

Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum I

Úloha č. XIII

Měření momentu setrvačnosti kola

Měřil a zpracoval: Antonín Baďura, FOF

Měřil dne: 24. dubna 2018

Odevzdal dne: 30. dubna 2018

Poznámky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0–5	
Teoretická část	0–1	
Výsledky měření	0–8	
Diskuse výsledků	0–4	
Závěr	0–1	
Seznam použité literatury	0–1	
Úhrnem	nejvýše 20	

Hodnotil dne

1 Zadání úlohy

1. Změřte moment setrvačnosti kola metodou kyvů.
2. Změřte moment setrvačnosti kola metodou otáčení pro různé hodnoty parametru α . Graficky znázorněte závislost $\omega = \omega(t)$ pro tři odlišné hodnoty parametru α .
3. Určete moment třecích sil M_t a moment setrvačnosti kola I_k korigovaný na nulovou hodnotu tření.
4. Graficky znázorněte závislost nekorigovaného momentu I^* na parametru α , do grafu vynesete chybové úsečky.

2 Teoretická část

Moment setrvačnosti je veličina charakterizující míru setrvačnosti tělesa při otáčivém pohybu, přičemž může být zaveden vztahem $\sum m_i r_i^2$ přes celé vyšetřované těleso, kde r_i je vzdálenost bodu o hmotnosti m_i od středu otáčení.

První metodou zvolenou k měření momentu setrvačnosti kola byla metoda kyvů. Vyšetřované kolo z jízdniho kola bylo upevněno tak, aby se mohlo volně otáčet, přičemž na jeho obvod bylo umístěno ve vzdálenosti l od středu rotace závaží o hmotnosti m . Po vychýlení kolo koná kmitavý pohyb, přičemž z měřené periody kmitů T lze pro malé výchylky určit moment setrvačnosti I jako:

$$I = ml \left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - l \right), \quad (1)$$

kde g je tíhové zrychlení [1].

Druhou metodou byla metoda otáčení, při níž se měří úhlové zrychlení ε vyšetřovaného kola, na němž bylo na soustředných válčích o poloměru r navinuto vlákno se zavěšeným závažím o hmotnosti m . Zanedbáme-li tření, dostaneme vztah pro moment setrvačnosti kola ve tvaru:

$$I^* = mr^2 \left(\frac{g}{r\varepsilon} - 1 \right). \quad (2)$$

Uvážíme-li tření charakterizované momentem třecích sil M_t , dostaneme vztah pro korigovaný moment setrvačnosti kola jako:

$$I_k = mr^2 \left(\frac{g}{r\varepsilon} - 1 \right) - \frac{1}{\varepsilon} M_t. \quad (3)$$

Při zavedení koeficientu $\alpha = \varepsilon^{-1}$ dostaneme vztah mezi korigovaným a nekorigovaným momentem setrvačnosti [1]:

$$I^* = \alpha M_t + I_k. \quad (4)$$

3 Výsledky měření

Fyzikální podmínky v laboratoři. Měření probíhalo při teplotě $(26,8 \pm 0,4)^\circ\text{C}$, atmosférickém tlaku (988 ± 2) hPa a relativní vlhkosti vzduchu $(36 \pm 3)\%$.

3.1 Metoda kyvů

Vzdálenost středu závaží od středu otáčení byla určena pomocí pásma a posuvného měřítka jako (235 ± 1) mm, hmotnost závaží byla určena na technických vahách jako $(147,6 \pm 0,5)$ g. Kolo bylo vychylováno vždy o 8° , periody kyvů byly měřeny pro deset kmitů a hodnoty pro jednu periodu jsou pro deset provedených měření uvedeny v tabulce 1. Nejistota měření času na stopkách byla k reakční době odhadnuté na 0,2 s zanedbatelná.

měření	$\frac{T}{s}$
1	$2,41 \pm 0,02$
2	$2,41 \pm 0,02$
3	$2,43 \pm 0,02$
4	$2,43 \pm 0,02$
5	$2,43 \pm 0,02$
6	$2,44 \pm 0,02$
7	$2,44 \pm 0,02$
8	$2,44 \pm 0,02$
9	$2,42 \pm 0,02$
10	$2,42 \pm 0,02$

Tabulka 1: Periody kmitů zatíženého kola při měření momentu setrvačnosti metodou kyvů

Pravděpodobná hodnota $T = (2,43 \pm 0,02)$ s byla určena aritmetickým průměrem, statistická nejistota byla oproti nejistotě měření zanedbatelná.

