

## 1 Pracovní úkoly

1. Změřte teplotní závislost povrchového napětí destilované vody  $\sigma$  v rozsahu teplot od 295 do 345 K metodou bublin.
2. Měřenou závislost znázorněte graficky. Závislost aproximujte kvadratickou funkcí.

## 2 Teoretický úvod

Povrchové napětí  $\sigma$  je vlastnost kapalných látek. Určuje to, že volné kapaliny se snaží zabírat co nejmenší možný povrch. Pokud tvar rozhraní vzduch - kapalina má kulový tvar, pak pro přetlak vyvolaný povrchovým napětím platí

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}, \quad (1)$$

kde  $r$  je poloměr kulové plochy. V našem případě zjišťujeme povrchové napětí metodou bublin - odečítáme maximální rozdíl tlaků těsně předtím, než začnou unikat bubliny a přetlak se sníží. Do kapaliny je těsně pod hladinou ponořena kapilára o průměru  $d$ . Pokud zanedbáme hydrostatický tlak v hloubce, kde bubliny vznikají, pak platí pro v nádobě vytvořený maximální přetlak

$$\Delta p_{\max} = \frac{4\sigma}{d}. \quad (2)$$

Z tohoto vzorce můžeme vyjádřit povrchové napětí

$$\sigma = \frac{d \Delta p_{\max}}{4} = \frac{dh\rho_m g \sin \alpha}{4}, \quad (3)$$

protože pro přetlak, co naměříme pomocí mikromanometru platí

$$\Delta p_m = h\rho_m g \sin \alpha, \quad (4)$$

kde  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  je tíhové zrychlení,  $h$  je výška destilované vody v trubici mikromanometru,  $\rho_m$  je hustota destilované vody při teplotě, kterou má mikromanometr v průběhu experimentu a  $\alpha$  je úhel, pod kterým je skloněná trubice mikromanometru. A v našem přiblížení platí  $\Delta p_m = \Delta p_{\max}$ . Pokud vylepšíme teorii a budeme uvažovat hydrostatický tlak v hloubce  $H$

$$p_H = H\rho_T g, \quad (5)$$

kde  $\rho_T$  je hustota vody při teplotě  $T$ . Pak použijeme pro maximální přetlak korigovaný o tuto hodnotu rovnici

$$\Delta p_{H \max} = \frac{4\sigma_H}{d} + H\rho_T g. \quad (6)$$

Pro korigovanou hodnotu povrchového napětí pak platí

$$\sigma_H = d \frac{\Delta p_{H \max} - H\rho_T g}{4} = dg \frac{h\rho_m \sin \alpha - H\rho_T}{4}. \quad (7)$$

Naměřená data povrchového napětí v závislosti na teplotě mají být proložena kvadratickou funkcí, která se dá zapsat jako

$$\sigma(T) = AT^2 + BT + C \quad (8)$$

## 3 Měření

### 3.1 Postup měření

Pro měření povrchového napětí byla použita bublinková metoda. Aparatura se skládala z baňky s vodou, do které byla zavedena kapilára těsně pod hladinu vody. Tato kapilára byla z druhé

Tabulka 1: Naměřené hodnoty výšky vodního sloupce v mikromanometru

$t/^\circ\text{C}$	$h/\text{mm}$	$t/^\circ\text{C}$	$h/\text{mm}$
21,5	111	52,0	103
22,5	110	52,5	103
24,0	110	53,5	102
25,0	110	54,5	102
26,0	110	56,5	101
27,5	109	57,5	101
28,5	109	58,0	100
29,0	109	58,5	100
31,5	109	59,5	100
32,5	109	60,0	100
34,5	109	61,0	100
35,5	109	61,5	100
36,5	108	62,0	100
37,5	108	62,5	99
38,5	108	63,5	99
40,0	108	64,0	99
41,0	107	65,0	99
42,0	107	65,5	99
43,5	106	68,5	98
44,5	106	69,0	98
46,5	105	69,5	98
47,5	105	70,0	98
48,5	104	70,5	98
50,0	103	71,0	98
50,5	103	71,5	97
51,0	103	72,5	97

