

1 Pracovní úkoly

1. Změřte moment setrvačnosti kola metodou kyvů.
2. Změřte moment setrvačnosti kola metodou otáčení pro různé hodnoty parametru α . Graficky znázorněte závislost $\omega = \omega(t)$ pro tři odlišné hodnoty parametru α .
3. Určete moment třecích sil M_t a moment setrvačnosti kola I_k korigovaný na nulovou hodnotu tření.
4. Graficky znázorněte závislost nekorigovaného momentu I^* na parametru α , do grafu vynesete chybové úsečky.

2 Teoretická část

Budeme uvažovat kolo, které se může pohybovat s malým třením kolem vodorovné osy procházející středem kola. Na obvod kola umístíme závaží o hmotnosti m . Pokud nyní vychýlíme kolo z rovnovážné polohy, začne konat kmitavý pohyb s periodou T . Když se omezíme na malé výchylky a zanedbáme tření, lze určit moment setrvačnosti kola I podle rovnice [1]

$$I = ml \left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - l \right) \quad (1)$$

kde g je místní tíhové zrychlení a l je vzdálenost středu závaží od osy otáčení.

Vzdálenost l lze určit tak, že změříme vnější průměr největšího sousého válce $2r_0$, který je s kolem pevně spojen, vzdálenost l_0 vnějšího okraje největšího sousého válce od vnitřní stěny kola a d_K průměr závaží, které považujeme přibližně za kulaté. Vzdálenost l poté vypočítáme podle

$$l = r_0 + l_0 - \frac{d_K}{2} \quad (2)$$

Moment setrvačnosti kola lze změřit také metodou otáčení. S kolem jsou pevně spojené čtyři sousé válce, na které je možné navinout nit se závažím. Pokud na válec o poloměru r navineme nit, na nit zavěšíme závaží o hmotnosti m a zanedbáme tření, lze moment setrvačnosti vypočítat podle rovnic

$$I^* = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) = mr^2 \left(\frac{g}{r \cdot \varepsilon} - 1 \right) \quad (3)$$

kde I^* značí nekorigovaný moment setrvačnosti kola, a zrychlení závaží, které po uvolnění bude v důsledku tíhové síly klesat svisle dolů, a ε značí úhlové zrychlení kola.

Abychom do rovnic zahrnuli i tření, budeme předpokládat, že velikost tření nezávisí na rychlosti otáčení. Tření je tak zcela charakterizováno konstantním momentem síly M_t . Pro moment setrvačnosti kola pak dostaneme

$$I_k = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) - \frac{r}{a} M_t = mr^2 \left(\frac{g}{r \cdot \varepsilon} - 1 \right) - \frac{1}{\varepsilon} M_t \quad (4)$$

Pokud zavedeme označení

$$\alpha = \frac{r}{a} = \frac{1}{\varepsilon} \quad (5)$$

dostaneme lineární závislost pro nekorigovaný moment setrvačnosti kola

$$I^* = I_k + \alpha M_t \quad (6)$$

Moment setrvačnosti kola I_k i velikost momentu třecích sil M_t tak můžeme určit lineární regresí ze závislosti $I^*(\alpha)$.

Pro změření závislosti $\omega(t)$ použijeme počítače, který během otáčení kola snímá přerušování světelného paprsku způsobený rovnoměrně rozmístěnými zářezy na kole. Pokud předpokládáme rovnoměrné zrychlený pohyb, lze určit ε jako směrnici v závislosti $\omega(t)$ pomocí lineární regrese.

3 Výsledky měření

Měření bylo provedeno při teplotě $24,9^\circ\text{C}$, tlaku $996,4 \text{ hPa}$ a relativní vlhkosti vzduchu $29,5\%$. Ve výpočtech počítám s hodnotou místního tíhového zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

3.1 Metoda kyvů

Nejdříve jsem určil hmotnost použitého závaží na elektronických analytických vahách na hodnotu $m = (147,976 \pm 0,001) \text{ g}$.

