

1 Pracovní úkoly

1. Změřte momenty setrvačnosti kváдру vzhledem k hlavním osám setrvačnosti.
2. Určete složky jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy rotace kváдру v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti.
3. Vypočítejte moment setrvačnosti kváдру vzhledem k zadané obecné ose rotace. Výsledek ověřte měřením.
4. Měrně ověřte Steinerovu větu.

2 Teoretická část

Při výpočtech budeme potřebovat referenční těleso, jehož moment setrvačnosti kolem osy otáčení známe. My k tomuto účelu využijeme válec s poloměrem podstavy R a hmotností M . Pro moment setrvačnosti válce I_T vzhledem k ose otáčení totožnou s osou válce platí [1]

$$I_T = \frac{1}{2}MR^2 \quad (1)$$

K měření momentu setrvačnosti I vzhledem k ose procházející těžištěm lze pak užít metody torzních kmitů, neboť když necháme na torzním vlákně kmitat těleso o známém momentu setrvačnosti I_T potom pro periodu torzních kmitů T_T platí

$$T_T = 2\pi\sqrt{\frac{I_T}{D}} \quad (2)$$

kde D je direkční moment vlákna.

Analogicky pro těleso, jehož moment setrvačnosti I vzhledem k ose procházející těžištěm neznáme, platí pro periodu torzních kmitů T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad (3)$$

Pomocí rovnic (2) a (3) tak můžeme určit neznámý moment setrvačnosti pouze z měření period a momentu setrvačnosti válce.

$$I = \frac{T^2}{T_T^2} I_T = \frac{T^2}{2T_T^2} MR^2 \quad (4)$$

Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející jeho těžištěm I souvisí s hlavními momenty setrvačnosti tělesa I_x , I_y , I_z vztahem

$$I = v_x^2 I_x + v_y^2 I_y + v_z^2 I_z \quad (5)$$

kde v_x , v_y , v_z jsou složky jednotkového vektoru v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti. Vektor \vec{v} má směr osy, vzhledem ke které má těleso moment setrvačnosti I .

My nejdříve měřením torzních kmitů z rovnice (4) určíme hlavní momenty setrvačnosti kváдру. Když pak zvolíme souřadnicový systém dané hlavními osami kváдру, tak osy x , y , z míří ve směru hran kváдру, jejichž délky v tomto pořadí označíme a , b , c .

Bude nás potom zajímat moment setrvačnosti kváдру I vzhledem k ose otáčení, která prochází těžištěm kváдру a je rovnoběžná se stěnovou úhlopříčkou stěny kváдру s délkou hran a , b . Pro složky jednotkového vektoru v tomto směru osy platí

$$v_x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad v_y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad v_z = 0 \quad (6)$$

Moment setrvačnosti I vzhledem k této ose pak určíme jednak výpočtem z rovnice (5) a výpočet ověříme měřením torzních kmitů vzhledem k této ose podle rovnice (4).

Dále budeme chtít ověřit Steinerovu větu. K tomuto účelu použijeme tyč s hmotností m .

Nejdříve určíme moment setrvačnosti tyče I_t vzhledem k ose procházející těžištěm metodou torzních kmitů. Změříme tedy periodu torzních kmitů tyče T_t a opět využijeme toho, že známe moment setrvačnosti válce. Platí tedy

$$I_t = \frac{T_t^2}{T_T^2} I_T = \frac{T_t^2}{2T_T^2} MR^2 \quad (7)$$

Dále určíme moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose, která je rovnoběžná s osou procházející těžištěm. K tomuto účelu necháme tyč kývat kolem koncového bodu jako fyzické kyvadlo. Vzdálenost obou os označíme d . Pro moment setrvačnosti vůči této ose I_k bude platit

$$I_k = mgd \frac{T_k^2}{4\pi^2} \quad (8)$$

kde g je místní tíhové zrychlení a T_k je perioda kmitů tyče, když kmitá jako fyzické kyvadlo.

Pomocí Steinerovy věty pak můžeme vypočítat moment setrvačnosti tyče vůči ose procházející těžištěm I_t jako

$$I_t = I_k - md^2 \quad (9)$$

Hodnotu I_t tedy jednak určíme měřením ze vztahu (7) bez užití Steinerovy věty a jednak výpočtem ze vztahu (9), kde využíváme Steinerovu větu.

3 Výsledky měření

Měření bylo provedeno při teplotě $25,5^\circ\text{C}$, tlaku $978,1 \text{ hPa}$ a relativní vlhkosti vzduchu $39,4\%$. Ve výpočtech počítám s hodnotou místního tíhového zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Nejdříve jsem na vahách s přesností $0,1 \text{ g}$ změřil hmotnost válce M , hmotnost kvádrů m_k a hmotnost tyče m . Hmotnost kvádrů jsem změřil pouze pro úplnost, ve výpočtech nebude potřeba. Výsledky ukazuje tabulka 1.

