

## 1 Pracovní úkoly

1. Změřte momenty setrvačnosti kvádrů vzhledem k hlavním osám setrvačnosti.
2. Určete složky jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy rotace kvádrů v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti.
3. Vypočítejte moment setrvačnosti kvádrů vzhledem k zadané obecné ose rotace. Výsledek ověřte měřením.
4. Měrně ověřte Steinerovu větu.

## 2 Teoretický úvod

### 2.1 Metoda torzních kmitů

Pro určení momentu setrvačnosti  $I$  tělesa můžeme použít metodu torzních kmitů. Pro dobu torzního kmitu  $T$  fyzického kyvadla platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}, \quad (1)$$

kde  $I$  je moment setrvačnosti vůči ose, kolem které torzní kmity probíhají, a  $D$  je direktční moment drátu, za který je těleso zavěšeno.

Parametry drátu určující  $D$  sice neznáme, ale můžeme ho určit pomocí kmitů tělesa se známým momentem setrvačnosti  $I_0$ , jehož kmitu doby  $T_0$  naměříme.<sup>1</sup>

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}} \quad \Rightarrow \quad D = 4\pi^2 \frac{I_0}{T_0^2} \quad (2)$$

Pro určení  $D$  v našem případě použijeme válec, jehož moment setrvačnosti  $I_0$  vůči jeho ose symetrie určíme změřením jeho charakteristik - průměru  $d$  a hmotnosti  $m_0$ .

$$I_0 = \frac{1}{2}m_0 \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}m_0d^2 \quad (3)$$

Z rovnic (1), (2) a (3) postupně plyne

$$I_i = \frac{DT_i^2}{4\pi^2} = I_0 \frac{T_i^2}{T_0^2} = \frac{1}{8} \frac{T_i^2}{T_0^2} m_0 d^2 \quad (4)$$

### 2.2 Momenty setrvačnosti tělesa vůči osám procházejících těžištěm

Moment setrvačnosti tělesa  $I_O$  vůči různým osám, které procházejí těžištěm souvisí s hlavními momenty setrvačnosti  $I_x$ ,  $I_y$  a  $I_z$  vztahem

$$I_O(\vec{v}) = v_x^2 I_x + v_y^2 I_y + v_z^2 I_z, \quad (5)$$

kde  $v_x$ ,  $v_y$  a  $v_z$  jsou složky jednotkového vektoru souřadné soustavě udané hlavními osami setrvačnosti. Moment setrvačnosti  $I_T$  pak odpovídá rotaci tělesa kolem vektoru  $\vec{v}$ .

V případě homogenního kvádrů jsou hlavní osy rotace kolmé na stěny kvádrů procházející jejich středem. Označíme-li délky stran kvádrů jako  $X$ ,  $Y$  a  $Z$  ve směru os  $x$ ,  $y$  a  $z$ , pak pokud chceme vypočítat moment setrvačnosti kolem tělesové úhlopříčky, pak použijeme vztahy

$$v_x = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad v_y = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad v_z = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}. \quad (6)$$

Dosazením (6) do (5) pak pro moment setrvačnosti kolem tělesové úhlopříčky dostáváme

<sup>1</sup>Pozn. Momentu setrvačnosti  $I_i$  vždy odpovídá doba kmitu  $T_i$ .

$$I_T = \frac{X^2 I_x + Y^2 I_y + Z^2 I_z}{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (7)$$

Případně pro moment setrvačnosti kolem stěnové úhlopříčky (procházející těžištěm kváдру)  $I_S$ , kde se neuplatní moment setrvačnosti kolem osy  $z$  platí

$$I_S = \frac{X^2 I_x + Y^2 I_y}{X^2 + Y^2}. \quad (8)$$

### 2.3 Steinerova věta

Steinerovy věta dává do vztahu moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm  $I_t$  a moment setrvačnosti  $I_o$  vůči ose, která je s předchozí osou rovnoběžná a je od ní vzdálená  $l$ . Platí

$$I_o = I_t + ml^2, \quad (9)$$

kde  $m$  je hmotnost tělesa.

