

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

ZÁKLADNÍ FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM

FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM I.  
PRO OBOR OBECNÁ FYZIKA

---

## **XIII. Meranie momentu zotrvačnosti kolesa**

---

*Autor:*  
Samuel Kočiščák

27. apríla 2016

## 1 Pracovné úlohy

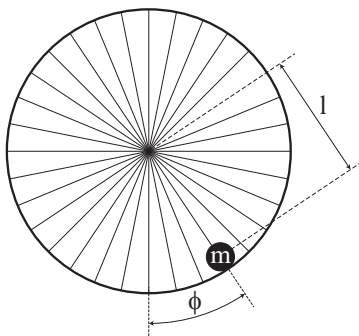
1. Zmerajte moment zotrvačnosti kolesa metódou kyvov.
2. Zmerajte moment zotrvačnosti kolesa metódou otáčania pre rôzne hodnoty parametra  $\alpha$ . Graficky znázornite závislosť  $\omega = \omega(t)$  pre tri odlišné hodnoty parametra  $\alpha$ .
3. Určite moment trecích síl  $M_t$  a moment zotrvačnosti kolesa  $I_k$  korigovaný na nulovú hodnotu trenia.
4. Graficky znázornite závislosť nekorigovaného momentu  $I^*$  na parametre  $\alpha$ , do grafu vyneste chybové úsečky.

## 2 Teoretická časť

Ak do kolesa z bicykla do vzdialenosti  $l$  od sterdu otáčania umiestnime bodové závažie hmotnosti  $m$  (ako ukazuje obrázok 1), vieme za predpokladu malých výchyliek  $\phi$  určiť<sup>[St]</sup> moment zotrvačnosti  $I$  zo znalosti periódy kmitu  $T$  podľa vzťahu:

$$I = ml \left( \frac{gT^2}{4\pi^2} - l \right), \quad (1)$$

kde  $g$  je miestne tiažové zrýchlenie.



Obr. 1: Meranie momentu zotrvačnosti kolesa metódou kyvov

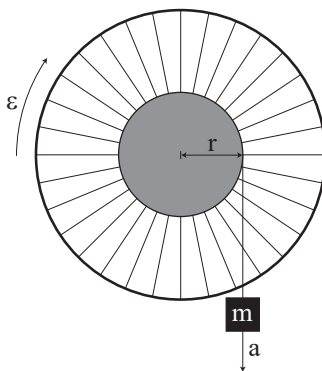
Pri meraní momentu zotrvačnosti metódou otáčania počítame moment zotrvačnosti priamo z druhej impulzovej vety:

$$M = I\epsilon, \quad (2)$$

kde  $M$  je súčet momentov síl pôsobiacich na rotujúce teleso,  $I^*$  je zdanlivý (na trenie nekorigovaný) moment zotrvačnosti telesa okolo našej osi rotácie a  $\epsilon$  je uhlové zrýchlenie, pre ktoré samozrejme platí vzťah:

$$\epsilon = \dot{\omega} \quad (3)$$

Situáciu, keď závažie hmotnosti  $m$  na vlákne omotanom okolo osi kolesa polomeru  $r$  roztáča koleso možno vidieť na obrázku 2.



Obr. 2: Meranie momentu zotrvačnosti kolesa metódou otáčania

Ak neuvažujeme moment trecej sily  $M_T$  pôsobiaci na toto koleso, tak možno zo vzťahu (2) odvodiť:

$$I^* \epsilon = mgr - mr^2 \epsilon \Leftrightarrow I^* = \frac{mgr}{\epsilon} - mr^2 \quad (4)$$

V reálnej situácii musíme uvažovať pôsobiace trenie, teda náš vzťah, tentokrát pre  $I_k$  (moment zotrvačnosti korigovaný o moment trecích síl) dostaneme úpravou vzťahu (4) vzťah:

$$I \epsilon = mgr - mr^2 \epsilon - M_T \quad (5)$$

Zavedme:

$$\alpha = \frac{1}{\epsilon} = \frac{r}{a}, \quad (6)$$

kde  $a$  je zrýchlenie závažia na konci vlákna roztáčajúceho koleso. Potom platí:

$$I^* = I_k + \alpha M_T, \quad (7)$$

z čoho možno regresiou  $I^*$  pre rôzne parametre  $\alpha$  extrapolovať hodnotu:

$$I^*(\alpha = 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} I^* = I_k, \quad (8)$$

čo je skutočná hodnota momentu zotrvačnosti kolesa.