Tabulka 1: Hmotnosti použitých těles

$\frac{M}{g}$	$\frac{m_k}{g}$	$\frac{m}{g}$
$903,8 \pm 0,1$	$1\,071,8 \pm 0,1$	$281,4 \pm 0,1$

3.1 Určení momentů setrvačnosti kvádrů

Dále jsem posuvným měřidlem s přesností $0,03\text{ mm}$ změřil průměr použitého válce $2R$ a rozměry použitého kvádrů a , b , c . Naměřené hodnoty ukazuje tabulka 2.

Tabulka 2: Naměřené rozměry válce a kvádrů

$\frac{2R}{mm}$	$\frac{a}{mm}$	$\frac{b}{mm}$	$\frac{c}{mm}$
107,99	127,80	64,01	19,09
107,97	127,82	64,08	19,12
107,98	127,82	64,00	19,11

Z naměřených hodnot jsem určil průměr a chybu měření tradičně jako odmocninu z kvadrátu chyby měřicího přístroje a chyby statistické, tedy např. pro hranu a [2]

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2}{(n-1)n}} + \sigma_P^2 \quad (10)$$

kde chyba měřicího přístroje je $\sigma_P = 0,03\text{ mm}$. Pro ostatní veličiny $2R$, b , c jsem použil analogické rovnice. Pro střední hodnotu poloměru navíc pak platí $\bar{R} = \overline{2R}/2$ a obdobně pro jeho chybu $\sigma_R = \sigma_{2R}/2$. Výsledné rozměry shrnuje tabulka 3.

Tabulka 3: Výsledné hodnoty rozměrů válce a kvádrů

$\frac{R}{mm}$	$\frac{a}{mm}$	$\frac{b}{mm}$	$\frac{c}{mm}$
$53,99 \pm 0,02$	$127,81 \pm 0,03$	$64,03 \pm 0,04$	$19,11 \pm 0,03$

Válec a kvádr jsem poté zavěsil na ocelový drát a změřil periody jejich torzních kmitů. Periody kmitů válce T_T byly měřeny vzhledem k ose procházející osou válce. Periody kvádrů byly měřeny vzhledem k jeho hlavním osám T_x , T_y , T_z , které procházejí středy stran a poté ještě vzhledem k ose, která prochází těžištěm kvádrů a je rovnoběžná se stěnovou úhlopříčkou stěny s délkou hran a a b .

Periody byly měřeny stopkami s přesností $0,01\text{ s}$. Pro větší přesnost jsem vždy měřil deset period. Každé měření jsem opakoval třikrát. Naměřené hodnoty ukazuje tabulka 4.

Tabulka 4: Naměřené hodnoty period torzních kmitů válce a kvádrů

$\frac{10T_T}{s}$	$\frac{10T_x}{s}$	$\frac{10T_y}{s}$	$\frac{10T_z}{s}$	$\frac{10T}{s}$
73,98	38,84	70,90	79,13	47,79
74,20	38,64	71,10	79,16	47,60
74,05	38,97	70,97	79,20	47,39

Z naměřených hodnot jsem určil průměr a chybu výsledku opět jako odmocninu z kvadrátu chyby měřicího přístroje a chyby statistické, tedy např. pro periodu T

$$\sigma_{10T} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (10T_i - \overline{10T})^2}{(n-1)n}} + \sigma_P^2 \quad (11)$$

kde ovšem chyba σ_P kromě chyby měřicího přístroje zahrnuje i mojí reakční dobu, celkově odhaduji její hodnotu na $\sigma_P = 0,2\text{ s}$. Pro ostatní periody jsem použil analogické rovnice. Pro střední hodnotu jedné periody platí $\bar{T} = \overline{10T}/10$, obdobně pro její chybu $\sigma_T = \sigma_{10T}/10$. Výsledné hodnoty period shrnuje tabulka 5.

Tabulka 5: Výsledné hodnoty period torzních kmitů válce a kvádrů

$\frac{T_T}{s}$	$\frac{T_x}{s}$	$\frac{T_y}{s}$	$\frac{T_z}{s}$	$\frac{T}{s}$
$7,41 \pm 0,02$	$3,88 \pm 0,02$	$7,10 \pm 0,02$	$7,92 \pm 0,02$	$4,76 \pm 0,02$

Podle rovnice (4) jsem poté z naměřených period dopočítal hodnoty momentů setrvačnosti kvádrů vzhledem k příslušným osám. Chybu jsem určil ze zákona šíření chyb jako

$$\sigma_{I_i} = \sqrt{\left(\frac{T_i}{T_T^2} MR^2\right)^2 \sigma_{T_i}^2 + \left(\frac{T_i^2}{T_T^3} MR^2\right)^2 \sigma_{T_T}^2 + \left(\frac{T_i^2}{2T_T^2} R^2\right)^2 \sigma_M^2 + \left(\frac{T_i^2}{T_T} MR\right)^2 \sigma_R^2} \quad (12)$$

Výsledky shrnuje tabulka 6.

