

## Pracovní úkoly

1. Změřte dynamickou viskozitu destilované vody při pokojové teplotě metodou výtoku kapaliny kapilárou z Mariotteovy láhve.
2. Určete teplotní závislost kinematické viskozity destilované vody v oboru teplot od 20 °C do 60 °C pomocí Ubbelohdeova viskozimetru.
3. Sestrojte graf teplotní závislosti kinematické viskozity. Určete aktivační energii děje.

## Teoretická část

Dynamická viskozita  $\eta$  vyjadřuje úměrnost mezi tečným napětím mezi vrstvami proudící reálné kapaliny a změnou rychlosti ve směru kolmém k proudu [1]. Kinematická viskozita  $\nu$  je pak definovaná jako podíl dynamické viskozity a hustoty  $\rho$

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (1)$$

Viskozita se řadí mezi transportní jevy, jde o přenos hybnosti mezi sousedními vrstvami kapaliny prostřednictvím molekul. Tento proces je tepelně aktivovaný, lze charakterizovat vztahem

$$\eta(T) = \eta_0 \exp\left(\frac{\varepsilon_A}{k_B T}\right), \quad (2)$$

$\varepsilon_A$  je aktivační energie,  $k_B$  Boltzmanova konstanta,  $T$  termodynamická teplota a  $\eta_0$  konstanta.

Pro měření lze využít kapilární viskozimetry, pro které platí Poiseuillův vztah

$$V = \frac{\pi r^4 p t}{8 \eta l}, \quad (3)$$

$V$  je objem kapaliny která za dobu  $t$  při přetlaku  $p$  proteče laminárním prouděním trubicí o poloměru  $r$  délky  $l$ .

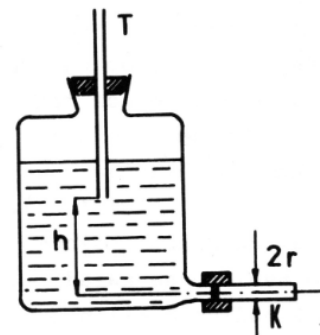
Podmínka laminárního proudění lze ověřit pomocí výpočtu Reynoldsova čísla  $Re$  podle vzorce

$$Re = \frac{2r\rho u}{\eta}, \quad (4)$$

kde  $u$  je střední rychlost proudění v trubici. Pokud platí  $Re < 2 \cdot 10^3$ , považujeme proudění za laminární. Samotné měření je provedeno pomocí Mariotteovy lahve (Obr. 1), jejíž konstrukce zaručuje vytékání kapaliny pod stálým přetlakem

$$p = \rho h g, \quad (5)$$

kde  $h$  je vzdálenost mezi spodním koncem trubice T a osou kapiláry K,  $\rho$  hustota kapaliny a  $g$  tíhové zrychlení.



Obr. 1 Mariotteova lahev

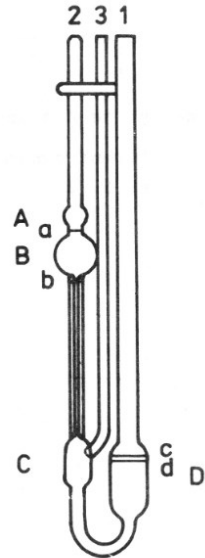
Dynamickou viskozitu pak spočteme podle vzorce

$$\eta = \frac{\pi r^4 \rho h g t}{8 \nu l}. \quad (6)$$

Poměrné měření kinematické viskozity a její závislost na teplotě můžeme změřit pomocí Ubbelohdeova viskozimetru (Obr. 2), kterým za různých teplot měříme dobu  $t$ , za kterou projde kapalina mezi ryskami a a b. Pro výpočet se použije vzorec

$$\nu = kt, \quad (7)$$

kde  $k$  je kalibrační konstanta přístroje.



Obr. 2 Ubbelohdeův viskozimetr

## Výsledky měření

### Podmínky měření

Teplota v laboratoři byla  $T_{RT} = (24,6 \pm 0,4) ^\circ\text{C}$ , atmosferický tlak  $p_{RP} = (991,3 \pm 0,2) \text{ hPa}$  a vlhkost vzduchu  $\phi_{RH} = 40,9\%$ .