Dále jsem posuvným měřidlem s přesností $0,05 \text{ mm}$ změřil průměr největšího souosého válce $2r_0$, posuvným měřidlem s přesností $0,02 \text{ mm}$ vzdálenost vnější stěny tohoto souosého válce od vnitřní stěny kola l_0 a stejným posuvným měřidlem průměr (nebo vzhledem k nesymetričnosti závaží spíše výšku) d_K použitého závaží. Vzdálenost l jsem poté dopočítal podle rovnice (2). Jelikož použité závaží nebylo zcela kulové, odhaduji, že přesnost měření l nebude lepší než 1 mm . Celkově jsem tak určil vzdálenost $l = (23,6 \pm 0,1) \text{ cm}$.

Na stopkách s přesností $0,01 \text{ s}$ jsem pak desetkrát změřil periodu kmitů. Pro větší přesnost jsem vždy měřil deset period $10T$, naměřené hodnoty ukazuje tabulka 1.

Tabulka 1: Naměřené periody při metodě kyvů

Číslo měření	$\frac{10T}{s}$
1	24,30
2	23,95
3	24,20
4	24,06
5	24,25
6	24,15
7	24,15
8	24,07
9	24,26
10	24,17

Z naměřených hodnot jsem určil průměr a chybu měření $10T$ podle rovnice

$$\sigma_{10T} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (10T_i - \overline{10T})^2}{(n-1)n}} + \sigma_P^2 \quad (7)$$

kde systematická chyba měření σ_P je daná hlavně mojí reakční dobou, odhaduji ji na hodnotu $\sigma_P = 0,2 \text{ s}$.

Pro střední hodnotu jedné periody \bar{T} platí $\bar{T} = \overline{10T}/10$, obdobně pro $\sigma_T = \sigma_{10T}/10$. Celkově jsem tak určil periodu kmitů na hodnotu $T = (2,42 \pm 0,02) \text{ s}$.

Moment setrvačnosti kola jsem pak dopočítal podle rovnice (1) a ze zákona šíření chyb určil chybu dle vztahu

$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{lgT^2}{4\pi^2} - l^2\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{mgT^2}{4\pi^2} - 2ml\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{mlgT}{2\pi^2}\right)^2 \sigma_T^2} \quad (8)$$

kde počítám s hodnotou místního tíhového zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Celkově jsem tak určil moment setrvačnosti kola metodou kyvů na hodnotu $I = (42,3 \pm 0,8) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

3.2 Metoda otáčení

Nejdříve jsem na analytických vahách zvažil použitá závaží m_i . K těmto hodnotám jsem přičetl hmotnost háčku $m_h = 0,15 \text{ g}$, na kterém byla závaží zavěšena, a výsledek použil jako hmotnost m při dosazování do vzorce (3).

Nejmenší dílek, který váhy ukazovaly, byl roven 10^{-4} g , ovšem jelikož se během otáčení postupně odmotává nit a hmotnost této odmotané části pak také přispívá k hmotnosti závaží ve vzorci (3), odhadl jsem přesnost měření hmotnosti závaží σ_m jako rovnu hmotnosti použité nitě, kterou jsem určil na hodnotu $m_n = 0,5 \text{ g}$. Změřené hodnoty hmotností použitých závaží ukazuje tabulka 2.