Z změřených hodnot a vzorce 1 dostáváme hodnotu momentu setrvačnosti jako:

$$I = (42,6 \pm 0,8) 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (5)$$

Hodnota tíhového zrychlení v Praze byla uvažována dle [2] jako $9,8137 \text{ ms}^{-2}$. Nejistota byla určena běžným vztahem pro přenos nejistoty [3]:

$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{I}{m}\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{mgT^2 - 8\pi^2 ml}{4\pi^2}\sigma_l\right)^2 + \left(\frac{mlgT}{2\pi^2}\sigma_T\right)^2}. \quad (6)$$

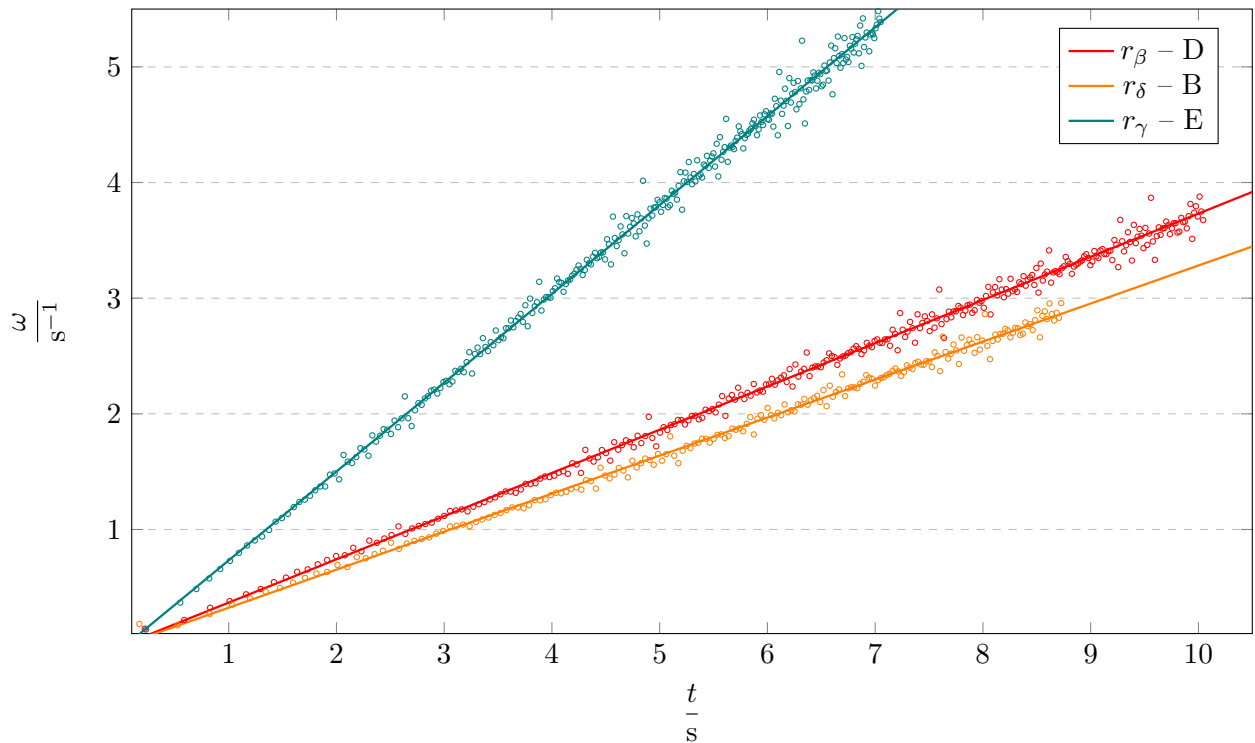
3.2 Metoda otáčení

K roztáčení kola bylo použito pět závaží, jejich přehled je shrnut v tabulce 2. Hmotnosti byly určeny na technických vahách. V tabulce 3 jsou uvedeny hodnoty úhlového zrychlení ε v závislosti na použitém závaží a poloměru válce r , které byly určeny lineární regresí jako směrnice experimentální závislosti úhlové rychlosti na čase při roztáčení kola, udaná nejistota odpovídá standardní odchylce regresní analýzy. Dále jsou v této tabulce uvedeny koeficienty α určené jako převrácené hodnoty ε a rovněž hodnoty nekorigovaného momentu setrvačnosti I^* , které byly spočteny dle vztahu 2. Nejistoty byly určeny dle standardního vztahu pro přenos nejistoty [3] jako:

$$\sigma_{I^*} = \sqrt{\left(\frac{I^*}{m}\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{mrg}{\varepsilon^2}\sigma_\varepsilon\right)^2 + \left(\frac{mg - 2mr\varepsilon}{\varepsilon}\sigma_r\right)^2} \quad (7)$$

označení	$\frac{m}{g}$
A	$12,0 \pm 0,5$
B	$16,9 \pm 0,5$
C	$24,6 \pm 0,5$
D	$34,4 \pm 0,5$
E	$49,1 \pm 0,5$