Moment setrvačnosti tyče  $I_t$  určíme pomocí momentu setrvačnosti válce, obdobně jako při výpočtu momentu setrvačnosti kváдру.

$$I_t = \frac{T_t^2}{T_0^2} I_0 = \frac{1}{8} \frac{T_t^2}{T_0^2} m_0 d^2. \quad (10)$$

Následně můžeme použít rovnici (9) a vypočítat moment setrvačnosti kolem osy procházející břitem kyvadla

$$I'_o = \frac{1}{8} \frac{T_t^2}{T_0^2} m_0 d^2 + ml^2. \quad (11)$$

Pro dobu kmitu fyzického kyvadla platí

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{mgl}}, \quad (12)$$

kde  $m$  je hmotnost kyvadla,  $g$  je tíhové zrychlení a  $l$  je vzdálenost těžiště od osy otáčení. Z této rovnice pak můžeme vyjádřit moment setrvačnosti odpovídající naměřené hodnotě doby kmitu kyvadla.

$$I_o = \frac{mglT_o^2}{4\pi^2} \quad (13)$$

### 2.4 Chyba měření

Chyba měření  $s_f$  (pro veličinu  $f$ ) je určena jako

$$s_f = \sqrt{s_{stat}^2 + s_{mer}^2}, \quad (14)$$

kde  $s_{stat}$  je statistická chyba a  $s_{mer}$  je chyba měřidla.

Metoda přenosu chyb je pak pro veličinu vypočtenou z  $n$  jiných naměřených veličin  $x_i$

$$s_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 s_{x_i}^2} \quad (15)$$

Tabulka 1: Průměr válce

$d/\text{mm}$
108,01
108,00
107,99
108,00
108,00
108,03
107,98
107,99
107,99
107,99

Tabulka 2: Doby kmitu válce a kvádrů

$8 T_0/\text{s}$	$8 T_x/\text{s}$	$8 T_y/\text{s}$	$8 T_z/\text{s}$	$8 T_{S_0}/\text{s}$
87,75	46,09	84,10	93,73	56,12
87,49	46,04	84,13	93,94	56,23
87,53	46,14	84,11	93,85	56,26

### 3 Měření

#### 3.1 Moment setrvačnosti kvádrů

Moment setrvačnosti kvádrů byl určován pomocí momentu setrvačnosti známého tělesa. Známé těleso bylo v našem případě válec, jehož moment setrvačnosti kolem jeho hlavní osy se dá jednoduše určit pomocí rovnice (3). Hmotnost válce s instrumentální chybou je

$$m_0 = (0,9031 \pm 0,0001) \text{ kg}.$$

Naměřené hodnoty průměru válce jsou uvedeny v tabulce č. 1. Tato délka byla měřena pomocí digitálního posuvného měřítka s instrumentální chybou 0,03mm a průměr válce je tedy

$$d = (108,00 \pm 0,03) \text{ mm}.$$

Poté byla změřena doba kmitu válce kolem jeho hlavní osy  $T_0$  a doby kmitu  $T_x$ ,  $T_y$  a  $T_z$  kvádrů kolem jeho hlavních os a doba kmitu  $T_S$  kvádrů kolem úhlopříčky. Změřeno bylo vždy třikrát osm dob kmitu a tyto doby jsou zaznamenány v tabulce č. 2. Největší zdroj chyby v měření času je lidská reakční doba, kterou můžeme odhadnout jako 0,2s.