Kalibrační konstanta Ubbelohdeova viskozimetru je zadaná  $k = 0,003003 \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ , rozměry kapiláry v Mariotteově láhvi byly zadané jako  $l = (146 \pm 2) \text{ mm}$ ,  $d = (1,29 \pm 0,03) \text{ mm}$ . Uvažujeme používání destilované vody, její teplotu při měření v Mariotteově láhvi předpokládáme shodnou s teplotou v laboratoři  $T_{RT}$ , její hustotu tedy uvažujeme  $\rho = (996,1 \pm 0,3) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  [2], chyba odpovídá možným teplotním výkyvům až  $1^\circ\text{C}$ .

Jako tíhové zrychlení bereme tabulkovou hodnotu [3]  $g = (9,810 \pm 0,001) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , Boltzmannovu konstantu uvažujeme [4]  $k_B = (1,3806485 \pm 0,0000008) \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

### Měření dynamické viskozity

Dynamická viskozita byla měřena pomocí Mariotteovy láhve.

Rozdíl výšek spodního konce trubice a osy kapiláry byl určen pomocí katetometru jako  $(63 \pm 1) \text{ mm}$ , jelikož katetometr není upevněn a není na něm možno měřit s přesností, kterou přístroj poskytuje, je chyba nadhodnocena.

Destilovaná voda byla vypouštěna z Mariotteovy láhve do odměrného válce, čas byl měřen s přesností  $10^{-2} \text{ s}$ , kvůli možné prodlevě mezi vypnutím stopek a úplným uzavřením uzávěru na kapiláře uvažujeme chybu  $\sigma_{tM} = 1 \text{ s}$ .

Kapiláru uvažujeme kruhového průřezu s poloměrem  $r = \frac{d}{2} = (0,64 \pm 0,02) \text{ mm}$ . Po přibližném odkapání měřeného objemu kapaliny byl objem přeměřen pomocí menšího odměrného válce s nejmenším dílkem  $1 \text{ ml}$ . Protože při určování objemu v menším odměrném válci nemuselo dojít k přelití veškerého objemu (ve válci zůstalo několik kapek), jako chybu při měření objemu budeme uvažovat  $\sigma_V = 2 \text{ ml}$ .

Měření bylo provedeno celkem čtyřikrát, dvakrát pro objem kolem  $200 \text{ ml}$  a dvakrát pro objem kolem  $100 \text{ ml}$ .

Naměřené hodnoty a vypočtené hodnoty dynamické viskozity podle vzorce (6) jsou v tabulce 1. Chyby jednotlivých výsledků byly určeny podle zákona šíření chyb vzorcem

$$\sigma_{\eta_i} = \eta_i \sqrt{4 \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{tM}}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2}.$$

Tabulka 1: Naměřené hodnoty při vytékání v Mariotteovy láhve a dopočtená dynamická viskozita

$V \text{ [ml]}$	$t \text{ [s]}$	$\eta \text{ [} 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s]}$
207	738	$1,01 \pm 0,07$
205	660	$0,91 \pm 0,06$
102	340	$0,94 \pm 0,06$
111	373	$0,95 \pm 0,06$

Výsledná viskozita byla určena jako průměr dopočtených hodnot, výsledná chyba byla spočtena podle vzorce

$$\sigma_\eta = t_n \sqrt{\sum \frac{1}{n^2} \sigma_{\eta_i}^2},$$

$t_n$  je studentův koeficient a  $n$  počet měření.

Výsledkem je  $\eta = (0,95 \pm 0,04) \cdot 10^{-3} \cdot \text{Pa} \cdot \text{s}$ .

### Měření teplotní závislosti kinematické viskozity

Pomocí Ubbelohdeova viskozimetru bylo provedeno měření viskozity v teplotním rozsahu  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  až  $60 \text{ }^\circ\text{C}$ , z naměřených hodnot byla podle (7) dopočtena kinematická viskozita a podle vyjádření z (1) dynamická viskozita. Tyto hodnoty jsou spolu s hustotou destilované vody pro příslušnou teplotu podle [5] v tabulce 2. Teplota byla měřena rtuťovým teploměrem s chybou  $\sigma_T = 0,5 \text{ }^\circ\text{C}$ , chyba v hustotě ale odpovídá teplotní výchylce až  $1 \text{ }^\circ\text{C}$ . Při měření času je chyba přístroje oproti reakční době zanedbatelná a uvažujeme  $\sigma_{tU} = 0,5 \text{ s}$ .

