušné chyby.[1]

3.2 Složky jednotkového vektoru

Jelikož „kvádr“ nebyl zavěšen tak, aby závěs a tělesová úhlopříčka ležely na jedné přímce, nýbrž byl zavěšen tak že by osa procházela středy dvou protilehlých hran (pokud by neměl uřezané rohy). Proto je potřeba příslušné složky vektoru udávajícího směr osy otáčení počítat podle vztahů (10), (11), (12) a ne podle vztahů pro tělesovou úhlopříčku (7), (8), (9).

$$v_\mathrm{xs} = 0{,}8940 \pm 0{,}0003\,, \tag{27}$$

$$v_\mathrm{ys} = 0{,}4476 \pm 0{,}0002\,, \tag{28}$$

$$v_\mathrm{zs} = 0\,. \tag{29}$$

Chyby jsou spočítané podle Gaussova zákona šíření nejistot (parciální derivace).

3.3 Moment setrvačnosti k obecné ose

Nyní lze ze znalosti složek jednotkového vektoru udávajícího směr osy otáčení určit moment setrvačnosti vůči této ose podle vztahu (6)

$$I'_\mathrm{u} = (5{,}35 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2\,. \tag{30}$$

[1]Tedy $\sigma_\mathrm{I} = \sqrt{\left(\frac{TMR^2}{T_\mathrm{T}^2}\sigma_\mathrm{T}\right)^2 + \left(\frac{MR^2T^2}{T_\mathrm{T}^3}\sigma_{\mathrm{T}_\mathrm{T}}\right)^2 + \left(\frac{R^2T^2}{2T_\mathrm{T}^2}\sigma_\mathrm{M}\right)^2 + \left(\frac{MRT^2}{T_\mathrm{T}^2}\sigma_\mathrm{R}\right)^2}$, kde σ značí chybu příslušné veličiny.

3.4 Ověření Steinerovy věty

Nejprve byla měřená tyč rozkmitána kolem osy závěsu procházející jejím těžištěm. Měřena byla časová délka dvaceti period T_t třikrát

Tabulka 1: Naměřené hodnoty period tyče

$\frac{20T_\mathrm{t}}{\mathrm{s}}$
215,7±0,3
215,9±0,3
215,9±0,3

Z toho dostáváme

$$T_\mathrm{t} = (10{,}79 \pm 0{,}02)\ \mathrm{s}\,. \tag{31}$$

Stejným způsobem jako výše spočítáme moment setrvačnosti I_t měřené tyče vůči ose závěsu.

$$I_\mathrm{t} = (2{,}79 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{m}^2\,. \tag{32}$$

Pro ověření Steinerovi věty je třeba změřit moment setrvačnosti okolo jiné osy (neprocházející těžištěm). Proto následně byla tyč zavěšena za koncový břit a tak tvořila fyzické kyvadlo. S dostatečnou přesností lze předpokládat, že tyč je homogenní a její těžiště je ve středu. Vzdálenost závěsu fyzického kyvadla změříme nepřímo. Naměřená vzdálenost d_t vnitřních hran břitů (jednotlivých bodů závěsu) byla naměřena svinovacím metrem s přesností 0,5 mm

$$d_\mathrm{t} = (31{,}40 \pm 0{,}05)\ \mathrm{cm}\,. \tag{33}$$

Za předpokladu, že břity jsou umístěny symetricky vzhledem k těžišti[2] lze vzdálenost těžiště a bodu závěsu d_K spočítat jako polovinu vzdálenosti břitů

$$d_\mathrm{K} = (15{,}45 \pm 0{,}03)\ \mathrm{cm}\,. \tag{34}$$

Perioda fyzického kyvadla byla změřena dvakrát pro dva různé závěsy (tyč má dva konce resp. dva závěsné břity) z důvodu potvrzení symetrie tyče. Jelikož perioda takto vzniklého fyzického kyvadla je výrazně menší než perioda dříve měřených torzních kyvadel, byl měřen čas čtyřiceti period. V následující tabulce T_K1 a T_K2 značí periody kyvadla pro jednotlivé závěsy (každý za jiný konec tyče)

