

## Praktikum I úloha IX. Měření modulu pružnosti v tahu

### úkol

1. Změřte modul pružnosti v tahu  $E$  oceli z protažení drátu.
2. Změřte modul pružnosti v tahu  $E$  oceli a duralu nebo mosazi z průhybu trámku.
3. Výsledky měření zpracujte užitím lineární regrese.
4. Výsledky měření graficky znázorněte.

### teorie

#### Protažení drátu

Prodloužení drátu kruhového průřezu délky  $l_0$  o poloměru  $r$  s Youngovým modulem pružnosti v tahu  $E$  natahovaného závažím o hmotnosti  $m$  je dáno výrazem

$$\Delta l = \frac{l_0 mg}{E \pi r^2} \quad (1)$$

závislost prodloužení na zatížení je tedy přímá úměrnost s koeficientem  $k=l_0g/(ES)$  Pokud tedy znám několik hodnot prodloužení a zatížení, mohu pomocí lineární regrese určit koeficient  $k$  a také modul pružnosti  $E$ . Prodloužení se měří zrcátkovou metodou, přičemž odečteným hodnotám  $n$  a  $n_0$  na stupnici v dalekohledu odpovídá pootočení zrcátka pro malé  $\Delta\alpha$

$$\Delta\alpha \approx \frac{n - n_0}{2L} \quad (2)$$

kde  $L$  je vzdálenost stupnice od zrcátka. Pootočení zrcátka potom odpovídá prodloužení

$$\Delta l = r \Delta\alpha \quad (3)$$

#### Průhyb trámku

Pro svislý průhyb trámku  $y$  umístěného na břitech ve vzdálenosti  $l$  výšky  $b$ , šířky  $a$  zatíženého hmotností  $m$  uprostřed platí

$$y = \frac{mgl^3}{4Eab^3} \quad (4)$$

Stejně jako v případě prodloužení drátu jde o lineární závislost typu  $y=km$ , ze které lineární regresí určím  $E$ .

### pomůcky

Ocelový drát vedený přes kladku se zrcátkem, misky na závaží, závaží o hmotnosti 1000, 100, 50 g, stupnice s dalekohledem, objektivový mikrometr (0,05mm), mikrometr (0,005mm), posuvné měřítko (0,05mm), svinovací metr (1mm)

### postup

#### Protažení drátu

Nejprve jsem drát zatížil závažím o hmotnosti 1 kg, aby byl napnutý a další deformace tedy byly jen natahování a ne kroucení. Na 7 místech jsem mikrometrem změřil průměr drátu, naměřená hodnota byla vždy stejná a tedy

$$d = (0,510 \pm 0,005) \text{ mm}$$

Změřil jsem svinovacím metrem délku drátu od upevněného konce do středu té části drátu, která se dotýkala kladky. Předpokládám totiž, že v tomto místě drát neprokluzuje.

$$l = (114,5 \pm 0,1) \text{ cm}$$

Průměr kladky jsem změřil posuvným měřítkem v místě, kde byl položen drát.

$$2r = (38,40 \pm 0,05) \text{ mm}$$

dále jsem změřil vzdálenost zrcátka od rysky 35 cm na stupnici, okolo které se promítala měření

$$L=(100,0 \pm 0,5)\text{cm}$$

Větší nepřesnost tohoto měření je způsobena vzájemným nakloněním kladky a stupnice.

Dále uvádím naměřené hodnoty pro různá zatížení, přičemž při nulovém zatížení bylo na misce závaží 1 kg a změnu úhlu a délky vypočítané podle (2), (3)

$m$  závaží přidané na misku

$n$  vzdálenost odečtená ze stupnice přes zrcátko.

