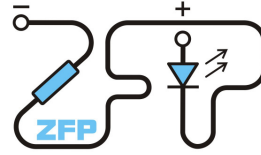


Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum ...



Úloha č.

Název úlohy:

Jméno: Obor: FOF FAF FMUZV

Datum měření:

Datum odevzdání:

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 - 5	
Teoretická část	0 - 1	
Výsledky měření	0 - 8	
Diskuse výsledků	0 - 4	
Závěr	0 - 1	
Seznam použité literatury	0 - 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval:.....

dne:

1 Pracovné úlohy

1. Odmerať moment zotrvačnosti kolesa metódou kyvov.
2. Odmerať moment zotrvačnosti kolesa metódou otáčania pre rôzne hodnoty parametra α . Graficky znázorniť závislosť $\omega = \omega(t)$ pre tri rôzne hodnoty α .
3. Určiť moment trecích síl M_t a moment zotrvačnosti kolesa I_k korigovaný na nulovú hodnotu trenia.
4. Graficky znázorniť závislosť nekorigovaného momentu I^* na parametri α , do grafu vyniesť chybové úsečky.

2 Teoretická časť

2.1 Meranie momentu zotrvačnosti kolesa

Moment zotrvačnosti tuhého telesa je veličina, ktorá kvantitatívne opisuje zotrvačnosť telesa pri rotačnom pohybe. V pohybových rovniciach otáčania predstavuje analógiu hmotnosti z pohybových rovníc translačného pohybu. V praxi bol meraný moment zotrvačnosti kolesa dvoma metódami. Jednou z nich bola *metóda kyvov*, pri ktorej sa na ráfik kolesa z bicykla pripevnilo závažie a sústava po vychýlení konala kmitavý pohyb. Tento pri zanedbaní trecích síl v ložiskách kolesa a pri dostatočne malých výchylkách možno považovať za harmonický kmit fyzického kyvadla. Z pohybovej rovnice fyzického kyvadla pre moment zotrvačnosti kolesa I vyplýva[1] vzťah

$$I = ml \left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - l \right), \quad (1)$$

kde m je hmotnosť závažia, l je vzdialenosť hmotného stredu závažia od osi otáčania, g je tiažové zrýchlenie a T perióda kmitov.

Ďalšou metódou je tzv. *metóda otáčania*. Pri tejto metóde je koleso obstarané kladkami, na ktoré sa navinie vlákno so závažím a následne spustí. Sústava koná zrýchlený otáčavý pohyb, pričom sa meria časová závislosť uhlovej rýchlosti kolesa $\omega = \omega(t)$. Z tejto sa lineárnou regresiou získa uhlové zrýchlenie ε . Z pohybových rovníc popisujúcich sústavu vyplýva pri zanedbaní trecích síl pre moment zotrvačnosti kolesa I^* rovnica

$$I^* = \frac{md^2}{4} \left(\frac{2g}{d\varepsilon} - 1 \right). \quad (2)$$

m tu označuje hmotnosť závažia, d priemer kladky, g tiažové zrýchlenie a ε je uhlové zrýchlenie kolesa.

V praxi sú však trecie sily nezanedbateľné a ich pôsobenie možno popísať *momentom trecích síl* M_t . Keď zavedieme značenie $\alpha := 1/\varepsilon$, platí pre moment zotrvačnosti kolesa I_k korigovaný na pôsobenie trecích síl výraz

$$I_k = I^* - \alpha M_t, \quad (3)$$

kde I^* je nekorigovaný moment zotrvačnosti. Samotná oprava na trenie sa určí lineárnou regresiou z upraveného vzťahu

$$I^* = I_k + \alpha M_t \quad (4)$$

s tým, že sa určuje nekorigovaný moment pre rôzne hodnoty parametra α .