Tabulka 2: Periody tyče jako fyzického kyvadla

$\frac{40T_\mathrm{K1}}{\mathrm{s}}$	$\frac{40T_\mathrm{K2}}{\mathrm{s}}$
37,7±0,3	37,7±0,3
37,6±0,3	37,6±0,3

Můžeme tedy s dostatečnou přesností uvést, že pro periodu T_K fyzického kyvadla okolo osy vzdálené d od těžiště, platí

$$T_\mathrm{K} = (0{,}943 \pm 0{,}008)\ \mathrm{s}\,. \tag{35}$$

[2]To ověříme níže.

Hmotnost tyče m změřená pomocí vah s přesností 0,1 g je

$$m = (281{,}3 \pm 0{,}1)\ \mathrm{g}\,. \tag{36}$$

Podle (15) dostáváme moment setrvačnosti I_K ose procházející bodem závěsu kyvadla

$$I_\mathrm{K} = (9{,}59 \pm 0{,}14) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2\,, \tag{37}$$

kde je za tíhové zrychlení dosazena standardní hodnota pro Prahu a odchylka je stejně jako výše spočítána podle zákona šíření chyb. Byla použita hodnota tíhového zrychlení pro Prahu uvedená v tabulkách [3]

$$g = (9{,}810 \pm 0{,}001)\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}\,. \tag{38}$$

Nyní zbývá jen podle Steinerovy věty dopočítat moment setrvačnosti tyče I_t2 vzhledem k ose procházející těžištěm

$$I_\mathrm{t2} = (2{,}87 \pm 0{,}14) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{m}^2\,. \tag{39}$$

4 Diskuze výsledků

4.1 Moment setrvačnosti kvádru

Pomocí obou metod byl moment setrvačnosti kvádru vzhledem k ose procházející kvádrem úhlopříčně s přesností na 1,6 %, resp 1 %. Obě hodnoty se liší o přibližně 2 %, lze tedy konstatovat, že v rámci součtu obou odchylek se hodnoty shodují.

Největší nejistotu do měření vnáší nepřesnost měření periody kyvadel. Sice bylo měřeno deset až čtyřicet period současně, ale chyba lidské reakce i tak přinášela nejistotu až 1 % a jelikož ve vzorci pro výpočet momentu setrvačnosti (5) se perioda vyskytuje v druhé mocnině, byl vliv této chyby největší. Chyba měření délky posuvným měřidlem i měření hmotnosti vahami byla řádově menší.

Pro zvýšení přesnosti měření bychom tedy museli zvýšit přesnost měření času buď eliminováním vlivu lidské reakce (např. měřením pomocí laseru či jiných digitálních senzorů) nebo zvýšením počtu měřených period. Ačkoliv jsme omezeni maximální výchylkou torzního kyvadla cca 90°, jeho útlum je poměrně malý a bez problému by vydrželo kmitat i mnohem více period v kuse.

Další nepřesnost pravděpodobně byla způsobena tím, že při šikmém závěsu kvádru neprocházela osa otáčení přesně jeho (posunutou) stěnovou úhlopříčkou, protože nešlo určit, zda by vlákno procházelo pomyslnou hranou „kvádru“, která by tam byla, kdyby „kvádr“ nebyl ořezaný. Tedy by pak neseděl přesně náš výpočet složek vektoru udávajícího osu otáčení.

4.2 Steinerova věta

V rámci nejistot byla Steinerova věta ověřena.

V ideálním případě by tyč měla být kolmá na závěs (tedy vodorovná), ale použitá tyč nebyla úplně přesně vybalancovaná, takže během experimentu mohla být mírně (odhadem ne víc, než 5°) nakloněna, což se ve výpočtech mohlo projevit tak, že metodou torzních kmitů byl naměřen menší moment setrvačnosti.