Po vypočítání pomocí vzorce (4) nám pro jednotlivé hlavní momenty postupně vychází

$$I_x = (0,365 \pm 0,004) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2,$$

$$I_y = (1,214 \pm 0,009) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2,$$

$$I_z = (1,511 \pm 0,011) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2.$$

Čtvrtý moment setrvačnosti pak byl byl určován v poloze, která odpovídá stěnové úhlopříčce, kdy se neuplatní osa  $z$  a moment setrvačnosti vůči této ose vychází

$$I_{S_0} = (0,542 \pm 0,005) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2,$$

Tabulka 3: Délkové rozměry kvádrů

$X/\text{mm}$	$Y/\text{mm}$	$Z/\text{mm}$
127,83	63,99	18,95
127,82	64,02	19,00
127,83	64,00	18,99
127,82	64,02	19,01
127,81	63,98	18,99
	63,96	19,01
	63,97	18,98
	64,00	19,02

Chyba měření pro tyto momenty setrvačnosti byla určena jako

$$s_{I_i} = \sqrt{\left(2\frac{s_{T_i}}{T_i}\right)^2 + \left(2\frac{s_{T_0}}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{s_{m_0}}{m_0}\right)^2 + \left(2\frac{s_d}{d}\right)^2 \frac{1}{8} \frac{T_i^2}{T_0^2} m_0 d^2}. \quad (16)$$

Následně byly změřeny délky jednotlivých stran kvádrů<sup>2</sup> a jsou uvedeny v tabulce č. 3. Každý rozměr byl změřen minimálně pětkrát. Délka  $X$  a  $Y$  byla změřena stejným měřítkem, jako průměr válce. Délka  $Z$  byla změřena pomocí mikrometru s chybou 0,005mm. Délky kvádrů jsou popořadě

$$X = (127,82 \pm 0,03) \text{ mm},$$

$$Y = (63,99 \pm 0,04) \text{ mm},$$

$$Z = (18,994 \pm 0,021) \text{ mm}.$$

Souřadnice jednotkového vektoru ve směru tělesové úhlopříčky kvádrů jsou

$$v_x = 0,88641 \pm 0,00011$$

$$v_y = 0,44377 \pm 0,00022$$

$$v_z = 0,13172 \pm 0,00015$$

Respektive pro osu zadanou otvorem v kvádrů odpovídající stěnové úhlopříčce (procházející středem kvádrů) je

$$v_x = 0,89420 \pm 0,00011$$

$$v_y = 0,44767 \pm 0,00022$$

$$v_z = 0$$

A dle rovnice (8) hodnota momentu setrvačnosti kolem stěnové úhlopříčky vychází

$$I_S = (0,535 \pm 0,004) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2.$$

Chyba byla vypočítána pomocí vzorce

$$s_{I_S} = \sqrt{\frac{x^2 y^4 (4s_X^2 (I_x - I_y)^2 + s_{I_y}^2 x^2) + 4s_Y^2 x^4 y^2 (I_x - I_y)^2 + s_{I_x}^2 x^4 (x^2 + y^2)^2 + 2s_{I_y}^2 x^2 y^6 + s_{I_y}^2 y^8}{(x^2 + y^2)^2}} \quad (17)$$

<sup>2</sup>Těleso podle návodu považujeme za kvádr a rozměry stran jsou rozměry v těch neodříznutých oblastech.

Tabulka 4: Doby kmitu tyče

$5 T_t/s$	$20 T_o/s$
79,90	18,82
80,18	18,45
80,11	18,54

### 3.2 Ověření Steinerovy věty

Tíhové zrychlení pro naše účely bereme jako  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ . Vzdálenost mezi břity byla změřena pomocí pásového měřítka (které má tendenci se trochu prohýbat, proto je odhad chyby určen jako velikost nejmenšího dílku a ne jeho polovina) a je

$$2l = (31,5 \pm 0,1) \text{ cm.}$$

Z toho plyne  $l = (15,75 \pm 0,05) \text{ cm}$  (vzdálenost břitu od středu tyče je totiž právě polovina vzdálenosti obou břítů). Hmotnost tyče je

$$m = (0,2820 \pm 0,0001) \text{ kg.}$$

Změřené doby kmitu jsou v tabulce č. 4. Přičemž doba  $T_t$  je doba torzního kmitu tyče kolem jejího těžiště a doba  $T_o$  je doba kmitu tyče zavěšené na břitu. Bylo změřeno třikrát pět dob  $T_t$  a třikrát 20 kmitů  $T_o$ .