2.2 Štatistické spracovanie dát

Všetky výsledky priamych meraní sú udávané so strednou kvadratickou chybou ($P = 68.27\%$). Prenos neistoty a relatívna chyba nepriameho merania boli pri štatistických spracovaniach počítané pomocou vzorcov [2]:

$$\delta_g = \sqrt{\left((-0,025\,928 + 1,38 \times 10^{-4} \cos 2\phi(-2 \sin 2\phi))\delta_\phi \right)^2 + \left(-3,086 \times 10^{-6}\delta_H \right)^2} \quad (5)$$

$$\delta_l = \sqrt{\delta_{l'}^2 + \frac{\delta_d^2}{4}} \quad (6)$$

$$\delta_I = \sqrt{\left(\frac{I}{m}\delta_m \right)^2 + \left(\frac{m l T^2}{4\pi^2}\delta_g \right)^2 + \left(\frac{m l g T}{2\pi^2}\delta_T \right)^2 + \left(m \left(\frac{g T^2}{4\pi^2} - 2l \right) \delta_l \right)^2} \quad (7)$$

$$\eta_\alpha = \sqrt{(\eta_\varepsilon)^2} = \eta_\varepsilon \quad (8)$$

$$\delta_{I^*} = \sqrt{\left(\frac{I^*}{m}\delta_m \right)^2 + \left(\frac{m d}{2\varepsilon}\delta_g \right)^2 + \left(\frac{m d g}{2\varepsilon^2}\delta_\varepsilon \right)^2 + \left(\frac{m}{2}(g/\varepsilon - d)\delta_d \right)^2} \quad (9)$$

η značí relatívnu chybu, δ absolútnu.

Pre ľubovoľnú veličinu s priemernou nameranou hodnotou \bar{x} a chybou δ_x platí zrejme

$$\eta_x = \frac{\delta_x}{\bar{x}} \quad (10)$$

Všetky grafy a lineárne regresie boli spracované v programe OriginLab.

3 Výsledky merania

3.1 Experimentálne podmienky

- teplota: $(26,5 \pm 0,1)^\circ\text{C}$
- tlak: $(9,983 \pm 0,001) \times 10^4 \text{ Pa}$
- vlhkosť: $(41,4 \pm 0,1)\%$

Chyby hodnôt vyššie boli odhadnuté z premenlivosti údajov na meradle.

Podľa [3] urobme odhad g v závislosti na zemepisnej šírke a nadmorskej výške budovy M. Zemepisná šírka bola za pomoci aplikácie Google Maps odhadnutá na $\phi = (50,0695 \pm 0,0002)^\circ$ a nadmorská výška na $H = (244,4 \pm 1,5) \text{ m}$. Na odhad g v ms^{-1} slúži *Helmertova rovnica*:

$$g = 9,806\,16 - 0,025\,928 \cos(2\phi) + (6,9 \times 10^{-5}) \cos^2(2\phi) - (3,086 \times 10^{-6})H$$

Po dosadení máme s ohľadom na štatistický prenos chyby podľa vzorca (5) $g = (9,81 \pm 0,05) \text{ ms}^{-2}$.

3.2 Metóda kyvov

Najprv boli odmerané rôzne potrebné dĺžky, konkrétne vzdialenosť l' od osi kolesa po miesto upevnenia závažia pásovým meradlom (dielik 0,1 cm) a priemer závažia d' posuvným meradlom (dielik 0,02 mm). Závažie bolo pomerne nepravidelného tvaru, preto boli hodnoty “priemeru” závažia namerané na rôznych miestach na závaží a štatisticky spracované. Obe tieto merania sú zdokumentované v Tab. 1. Závažie sa odvážilo na elektronických váhach a jeho hmotnosť bola určená na $m = (147,5 \pm 0,1)$ g. Koleso so závažím boli následne uvedené do kmitavého pohybu s počiatočnou výchylkou cca. 10 dielikov stupnice za kolesom a digitálnymi stopkami bola meraná doba 10 periód $10T$. Chyba spôsobená reakčným časom bola odhadnutá na $t_r = 0,26$ s. Namerané hodnoty pre desať periód sú takisto v Tab. 1.

