

1 Pracovní úkoly

1. Změřte tuhost aparatury K .
2. Proveďte dynamickou zkoušku deformace v tlaku přiloženého vzorku.
3. Výsledek dynamické zkoušky v tlaku graficky znázorněte a určete mezní napětí $\sigma_{0,2}$ a σ_U .

2 Teoretická část

Deformace v tlaku

Při působení na vzorek tlakem, dochází k deformaci vzorku, tedy ke změnám jeho rozměrů. Působením síly F na válcový vzorek ve směru osy válce dojde ke změně původní výšky válce l_0 na l , tato změna závisí na původním průřezu vzorku S_0 , na materiálu vzorku a na velikosti působící síly [1]. Při deformaci dochází průběžně ke změnám průřezu a matematický popis deformace je obecně složitý. Skutečné napětí na vzorku σ' závisí na momentálním průřezu vzorku S , zavádíme tedy tzv. smluvní napětí σ , které se vztahuje k původnímu průřezu vzorku

$$\sigma = \frac{F}{S_0}, \quad (1)$$

a pro válec platí

$$S_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}, \quad (2)$$

d_0 je původní průměr válečku.

Dále zavádíme relativní deformaci, která vyjadřuje změnu rozměru vzorku v jednom směru, v našem případě udává změnu výšky válečku

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (3)$$

Až do napětí odpovídajícímu mezi úměrnosti σ_U platí Hookův zákon, tedy relativní deformace je v této oblasti přímo úměrná smluvnímu napětí.

Deformace je pružná (elastická), až do tzv. meze pružnosti, kterou označíme σ_E . Po překročení tohoto napětí dochází k trvalé deformaci vzorku. Protože přechod mezi plastickou a elastickou deformací není u většiny vzorků vidět na první pohled, zavádí se mez $0,2 \sigma_{0,2}$, odpovídající velikosti deformace $|\varepsilon_{pl}| = 0,2\%$ která je běžnou mírou plastické deformace. K určení $\sigma_{0,2}$ vyneseme do grafu závislost smluvního napětí na velikosti relativní deformace, proložíme přímkou rovnoběžnou s lineární částí této závislosti a procházející v ose x v bodě příslušejícímu $|\varepsilon_0| = 0,2$, mez $\sigma_{0,2}$ pak odpovídá průsečíku vnesené přímky s vnesenou závislostí. Tento postup předpokládá, že Hookův zákon platí i za mezí úměrnosti.

Dynamická zkouška

Při dynamické zkoušce postupně dochází k deformaci vzorku silou F . Aparatura vzorek stlačuje konstantní rychlostí pomocí elektromotoru. Vzorek je upevněn mezi podstavcem, který elektromotorek vysunuje pomocí vhodných převodů, a hlavicí detektoru síly. Jedna otočka elektromotoru kotoučem s podstavcem odpovídá zdvihu $D = 0,75$ mm, frekvence otáčení kotouče je $f = (0,60 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Změna délky aparatury za čas Δt je pak dána

$$\Delta l = fD\Delta t. \quad (4)$$

Detektor síly je tenzometrický odporový snímač, elektrický odpor snímače závisí na síle, kterou se na něj působí, změna odporu se pak projeví na připojeném voltmetru. Snímač je napájen stejnosměrným stabilizovaným napětím 5,5 V a pro působící sílu platí

$$F = \alpha U, \quad (5)$$

U je výstupní napětí a $\alpha = (50,0 \pm 0,5) \text{ N} \cdot \text{mV}^{-1}$. Časovou závislost napětí lze zobrazit na připojeném počítači v programu Zapisovač.

Tuhost aparatury

Při měření dochází také k deformaci aparatury, je tedy třeba určit i tuhost aparatury K a to pomocí referenčního vzorku s vysokým modulem pružnosti v tahu a s mnohem většími příčnými rozměry než mají vzorky měřené. Při předpokladu, že na aparatuře dochází po celou dobu pouze k elastickým deformacím, platí

$$F = K|\Delta l_A|, \quad (6)$$

F je působící síla, $|\Delta l_A|$ odpovídá změně délky aparatury při její deformaci. Při měření referenčního vzorku můžeme předpokládat, že celá naměřená Δl ze vzorce (4) přísluší změně délky aparatury. Tuhost aparatury určíme pomocí lineární regrese z naměřených hodnot na referenčním vzorku.