Naopak věc, která nemá na výslednou odchylku téměř žádný vliv je měření hmotnosti. Chyba způsobená nepřesností vah je v porovnání s chybou jiných měřidel řádově menší.

4.3 Pracovní podmínky

Pracovní podmínky jsou v tomto experimentu velmi irelevantní. Na teplotě výsledky nezáleží, pokud se během měření výrazně nemění (tak, že by změnila například délka ocelového závěsného lana, rozměry měřených těles nebo modul pružnosti lana, ale tím se nemá smysl zabývat, protože je to změna v úplně jiných řádech, než je naše odchylka měření). Na tlaku i teplotě závisí hustota vzduchu, tedy i odpor vzduchu a koeficient útlumu kyvadla. Kyvadlo však nedosahovalo velkých rychlostí, proto byl řád chyby způsobené tímto faktorem výrazně menší než odchylky měření a jakékoliv tlumení bylo ve všech výpočtech výše zanedbáno.

4.4 Závěr

Metodou torzních kmitů byly naměřeny následující hodnoty momentů setrvačnosti *kvádru* vzhledem k hlavním osám

$$I_\mathrm{x} = (3{,}65 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2\,, \tag{40}$$

$$I_\mathrm{y} = (12{,}12 \pm 0{,}12) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2\,, \tag{41}$$

$$I_\mathrm{z} = (15{,}08 \pm 0{,}14) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2\,. \tag{42}$$

Složky jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy rotace byly vypočteny z naměřených rozměrů tělesa

$$v_\mathrm{xs} = 0{,}8940 \pm 0{,}0003\,, \tag{43}$$

$$v_\mathrm{ys} = 0{,}4476 \pm 0{,}0002\,, \tag{44}$$

$$v_\mathrm{zs} = 0\,. \tag{45}$$

Z toho byl vyjádřen moment setrvačnosti vzhledem k této ose

$$I_\mathrm{u} = (5{,}46 \pm 0{,}09) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \tag{46}$$

a následně ověřen nezávislou metodou měření

$$I'_\mathrm{u} = (5{,}35 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2\,. \tag{47}$$

V rámci chyb se výsledky schodují.

Nakonec byla ověřena Steinerova věta. Metodou torzních kmitů byl naměřen moment setrvačnosti tyče

$$I_\mathrm{t} = (2{,}79 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{m}^2\,. \tag{48}$$

Metodou fyzického kyvadla a následným přepočítáním momentu setrvačnosti podle Steinerovy věty byl nezávislým způsobem určen moment setrvačnosti tyče vůči ose kolmé procházející těžištěm

$$I_\mathrm{t2} = (2{,}87 \pm 0{,}14) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{m}^2\,. \tag{49}$$

Tyto výsledky se také v rámci chyby shodují.[3]

[3] Technická poznámka: v protokolu jsou použity výrazy „nejistota“, „chyba“, „nepřesnost“ a „odchylka“, které reálně nesou různé významy, ale v tomto textu je vším myšlena „nejistota měření“.

5 Seznam použité literatury

[1] SLAVÍNSKÁ, D., I. STULÍKOVÁ a P. VOSTRÝ. *Fyzikální praktikum I - Mechanika a molekulová fyzika.* Praha: SPN, 1989.

[2] BROŽ, J. a KOL. *Základy fyzikálních měření I.* 1. vyd. Praha: SPN, 1983, 669 s.

[3] J. MIKULČÁK, J. CHARVÁT, M. MACHÁČEK a F. ZEMÁNEK. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky & vzorce pro středná školy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003

[4] B. VYBÍRAL. *Zpracování dat fyzikálních měření* Hradec Králové: MAFY, 2002

[5] J. REICHL a M. VŠETIČKA. *Encyklopedie fyziky: Torzní kyvadlo.* 1999. Dostupné také z `http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/913-torzni-kyvadlo`