$\frac{l'}{\text{cm}}$	$\frac{d'}{\text{cm}}$		$\frac{10T}{\text{s}}$	
24,3	3,062	2,380	24,19	23,92
24,7	2,400	3,018	24,08	23,91
23,6	3,100	2,354	24,02	24,41
23,9	2,378	2,992	24,19	24,21
24,6	3,000	2,356	24,51	24,32
24,8				

Tab. 1: Merania potrebné pre výpočet pomocou metódy kyvov

S ohľadom na systematické chyby meradiel sú výsledné hodnoty nasledovné:

- $l' = (24,3 \pm 0,2)$ cm
- $d' = (2,7 \pm 0,1)$ cm
- $10T = (24,2 \pm 0,2)$ s $\implies T = (2,42 \pm 0,02)$ s

V použitej aproximácii považujeme závažie za guľové s priemerom d' , pre vzdialenosť l od osi otáčania k hmotnému stredy závažia teda platí:

$$l = l' - \frac{d'}{2}$$

Uvažujúc prenos neistoty podľa (6) je $l = (21,6 \pm 0,2)$ cm.

Moment zotrvačnosti kolesa I sa určí pomocou rovnice (1) a s ohľadom na štatistický vzorec (7) dostaneme $I = (3,94 \pm 0,09) \times 10^{-2}$ kg m².

3.3 Metóda otáčania

Pri meraní momentov zotrvačnosti druhou metódou popísanou v časti 2.1 boli k dispozícii štyri rôzne kladky, ktorých priemery sme vzostupne označili d_1 až d_5 a päť rôznych závaží s hmotnosťami označenými takisto vzostupne m_A až m_E . Hmotnosti závaží boli merané na elektronických váhach a namerané hodnoty sú uvedené nižšie.

- $m_A = (11,95 \pm 0,05)$ g
- $m_B = (16,9 \pm 0,1)$ g
- $m_C = (24,7 \pm 0,1)$ g
- $m_D = (34,4 \pm 0,1)$ g
- $m_E = (49,1 \pm 0,1)$ g

Priemery kladiek d_i boli merané posuvným meradlom (pre $i = 1$ s dielikom 0,02 mm, pre ostatné dielik 0,05 mm). Zistené hodnoty sú v Tab. 2.

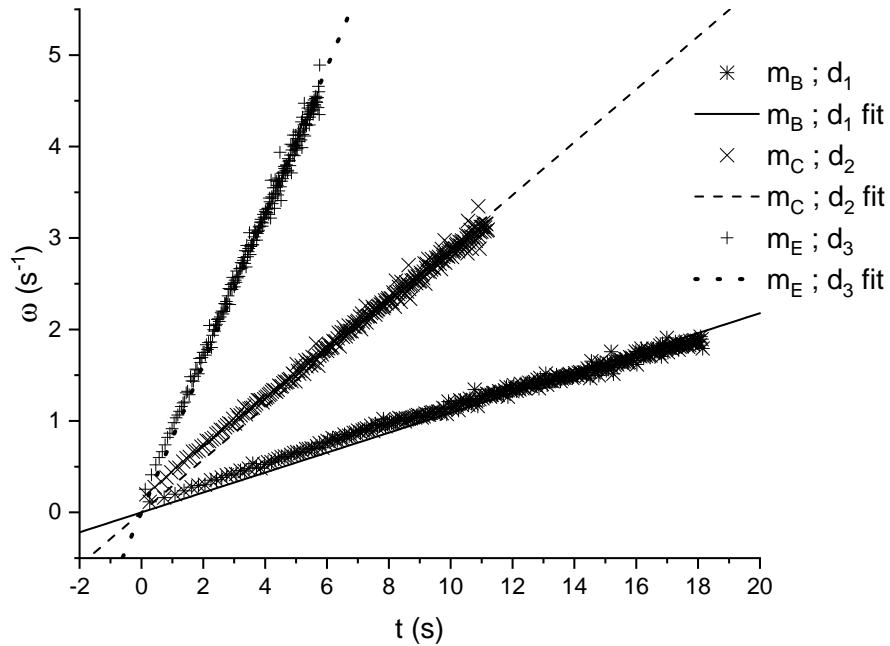
$\frac{d_1}{\text{cm}}$	$\frac{d_2}{\text{cm}}$	$\frac{d_3}{\text{cm}}$	$\frac{d_4}{\text{cm}}$
5,980	9,970	13,920	17,910
5,978	9,965	14,015	17,925
5,976	9,975	13,935	17,915
5,962	9,970	14,025	17,920
5,978	9,955	14,010	17,920