### 3 Výsledky merania

#### 3.1 Metóda kyvov

Podmienky v laboratóriu neboli konštantné, keďže v miestnosti bolo mnoho ľudí a niekoľkokrát sa vetralo. Každopádne, teplota sa pohybovala okolo  $26\text{ }^{\circ}\text{C}$ , relatívna vlhkosť okolo 33% a tlak okolo 993hPa.

Pri meraní sme použili 6 závaží, 5 z nich bolo označených písmenom  $A-E$  a použili sme ich pri meraní metódou otáčania. Jedno bolo výrazne ťažšie a bolo uspôsobené na uchytenie do kolesa od bicykla na miesto, kde by za normálnych okolností patrilo ventil duše. Malo zhruba guľový tvar, čo sa nám bude hodiť ochvíľu, pri určovaní polohy jeho ťažiska. Označme toto závažie ako  $F$ . V tabuľke 1 vidno na laboratórnych váhach odmerané hmotnosti jednotlivých závaží.

Tabuľka 1: Hmotnosť použitých závaží

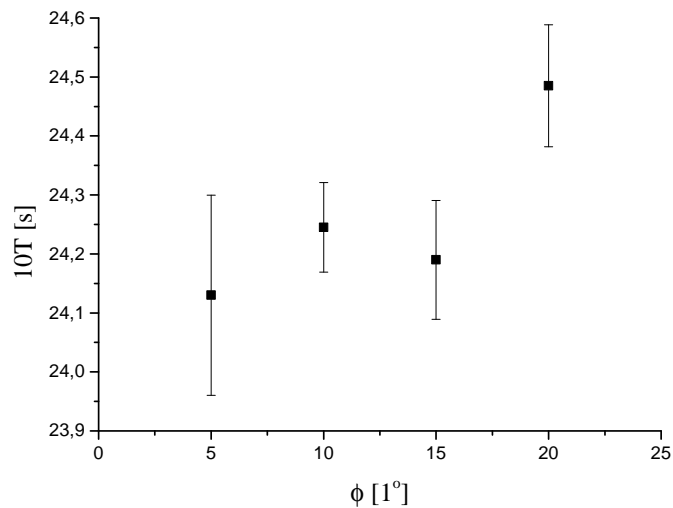
závažie	$m$ [g]
$A$	$11,959 \pm 0,001$
$B$	$16,901 \pm 0,001$
$C$	$24,698 \pm 0,001$
$D$	$34,376 \pm 0,001$
$E$	$49,109 \pm 0,001$
$F$	$148,032 \pm 0,001$

Pri meraní momentu zotrvačnosti metódou kmitov sme použili závažie  $F$  umiestnené zvnútra na obvodě kolesa tak, ako znázorňuje obrázok 1.

Periódka kmitu  $T$  závisela na veľkosti počiatočnej výchylky  $\phi$ , ktorú sme určovali uhlomerom umiestneným za kolesom. Túto závislosť sme sa pokúsili odhadnúť štyrmi meraniami pre každú zo 4 rôznych počiatočných výchyliek. Do dát možno nahliadnuť v prílohe, no pre naše spracovanie nie sú presné hodnoty dôležité, preto na tomto mieste uvádzame iba graf (obrázok 3) závislosti  $10T = f(\phi)$ , chybové úsečky zohľadňujú štandardnú odchýlku merania, nepresnosť stopiek a ľudský reakčný čas 90ms.