Moment setrvačnosti tyče kolem břitu pak vychází podle (13)

$$I_o = (0,0095 \pm 0,0003) \text{ kg m}^2.$$

A dle (11) vychází moment setrvačnosti kolem stejné osy jako

$$I'_o = (0,00981 \pm 0,00005) \text{ kg m}^2.$$

Tyto hodnoty se v rámci chyby měření shodují.

## 4 Diskuse

Hodnota momentu setrvačnosti kvádrů kolem obecné osy vyšla v rámci chyby stejně jako výpočtem z naměřených hlavních momentů setrvačnosti kvádrů.

Měření momentu setrvačnosti tyče kolem jedné osy pomocí dvou metod měření, z nichž jedna metoda používala Steinerovu větu a druhá měřila přímo moment setrvačnosti kolem dané osy, podaly stejný výsledek v rámci chyby měření. Tím pádem byla Steinerova věta ověřena.

Chyby měření mohly být způsobeny například tím, že kmity tělesa neprobíhaly pouze v jednom rozměru, ale v menší míře tělesa kmitala i v jiných směrech.

Předpokládáme, že tělesa jsou homogenní, což nemusí být úplně pravda a navíc v kvádrů jsou otvory, ve kterých jsou šrouby, pak pokud nemají stejnou hustotu jako zbytek kvádrů, pak se jedná o nehomogenity, které se mohou projevit v době kmitu. V případě tyče byly očividnými nehomogenitami okraje tyče - jednak z nich čněly tenké šroubky, pak byly mírně zaoblené a pak samotné břity mohly ovlivnit moment setrvačnosti.

Dále jsme těleso považovali těleso za kvádr, i když to byl kvádr s odříznutými okraji - pokud nebyly odříznuté rohy symetrické, pak bychom takové přiblížení použít nemohli.

Tíhové zrychlení jsme uvažovali jako přesné, i když přesné nebylo. Během kmitání (i v torzním případě) působí odpor vzduchu proti pohybu kyvadla, což může změnit dobu kmitu. Navíc se část energie ztrácí třením v drátu a přeměňuje se na teplo. V případě fyzického kyvadla jsme zanedbali

to, že je v atmosféře, ve které na něj působí vztlková síla. Je možné, že moje reakční doba je ještě delší než doba odhadnutá. také je možné, že se mi nepodařilo odměřovat úplně přesně daný počet kmitů, ale v průběhu měření jsem mírně pohnul hlavou a tím změnil úhel pod kterým jsem pozoroval kyvadlo a neodhadl jsem tak přesně stejné místo, odkud jsem začal měřit.

## 5 Závěr

Hlavní momenty setrvačnosti kvádru jsou

$$I_x = (0,365 \pm 0,004) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$I_y = (1,214 \pm 0,009) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$I_z = (1,511 \pm 0,011) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Složky jednotkového vektoru v zadané ose (dané vyvrtaným tvorem) jsou

$$v_x = 0,89420 \pm 0,00011$$

$$v_y = 0,44767 \pm 0,00022$$

$$v_z = 0$$

Moment setrvačnosti kolem obecné osy určený měřením doby kmitu

$$I_{S_0} = (0,542 \pm 0,005) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Moment setrvačnosti kolem obecné osy určený výpočtem z hlavních momentů setrvačnosti

$$I_S = (0,535 \pm 0,004) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Ověření Steinerovy věty:

Moment setrvačnosti tyče kolem osy procházející břitem první metodou

$$I_o = (0,0095 \pm 0,0003) \text{ kg m}^2,$$

a druhou metodou

$$I'_o = (0,00981 \pm 0,00005) \text{ kg m}^2.$$

## 6 Literatura

- [1] *J. Brož a kol.: Základy fyzikálních měření I.*  
SPN, Praha 1967
- [2] *J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky*  
SNTL, Praha 1980
- [3] **Studijní texty k fyzikálnímu praktiku**  
Studium otáčení tuhého tělesa  
[http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt\\_117.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt_117.pdf)