Tab. 2: Merania priemerov kladiek pri metóde otáčania

S ohľadom na neistoty meracích prístrojov sú výsledné hodnoty priemerov nasledovné:

- $d_1 = (5,975 \pm 0,004)$ cm
- $d_2 = (9,967 \pm 0,005)$ cm
- $d_3 = (13,981 \pm 0,025)$ cm
- $d_4 = (17,918 \pm 0,004)$ cm

V ďalšom kroku boli závažia m_A až m_E pripevnené na niť, ktorá bola navinutá postupne na všetky kladky. Po navinutí sa závažie nechalo voľne padať a počítačovým programom sa zaznamenávala časová závislosť uhlovej rýchlosti kolesa. Tri zo zaznamenaných závislostí (konkrétne pre dvojice $\{m_B, d_1\}$, $\{m_C, d_2\}$ a $\{m_E, d_3\}$) sú vynesené v grafe na Obr. 1.



Obr. 1: Závislosti $\omega = \omega(t)$ pre tri rôzne kombinácie kladiek a závaží

Tieto tri závislosti boli spolu s meraniami pre ostatné kombinácie kladiek a závaží fitované lineárnou funkciou $y = \lambda \cdot x$, kde λ má význam uhlového zrýchlenia ε . Určené hodnoty uhlového zrýchlenia pre jednotlivé kombinácie sú uvedené v Tab. 3.

kombinácia	$\frac{\varepsilon}{[\text{s}^{-2}]}$	$\frac{\delta_\varepsilon}{[\text{s}^{-2}]}$	kombinácia	$\frac{\varepsilon}{[\text{s}^{-2}]}$	$\frac{\delta_\varepsilon}{[\text{s}^{-2}]}$
$m_A ; d_1$	0,0691	0,0002	$m_A ; d_3$	0,1790	0,0003
$m_B ; d_1$	0,1089	0,0003	$m_B ; d_3$	0,2787	0,0006
$m_C ; d_1$	0,1693	0,0004	$m_C ; d_3$	0,4115	0,0009
$m_D ; d_1$	0,2442	0,0006	$m_D ; d_3$	0,575	0,001
$m_E ; d_1$	0,3288	0,0005	$m_E ; d_3$	0,811	0,002
$m_A ; d_2$	0,1244	0,0003	$m_A ; d_4$	0,2387	0,0005
$m_B ; d_2$	0,1855	0,0004	$m_B ; d_4$	0,352	0,001
$m_C ; d_2$	0,2891	0,0007	$m_C ; d_4$	0,537	0,002
$m_D ; d_2$	0,4028	0,0009	$m_D ; d_4$	0,753	0,002
$m_E ; d_2$	0,600	0,002	$m_E ; d_4$	1,0419	0,0025