Nie je to príliš priekazné a nemožno z toho robiť závery, no výsledky naznačujú, že medzi výchylkou  $10^{\circ}$  a  $15^{\circ}$  sa nachádza lokálne minimum smernice závislosti, preto sme sa rozhodli merať periódu pri výchylke  $12^{\circ}$ . Ide nám práve o lokálne minimum smernice závislosti, keďže systém kvôli treniu stráca energiu a výchylka sa teda znižuje. Keďže chceme docieľiť vyššiu presnosť merania periódy meraním viacerých periód, chceme, aby sa dĺžka trvania periódy v priebehu merania príliš nemenila, aj napriek tomu, že systém stráca energiu.

Vzdialenosť osky od vrchu závažia sme určili pomocou posuvného meradla na  $(224 \pm 1)$  mm, predpokladáme, že závažie má tvar guľičky, priemer tejto guľičky sme potom určili na  $(24 \pm 1)$  mm. Polomer osky bol  $(12,0 \pm 0,2)$  mm. Výsledná vzdialenosť  $l$  ťažiska závažia  $F$  od stredu pri upevnení, ako znázorňuje obrázok 1 bola teda  $l = (0,200 \pm 0,002)$  m.



Obr. 3: Kyvy: závislosť periódy na počiatkovej výchylke

V tabuľke 2 vidno hodnoty z merania dĺžky trvania 10-tich periód pohybu kolesa pri počiatkovej výchylke  $12^\circ$  a výslednú chybu určenia periódy  $T$  zohľadňujúcu štandardnú odchýlku, chybu stopiek 10ms a reakčný čas (90ms pre  $10T$ , teda 9ms pre  $1T$ ).

Tabuľka 2: Periódka kmitu  $T$  kolesa pri poč. výchylke  $12^\circ$ 

meranie	$T$ [s]
1	$2,42 \pm 0,01$
2	$2,43 \pm 0,01$
3	$2,43 \pm 0,01$
4	$2,43 \pm 0,01$
5	$2,43 \pm 0,01$
6	$2,43 \pm 0,01$
7	$2,42 \pm 0,01$
8	$2,43 \pm 0,01$
9	$2,43 \pm 0,01$
10	$2,42 \pm 0,01$
$T \pm \sigma_T$	$2,427 \pm 0,014$

Zo známych parametrov  $m$ ,  $l$ ,  $T$  a pri znalosti<sup>[Wg]</sup> miestneho tiažového zrýchlenia

$g = 9,8137 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  vieme pomocou vzťahu 1 určiť moment zotrvačnosti ako:

$$I = (0,0374 \pm 6 \cdot 10^{-4}) \text{ kg m}^2, \quad (9)$$

kde sme chybu  $\sigma_I$  zapracovali ako:

$$\sigma_I^2 = \left(\frac{\bar{I}}{m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{mgT^2}{4\pi^2} - 2ml\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{mlgT}{2\pi^2}\right)^2 \sigma_T^2, \quad (10)$$