$\alpha$  pootočení zrcátka

$dl$  protažení drátu

tab. 1		protážení drátu		
$m/\text{kg}$	$n/\text{cm}$	$\alpha/\text{rad}$	$dl/\text{m}$	
0	37,1	0,000	0,00000	
0,200	36,5	0,003	0,000058	
0,400	35,9	0,006	0,000115	
0,600	35,3	0,009	0,000173	
0,800	34,7	0,012	0,000230	
1,000	34,1	0,015	0,000288	
1,200	33,5	0,018	0,000346	
1,400	32,9	0,021	0,000403	
1,600	32,3	0,024	0,000461	
1,800	31,7	0,027	0,000518	
2,000	31,1	0,030	0,000576	
1,800	31,7	0,027	0,000518	
1,600	32,2	0,025	0,000470	
1,400	32,9	0,021	0,000403	
1,200	33,5	0,018	0,000346	
1,000	34,1	0,015	0,000288	
0,800	34,7	0,012	0,000230	
0,600	35,3	0,009	0,000173	
0,400	35,9	0,006	0,000115	
0,200	36,4	0,004	0,000067	
0	37,1	0,000	0,00000	

Závislostí  $dl(m)$  jsem proložil přímkou procázející nulou výsledkem byla závislost

$$dl=(0,000289\pm 0,000001)m$$

z čehož jsem vypočítal modul pružnosti

$$E=(1,90\pm 0,02)\cdot 10^{11}\text{ Pa}$$

## Průhyb trámku

### a) ocel

Na několika místech jsem změřil výšku a šířku trámku

tab. 2	
rozměry ocelového trámku	
$b/\text{m}$	$a/\text{m}$
0,00298	0,01191
0,00297	0,01180
0,00297	0,01191
0,00297	0,01199
0,00298	0,01190

Výsledné rozměry jsou

$$\mathbf{a=(0,01190 \pm 0,00007)m}$$

$$\mathbf{b=(0,00297 \pm 0,00001)m}$$

$$\mathbf{l=(0,410 \pm 0,001)m}$$

V tab. 3 jsou naměřené hodnoty  $h$  je odečtená hodnota z mikrometru

tab. 3 m/kg	průhyb ocelového trámku	
	h/mm	y/mm
0,0	3,5	0
0,1	3,8	0,3
0,2	4,1	0,6
0,3	4,3	0,8
0,4	4,6	1,1
0,5	4,9	1,4
0,6	5,1	1,6
0,7	5,4	1,9
0,8	5,7	2,2
0,9	5,9	2,4
1,0	6,2	2,7
0,9	5,9	2,4
0,8	5,7	2,2
0,7	5,4	1,9
0,6	5,2	1,7
0,5	4,9	1,4
0,4	4,6	1,1
0,3	4,4	0,9
0,2	4,1	0,6
0,1	3,9	0,4
0,0	3,5	0

Těmito daty jsem také proložil regresní přímkou závislosti  $y(m)$ :

$$y=(0,00273 \pm 0,00002)m$$

a vypočítal jsem modul pružnosti ocelového trámku podle (4)

$$\mathbf{E=(2,01 \pm 0,03) \cdot 10^{11} Pa}$$

## b) dural

Na několika místech jsem změřil výšku a šířku trámku

tab. 4 rozměry duralového trámku	
b/m	a/m
0,00291	0,01133
0,00292	0,01128
0,00292	0,01131
0,00291	0,01124
0,00292	0,01130

Výsledné rozměry jsou

$$\mathbf{a=(0,01129 \pm 0,0003)m}$$

$$\mathbf{b=(0,00292 \pm 0,00001)m}$$

$$\mathbf{l=(0,410 \pm 0,001)m}$$

V tab. 5 jsou naměřené hodnoty  $h$  je odečtená hodnota z mikrometru

tab. 5 m/kg	průhyb duralového trámku	
	h/mm	y/mm
0,00	4,9	0
0,05	5,4	0,5
0,10	5,8	0,9
0,15	6,2	1,3
0,20	6,7	1,8
0,25	7,1	2,2
0,30	7,6	2,7
0,35	8,0	3,1
0,40	8,4	3,5
0,45	8,9	4
0,50	9,3	4,4
0,60	10,2	5,3
0,50	9,3	4,4
0,40	8,5	3,6
0,30	7,6	2,7
0,20	6,8	1,9
0,10	5,8	0,9
0,00	4,9	0