Po určení tuhosti aparatury provedeme měření vzorku, pro toto měření bude platit

$$\Delta l = |\Delta l_A| + |\Delta l_V|, \quad (7)$$

celková naměřená deformace na vzorku je tedy dána součtem deformace vzorku Δl_V a deformace aparatury.

Podle (1) tedy pro smluvní napětí vzorku platí

$$\sigma = \frac{4\alpha(U-U_0)}{\pi d_0^2}, \quad (8)$$

Kde U_0 je napětí při kterém začala deformace vzorku.

Pro relativní prodloužení vzorku (3) pak platí

$$|\varepsilon_0| = \frac{fD(t-t_0)}{l_0} - \frac{\alpha(U-U_0)}{l_0K}, \quad (9)$$

t_0 opět odpovídá počátku deformace.

3 Výsledky měření

Podmínky experimentu

Měření bylo provedeno při $t_{RT} = (26,6 \pm 0,4) \text{ } ^\circ\text{C}$ a $p_{RP} = (978,8 \pm 0,2) \text{ hPa}$.

Rozměry vzorku

Průměr i výška měřeného válečku byla určena pomocí mikrometru s přesností 0,01 mm. Naměřené hodnoty výšky se pro jednotlivá měření neměnily a odpovídaly hodnotě $l_0 = (9,96 \pm 0,01) \text{ mm}$, naměřené hodnoty průměru vzorku se lišily v podle místa měření a jsou uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty průměru vzorku před deformací

d_0 [mm]	7,31	7,32	7,31	7,31	7,31	7,32	7,31	7,31	7,32	7,31
------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Průměr je tedy roven $d_0 = (7,31 \pm 0,01) \text{ mm}$, statistická odchylka je vůči přístrojové chybě zanedbatelná.

Po deformaci vzorku byl váleček přeměřen, hodnoty výšky l_1 , průměru u podstav válce $d_{1_{kraj}}$ a průměru ve středu vzorku $d_{1_{střed}}$ jsou vyneseny v tabulce 2.

Tabulka 2: Rozměry vzorku po deformaci

l_1 [mm]	9,84	9,84	9,83	9,84	9,83					
$d_{1_{kraje}}$ [mm]	7,34	7,34	7,34	7,32	7,32	7,34	7,33	7,32	7,34	7,33
$d_{1_{střed}}$ [mm]	7,35	7,36	7,36	7,36	7,35	7,35	7,35	7,36	7,36	7,36

Tuhost aparatury

Pomocí lineární regrese byla z měření referenčního válečku určena tuhost aparatury. Předpoklad, že celá naměřená deformace je pouze na aparatuře byl v dostatečném přiblížení splněn, referenční váleček byl z tvrdé oceli a jeho rozměry oproti měřenému vzorku byly znatelně větší. Z naměřených hodnot byly dopočteny hodnoty změny délky v aparatuře podle vzorce (4) a síly podle vzorce (5), ty byly následně použity v lineární regresi podle vzorce (6).

Lineární regrese byla provedena za použití všech naměřených hodnot od času $t = 200,218 \text{ s}$, kde je již jisté, že vzorek doléhá na aparaturu a dochází k deformaci aparatury podle Hookova zákona.

Protože regrese byla provedena pomocí funkce v Excelu, není do výpočtu hodnoty K započten vliv chyb měření a k chybě fitu je nutné připočítat chyby měření, popř. výslednou chybu patřičně nadhodnotit.

Napětí bylo měřeno multimetrem NI 4065 s rozsahem $U_R = 100$ mV, s chybou 90 ppm z hodnoty a 35 ppm z rozsahu, chyba jednotlivých měření napětí je tedy dána jako

$$\sigma_{U_i} = 10^{-6} \cdot (35 \cdot U_R + 90 \cdot U_i).$$

Protože se napětí mění podle síly působící na tenzometr, který může do měření také vnášet blíže nespecifikovanou odchylku, celkovou chybu napětí nadhodnotíme jako $\sigma_{U_m} = 5 \cdot 10^{-3}$ mV, což odpovídá mírně nadhodnocené chybě pro maximální hodnotu napětí.

Chyba zdvihu odpovídá chybě v konstatně f , při lineární regresi ji ale zanedbáváme[2].