Chyba vypočtené kinematické viskozity je daná vzorcem

$$\sigma_v = v \sqrt{\left(\frac{\sigma_{tU}}{t}\right)^2},$$

chyba dynamické viskozity pak vzorcem

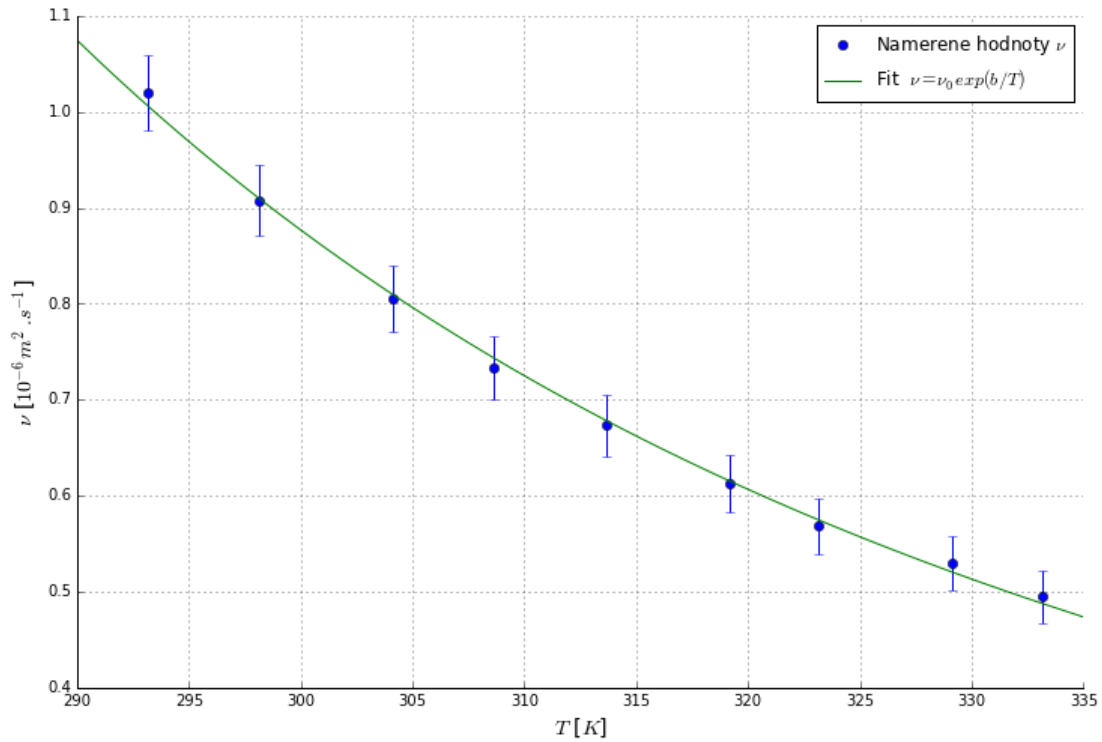
$$\sigma_\eta = \eta \sqrt{\left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2}.$$