Těmito daty jsem také proložil regresní přímkou závislosti  $y(m)$ :

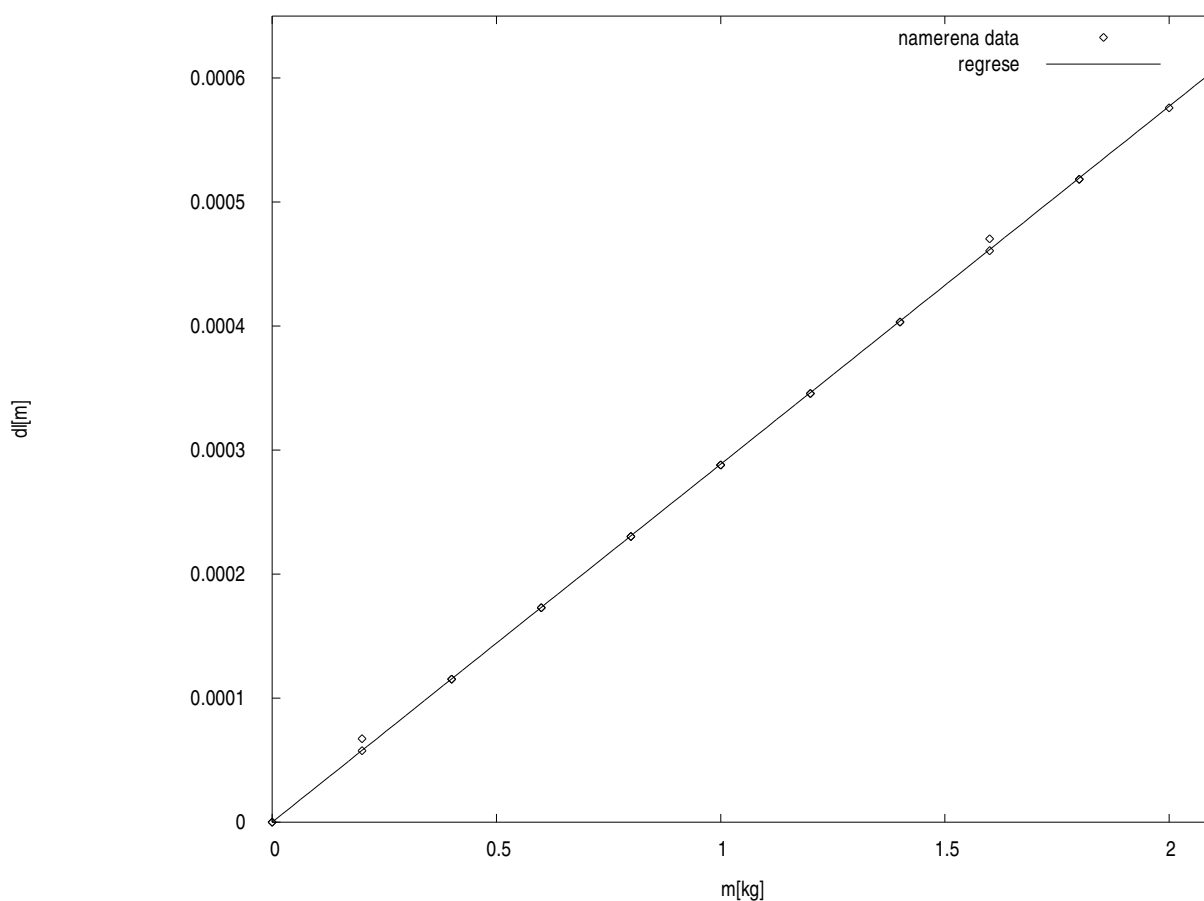
$$y=(0,00887 \pm 0,00003)m$$

a vypočítal jsem modul pružnosti duralového trámku podle (4)