Ke statistické chybě fitu $\sigma_{K_{stat}}$ pomocí přenosu relativní chyby přidáme chyby vzniklé měřením pomocí vzorce

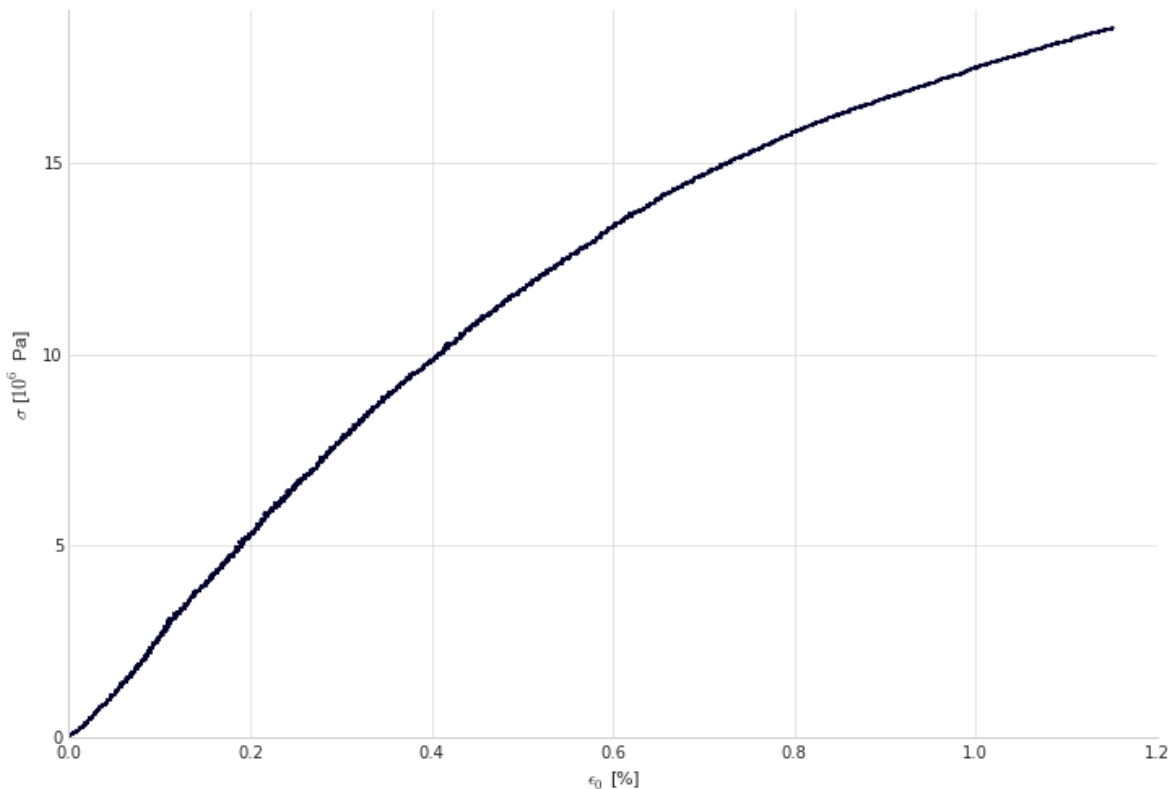
$$\sigma_K = K \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{U_m}}{U_m}\right)^2}.$$

Koeficient K tedy dostáváme $K = (1,80 \pm 0,02) \cdot 10^6$ N · m⁻¹. Grafy s naměřenými hodnotami a lineární regresí referenčního válečku jsou na samostatných papírech v příloze.