Tabulka 2: Naměřené hodnoty a dopočtené hodnoty viskozity

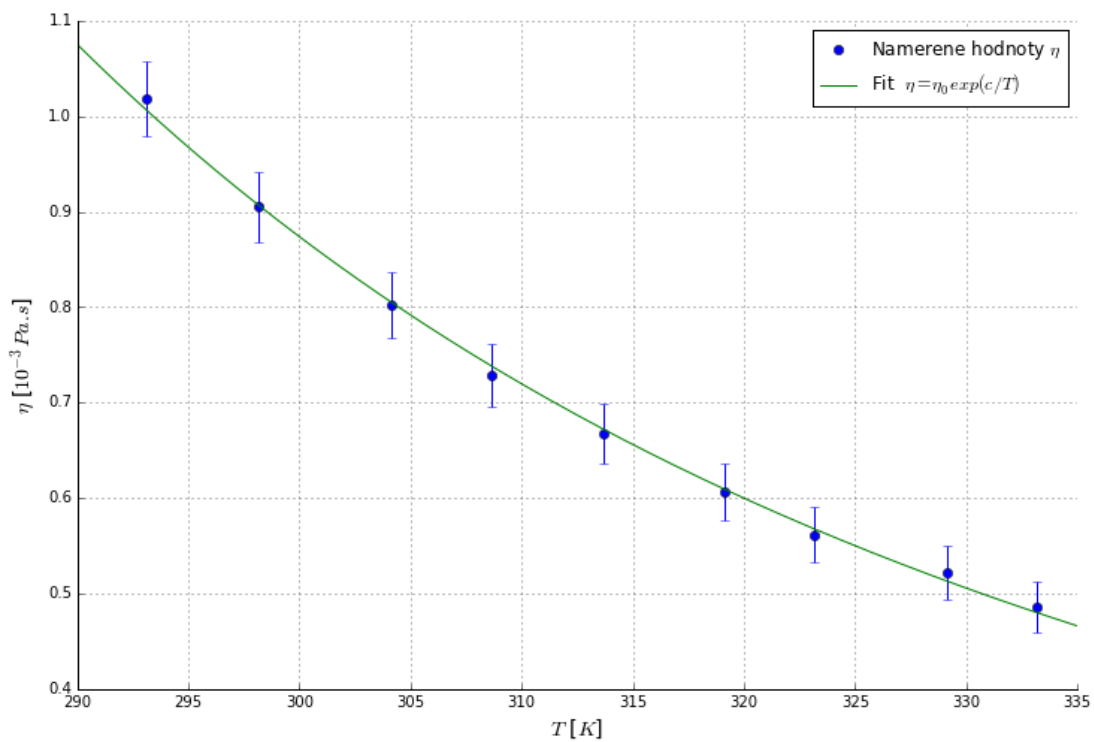
$T [K]$	$t [s]$	$\rho [kg \cdot m^{-3}]$	$\nu [10^{-6} m^2 \cdot s^{-1}]$	$\eta [10^{-3} Pa \cdot s]$
293,2	340,0	$998,3 \pm 0,2$	$1,02 \pm 0,04$	$1,02 \pm 0,04$
298,2	302,3	$997,1 \pm 0,2$	$0,91 \pm 0,04$	$0,91 \pm 0,04$
304,2	268,3	$995,4 \pm 0,3$	$0,81 \pm 0,03$	$0,80 \pm 0,03$
308,7	244,2	$994,1 \pm 0,3$	$0,73 \pm 0,03$	$0,73 \pm 0,03$
313,7	224,1	$992,3 \pm 0,3$	$0,67 \pm 0,03$	$0,67 \pm 0,03$
319,2	203,9	$989,8 \pm 0,4$	$0,61 \pm 0,03$	$0,60 \pm 0,03$
323,2	189,1	$988,0 \pm 0,4$	$0,57 \pm 0,03$	$0,56 \pm 0,03$
329,2	176,3	$985,2 \pm 0,4$	$0,53 \pm 0,03$	$0,52 \pm 0,03$
333,2	164,6	$983,1 \pm 0,5$	$0,50 \pm 0,03$	$0,49 \pm 0,03$

Závislost kinematické viskozity na teplotě je vynesena spolu s exponenciálním fitem v grafu 1. Při fitování předpokládáme chybu teploty za zanedbatelnou. Fitování bylo provedeno pomocí knihovny `scipy.optimize`, funkcí `curve fit` podle rovnice  $\nu = \nu_0 \exp\left(\frac{b}{T}\right)$  a s vážením chyby v hodnotách viskozity (na ose y), koeficienty fitu jsou  $\nu_0 = (2,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} m^2 \cdot s^{-1}$ ,  $b = (1770 \pm 31) K$ . Chyby fitu byly určeny z kovarianční matice, kterou funkce `curve fit` vypočítala, jedná se tedy jen o statistické chyby a nejsou v nich zohledněny chyby měření.

Závislost dynamické viskozity na teplotě je vynesena spolu s exponenciálním fitem v grafu 2, fitování bylo se stejnými předpoklady provedeno stejně jako pro kinematickou viskozitu. Výsledné koeficienty jsou  $\eta_0 = (2,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$  a  $c = (1810 \pm 29) K$ .



Graf 1: Závislost kinematické viskozity na teplotě



Graf 2: Teplotní závislost dynamické viskozity

Z koeficientu  $c$  můžeme vypočítat aktivační energii pomocí vztahu

$$\varepsilon_A = c k_B,$$

chybu určíme zákonem přenosu chyb podle vzorce

$$\sigma_{\varepsilon_A} = \varepsilon_A \sqrt{\left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{k_B}}{k_B}\right)^2}$$

Výsledná aktivační energie je  $\varepsilon_A = (2,50 \pm 0,04) \cdot 10^{-20} \text{ J}$ .

