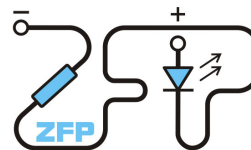


Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum ...



Úloha č.

Název úlohy:

Jméno: Obor: FOF FAF FMUZV

Datum měření:

Datum odevzdání:

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 - 5	
Teoretická část	0 - 1	
Výsledky měření	0 - 8	
Diskuse výsledků	0 - 4	
Závěr	0 - 1	
Seznam použité literatury	0 - 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval:.....

dne:

1 Pracovné úlohy

1. Zmerať modul pružnosti v ťahu E ocele z natiahnutia drôtu.
2. Zmerať modul pružnosti v ťahu E ocele a mosadze z ohybu trámu.
3. Výsledky merania graficky znázorniť, modul pružnosti určiť pomocou lineárnej regresie.

2 Teoretická časť

Na meranie Youngovho modulu (modulu pružnosti v ťahu) pevných látok sa v praxi používajú dve metódy - meranie natiahnutia drôtu a meranie ohybu trámu zo skúmanej látky.

Meranie Youngovho modulu pomocou natiahnutia drôtu sa teoreticky opiera o predpoklad, že v deforačnej oblasti, v ktorej sa meranie uskutočňuje sa materiál správa lineárne, teda preň platí *Hookov zákon* [1]:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{l_0 F}{S} \quad (1)$$

l_0 značí pôvodnú dĺžku drôtu, F silu pôsobiacu na drôt, a S plochu jeho prierezu. Predĺženie Δl sa v praxi zisťuje tzv. *zrkadlovou metódou*, pri ktorej je na kladku o priemere D , cez ktorú je prevesený zaťažovaný drôt, upevnené zrkadlo a meria sa uhol $\Delta\alpha$, o ktorý sa zrkadlo pri zaťažení pootočí. Predĺženie potom dostávame zo vzťahu[1]

$$\Delta l = \frac{D}{2} \Delta\alpha \quad (2)$$

Meranie uhla $\Delta\alpha$ sa uskutočňuje pomocou odrazeného lúča a stupnice vzdialenej od zrkadla o dĺžku L . Keď n označuje dielik stupnice zasiahnutý lúčom a n_0 dielik zodpovedajúci nezaťaženému drôtu, máme pre výpočet uhla[1]

$$\Delta\alpha \approx \frac{n - n_0}{2L} \quad (3)$$

Predpokladáme, že drôt má kruhový prierez a teda $S = \pi \frac{d^2}{4}$, kde d označujeme priemer drôtu. Predpokladáme ďalej, že sila pôsobiaca na drôt zaťažovaný hmotnosťou m sa dá v dobrom priblížení vyjadriť ako $F = mg$, kde g je gravitačné zrýchlenie. S ohľadom na tieto rovnosti a vzorce (1), (2), a (3) môžeme napísať závislosť medzi $n - n_0$ a m (veľičiny merané v praxi) ako¹

$$n - n_0 = \frac{16Ll_0g}{\pi Dd^2E} \cdot m \quad (4)$$

¹Nakoľko závislosť je lineárna, stačí uvažovať iba pridávané závažia a nie je potrebné poznať hmotnosť misky či počiatočného závažia [2].

Pri meraní modulu pružnosti v ťahu pomocou ohýbania trámu sa predpokladá, že napätie v tráme sa dá rozložiť na čistý ťah a čistý tlak a pre ohyb y platí

$$y = \frac{Fl^3}{48EI_p}, \quad (5)$$

kde F je pôsobiaca sila, l je dĺžka závesu trámu, E Youngov modul a I_p plošný moment zotrvačnosti trámu. Pokiaľ a je šírka priečného rezu trámu a b jeho výška, máme pre plošný moment zotrvačnosti

$$I_p = \frac{ab^3}{12} \quad (6)$$

V praxi sme merali závislosť prehybu y na záťaži m , ktorá je vzhľadom na vzťahy (5) a (6) a vyššie uvedenú úvahu o pôsobiacej sile daná rovnicou²

$$y = \frac{gl^3}{4Eab^3} \cdot m \quad (7)$$

2.1 Štatistické spracovanie dát

Všetky výsledky priamych meraní sú udávané so strednou kvadratickou chybou ($P = 68.27\%$). Prenos neistoty a relatívna chyba nepriameho merania boli pri štatistických spracovaniach počítané pomocou vzorcov [2]:

$$\eta_E = \sqrt{(\eta_L)^2 + (\eta_0)^2 + (\eta_g)^2 + (\eta_D)^2 + (2\eta_d)^2 + (\eta_\lambda)^2} \quad (8)$$

$$\eta_E = \sqrt{(\eta_g)^2 + (3\eta_l)^2 + (\eta_\lambda)^2 + (\eta_a)^2 + (3\eta_b)^2} \quad (9)$$

$$u_g = \sqrt{[(-0,025928 + 1,38 \times 10^{-4} \cos(2\phi)(-2 \sin(2\phi))]^2 u_\phi^2 + (-3,086 \times 10^{-6})^2 u_H^2} \quad (10)$$

λ v rovniciach vyššie označuje koeficient fitu. Pre ľubovoľnú veličinu s priemernou nameranou hodnotou \bar{x} a chybou u_x platí zrejme

$$\eta_x = \frac{u_x}{\bar{x}} \quad (11)$$

Všetky lineárne regresie boli robené v programe OriginLab.