### 3.2 Metóda otáčania

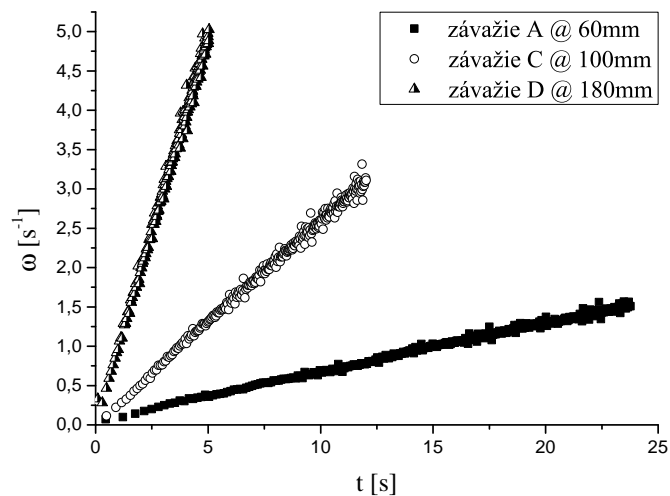
Pri meraní touto metódou sme použili závažia  $A$  až  $E$ , ktoré sme zavesené na vlákne omotávali okolo sústredných valcov. Pre výpočet (vzťahy 4, 5 a 7) potrebujeme poznať polomer týchto valcov. Určili sme ho meraním posuvným meradlom s chybou 0,2mm. Museli sme určiť priemer valca cez vyvýšený okraj a následne určiť vyvýšenie okraja pomocou hĺbkomeru. Preto je chyba určenia 1,5-násobná (1 chyba pri určení vyvýšenia okraja hĺbkomerom a  $\frac{1}{2}$  chyby pri určení vonkajšieho polomeru, keďže sme merali priemer). Priemery valcov (a iné veličiny týkajúce sa konkrétnych valcov) indexujeme  $X_i$ , kde  $i$  je približný priemer valca v mm tak, ako bol uvedený v programe *Kolo*, ktorý sme pri meraní použili a dostaneme sa k nemu o chvíľu. Pre porovnanie sme určili polomery valca (značené  $\tilde{r}_i$ ) z obvodu - každý valec sme trikrát obmotali vláknom a odmerali dĺžku vlákna, následne sme určili polomer zo vzťahu  $\tilde{r}_i = \frac{3o_i}{6\pi}$ . Takto získané výsledky sme však nemohli použiť, ani nie tak kvôli veľkej chybe (ako vidno z nameraných hodnôt), ako kvôli neurčitosti chyby - nevieme odhadnúť, ako veľmi sa vlákno natiahne vplyvom pnuia, prípadne vlhkosťou rúk a podobne. Každopádne, výsledky tohto merania pre zaujímavosť uvádzame v tabuľke 3, spolu s výsledkami merania polomeru posuvným meradlom, ktoré sme v ďalšom spracovaní použili.

Tabuľka 3: Polomer valcov

valec	$r_i$ [m]	$\sigma_{r_i}$ [m]	$\tilde{r}_i$ [m]
60	0,0301	0,0003	0,0297
100	0,0497	0,0003	0,0501
140	0,0697	0,0003	0,0696
180	0,0897	0,0003	0,0902

Meranie  $\epsilon$  bolo automatizované, koleso malo na obvode zárezy prechádzajúce cez optickú závoru pripojenú na počítač so softvérom *Kolo*, ktorý ovládal brzdu kolesa (v čase  $t = 0$  uvoľnil koleso) a taktiež automaticky spracoval dáta z optickej závoru na časovú závislosť uhlovej rýchlosti (dáta formátu  $\omega = f(t)$ , samozrejme na časovo neekvidištantnej sieti). Z lineárnej regresie týchto dát možno (podľa 3 za dobre splneného predpokladu konštantného  $\epsilon$ ) určiť veľkosť  $\epsilon$ . V grafe na obrázku 4 vidno tri rôzne namerané závislosti  $\omega = f(t)$ , chybové úsečky nie sú znázornené, jednak preto, že všetky sú rovnako veľké a zneprehľadnili by graf, výsledná hodnota  $\epsilon$  na nich nezávisí, keďže smernicu regresnej priamky rovnaké chyby neovplyvnia, jednak aj preto,

že ich presnú hodnotu nepoznáme, keďže nepoznáme presné parametre zárezov v kolese ani parametre elektroniky okolo optickej závory. Chyba určenia  $\epsilon$ , ku ktorej sa čoskoro dostaneme vychádza čisto zo štatistiky odchýlky fitu od nameraných hodnôt, bez znalosti presnosti nameraných bodov, k čomu sa vrátíme v diskusii.



Obr. 4: Výber z nameraných závislostí  $\omega = f(t)$

Pri lineárnej regresii sme nepožadovali nulovosť absolútneho členu, keďže si nemôžeme byť istí nulovosťou výchylky v čase  $t = 0$ , inak povedané synchronizáciou uvoľnenia kolesa a stopiek, teda sme fitovali funkciou tvaru  $\omega = \epsilon t + c$ , kde  $c$  je konštanta, ktorú sme nijak ďalej nespracúvali a pre určenie momentu zotrvačnosti kolesa nie je podstatná. Nafitované smernice aj ich chyby vidno v tabuľke 4.