## Diskuze

Měření pomocí Mariotteovy láhve za použití Poisseuillova vztahu předpokládá laminární proudění. Výpočtem podle (4), kde jako střední rychlost proudění použijeme vztah  $u = \frac{V}{t\pi r^2}$  dostáváme pro všechna měření Reynoldsovo číslo kolem hodnoty  $Re = 300$ , předpoklad na laminární proudění je tedy splněn. V místnosti při měření docházelo k teplotním změnám, ty jsou ale zahrnuty v chybě hustoty, což bylo ověřeno měřením teploty vody po odkapání ve větším odměrném válci. Měření s 200 ml odkapané vody jsou přesnější, protože se díky většímu objemu minimalizuje relativní chyba. Velký vliv na chybu má poloměr kapiláry, u kterého předpokládáme kruhový průřez a neověřujeme zadaný rozměr. S ohledem na tyto skutečnosti by bylo vhodné provést přeměření nebo ještě navýšit chybu této hodnoty. Měření katetometrem bylo s mnohem menší přesností než přístroj umožňuje, protože přístroj nebyl pořádně upevněný aby byla zajištěna jeho nehybnost, chyba tohoto měření tedy byla odhadnuta na 1 mm.

S tabulkovou hodnotou [6] dynamické viskozity  $\eta = 0,8891 \cdot 10^{-3} \cdot \text{Pa} \cdot \text{s}$  se měření Mariotteovou láhví shoduje v rámci dvou směrodatných odchylek.

Při měření Ubbelohdeovým viskozimetrem můžeme teplotu považovat za dostatečně přesnou, stálá teplota byla udržována pomocí vodní lázně, ve které docházelo k proudění vody, viskozimetr byl tedy zahříván téměř rovnoměrně. Zanedbáním chyby v hodnotách teploty pro účely fitu se nedopouštíme systematické chyby. Odchytky získané z kovarianční matice při fitování odpovídají pouze chybě statistické, výsledné hodnoty jsou ale zatíženy ještě chybou měření, která nebyla nijak započtena, chyby v koeficientech jsou tedy podhodnocené. Odečtení aktivační energie z přepočtené dynamické viskozity nám dává přesnější výsledek, protože zahrnuje i teplotní změny hustoty kapaliny.

Ubbelohdeův viskozimetr byl zhotoven ze skla, teplotní roztažnost materiálu tedy můžeme kompletně zanedbat.

Ve všech měřeních předpokládáme používání destilované vody, použitá voda je však pravděpodobně znečištěná a její vlastnosti, včetně transportních jevů, se mohou mírně lišit od tabulkových hodnot. Dále se projevuje reakční doba člověka, která neumožňuje přesnější měření časových údajů.

## Závěr

Pomocí Mariotteovy láhve byla změřena dynamická viskozita destilované vody za pokojové teploty  $T_{RT} = 24,6 \text{ }^\circ\text{C}$  jako  $\eta = (0,95 \pm 0,04) \cdot 10^{-3} \cdot \text{Pa} \cdot \text{s}$ , což je s tabulkovými hodnotami shodné v rámci dvou směrodatných odchylek.

Pomocí Ubbelohdeova viskozimetru byla určena teplotní závislost kinematické i dynamické viskozity mezi  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  a  $60 \text{ }^\circ\text{C}$ , která je vynesena v grafech 1 a 2. Ze závislosti dynamické viskozity na teplotě byla dopočtena aktivační energie  $\varepsilon_A = (2,50 \pm 0,04) \cdot 10^{-20} \text{ J}$ .

## Seznam použité literatury

- [1] Měření viskozity. Studijní text k fyzikálnímu praktiku. Fyzikální Praktikum [online]. [cit. 2018-05-18]. Dostupné z:  
[http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/texty/txt\\_112.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_112.pdf)
- [2] Tabulky fyzikálních konstant [online]. [cit. 2018-05-18]. Dostupné z:  
[http://fyzika.fce.vutbr.cz/doc/vyuka\\_schauer/tabulky.pdf](http://fyzika.fce.vutbr.cz/doc/vyuka_schauer/tabulky.pdf)
- [3] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch, Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980
- [4] CODATA Value: Boltzmann Constant [online]. [cit. 2018-05-19]. Dostupné z:  
<https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?k>
- [5] MESSE, Jean Yves. Therm Excel: Physical characteristics of water at the atmospheric pressure [online]. [cit. 2018-05-19]. Dostupné z:  
[http://www.thermexcel.com/english/tables/eau\\_atm.htm](http://www.thermexcel.com/english/tables/eau_atm.htm)
- [6] Water – Dynamic and Kinematic Viscosity [online]. [cit. 2018-05-23]. Dostupné z:  
[https://www.engineeringtoolbox.com/water-dynamic-kinematic-viscosity-d\\_596.html](https://www.engineeringtoolbox.com/water-dynamic-kinematic-viscosity-d_596.html)