²Podobne ako v predošlom prípade ide o lineárnu závislosť a teda si ju môžeme posunúť do počiatku tým, že uvažujeme iba rozdiely zaťaženia aj ohybu. Pri vyhodnocovaní budú do závislosti namiesto ohybov y dosadzované rozdiely oproti počiatočnému ohybu $y - y_0$.

3 Výsledky merania

3.1 Experimentálne podmienky

- teplota: $(24,0 \pm 0,1)^\circ\text{C}$
- tlak: $(9,855 \pm 0,001) \times 10^4 \text{ Pa}$
- vlhkosť: $26,1 \pm 0,2\%$

Chyby hodnôt vyššie boli odhadnuté z premenlivosti údajov na meradle.

Podľa [3] urobme odhad g v závislosti na zemepisnej šírke a nadmorskej výške budovy M. Zemepisná šírka bola za pomoci aplikácie Google Maps odhadnutá na $\phi = (50,0695 \pm 0,0002)^\circ$ a nadmorská výška na $H = (244,4 \pm 1,5) \text{ m}$. Na odhad g v m s^{-1} slúži *Helmertova rovnica*:

$$g = 9,80616 - 0,025928 \cos(2\phi) + (6,9 \times 10^{-5}) \cos^2(2\phi) - (3,086 \times 10^{-6})H$$

Po dosadení máme s ohľadom na štatistický prenos chyby podľa vzorca (10) $g = (9,81 \pm 0,05) \text{ m s}^{-2}$.

3.2 Meranie E metódou natiahnutia drôtu

Pred samotným experimentom boli premerané dĺžka aktívnej časti drôtu l_0 (od úchytnej svorky po bod dotyku s kladkou), priemer drôtu d , priemer kladky D a vzdialenosť zrkadla a stupnice L . Priemer drôtu bol meraný mikrometrickou skrutkou (dielik 0,01 mm), dĺžky l_0 a L pásovým metrom (dielik 0,1 cm), priemer kladky posuvným meradlom (dielik 0,05 mm). Namerané hodnoty sú uvedené v Tab. 1.

$\frac{l_0}{\text{cm}}$	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{D}{\text{cm}}$	$\frac{l_0}{\text{cm}}$
113,8	0,51	4,40	89,2
114,2	0,52	4,50	89,0
114,0	0,51	4,45	89,0
114,4	0,51	4,35	89,3
113,7	0,51	4,45	89,1

Tab. 1: Merania dĺžok potrebných pre metódu natiahnutia drôtu

S ohľadom na systematické chyby meradiel sú výsledné hodnoty nasledovné:

- $l_0 = (114,0 \pm 0,2) \text{ cm}$
- $d = (0,512 \pm 0,006) \text{ mm}$

- $D = (4,43 \pm 0,04)$ cm
- $L = (89,12 \pm 0,09)$ cm

Pri samotnom experimente sa oceľový drôt postupne zaťažoval závažiami o hmotnosti 100 g a rozdiely dielikov na stupnici sa odčítavali pomocou ďalekohľadu. Merania sa robili dvakrát, raz pri pridávaní (n_P), raz pri odoberaní (n_O) závaží. Pre každú záťaž boli tieto spriemerované a odčítané od počiatkovej hodnoty ($n - n_0$). Namerané hodnoty sú jednak v Tab. 2 a jednak v grafe na Obr. 1 s ohľadom na systematické chyby merania.

$\frac{m}{[\text{kg}]}$	$\frac{n_P}{[\text{cm}]}$	$\frac{n_O}{[\text{cm}]}$	$\frac{n-n_0}{[\text{cm}]}$
0,0	21,2	21,2	0,00
0,1	21,0	20,9	0,25
0,2	20,7	20,7	0,50
0,3	20,5	20,4	0,75
0,4	20,2	20,2	1,00
0,5	20,0	19,9	1,25
0,6	19,7	19,7	1,50
0,7	19,5	19,5	1,70
0,8	19,2	19,2	2,00
0,9	19,0	19,0	2,20
1,0	18,8	18,8	2,40

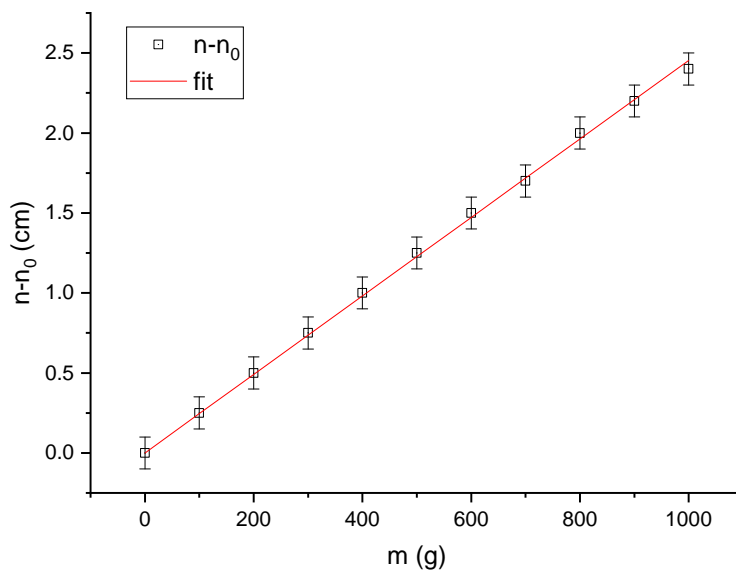
Tab. 2: Meranie závislosti predĺženia drôtu na záťaži