strany otevřená a byl v ní tedy atmosférický tlak. Kapilára měla (podle údaje uvedeného na stole v praktiku) průměr  $d = (0,55 \pm 0,02)$  mm. Baňka byla jinak utěsněna a vzduch nad povrchem vody v baňce byl propojen s aspirátorem, odkud se mohla vypouštět voda pomocí svorek a mohl tak být vytvářen podtlak, a s mikromanometrem. Mikromanometr byl naplněn destilovanou vodou, která měla po celou dobu experimentu teplotu  $t_m = (24,0 \pm 0,6)^\circ\text{C}$ . Této teplotě podle tabulek [2] odpovídá hustota destilované vody  $\rho_m = (997,30 \pm 0,15)$  kg m<sup>3</sup>. Trubice mikromanometru byla skloněná tak, že  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$  - tuto hodnotu můžeme brát jako přesnou, protože mikromanometr byl vyvážen pomocí tří vodováh, které jsou na něm připojené, a protože větší relativní chyba měření je už předurčená zadanou hodnotou průměru kapiláry. Pomocí mikromanometru určuje rozdíl mezi tlaky na povrchu vodní hladiny v baňce a vnějším atmosférickým tlakem pomocí vodního sloupce destilované vody - stupnice v trubici je dělená po 1 mm. Chyba odečtu výšky vodního sloupce  $h$  je tedy  $s_h = 0,5$  mm. Baňka byla ponořena do vody, která byla v průběhu experimentu zahřívána pomocí magnetické míchačky. Naměřené hodnoty  $h$  v závislosti na teplotě  $t$  jsou v tabulce č. 1. Měření bylo prováděno od  $21,5^\circ\text{C}$  do  $72,5^\circ\text{C}$ , což odpovídá  $294,7\text{K}$  a  $345,7\text{K}$  a tedy i zadání.

### 3.2 Chyba měření

Chyba měření  $s_f$  (pro veličinu  $f$ ) je určena jako

$$s_f = \sqrt{s_{stat}^2 + s_{mer}^2}, \quad (9)$$

kde  $s_{stat}$  je statistická chyba a  $s_{mer}$  je chyba měřidla. Metoda přenosu chyb je pak pro veličinu vypočtenou z  $n$  jiných naměřených veličin  $x_i$

$$s_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 s_{x_i}^2} \quad (10)$$

Pro výpočet lze také použít relativní chybu  $\eta_f$  veličiny  $f$ , kde platí

$$\eta_f = \frac{s_f}{\bar{f}}, \quad (11)$$

kde  $\bar{f}$  je střední hodnota veličiny  $f$  a pro naše účely i předpokládaná hodnota  $f$ .

V našem případě je chyba měření konkrétně:

$$s_\sigma = \sqrt{\left(\frac{s_d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{s_h}{\bar{h}}\right)^2 + \left(\frac{s_{\rho_m}}{\bar{\rho}_m}\right)^2 + \left(\frac{s_g}{\bar{g}}\right)^2 + \left(\frac{s_{\sin \alpha}}{\sin \bar{\alpha}}\right)^2} \bar{\sigma}, \quad (12)$$

kde bereme  $s_g$  a  $s_{\sin \alpha} = 0$ , z čehož plyne vztah pro chybu

$$s_\sigma = \sqrt{\left(\frac{s_d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{s_h}{\bar{h}}\right)^2 + \left(\frac{s_{\rho_m}}{\bar{\rho}_m}\right)^2} \frac{\bar{d}\bar{h}\bar{\rho}_m g \sin \alpha}{4}. \quad (13)$$

Vypočítané hodnoty povrchového napětí  $\sigma$  včetně chyby jsou v tabulce č. 2. Tyto hodnoty jsou pak naneseny a proloženy v obrázku grafu č. 1. Proložená funkce má parametry

$$A = (-8,05 \pm 0,13) \cdot 10^{-7} \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-2},$$

$$B = (3,21 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1},$$

$$C = (0,049 \pm 0,001) \text{ kg s}^{-2}.$$

Všechny takto určené hodnoty leží mírně nad hodnotami, které jsou tabelované v [2]. Vzhledem k rovnici (7) se zdá být proto rozumné zohlednit vliv  $H$  alespoň přibližně.

### 3.3 Zohlednění hloubky $H$

Vzhledem k tomu, že kapilára byla velice mírně ponořena a navíc je průměr kapiláry  $\bar{d} = 0,55$  mm, tak můžeme odhadnout, že bublina vzniká ve hloubce řádově  $H = 1$  mm. Je to jenom opravdu velice přibližný odhad, ale i tak může pomoci se přiblížit reálné hodnotě povrchového napětí. Řádně spočítaná chyba pro  $s_H$  podle obvyklé metody přenosu chyb by byla trochu větší než chyba určená pro  $\sigma$ , ale nebude se lišit příliš. Navíc chyba  $s_H$  se těžko odhaduje, když už  $H$  je odhad. Proto pro tento výpočet neurčuji chyby přesné chyby měření. Srovnání tabelovaných hodnot s oběma metodami výpočtu je v obrázku grafu č. 2. Hodnoty  $A$  a  $B$  jsou pro metodu, kdy zohledníme  $H$  prakticky stejné (protože hustoty vody jsou v oboru, který sledujeme řádově stejné) a jediný rozdíl je v  $C$ , které vychází menší. Označme ho tedy

