XVII Studium otáčení tuhého tělesa

Pracovní úkol

1. Změřte momenty setrvačnosti kvádru vzhledem k hlavním osám setrvačnosti.
2. Určete složky jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy rotace kvádru v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti.
3. Vypočítejte moment setrvačnosti kvádru vzhledem k zadané obecné ose rotace. Výsledek ověřte měřením.
4. Měrně ověřte Steinerovu větu.

Teorie

Metoda torzních kmitů

Metoda torzních kmitů je jednou z metod, pomocí které můžeme určovat moment setrvačnosti těles. Spočívá v upevnění zkoumaného tělesa v bodě na ose, vůči níž chceme moment setrvačnosti vyšetřovat, na torzní závěs (v našem případě reprezentovaný ocelovým drátem) a následném měření periody jeho kmitů.

Doba periody je dána vztahem[1]

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \tag{1}$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa vůči zkoumané ose a D je direkční moment.

Pokud necháme na stejném torzním vlákně kmitat jiné těleso o známém momentu setrvačnosti vůči dané ose J_T, jeho periodu T_T můžeme vyjádřit vztahem

$$T_T = 2\pi\sqrt{\frac{J_T}{D}} \tag{2}$$

Spojíme-li rovnice (1) a (2), vyloučíme direkční moment a dostáváme vztah pro moment setrvačnosti zkoumaného tělesa

$$J = \frac{T^2}{{T_T}^2} J_T \tag{3}$$

Navíc perioda torzních kmitů prakticky nezávisí na počáteční výchylce z rovnovážné polohy, není-li překročena mez úměrnosti ocelového vlákna.

Momenty setrvačnosti vůči různým osám procházejícím těžištěm

Moment setrvačnosti tělesa vůči obecné ose procházející těžištěm souvisí s hlavními momenty setrvačnosti vztahem

$$J = v_x^2 J_a + v_y^2 J_b + v_z^2 J_c \qquad (4)$$

kde J_i jsou po řadě momenty setrvačnosti v hlavních osách v_i jsou souřadnice jednotkového vektoru v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti, přičemž vektor $\vec{v}$ má směr osy, vůči které moment setrvačnosti uvažujeme.

Složky vektoru $\vec{v}$ lze vyjádřit vztahem

$$v_x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \qquad v_y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \qquad v_z = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad (5)$$

Steinerova věta

Steinerovu větu budeme experimentálně ověřovat pomocí tyče s dvěma břity na konci a závitem uprostřed. Díky břitům můžeme nechat tyč kývat kolem osy procházející jejím koncem jako fyzické kyvadlo s periodou

$$T_F = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}} \qquad (6)$$

kde m je hmotnost tělesa, d je vzdálenost těžiště od osy otáčení a g je místní tíhové zrychlení.

Na základě vztahu (6) lze vypočítat moment setrvačnosti tělesa J a pomocí Steinerovy věty vyjádřit moment setrvačnosti J_0 vůči ose rovnoběžné s měřenou osou a procházející těžištěm jako

$$J_0 = J - md^2 \qquad (7)$$

Abychom Steinerovu větu ověřili, potřebujeme změřit J_0 jinou metodou nezávislou na rovnici (7). Využijeme metody torzních kmitů, kde za referenční těleso o známém momentu setrvačnosti vezmeme válec, jehož moment setrvačnosti J_V je dán vztahem

$$J_V = \frac{1}{2} M R^2 \tag{8}$$

kde M značí hmotnost válce a R poloměr válce.

Z rovnic (3) a (8) lze pak vyjádřit moment setrvačnosti J_0 jako

$$J_0 = \frac{T_1^2}{2T_2^2} M R^2 \tag{9}$$

kde T_1 je perioda torzních kmitů tyče a T_2 perioda torzních kmitů válce.

Výsledky měření

Při experimentu byly naměřeny následující podmínky:

Teplota v místnosti t = (24,9 ± 0,1) °C

Tlak v místnosti p = (978,8 ± 0,1) hPa

Relativní vlhkost vzduchu φ = (28,5 ± 0,1) %

Referenční válec

Jako referenční těleso o známém momentu setrvačnosti jsme zvolili kovový válec, jehož moment setrvačnosti J_V je dán rovnicí (8).

Zde jsou shrnuty jeho parametry:

M = (907,3 ± 0,1) g

R = (53,950 ± 0,015) mm

Abychom zjistili délku periody torzních kmitů válce T_2, měřili jsme vždy 5 period. Výsledky jsou shrnuty v Tabulce 1. Chyba měření periody činí ± 0,11 s.

Tabulka 1: Perioda torzních kmitů referenčního válce

Měření	T_2[s]
1	7,39
2	7,38
3	7,38
4	7,38
5	7,39

Z takto získaných údajů určíme výslednou periodu jako T_2 = (7,38 ± 0,06) s.