Tabulka 2: Hmotnosti použitých závaží při metodě otáčení

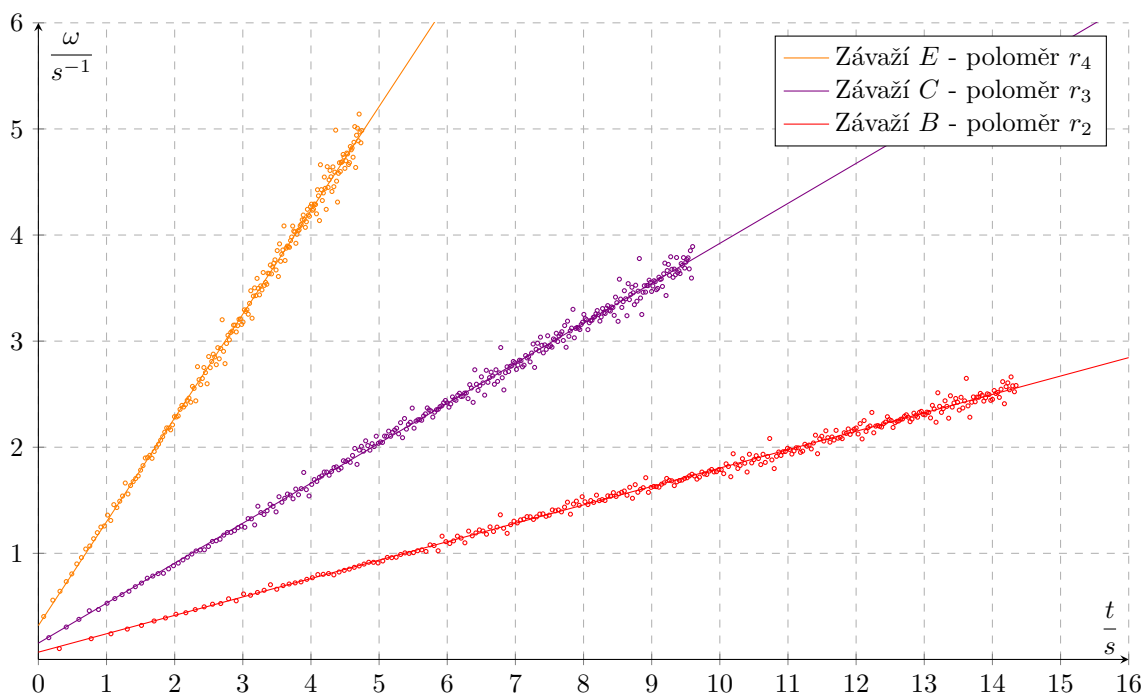
$\frac{m_A}{g}$	$\frac{m_B}{g}$	$\frac{m_C}{g}$	$\frac{m_D}{g}$	$\frac{m_E}{g}$
$12,1 \pm 0,5$	$17,1 \pm 0,5$	$24,9 \pm 0,5$	$34,6 \pm 0,5$	$49,4 \pm 0,5$

Poté jsem posuvným měřidlem s přesností $0,02 \text{ mm}$ změřil průměry menších sousých válců $2r_1, 2r_2$ a posuvným měřidlem s přesností $0,05 \text{ mm}$ průměry větších sousých válců $2r_3, 2r_4$. Jelikož však vždy nebylo zcela zřejmé, zda čelisti přesně doléhají na průměr válce, a především při měření r_3 a r_4 překážela zarážka na okraji válce zabraňující vypadnutí nitě, odhaduji přesnost měření na $\sigma_{r_i} = 0,1 \text{ mm}$. Výsledky ukazuje tabulka 3.

Tabulka 3: Poloměry sousých válců

$\frac{r_1}{mm}$	$\frac{r_2}{mm}$	$\frac{r_3}{mm}$	$\frac{r_4}{mm}$
$29,9 \pm 0,1$	$49,9 \pm 0,1$	$69,9 \pm 0,1$	$89,9 \pm 0,1$

Pro všech 20 kombinací m_i a r_i pak byla změřena závislost $\omega(t)$ za pomoci programu Kolo. Výsledek pro tři vybrané závislosti ukazuje graf 1.



Graf 1: Vybrané změřené závislosti $\omega(t)$

Změřenými závislostmi $\omega(t)$ byla proložena přímka ve tvaru $\omega = \varepsilon \cdot t + \omega_0$ a koeficienty lineární regrese vypočítány ze vztahů [2]

$$\varepsilon = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i \omega_i - \sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n \omega_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2} \quad (9)$$

$$\omega_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - \sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n t_i \omega_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2} \quad (10)$$

parametr ω_0 nebyl ve výpočtech potřeba, a tak jsem ani neurčoval jeho chybu. Pro parametr ε určím jeho chybu podle rovnice

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{n}{n-2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon \cdot t_i + \omega_0 - \omega_i)^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2}} \quad (11)$$

Výsledky mimo jiné ukazuje tabulka 2.