Tabulka 2: Přehled použitých závaží pro metodu otáčení



Graf 1: Závislost úhlové rychlosti na čase při měření momentu setrvačnosti kola metodou otáčení pro tři vybrané kombinace závaží a poloměru válce, naměřené hodnoty jsou proloženy lineárními regresními křivkami, jejichž směrnice odpovídají zrychlení ε v tabulce 3

Hodnoty korigovaného momentu setrvačnosti a momentu třecích sil byly určeny za pomoci vzorce 4 a hodnot z tabulky 3 lineární regresní s regresní závislostí $I^*(\alpha) = \alpha M_t + I_k$. Takto určené hodnoty potom činí:

$$I_k = (41,9 \pm 0,5) 10^{-3} \text{ kg m}^2,$$

$$M_t = (1,1 \pm 0,1) 10^{-3} \text{ N m}.$$

Naměřená závislost $I^*(\alpha)$ je zobrazena v grafu 2, kde je rovněž uvedena křivka výše uvedené regresní závislosti $I^* = \alpha M_t + I_k$.

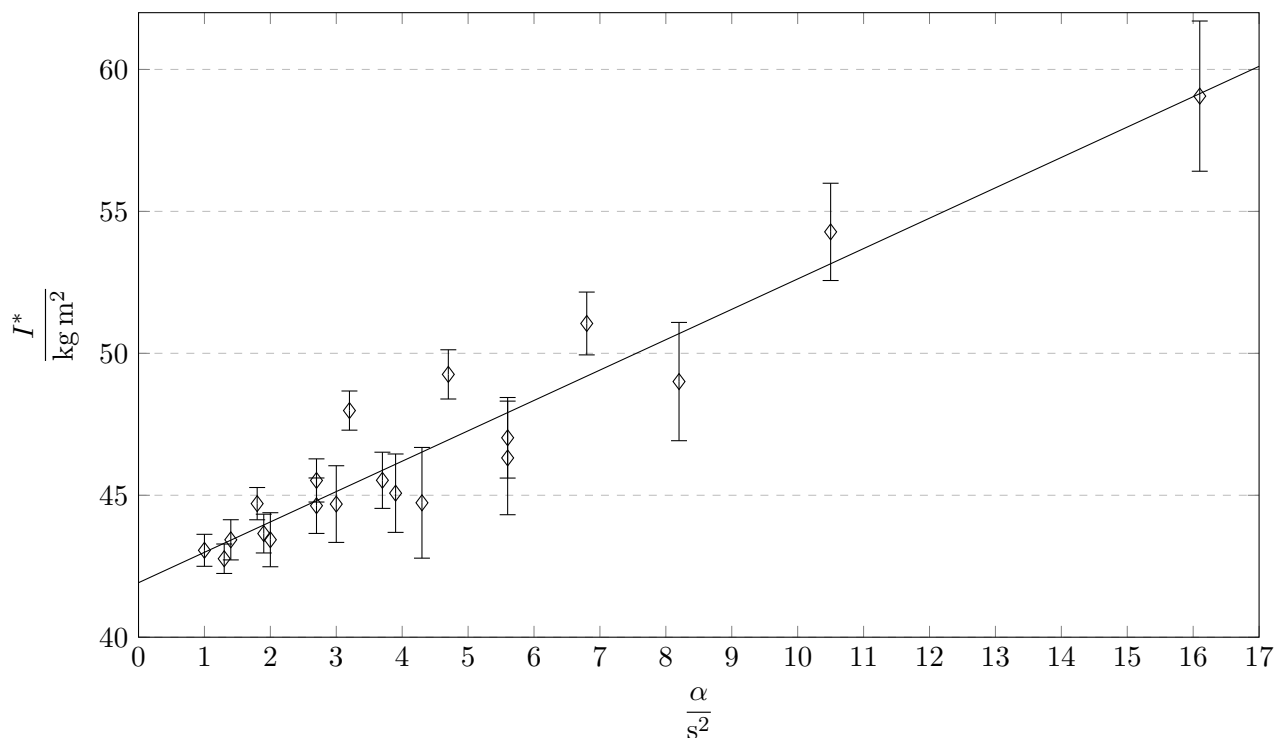
závaží	$\frac{\varepsilon}{10^{-3} \text{ s}^{-2}}$	$\frac{\alpha}{\text{ s}^2}$	$\frac{I^*}{10^{-3} \text{ kg m}^2}$
$r_\alpha = (31,1 \pm 0,1) \text{ mm}$			
A	62 ± 1	$16,1 \pm 0,3$	59 ± 3
B	95 ± 1	$10,5 \pm 0,1$	$54,3 \pm 1,7$
C	147 ± 1	$6,80 \pm 0,05$	$51,1 \pm 1,1$
D	213 ± 2	$4,69 \pm 0,04$	$49,3 \pm 0,9$
E	312 ± 3	$3,21 \pm 0,03$	$48,0 \pm 0,7$
$r_\beta = (50,8 \pm 0,1) \text{ mm}$			
A	122 ± 1	$8,20 \pm 0,07$	$49,0 \pm 2,1$
B	179 ± 1	$5,59 \pm 0,03$	$47,0 \pm 1,4$
C	269 ± 2	$3,72 \pm 0,03$	$45,5 \pm 1,0$
D	376 ± 3	$2,66 \pm 0,02$	$45,5 \pm 0,8$
E	546 ± 4	$1,83 \pm 0,01$	$44,7 \pm 0,6$
$r_\gamma = (69,7 \pm 0,1) \text{ mm}$			
A	177 ± 2	$5,65 \pm 0,06$	$46,3 \pm 2,0$
B	256 ± 2	$3,91 \pm 0,03$	$45,1 \pm 1,4$
C	376 ± 3	$2,66 \pm 0,02$	$44,6 \pm 1,0$
D	537 ± 3	$1,86 \pm 0,01$	$43,7 \pm 0,7$
E	781 ± 5	$1,28 \pm 0,01$	$42,8 \pm 0,5$
$r_\delta = (89,5 \pm 0,1) \text{ mm}$			
A	235 ± 1	$4,26 \pm 0,02$	$44,7 \pm 1,9$
B	331 ± 2	$3,02 \pm 0,02$	$44,7 \pm 1,4$
C	495 ± 4	$2,02 \pm 0,02$	$43,4 \pm 1,0$
D	691 ± 5	$1,45 \pm 0,01$	$43,4 \pm 0,7$
E	992 ± 8	$1,01 \pm 0,01$	$43,1 \pm 0,6$