$$C_H = (0,047 \pm 0,001) \text{ kg s}^{-2}.$$

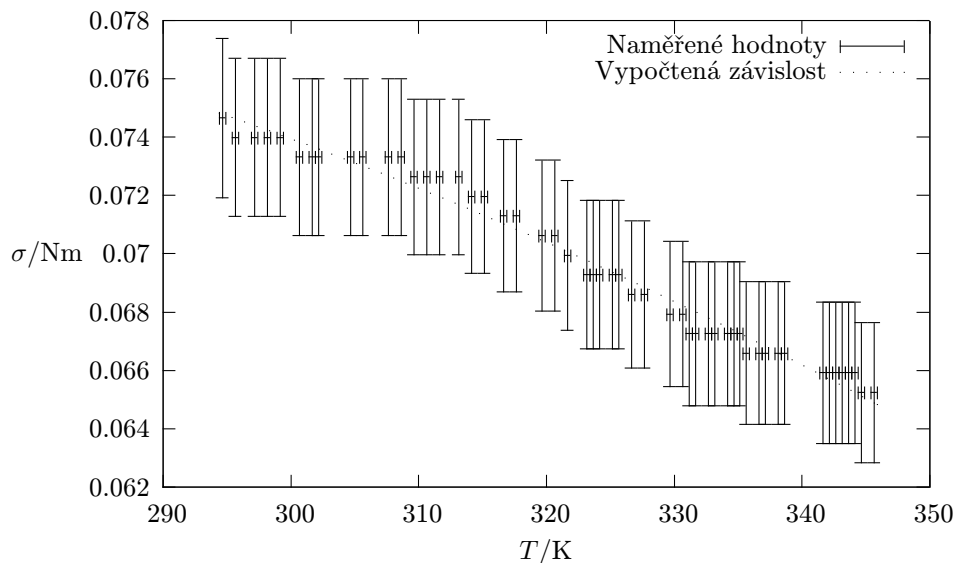
## 4 Diskuse

Měření se v rámci chyby shoduje s tabelovanými hodnotami. Ale je vidět, že výpočet, který nezohledňuje  $H$  je systematicky posunutý v grafu nahoru. Pokud zohledníme  $H$  odhadnutou hodnotou  $H = 1$  mm, pak dostáváme lepší shodu měření s tabelovanými hodnotami.

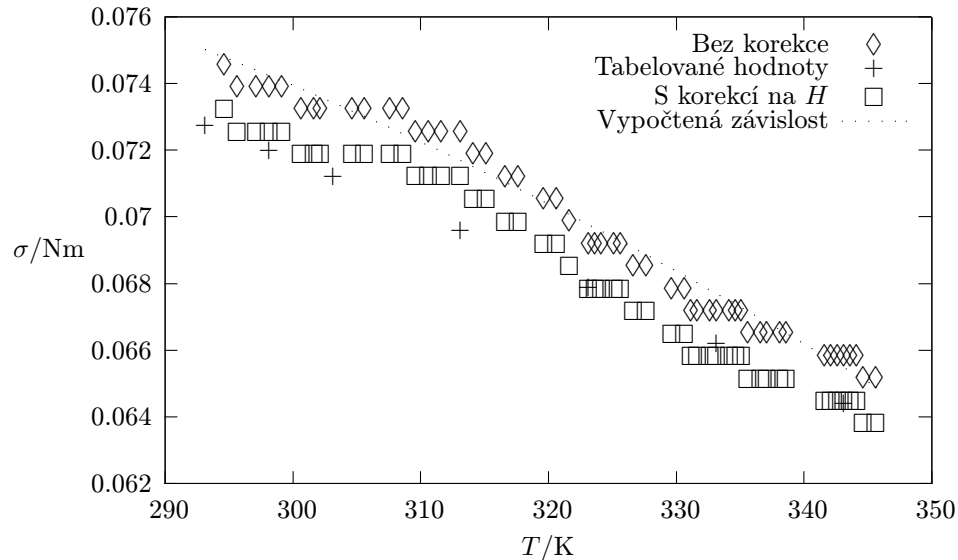
Měření mohlo být ovlivněno například tím, že trubice mikromanometru byla nakloněná pod mírně

Tabulka 2: Vypočtené hodnoty povrchového napětí v závislosti na teplotě s hodnotami chyb