Tabulka 2: Výsledky metody otáčení

Poloměr	Závaží	$\frac{\varepsilon}{10^{-3} \text{ s}^{-2}}$	$\frac{\sigma_\varepsilon}{10^{-3} \text{ s}^{-2}}$	$\frac{\alpha}{\text{s}^2}$	$\frac{\sigma_\alpha}{\text{s}^2}$	$\frac{I^*}{10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$	$\frac{\sigma_{I^*}}{10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$
r_1	A	65,1	0,4	15,361	0,094	54,8	2,3
	B	102,3	0,5	9,775	0,048	49,1	1,5
	C	150,2	0,7	6,658	0,031	48,7	1,0
	D	221,2	0,9	4,521	0,018	45,9	0,7
	E	321,1	1,3	3,114	0,013	45,1	0,5
r_2	A	121,6	0,5	8,224	0,034	48,9	2,1
	B	173,5	0,7	5,764	0,023	48,2	1,4
	C	264,9	1,1	3,775	0,016	46,0	1,0
	D	374,8	1,5	2,668	0,011	45,2	0,7
	E	541,0	2,2	1,848	0,008	44,6	0,5
r_3	A	177,4	0,8	5,637	0,025	46,9	2,0
	B	253,6	1,0	3,943	0,016	46,2	1,4
	C	376,8	1,5	2,654	0,011	45,2	0,9
	D	532,3	2,3	1,879	0,008	44,4	0,7
	E	765,0	3,6	1,307	0,006	44,0	0,5
r_4	A	225,2	1,0	4,440	0,020	47,5	2,0
	B	325,5	1,6	3,072	0,015	46,2	1,4
	C	485,0	2,5	2,062	0,011	45,1	0,9
	D	680,0	3,4	1,471	0,007	44,6	0,7
	E	978,3	4,9	1,022	0,005	44,1	0,5

Hodnotu α pak mohu určit podle rovnice (5) a chybu výsledku ze zákona šíření chyb jako

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma_\varepsilon \quad (12)$$

Hodnotu I^* vypočítám podle (3) a chybu určím opět podle zákona šíření chyb

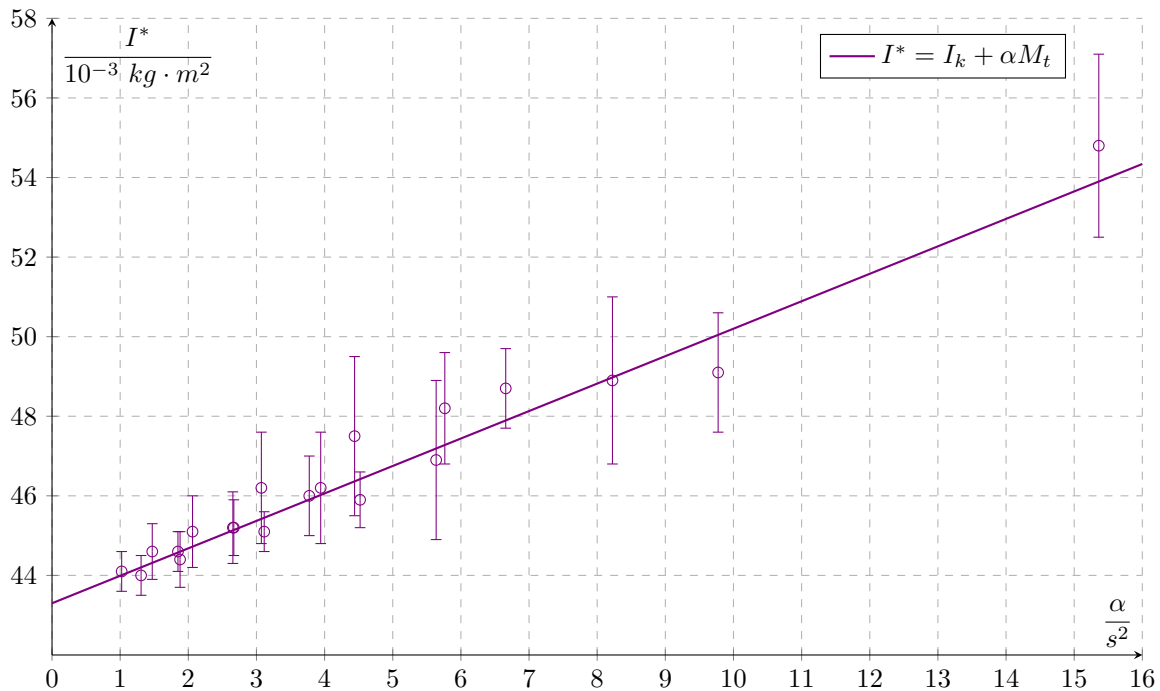
$$\sigma_{I^*} = \sqrt{\left(\frac{rg}{\varepsilon} - r^2\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{mg}{\varepsilon} - 2mr\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{mrg}{\varepsilon^2}\right)^2 \sigma_\varepsilon^2} \quad (13)$$