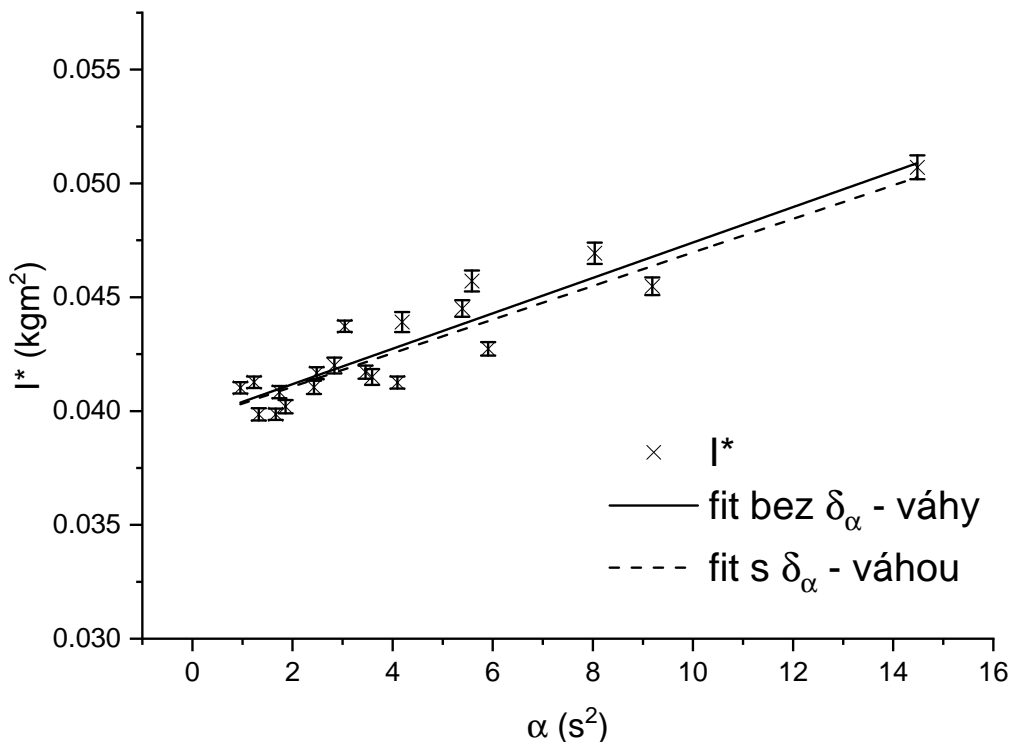
Tab. 3: Určené hodnoty uhlového zrýchlenia pre všetky kombinácie kladiek a závaží

Pri spracovaní boli hodnoty ε pomocou vzťahu $\alpha = 1/\varepsilon$ prepočítané na hodnoty parametrov α a z rovnice (2) bol určený nekorigovaný moment zotrvačnosti kolesa I^* . Pri výpočte odchýlok sa uvažovali vzorce (8) a (9). Súhrn výpočtov je uvedený v Tab. 4 a graficky znázornený na Obr. 2.

kombinácia	$\frac{\alpha}{[\text{s}^2]}$	$\frac{\delta_\alpha}{[\text{s}^2]}$	$\frac{I^*}{[10^{-2} \text{ kg m}^2]}$	$\frac{\delta_{I^*}}{[10^{-2} \text{ kg m}^2]}$
$m_A ; d_1$	14,48	0,05	5,1	0,3
$m_B ; d_1$	9,19	0,03	4,5	0,3
$m_C ; d_1$	5,91	0,01	4,3	0,3
$m_D ; d_1$	4,09	0,01	4,1	0,3
$m_E ; d_1$	3,042	0,005	4,4	0,3
$m_A ; d_2$	8,04	0,02	4,7	0,2
$m_B ; d_2$	5,39	0,01	4,45	0,2
$m_C ; d_2$	3,459	0,008	4,2	0,2
$m_D ; d_2$	2,483	0,005	4,2	0,2
$m_E ; d_2$	1,666	0,005	4,0	0,2
$m_A ; d_3$	5,585	0,003	4,6	0,8
$m_B ; d_3$	3,588	0,008	4,15	0,74
$m_C ; d_3$	2,430	0,005	4,1	0,7
$m_D ; d_3$	1,738	0,004	4,1	0,7
$m_E ; d_3$	1,2327	0,0025	4,1	0,7
$m_A ; d_4$	4,190	0,009	4,4	0,1
$m_B ; d_4$	2,837	0,008	4,2	0,1
$m_C ; d_4$	1,860	0,006	4,02	0,09
$m_D ; d_4$	1,327	0,004	3,99	0,09
$m_E ; d_4$	0,960	0,002	4,10	0,09

Tab. 4: Výsledky výpočtov potrebných pre určenie závislosti $I^* = I^*(\alpha)$

Závislosť $I^* = I^*(\alpha)$ bola fitovaná lineárnou závislosťou $y = \lambda_1 \cdot x + \lambda_2$ s ohľadom na chyby bodov (α_i, I_i^*) (najprv čiste s váhou chýb v osi y , potom aj s váhou chýb v osi x). λ_1 má v tomto prípade fyzikálny význam momentu trecích síl M_T a λ_2 je významovo totožná korigovanému momentu zotrvačnosti I_k . Výsledky prvého fitu sú $I_k = (3,96 \pm 0,04) \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ a $M_T = (7,78 \pm 0,65) \times 10^{-4} \text{ N m}$, a po uvážení chýb v osi x je $I_k = (3,93 \pm 0,08) \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ a $M_T = (8 \pm 2) \times 10^{-4} \text{ N m}$.