$t/^\circ\text{C}$	$\sigma/\text{Nm}$	$s_\sigma/\text{Nm}$	$t/^\circ\text{C}$	$\sigma/\text{Nm}$	$s_\sigma/\text{Nm}$
21,5	0,0747	0,0027	53,5	0,0686	0,0025
22,5	0,0740	0,0027	54,5	0,0686	0,0025
24,0	0,0740	0,0027	56,5	0,0679	0,0025
25,0	0,0740	0,0027	57,5	0,0679	0,0025
26,0	0,0740	0,0027	58,0	0,0673	0,0025
27,5	0,0733	0,0027	58,5	0,0673	0,0025
28,5	0,0733	0,0027	59,5	0,0673	0,0025
29,0	0,0733	0,0027	60,0	0,0673	0,0025
31,5	0,0733	0,0027	61,0	0,0673	0,0025
32,5	0,0733	0,0027	61,5	0,0673	0,0025
34,5	0,0733	0,0027	62,0	0,0673	0,0025
35,5	0,0733	0,0027	62,5	0,0666	0,0024
36,5	0,0726	0,0027	63,5	0,0666	0,0024
37,5	0,0726	0,0027	64,0	0,0666	0,0024
38,5	0,0726	0,0027	65,0	0,0666	0,0024
40,0	0,0726	0,0027	65,5	0,0666	0,0024
41,0	0,0720	0,0026	68,5	0,0659	0,0024
42,0	0,0720	0,0026	69,0	0,0659	0,0024
43,5	0,0713	0,0026	69,5	0,0659	0,0024
44,5	0,0713	0,0026	70,0	0,0659	0,0024
46,5	0,0706	0,0026	70,5	0,0659	0,0024
47,5	0,0706	0,0026	71,0	0,0659	0,0024
48,5	0,0700	0,0026	71,5	0,0652	0,0024
50,0	0,0693	0,0025	72,5	0,0652	0,0024
50,5	0,0693	0,0025			
51,0	0,0693	0,0025			
52,0	0,0693	0,0025			
52,5	0,0693	0,0025			



Obrázek 1: Graf závislosti povrchového napětí na teplotě



Obrázek 2: Graf závislosti povrchového napětí na teplotě - srovnání výpočtu bez  $H$ , s  $H$  a tabelovaných hodnot

jiným úhlem než odpovídajícím  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$  kvůli nedostatečnému vyvážení pomocí vodováh. Dále mohl mít vliv odhad  $H$  v části, kde jsme  $H$  zohlednili. Dalším možným vlivem mohlo být to, že nebyla baňka s vodou zahřívána homogenně a hodnota povrchového napětí v místě, kde jsme ji zjišťovali pomocí bublin, byla určena pro jinou teplotu než byla odečtena na teploměru. Dále mohly mít mírný vliv na měření vibrace v místnosti - bublina se mohla uvolnit trochu dříve kvůli pohybu kapiláry. Dále mohla nastat systematická chyba v počátečním odečtu nulového tlakového rozdílu tím, že nádoba aspirátoru byla uzátkována, ale během zátkování mohl v nádobě vzniknout menší přetlak a tak jsme mohli nesprávně určit chybu nuly na mikromanometru. Dalším možným vlivem mohlo být, že se uvnitř mikromanometru neudržuje stejná hladina vody a proto jsme neurčili správně výškový rozdíl hladin.

Rozdíl vůči tabelovaným hodnotám pro destilovanou vodu by mohl také nastat tím, že v baňce nebyla dokonale čistá voda.

A měřeném rozsahu teplot by stačilo použít pro proložení i lineární funkci, protože člen  $A$  u  $T^2$  je relativně malý a i z grafu je vidět, že hodnoty relativně dobře sedí na přímce.

## 5 Závěr

Hodnoty povrchového napětí pro jednotlivé teploty jsou uvedené v tabulce č. 2. Naměřené hodnoty se dají na proměřeném proložit funkcí podle rovnice  $\sigma(T) = AT^2 + BT + C$ , kde jednotlivé parametry jsou

$$A = (-8,05 \pm 0,13) \cdot 10^{-7} \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-2},$$

$$B = (3,21 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1},$$

$$C = (0,049 \pm 0,001) \text{ kg s}^{-2},$$

respektive

$$C_H = (0,047 \pm 0,001) \text{ kg s}^{-2},$$

pokud odhadneme hloubku místa, kde vznikají bubliny na  $H = 1 \text{ mm}$ .

## 6 Literatura

- [1] *J. Brož a kol.: Základy fyzikálních měření I.*  
SPN, Praha 1967
- [2] *J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky*  
SNTL, Praha 1980