Určení meze úměrnosti a meze 0,2

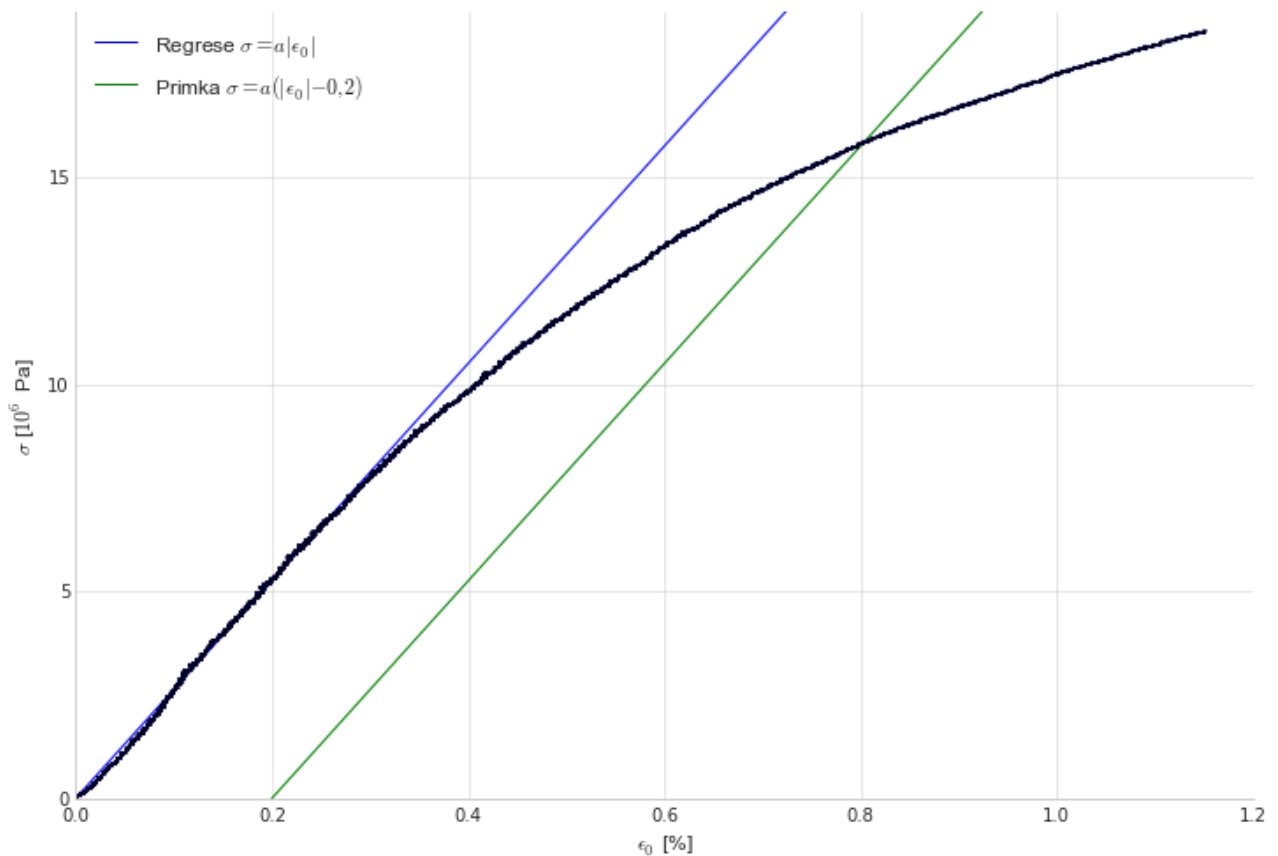
Dosednutí vzorku na aparaturu a počátek deformace byl určen v čase $t = 60,101$ s a tedy $U_0 = -0,4299$ mV. Následně byly dopočteny hodnoty ε_0 podle vzorce (9) a σ podle (8) a byla vynesena závislost $\sigma(|\varepsilon_0|)$, která je znázorněna na grafu 1.

Graf 1: Závislost $\sigma(|\varepsilon_0|)$.