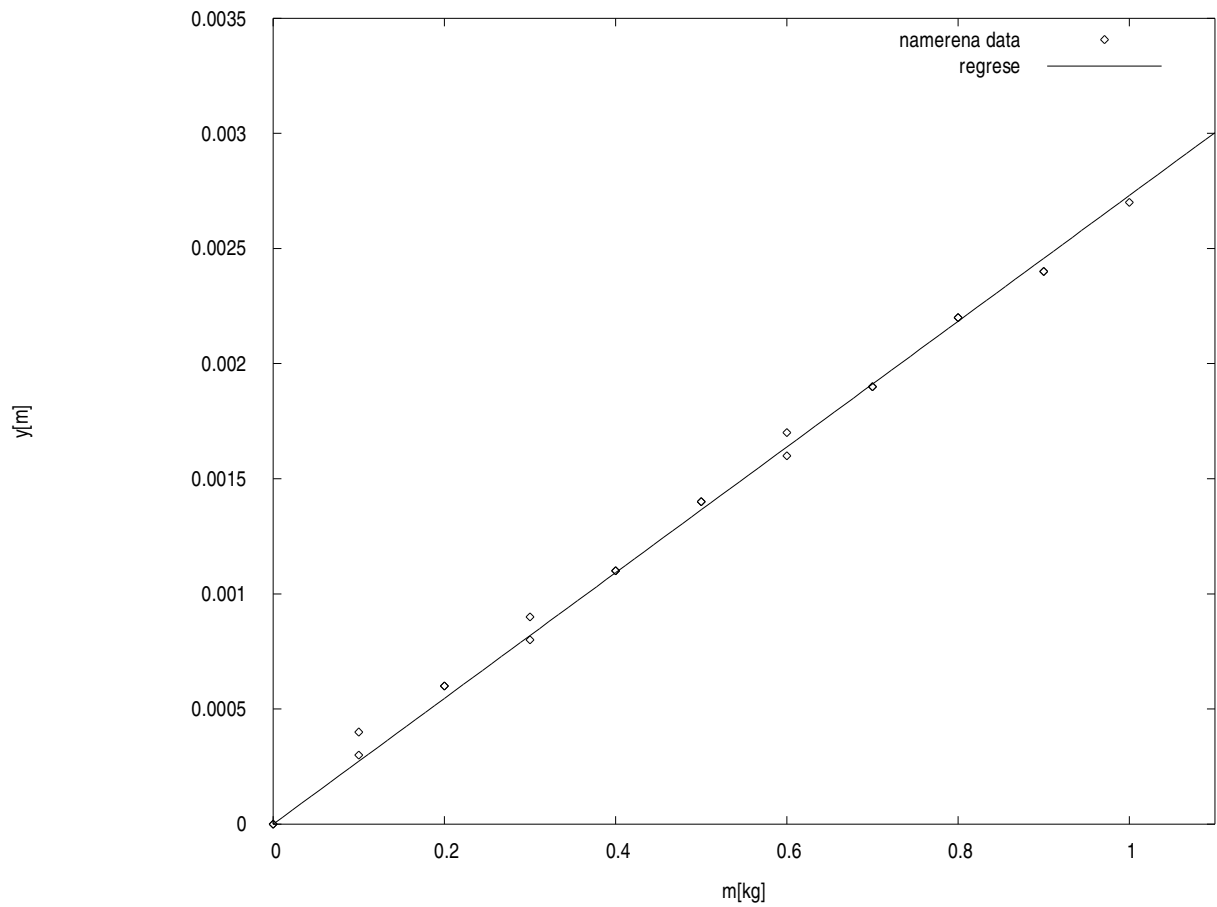
$$E=(6,90 \pm 0,07) \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

Dále uvádím požadované grafy závislosti protažení resp. průhybu v závislosti na zatížení