Moment setrvačnosti kvádru

Dále jsme se zabývali zjišťováním momentu setrvačnosti kovového kvádru, který měl symetricky uřezané rohy.

Zde nás zajímaly rozměry, označené a, b, c; přičemž $a > b > c$.

Ty jsme zjišťovali pomocí posuvného měřidla s přesností ± 0,03 mm.

a = (128,08 ± 0,03) mm

b = (64,09 ± 0,03) mm

c = (19,05 ± 0,03) mm

Následně jsme prováděli měření periody torzních kmitů vzhledem k jednotlivým osám. Opět byla naměřena doba 5 period s přesností ± 0,11 s. Výsledky shrnuje Tabulka 2.

Tabulka 2: Periody torzních kmitů válce vůči jeho hlavním osám

T_a [s]	T_b [s]	T_c [s]
3,87	7,08	7,90
3,93	7,10	7,90
3,90	7,13	7,87
3,86	7,12	7,89
3,91	7,13	7,85

Z těchto hodnot určíme:

T_a = (3,89 ± 0,07) s

T_b = (7,11 ± 0,06) s

T_c = (7,88 ± 0,06) s

Podle rovnice (3) můžeme spočítat momenty setrvačnosti v hlavních osách jako:

J_a = (0,37 ± 0,011) 10^{-3} kg · m^2

J_b = (1,22 ± 0,026) 10^{-3} kg · m^2

J_c = (1,51 ± 0,029) 10^{-3} kg · m^2

Chyba měření byla vypočítána ze vztahu[2]

$$\sigma_{Ji}{}^2 = \left(2\frac{J_i}{R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{J_i}{M}\right)^2 \sigma_M^2 + \left(2\frac{J_i}{T_i}\right)^2 \sigma_{T_i}^2 + \left(-2\frac{J_i}{T_2}\right)^2 \sigma_{T_2}^2 \qquad (10)$$

kde $i = \{a, b, c\}$.

Nyní nás zajímá moment setrvačnosti kvádru J_u vzhledem k tělesové úhlopříčce.

Opět byla měřena doba 5 period torzních kmitů s přesností ± 0,11 s, přičemž výsledky shrnuje Tabulka 3.

Tabulka 3: Perioda T_u torzních kmitů kvádru vůči tělesové úhlopříčce

Měření	T_u[s]
1	4,78
2	4,68
3	4,73
4	4,69
5	4,77

Z těchto údajů určíme periodu jako T_u = (4,73 ± 0,07) s.

Podle rovnice (3) následně vypočteme J_u = (0,542 ± 0,014) 10^{-3} kg · m^2.

Chybu určíme dle rovnice (10), kde za i dosadíme u.

Rovněž víme, že moment setrvačnosti vůči tělesové úhlopříčce můžeme zjistit přímým výpočtem dle vztahu (4).

Podle vztahů (5) nejdříve spočítáme jednotlivé složky jednotkového vektoru $\vec{v}$:

v_x = (0,886 ± 0,002)

v_y = (0,443 ± 0,001)

v_z = (0,132 ± 0,001)

kde chyba byla vyjádřena ze vztahu

$$\sigma_a = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right)^2 {\sigma_{x_i}}^2} \tag{11}$$

Aplikací rovnice (4) dostáváme J_u = (0,556 ± 0,023) 10^{-3} kg · m^2, což se v rámci chyby shoduje s hodnotou J_u určenou měřením.

Chyba zde byla opět určena na základě vztahu (11).

Steinerova věta

K ověření platnosti Steinerovy věty použijeme tyč, kterou v první fázi experimentu necháme kývat jako fyzické kyvadlo.

K výpočtům byly použity následující hodnoty:

m = (281,3 ± 0,1) g

d = (15,8 ± 0,2) cm

g = (9,814 ± 0,001) m · s^{-2} (tíhové zrychlení pro Prahu[3])

Hodnoty periody T_F shrnuje Tabulka 4. (Bylo provedeno měření 10 period s přesností ± 0,11 s.

Tabulka 4: Perioda T_F tyče

Měření	T_F [s]
1	0,94
2	0,94
3	0,93
4	0,93
5	0,93

Periodu tedy určíme jako T_F = (0,93 ± 0,06) s.

Dle vztahů (6) a (7) určíme moment setrvačnosti jako J_0 = (2,534 ± 0,031) 10^{-3} kg · m^2.

Chyba je opět spočítána na základě vztahu (11).

Nyní spočítáme moment setrvačnosti J_0 metodou torzních kmitů.

Potřebné hodnoty periody T_1 shrnuje Tabulka 5. Bylo měřeno vždy 5 period s přesností ± 0,11 s.

Tabulka 5: Perioda torzních kmitů tyče T_1

Měření	T_1[s]
1	10,72
2	10,73
3	10,77
4	10,77
5	10,76

Z těchto hodnot určíme periodu torzních kmitů jako T_1 = (10,75 ± 0,06) s.