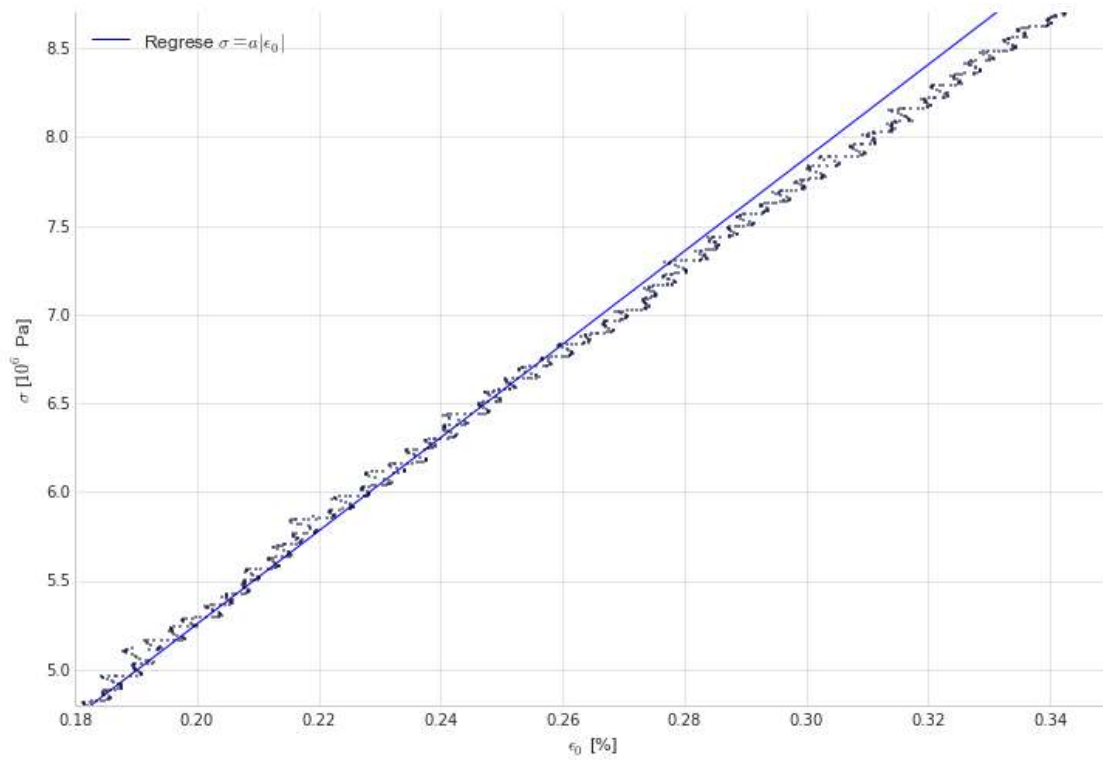
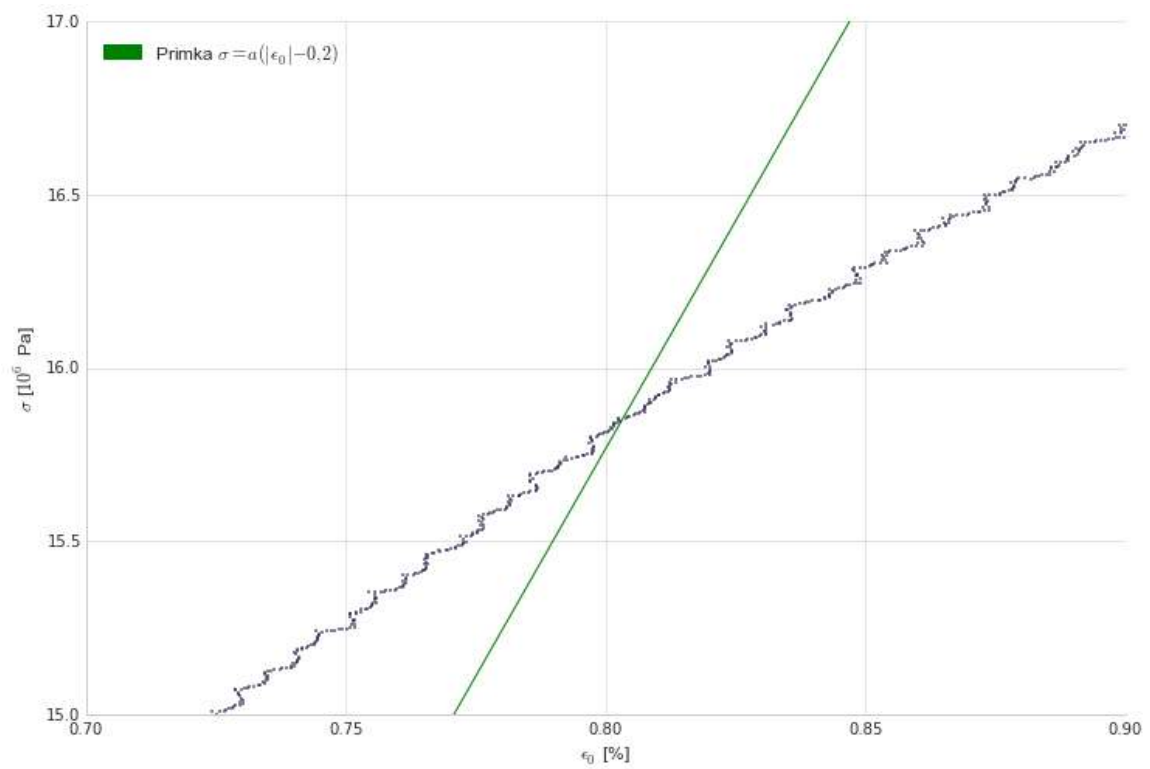


Z grafu bylo odhadnuto, že lineární závislost končí mezi 0,20% až 0,28% relativního prodloužení, pro každé měření mezi těmito hodnotami byla pomocí knihovny statsmodels pro Python provedena lineární regrese podle vzorce $\sigma = a|\epsilon_0|$, výsledný koeficient pak byl určen jako průměr všech takto získaných koeficientů $a = 26,277 \cdot 10^8$ Pa. Tato přímka byla následně transformována do tvaru $\sigma = a(|\epsilon_0| - 0.2)$. Výsledek je vidět na grafu 2.