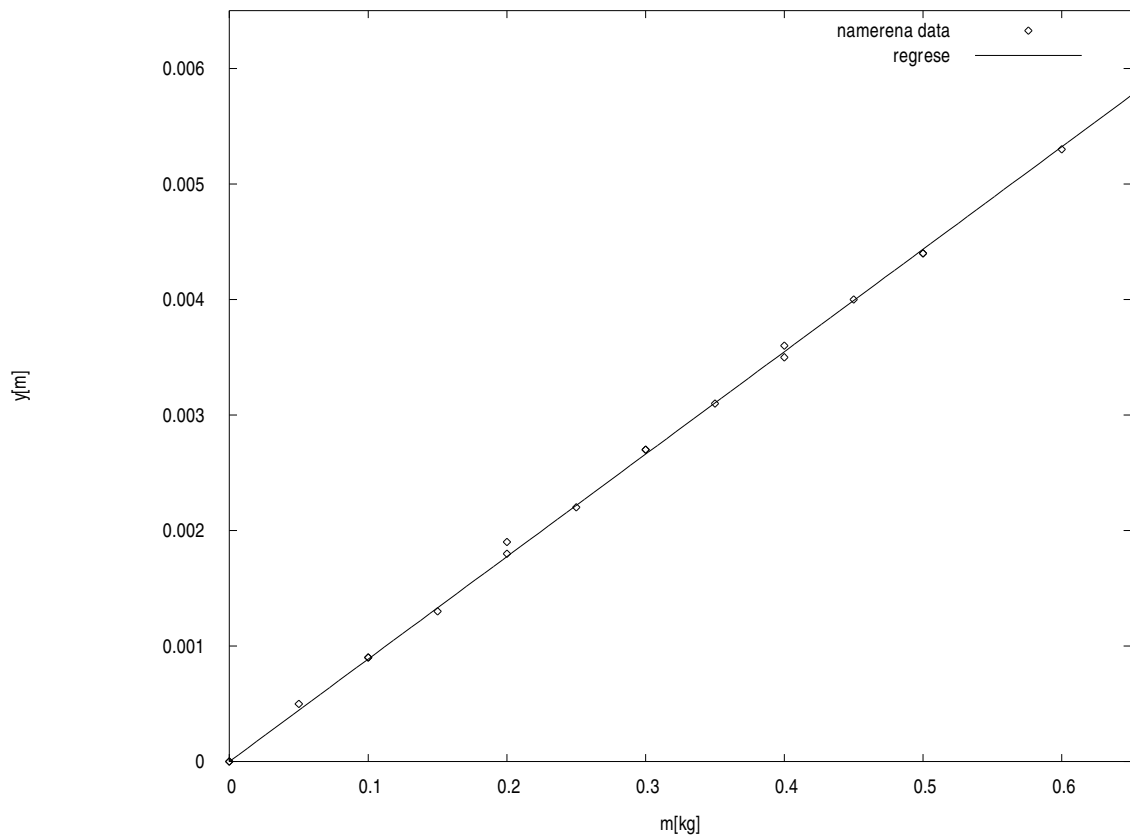
graf 1 závislost prodloužení drátu na zatížení



graf 2 zavislost prohnuti oceloveho tramku na zatizeni



graf 3 zavislost prohnuti duraloveho tramku na zatizeni



## Diskuse

Měření dávají velmi přesné výsledky, řádově 1%, přičemž největší část chyby tvoří odhadnuté chyby měřidel a ne statistické nepřesnosti.

tab. 6	srovnání měření s tabulkovými hodnotami	
	naměřená hodnota E [10 <sup>10</sup> Pa]	tabulková hodnota E [10 <sup>10</sup> Pa]
ocelový drát	19,0 ± 0,2	22
ocelový trámek	20,1 ± 0,3	22
duralový trámek	6,90±0,07	7,2

Z tab. 6 je vidět, že měření jsou blízka s hodnotami z tabulek a jejich mírné odchylky lze připsat například různým příměsím, nebo odlišným způsobem zpracování materiálu.

## Závěr

Všechny výsledky jsou uváděny ve tvaru ( $\mu \pm \sigma$ ) Změřil jsem modul pružnosti ocelového drátu a ocelového a duralového trámku. Výsledky splnily předpoklady a jsou přehledně uvedeny v tab. 6