Vypočítanými hodnotami byla poté proložena přímka ve tvaru $I^* = I_k + \alpha \cdot M_t$. Označím $\sigma_{I_i^*} = \sigma_i$, pak parametry lineární regrese a jejich směrodatné odchylky určím podle vztahů [2]

$$I_k = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{I_i^*}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i I_i^*}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sigma_i^2}\right)^2} \quad \sigma_{I_k} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sigma_i^2}\right)^2}} \quad (14)$$

$$M_t = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i I_i^*}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{I_i^*}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sigma_i^2}\right)^2} \quad \sigma_{M_t} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sigma_i^2}\right)^2}} \quad (15)$$

Celkově jsem metodou otáčení určit moment setrvačnosti kola na $I_k = (43,3 \pm 0,3) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ a moment třecích sil na $M_t = (0,69 \pm 0,09) \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$. Výsledek zobrazuje graf 2.



Graf 2: Výsledek grafického zpracování závislosti $I^*(\alpha)$

4 Diskuse

Nepřesnost měření momentu setrvačnosti při měření metodou kyvů byla způsobena především nepravidelností použitého závaží. Závaží bylo očividně nesymetrické, a tak šlo hodnotu I určit pouze přibližně s relativně velkou chybou. Pro zlepšení přesnosti této metody by bylo zapotřebí použít doopravdy kulové závaží.

Při měření period kmitů jsem omylem změnil kmity aniž bych závaží zašrouboval ke kolu. Tyto hodnoty jsou vidět v naměřených hodnotách, ale nikde jsem je nepoužil a místo toho měření opakoval s přišroubovaným závažím. Výsledky měření period se zašroubovaným závažím ukazuje tabulka 1.

Měření period bylo ovlivněno hlavně mojí reakční dobou. Pro zlepšení přesnosti by bylo třeba použít jinou metodu pro měření period, která by nezahrnovala reakční čas experimentátora. Tedy např. bychom mohli snímat polohu kola za pomoci počítače.

Během měření metodou otáčení se nejhůře měřily poloměry souosých válců. Posuvná měřidla byla pro přesná měření nevhodná kvůli zarážce, která zabráňovala vykluzování nití. Jinak k žádným komplikovanostem při měření metodou otáčení nedošlo.

Změřené hodnoty oběma metodami se shodují v rámci jedné směrodatné odchylky, ovšem měření metodou kyvů bylo méně přesné, s relativní chybou 1,9%, než měření metodou otáčení, s relativní chybou 0,7%. Jelikož metoda otáčení měla méně předpokladů a nezanedbávala tření, pokládal bych hodnotu momentu setrvačnosti kola změřenou metodou otáčení za věrohodnější.

5 Závěr

Metodou kyvů jsem určil moment setrvačnosti kola na hodnotu $I = (42,3 \pm 0,8) 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ a metodou otáčení na hodnotu $I_k = (43,3 \pm 0,3) 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Při metodě otáčení jsem navíc změnil moment třecích sil $M_t = (0,69 \pm 0,09) 10^{-3} \text{ Nm}$.

6 Seznam použité literatury

- [1] Měření momentu setrvačnosti kola. Fyzikální praktikum [online]. [cit. 2018-04-06]. http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_113.pdf
- [2] English, Jiří. Úvod do praktické fyziky I. 1. vyd. Praha: MATFYYPRESS, 2006, 145 s. ISBN 80-86732-93-2.