Graf 2: Proložení lineární regrese a posunutou přímkou



Z grafů 3 a 4 byly postupně odečteny hodnoty σ_U a $\sigma_{0,2}$. Protože jde o odhadnutí hodnoty z grafu, je nutno odhadnout i chybu v rozumné velikosti, popř. i nadhodnotit.

Graf 3: Přiblížení na okolí σ_U Graf 4: Přiblížení na okolí $\sigma_{0,2}$ 

Hodnota σ_U byla určena jako $\sigma_U = (7 \pm 0,5) \cdot 10^6$ Pa, hodnota $\sigma_{0,2} = (15,8 \pm 0,5) \cdot 10^6$ Pa.

4 Diskuze

Podmínky experimentu neměly na průběh žádný vliv, změny teploty v místnosti v průběhu měření nebyly dostatečné, aby se projevily na vlastnostech měřeného válečku.

U měření rozměrů pochází největší chyba z nepřesnosti měřícího přístroje. I když byl vzorek velmi měkký kov (chemické složení bylo určeno spektroskopickými metodami jako 48% cín, 50,5% olovo a příměsi ve formě mědi, železa a manganu), je nepravděpodobné, že by při měření původních rozměrů došlo k jeho deformaci, což ukazuje i naměření několika stejných hodnot výšky válečku v řadě.

Pro měření tuhosti aparatury byl jako referenční vzorek použit ocelový váleček, který měl znatelně větší rozměry než měřený vzorek. Můžeme tedy předpokládat, že dopočtená změna délky celá přísluší deformaci aparatury. Aparatura použitá pro dynamickou zkoušku mohla do měření vnést další chyby, tenzometr nemusí mít nutně lineární závislost odporu na tlaku a mechanické části mohou podkluzovat, obzvláště při vyšších hodnotách síly. Dále se předpokládá velmi stabilní přívod proudu, aby se elektromotor pohyboval s konstantní rychlostí, využitím stabilizátoru napětí toho bylo docíleno.

Při lineární regresi pro výpočet tuhosti aparatury se vůbec nepočítalo s chybami měření a výsledná hodnota musela být doplněna o tyto chyby a zároveň nadhodnocena, protože výsledek lineární regrese závisí i na intervalu který k výpočtu regrese použijeme.

Při určování meze úměrnosti a meze 0,2 byly zatíženy obě veličiny (tj. smluvní napětí a relativní prodloužení) chybou, takže provedení lineární regrese metodou nejmenších čtverců nebylo nejvhodnější, nebyl splněn předpoklad lineární regrese – zanedbatelné chyby hodnot na ose x. Bylo by lepší využít metodu, která započítává i chyby na obou osách, ty však nejsou součástí základních knihoven, nebo je práce s nimi příliš složitá.

Lineární regrese i zde závisí na zvoleném intervalu pro který předpokládáme platnost Hookova zákona. I s využitím metody provedení více regresí a zprůměrování stále záleží na volbě maximální hranice a i mírné posunutí může viditelně změnit koeficient a . Určování jeho chyby statistickými metodami tedy nemá žádný smysl, chyba v získaných napětích se určí odhadem, který musí být nadhodnocen, aby se projevila obzvláště nesprávná volba metody regrese, chyby měření a pro mez 0,2 taky nesplnění podmínky platnosti Hookova zákona i za mezí úměrnosti.

5 Závěr

Tuhost aparatury byla určena jako $K = (1,80 \pm 0,02) \cdot 10^6$ N · m⁻¹ pomocí referenčního vzorku.

Dále byla určena mez úměrnosti měřeného vzorku jako $\sigma_U = (7 \pm 0,5) \cdot 10^6$ Pa a mez 0,2 jako $\sigma_{0,2} = (15,8 \pm 0,5) \cdot 10^6$ Pa. Obě hodnoty je ale nutné brát s rezervou a to i přes nadhodnocení jejich chyby. Celá dynamická zkouška je znázorněna v grafu 1.

6 Literatura

- [1] Dynamická zkouška deformace látek v tlaku. Fyzikální praktikum [online]. [cit. 2018-04-21]. http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_111.pdf
- [2] J. Englich, Úvod do praktické fyziky I. 1. vyd. MATFYZPRESS, Praha 2006, ISBN 80-86732-93-2.