Tabulka 6: Momenty setrvačnosti kvádrů určené z změřených period torzních kmitů

$\frac{I_x}{10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$	$\frac{I_y}{10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$	$\frac{I_z}{10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$	$\frac{I}{10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$
$3,62 \pm 0,05$	$12,1 \pm 0,1$	$15,0 \pm 0,1$	$5,44 \pm 0,06$

3.2 Určení složek hledaného jednotkového vektoru

Souřadnice jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy rotace kvádrů v soustavě souřadné dané hlavními osami setrvačnosti jsem určil podle rovnic (6). Chybu výsledku pak podle zákona šíření chyb jako

$$\sigma_{v_x} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{ab}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 \sigma_b^2} \quad (13)$$

$$\sigma_{v_y} = \sqrt{\left(\frac{ab}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{a^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 \sigma_b^2} \quad (14)$$

Výsledky ukazují tabulka 7.

Tabulka 7: Složky hledaného jednotkového vektoru

v_x	v_y	v_z
$0,8941 \pm 0,0001$	$0,4479 \pm 0,0002$	0

3.3 Výpočet momentu setrvačnosti kvádrů vzhledem k zadané obecné ose rotace

Vzhledem k zadané ose jsem poté pomocí změřených hlavních momentů setrvačnosti vypočítal moment setrvačnosti podle rovnice (5). Správně bych při počítání chyby pomocí zákona šíření chyb měl počítat přímo s naměřenými hodnotami, vzhledem ke složitosti výrazu jsem se však rozhodl, že k určení chyby využiji rovnice (5). Dostanu tedy

$$\sigma_I = \sqrt{(2v_x I_x)^2 \sigma_{v_x}^2 + (2v_y I_y)^2 \sigma_{v_y}^2 + v_x^4 \sigma_{I_x}^2 + v_y^4 \sigma_{I_y}^2} \quad (15)$$

Celkově jsem takto určil hodnotu momentu setrvačnosti kvádrů vzhledem k zadané ose na $I = (5,32 \pm 0,04) 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

3.4 Ověření Steinerovy věty

Vzdálenost těžiště od osy otáčení, když tyč kmitala jako fyzické kyvadlo, jsem určil tak, že jsem posuvným měřidlem s přesností $0,1\text{ cm}$ změřil vzdálenost břitů a tu pak vydělil dvěma. Celkově jsem tak určil $d = (15,70 \pm 0,05)\text{ cm}$.

Tyč jsem pak nechal kmitat jako fyzické kyvadlo kolem osy procházející koncovým bodem tyče a změřil periodu T_k . Poté jsem střed tyče zavěsil na ocelový drát a změřil periodu torzních kmitů T_t . Pro zlepšení přesnosti jsem vždy měřil větší počet period najednou. Naměřené hodnoty ukazuje tabulka 8.

Tabulka 8: Naměřené hodnoty period kmitání tyče

$\frac{10T_t}{s}$	$\frac{30T_k}{s}$
107,18	28,04
107,48	28,08
107,24	28,03

Z naměřených hodnot jsem poté určil průměr a chybu podle rovnice (11), jenom u periody T_k nepočítám s deseti periodami, ale s třiceti. Střední hodnotu a chybu jedné periody poté získám vydělením příslušným počtem period. Výsledky ukazuje tabulka 9.

Tabulka 9: Výsledné periody kmitání tyče

$\frac{T_t}{s}$	$\frac{T_k}{s}$
$10,73 \pm 0,02$	$0,935 \pm 0,007$

Moment setrvačnosti tyče kolem osy procházející jejím koncovým bodem jsem poté vypočítal dle rovnice (8) a chybu určil ze zákona šíření chyb

$$\sigma_{I_k} = \sqrt{\left(gd \frac{T_k^2}{4\pi^2}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(mg \frac{T_k^2}{4\pi^2}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(mgd \frac{T}{2\pi^2}\right)^2 \sigma_{T_k}^2} \quad (16)$$

Moment setrvačnosti tyče kolem osy procházející jejím těžištěm jsem vypočítal z torzních kmitů podle (4) a chybu výsledku podle (12). Výsledky ukazuje tabulka 10.