Obr. 2: Graf závislosti $I^* = I^*(\alpha)$

4 Diskusia výsledkov

Metóda kyvov dala moment zotrvačnosti použitého kolesa ako $I = (3,94 \pm 0,09) \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$, teda s relatívnou presnosťou $\eta_I \approx 2,3\%$. Táto metóda však predpokladala nulové trenie v osi kolesa, pričom jednou z úloh metódy otáčania bolo overiť, či je predpoklad oprávnený. Pomocou lineárnej regresie bol určený moment trecích síl, ktorý by mohol spôsobiť odchýlku od reality.

Presnosť určenia samotného momentu trecích síl bola však veľmi malá ($\eta_{M_T} \approx 8.4\%$ pri vážení chybami nekorigovaného momentu zotrvačnosti a dokonca $\eta_{M_T} \approx 25\%$ pri uvážení neistoty určenia parametra α), a teda hodnoty momentu trecích síl M_T plynúce z tejto metódy majú skôr kvalitatívnu ako kvantitatívnu výpovednú hodnotu.

Hodnoty korigovaného momentu I_k sa rôznia podľa použitej regresnej metódy o približne $0,03 \text{ kg m}^2$, no v rámci chyby si dostatočne dobre zodpovedajú navzájom, ako aj s momentom zotrvačnosti určeným metódou kyvov. Z toho môžeme usúdiť, že predpoklad zanedbateľného trenia v osi kolesa bol oprávnený.

Chyby výsledných hodnôt momentov zotrvačnosti boli ovplyvnené rôznymi vonkajšími faktormi. Pri metóde kyvov najväčšiu nepresnosť spôsobovalo závažie, ktorého tvar nebol homogénny a teda poloha jeho hmotného stredy bola iba aproximáciou. Takisto hrúbka osi otáčania prispela do odchýlky merania vzdialenosti l . Pri metóde otáčania boli tiež najvýraznejšie príspevky ku chybám výsledkov od meraných dĺžok (priemerov kladiek). Chyba merania d_3 je o rád vyššia, nakoľko pri tejto veľkosti kladky bolo náročné manipulovať posuvným meradlom na ploche kladky, na ktorú bola navíjaná niť. Pri kladke d_4 sa meraním odhadla výška okrajového "rámu" kladky na 1 mm a tento bol od meraných hodnôt systematicky odčítaný. Ostatné veličiny boli určené s pomerne malými relatívnymi neistotami.

5 Záver

Úlohou tohto praktika bolo určiť moment zotrvačnosti kolesa dvoma rôznymi metódami. Najprv bol určený nepriamym meraním metódou kyvov na $I = (3,94 \pm 0,09) \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ a následne lineárnou regresiou pomocou metódy otáčania na $I_k = (3,96 \pm 0,04) \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ resp. $I_k = (3,93 \pm 0,08) \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ (v závislosti od použitej regresnej metódy). Metódou otáčania bol taktiež určený moment trecích síl $M_T = (7,78 \pm 0,65) \times 10^{-4} \text{ N m}$ resp. $M_T = (8 \pm 2) \times 10^{-4} \text{ N m}$ (opäť podľa metódy fitu). Voči všetkým určeným hodnotám bola vykonaná diskusia.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Študijný text k úlohe http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_113.pdf. aktuálne k 24.4. 2018.
- [2] J. BROŽ a kol. *Základy fyzikálních měření I*. Praha: SPN, 1967.
- [3] Dr. D.G. Simpson. Physics recreations: Helmhert's equation <http://www.pgccphy.net/rec/rec002-helmert.pdf>. aktuálne k 29.3. 2018.