Tabuľka 4: Uhlové zrýchlenia

závažie	$\epsilon_{60} [s^{-2}]$	$\epsilon_{100} [s^{-2}]$	$\epsilon_{140} [s^{-2}]$	$\epsilon_{180} [s^{-2}]$
<i>A</i>	0,0618 $\pm 3 \cdot 10^{-4}$	0,1164 $\pm 5 \cdot 10^{-4}$	0,1677 $\pm 7 \cdot 10^{-4}$	0,2266 $\pm 1 \cdot 10^{-3}$
<i>B</i>	0,0941 $\pm 4 \cdot 10^{-4}$	0,1673 $\pm 7 \cdot 10^{-4}$	0,2421 $\pm 1 \cdot 10^{-3}$	0,3303 $\pm 1,5 \cdot 10^{-3}$
<i>C</i>	0,1463 $\pm 6 \cdot 10^{-4}$	0,2556 $\pm 1 \cdot 10^{-3}$	0,3687 $\pm 1,4 \cdot 10^{-3}$	0,486 $\pm 2 \cdot 10^{-3}$
<i>D</i>	0,2144 $\pm 8 \cdot 10^{-4}$	0,3644 $\pm 1,3 \cdot 10^{-3}$	0,520 $\pm 2 \cdot 10^{-3}$	0,687 $\pm 3 \cdot 10^{-3}$
<i>E</i>	0,3150 $\pm 1,3 \cdot 10^{-3}$	0,539 $\pm 2 \cdot 10^{-3}$	0,753 $\pm 3 \cdot 10^{-3}$	0,983 $\pm 5 \cdot 10^{-3}$

Pre každú z týchto hodnôt sme podľa 6 dopočítali hodnotu parametra  $\alpha$ , hodnoty vidno v tabuľke 5.

Tabuľka 5: Hodnoty parametra  $\alpha$ 

závažie	$\alpha_{60} [s^2]$	$\alpha_{100} [s^2]$	$\alpha_{140} [s^2]$	$\alpha_{180} [s^2]$
<i>A</i>	$16,18 \pm 0,08$	$8,59 \pm 0,04$	$5,96 \pm 0,02$	$4,41 \pm 0,02$
<i>B</i>	$10,63 \pm 0,05$	$5,98 \pm 0,03$	$4,13 \pm 0,02$	$3,03 \pm 0,01$
<i>C</i>	$6,84 \pm 0,03$	$3,91 \pm 0,02$	$2,71 \pm 0,01$	$2,06 \pm 0,01$
<i>D</i>	$4,66 \pm 0,02$	$2,74 \pm 0,01$	$1,92 \pm 0,01$	$1,46 \pm 0,01$
<i>E</i>	$3,17 \pm 0,01$	$1,86 \pm 0,01$	$1,33 \pm 0,01$	$1,02 \pm 0,01$

Ďalej sme podľa 4 vypočítali pre každú kombináciu závažia a polomeru valca hodnotu nekorigovaného momentu zotrvačnosti  $I^*$ . Chybu  $\sigma_{I^*}$  sme preniesli ako:

$$\sigma_{I^*}^2 = (rg\alpha - r^2)^2 \sigma_m^2 + (mrg)^2 \sigma_\alpha^2 + (mr\alpha - 2mr)^2 \sigma_r^2 \quad (11)$$

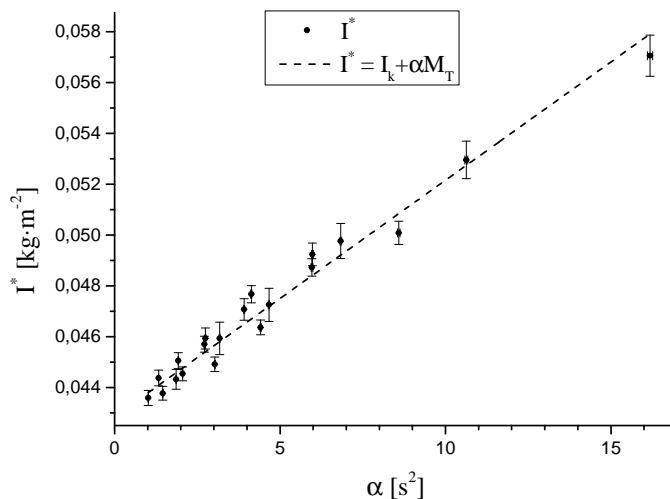
V tabuľke 6 vidno dopočítané hodnoty  $I^*$  aj s chybami.