Tabulka 3: Hodnoty úhlového zrychlení ε , koeficientu α a spočtené hodnoty nekorigovaného momentu setrvačnosti kola měřené metodou otáčení

4 Diskuse výsledků

Měření momentu setrvačnosti metodou otáčení bylo zatíženo úplným zanedbáním tření v ložisku kola. Dalším zdrojem nepřesnosti byl nepravidelný tvar použitého závaží a s tímto spojená nepřesnost určení délky l spolu s předpokladem závaží jako hmotného bodu.

U metody otáčení se ukázalo, že především v případě nejmenšího válce bylo měření zatíženo výraznou chybou, což ilustruje graf 2: tři hodnoty náležející měření právě na nejmenším válci neodpovídají ani v rámci určené nejistoty měření lineární regresní křivce. Nepřesnosti mohlo krom nesterjnoměrného odvalování vlákna z válců způsobit i jednostranné zatěžování kola a s tím spo-



Graf 2: Závislost nekorigovaného momentu I^* na parametru α , rovnice regresní křivky je $I^* = 1,1 \cdot \alpha + 41,9$ (chybové úsečky α jsou zanedbatelné)

jené nestejněměrné působení třecích sil, kteréžto zjištění vynikne při srovnání s prvou použitou metodou.

Porovnáním hodnoty momentu setrvačnosti určené metodou kyvů s hodnotou korigovaného momentu určeného metodou otáčení zjistíme, že se obě hodnoty v rámci nejistoty měření shodují. Ukazuje se tak, že v případě první metody ovlivňují třecí síly výsledek mnohem méně, což je možno doložit i ze srovnání s nekorigovanými hodnotami momentu setrvačnosti z tabulky 3.

5 Závěr

Metodou kyvů byl moment setrvačnosti I měřeného kola určen jako:

$$I = (42,6 \pm 0,8) 10^{-3} \text{ kg m}^2 \text{ (rel. nejistota 2\%)}. \quad (8)$$

Korigovaný moment setrvačnosti I_k a moment třecích sil M_t byl změřen pomocí metody otáčení jako:

$$I_k = (41,9 \pm 0,5) 10^{-3} \text{ kg m}^2 \text{ (rel. nejistota 1\%)},$$

$$M_t = (1,1 \pm 0,1) 10^{-3} \text{ N m (rel. nejistota 9\%)}. \quad (9)$$

Uvedené hodnoty odpovídají hladině pravděpodobnosti $\approx 99,7\%$.

Literatura

- [1] *Studijní text k základnímu fyzikálnímu praktiku I, úloha XIII* [online]. KVOF MFF UK [cit. 2018-25-04]. Dostupné z: http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_113.pdf

- [2] *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy*. Praha: Prometheus, 2003, s. 216–217. ISBN 978-80-7196-264-9.
- [3] ENGLICH, Jiří. *Úvod do praktické fyziky*. Praha: Matfyzpress, 2006, ISBN 80-86732-93-2.