Použitím rovnice (9) pak určíme moment setrvačnosti jako tyče jako J_0 = (2,802 ± 0,045) 10^{-3} kg · m^2.

Chybu zde vypočteme podle vztahu

$$\sigma_{J0}{}^2 = \left(2\frac{J_0}{R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{J_0}{M}\right)^2 \sigma_M^2 + \left(2\frac{J_0}{T_1}\right)^2 \sigma_{T_1}^2 + \left(-2\frac{J_0}{T_2}\right)^2 \sigma_{T_2}^2 \tag{12}$$

Diskuze výsledků

Přesnost měření momentu setrvačnosti kvádru vůči hlavním osám mohl ovlivnit fakt, že „kvádr“ neměl rohy. Ty sice byly podle předpokladu useknuty symetricky, ale pokud tomu tak nebylo, nemohli bychom těleso považovat za kvádr. Dalším předpokladem bylo, že všechna zkoumaná tělesa (kvádr, válec i tyč) jsou homogenní, což ovšem rovněž nevíme s jistotou.

Poměrně výrazný vliv zřejmě mohl mít i fakt, že všechna tělesa (kvádr, válec i tyč) konaly při torzních kmitech zároveň i kmitavý pohyb do stran (kývaly jako kyvadlo). Dalším faktorem je reakční čas experimentátora při práci se stopkami, kterými se měřily periody; zejména u tyče jako fyzického kyvadla bylo poměrně obtížné odměřit přesně 10 period, k odchylkám ale mohlo dojít (a velmi pravděpodobně došlo) i u měření period torzních kmitů. Měření by se výrazně zpřesnilo použitím čítače jako v úloze o měření tíhového zrychlení.

Co se týče měření momentu setrvačnosti kvádru vůči tělesové úhlopříčce, výsledky získané experimentem a výpočtem se v rámci chyby shodují, ale ještě lepší shody bychom mohli dosáhnout, pokud bychom zanedbali *z*-ovou složku jednotkového vektoru $\vec{v}$, vzhledem ke geometrii kvádru totiž můžeme považovat zadanou tělesovou úhlopříčku za stěnovou úhlopříčku v rovině *ab*.

Ani v rámci chyby jsme však nedostali shodné momenty setrvačnosti tyče, kdy tento moment byl jednou vypočítán ze Steinerovy věty, jednou experimentálně změřen metodou torzních kmitů. Tato odchylka je zřejmě způsobena nepřesným měřením periody kmitů tyče jakožto fyzického kyvadla, při torzních kmitech se tyč zase nakláněla do stran, což ukazuje na to, že místo závěsu zřejmě nebylo přesně v těžišti. Když přihlédneme k těmto okolnostem, můžeme prohlásit, že se nám platnost Steinerovy věty ověřit podařilo.

Závěr

Vzhledem k hlavním osám kvádru byly naměřeny momenty setrvačnosti

J_a = (0,37 ± 0,011) 10^{-3} kg · m^2

J_b = (1,22 ± 0,026) 10^{-3} kg · m^2

J_c = (1,51 ± 0,029) 10^{-3} kg · m^2.

Složky jednotkového vektoru ve směru tělesové úhlopříčky kvádru činí

v_x = (0,886 ± 0,002)

v_y = (0,443 ± 0,001)

v_z = (0,132 ± 0,001).

Moment setrvačnosti kvádru vůči jeho tělesové úhlopříčce jsme výpočtem určili jako J_u = (0,556 ± 0,023) 10^{-3} kg · m^2, pomocí měření jako J_u = (0,542 ± 0,014) 10^{-3} kg · m^2, přičemž obě hodnoty se v rámci chyby shodují.

Moment setrvačnosti tyče vypočítaný pomocí Steinerovy věty jsme určili jako J_0 = (2,534 ± 0,031) 10^{-3} kg · m^2, měřením metodou torzních kmitů jsme získali hodnotu J_0 = (2,802 ± 0,045) 10^{-3} kg · m^2, přičemž momenty se v rámci chyby neshodují, ale s přihlédnutím ke zdrojům nepřesností můžeme platnost Steinerovy věty považovat za ověřenou.

Seznam použité literatury

[1] Kolektiv ZFP KVOF MFF UK. Studijní text k měření Studium otáčení tuhého tělesa [cit. 2. 4. 2018]. URL: http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_117.pdf

[2] J. Brož a kolektiv: Základy fyzikálních měření I, 1. vydání, SNP, Praha 1983, čl. 1.3.5.

[3] Wikipedie, otevřená encyklopedie. Tíhové zrychlení [cit. 3. 4. 2018] URL:
https://cs.wikipedia.org/wiki/T%C3%ADhov%C3%A9_zrychlen%C3%AD#cite_note-EGM-1