Tabuľka 6: Nekorigovaný moment zotrvačnosti

závažie	$I_{60}^*$ [kg m <sup>2</sup> ]	$I_{100}^*$ [kg m <sup>2</sup> ]	$I_{140}^*$ [kg m <sup>2</sup> ]	$I_{180}^*$ [kg m <sup>2</sup> ]
A	0,0571 $\pm 8 \cdot 10^{-4}$	0,0501 $\pm 5 \cdot 10^{-4}$	0,0487 $\pm 3 \cdot 10^{-4}$	0,0464 $\pm 3 \cdot 10^{-4}$
B	0,0530 $\pm 7 \cdot 10^{-4}$	0,0492 $\pm 4 \cdot 10^{-4}$	0,0477 $\pm 3 \cdot 10^{-4}$	0,0449 $\pm 3 \cdot 10^{-4}$
C	0,498 $\pm 7 \cdot 10^{-4}$	0,0471 $\pm 4 \cdot 10^{-4}$	0,0457 $\pm 3 \cdot 10^{-4}$	0,0445 $\pm 3 \cdot 10^{-4}$
D	0,0473 $\pm 7 \cdot 10^{-4}$	0,0459 $\pm 4 \cdot 10^{-4}$	0,0451 $\pm 3 \cdot 10^{-4}$	0,0438 $\pm 3 \cdot 10^{-4}$
E	0,0459 $\pm 6 \cdot 10^{-4}$	0,0443 $\pm 4 \cdot 10^{-4}$	0,0444 $\pm 3 \cdot 10^{-4}$	0,0436 $\pm 3 \cdot 10^{-4}$

Každá kombinácia polomeru  $r_i$  a závažia  $A-E$  nám teraz udá jeden bod do závislosti  $I^* = I_k + \alpha M_T$ . Všetky tieto hodnoty vidno vynesené v grafe na obrázku 5. Podľa 7 predpokladáme afinnú závislosť momentu zotrvačnosti  $I^*$  na parametre  $\alpha$ . Chybové úsečky určenia parametra  $\alpha$  nie sú znázornené, keďže sú príliš malé na to, aby ich bolo v grafe vidno, avšak fit aj chyba fitu ich zohľadňujú.

Obr. 5: Graf závislosti  $I^* = I_k + \alpha M_T$ 

Koeficienty fitu vidno v tabuľke 7.

Tabuľka 7: Koefficienty fitu  $I^* = I_k + \alpha M_T$ 

	$I_k [10^{-3} \text{ kg m}^2]$	$M_T [10^{-3} \text{ Nm}]$
fit	42,8	0,93
smerodajná odchýlka fitu	0,2	0,05

## 4 Diskusia výsledkov

Pri meraní periódy kmitu  $T$  na určenie momentu zotrvačnosti  $I$  metódou kmitov sme volili počiatočnú výchylku  $\phi$  tak, aby sme minimalizovali smernicu závislosti  $T = f(\phi)$ . Štandardne sa odporúča používať priblíženie, lineárnej závislosti reakčnej sily iba do výchylky  $7^\circ$ . Lineárna závislosť reakčnej sily pracuje v limitnom priblížení  $\sin(x) \approx x$ , teda so zväčšujúcou sa výchylkou táto sila oproti predpovedi klesá, teda perióda  $T$  sa zväčšuje. Na druhú stranu, so zväčšujúcou sa výchylkou  $\phi$  sa zväčšuje stredná rýchlosť pohybu a teda aj uhlové zrýchlenie  $\epsilon$  a teda sa znižuje vplyv momentu trecích síl  $M_T$  oproti momentu zotrvačnej sily  $I\epsilon$ . Preto považujeme za legitímne použiť pri tomto meraní výchylku mierne vyššiu než  $7^\circ$ . Platí, že  $12^\circ = \frac{1}{15}\pi$  rad a  $\text{sinc}(\pi) \approx 0,9927$ , teda rozdiel medzi  $x$  a  $\sin(x)$  pri tejto výchylke nie je príliš výrazný.