Tabulka 10: Momenty setrvačnosti tyče určené bez užití Steinerovy věty

$\frac{I_t}{10^{-4}\text{ kg} \cdot \text{m}^2}$	$\frac{I_k}{10^{-4}\text{ kg} \cdot \text{m}^2}$
$27,6 \pm 0,2$	$96,0 \pm 1,5$

Moment setrvačnosti I_t tyče kolem osy, která prochází těžištěm, jsem poté určil pomocí Steinerovy věty podle rovnice (9) a chybu výsledku ze zákona šíření chyb

$$\sigma_{I_t} = \sqrt{\sigma_{I_k}^2 + d^4 \sigma_m^2 + (2md)^2 \sigma_d^2} \quad (17)$$

Dostal jsem hodnotu $I_t = (2,7 \pm 0,2) 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

4 Diskuse

Při měření rozměrů použitých těles, ani při měření jejich hmotností k žádným komplikovanostem nedošlo. Pouze těleso, které jsem považoval za kvádr, mělo ve skutečnosti useknuté rohy, což by však nijak nemělo ovlivnit změřené hodnoty momentů setrvačnosti, protože hlavní předpoklad, že osa otáčení prochází těžištěm tělesa byl splněn. Složky hledaného jednotkového vektoru to také nijak neovlivní.

Měření period bylo zatíženo především mojí reakční dobou. Pro zlepšení přesnosti měření by bylo třeba využít jinou metodu měření, která nespolehá na reakci experimentátora, tedy např. snímat polohu těles počítačem. Potom by bylo třeba měření opakovat vícekrát, jelikož by se více projevily náhodné odchylky. Já jsem měření opakoval pouze třikrát právě kvůli mojí relativně velké reakční době.

Hodnoty momentů setrvačnosti kvádrů ve směru zadané obecné osy určené metodou torzních kmitů a výpočtem z hlavních momentů setrvačnosti se shodují v rámci dvou směrodatných odchylek měření, přičemž výpočet z hlavních momentů setrvačnosti byl přesnější, s relativní chybou 0,8%, než jeho určení metodou torzních kmitů, s relativní chybou 1,1%.

Hodnoty momentů setrvačnosti tyče určené bez a s užitím Steinerovy věty se shodují v rámci jedné směrodatné odchylky měření, přičemž je ovšem hodnota určená pomocí Steinerovy věty mnohem méně přesná, s relativní chybou 7,4%, než hodnota určená metodou torzních kmitů, s relativní chybou 0,7%. Velká relativní chyba při užití Steinerovy věty byla způsobena především měřeními kmitů tyče jako fyzického kyvadla, tedy při měření hodnoty I_k , neboť periody jsou zde mnohem kratší než všechny ostatní, ale moje reakční doba je pořád stejně velká. Pro zlepšení přesnosti by bylo třeba ještě zvýšit počet měřených period, nebo měřit dobu period jinou metodou.

5 Závěr

Měřeními torzních kmitů válce a kvádrů byly určeny momenty setrvačnosti kvádrů vzhledem k hlavním osám. Výsledky shrnuje tabulka 11.

Tabulka 11: Momenty setrvačnosti kvádrů vzhledem k hlavním osám

I_x $10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	I_y $10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	I_z $10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$3,62 \pm 0,05$	$12,1 \pm 0,1$	$15,0 \pm 0,1$

Dále byly určeny složky jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy rotace kvádrů v souřadné soustavě dané hlavními osami kvádrů. Výsledky jsou vidět v tabulce 7.

Vůči této ose byl určen moment setrvačnosti kvádrů, nejdříve výpočtem z hodnot hlavních momentů setrvačnosti na hodnotu $I = (5,32 \pm 0,04) 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ a poté byl výsledek ověřen metodou torzních kmitů, kde vyšlo $I = (5,44 \pm 0,06) 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Následně byla ověřena Steinerova věta. Bez užití Steinerovy věty byly změřeny dva momenty setrvačnosti tyče vůči různým rovnoběžným osám, výsledek shrnuje tabulka 10. Hodnota I_t takto vyšla $I_t = (27,6 \pm 0,2) 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Tato hodnota byla pak ověřena výpočtem s užitím Steinerovy věty, kde vyšlo $I_t = (2,7 \pm 0,2) 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

6 Seznam použité literatury

- [1] Studium otáčení tuhého tělesa. Fyzikální praktikum [online]. [cit. 2018-04-13]. http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_117.pdf
- [2] English, Jiří. Úvod do praktické fyziky I. 1. vyd. Praha: MATFYZPRESS, 2006, 145 s. ISBN 80-86732-93-2.