Ďalšiu nepresnosť do merania metódou kyvov vnieslo priblíženie guľového tvaru závažia  $F$ , ktoré mohlo spôsobiť nepresnosť určenia polohy ťažiska tohto závažia na úrovni milimetrov, čo mohlo spôsobiť odchýlku výsledného momentu zotrvačnosti o rád vyššiu, teda na úrovni  $10^{-3} \text{ kg m}^2$ . Taktiež sme zanedbali moment zotrvačnosti samotného závažia, ktorý môže byť približne  $\frac{2}{5}mr_{gule}^2 \approx 9 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$  a uvažovali sme iba jeho Steinerovský príspevok, ktorý je na úrovni zhruba  $mR^2 \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ .

Pri meraní otáčacou metódou sme sa plne spoľahli na program *Kolo* bez toho, aby sme poznali parametre optickej závory, odozvu brzdy a presné metódy spracovania dát a boli sme odkázaní na to, dôverovať týmto dátam. Všetko spracovanie predpokladalo, že naša automatická aparatúra meria s úplne zanedbateľnou chybou. Z toho mohla pochádzať netriviálna chyba merania.

Pri meraní touto metódou sme zanedbali parametre vlákna, na ktorom viselo závažie, jeho hmotnosť bola v porovnaní s hmotnosťou závažia zanedbateľná. Chybu na úrovni desiatín milimetrov mohlo spôsobiť to, že vlákno bolo namotané cez seba, čo mohlo mierne zmeniť efektívny polomer valca  $r$ , no chyba nebude veľká, keďže sme sa snažili nenavíjať vlákno cez seba.

Pri otáčacej metóde sme predpokladali, že moment trecích síl  $M_T$  ostáva konštantný, čo všeobecne nie je pravda, keď pridávame závažie - viac hmotnosti, ktorú musia ložiská niesť. No graf na obrázku 5 nasvedčuje, že tento predpoklad bol dobre splnený.

Neexistujú tabuľkové hodnoty momentu zotrvačnosti pre naše koleso, teda nemáme výsledky s čím rovnať. Prikláňame sa však k výsledku dosiahnutému otáčacou metódou, keďže graf na obrázku 5 ukazuje, že meranie, hoc s rôznymi parametrami bolo vnútorne konzistentné, keďže body sedia na fit veľmi dobre a navyiac, toto meranie zohľadňuje a v lineárnom priblížení eliminuje moment trecích síl  $M_T$ .

## 5 Záver

Podarilo sa nám určiť moment zotrvačnosti kolesa metódou kmytov ako  $I = (0,0374 \pm 6 \cdot 10^{-4}) \text{ kg m}^2$  a otáčacou metódou ako  $I_k = (0,0428 \pm 2 \cdot 10^{-4}) \text{ kg m}^2$ .

Prikláňame sa k výsledku  $I_k$  získanému otáčacou metódou, keďže pri meraní metódou kmytov sme pristúpili na veľa aproximácií, o ktorých presnosti možno diskutovať.

Otáčacou metódou sa nám podarilo navyše zmerať aj moment trecích síl  $M_T = (0,93 \pm 0,05) \cdot \text{Nm}$ .

## 6 Zoznam použitej literatúry

- [St] Kolektív ZFP KVOF MFF UK. *Študijný text k meraniu: Měření momentu setrvačnosti kola*. [cit. 2016-21-04]. URL: <[http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/texty/txt\\_113.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_113.pdf)>.
- [Wg] Kolektív WIKIMEDIA project. *Wikipedie: Tíhové zrychlení* [cit. 2016-05-03]. URL: <[https://cs.wikipedia.org/wiki/T%C3%ADhov%C3%A9\\_zrychlen%C3%AD](https://cs.wikipedia.org/wiki/T%C3%ADhov%C3%A9_zrychlen%C3%AD)>.