Hodnoty z merania boli fitované závislosťou $y = \lambda \cdot x$ s výsledkom $\lambda_1 = (2,45 \pm 0,03)$ cm kg⁻¹. Po úprave vzťahu (4) a s uvážením štatistickej rovnice (8) dostávame výsledok

$$E = \frac{16Ll_0g}{\pi Dd^2\lambda_1} = (178 \pm 5) \text{ GPa}$$

3.3 Meranie E pomocou ohybu trámu

Pred meraním ohybov trémov boli premerané ich hodnoty a a b a dĺžka závesu l . a_{ocel} a a_{mosadz} boli merané posuvným meradlom, b_{ocel} a b_{mosadz} mikrometrickou skrutkou, l pásovým metrom. Hodnoty sú uvedené v Tab. 3.



Obr. 1: Graf závislosti predĺženia drôtu na záťaži

$\frac{a_{ocel}}{[cm]}$	$\frac{b_{ocel}}{[mm]}$	$\frac{a_{mosadz}}{[cm]}$	$\frac{b_{mosadz}}{[mm]}$	$\frac{l}{[cm]}$
1,10	1,95	1,00	1,98	41,1
0,90	1,94	1,10	1,97	40,9
1,05	1,94	1,05	1,97	41,0
1,00	1,95	0,90	1,98	41,0
				40,9

Tab. 3: Merania dĺžok potrebných pre metódu ohybu trámu

Prihliadnúc k odchýlkam použitých meradiel sú spracované hodnoty nasledovné:

- $a_{ocel} = (1,01 \pm 0,06)$ cm
- $b_{ocel} = (1,945 \pm 0,007)$ mm
- $a_{mosadz} = (1,01 \pm 0,06)$ cm
- $b_{mosadz} = (1,975 \pm 0,007)$ mm
- $l = (40,98 \pm 0,07)$ cm

Samotné merania závislostí spočívali v postupnom pridávaní závaží s ekvidištantnými záťažami (pri oceli boli rozdiely 50 g, pri mosadzi 10 g). Ohyby y_P pri pridávaní a y_O pri odoberaní boli merané objektívnym mikrometrom s dielikom 0,1 mm. Tieto dve hodnoty sme spriemerovali, odčítali od priemeru počiatočný prehyb y_0 a hodnoty vyniesli pre oba materiály do grafu na Obr. 2.

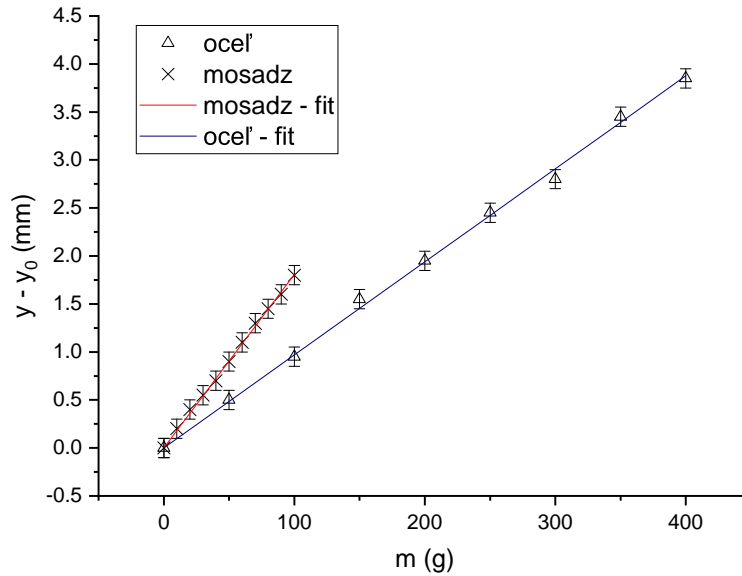
$\frac{m}{[\text{kg}]}$	$\frac{y_P}{[\text{mm}]}$	$\frac{y_O}{[\text{mm}]}$	$\frac{y-y_0}{[\text{mm}]}$
0,00	6,0	5,9	0,00
0,05	6,5	6,4	0,50
0,10	6,9	6,9	0,95
0,15	7,5	7,5	1,55
0,20	7,9	7,9	1,95
0,25	8,4	8,4	2,45
0,30	8,8	8,7	2,80
0,35	9,4	9,4	3,45
0,40	9,8	9,8	3,85

Tab. 4: Meranie závislosti ohybu ocelového trámu na záťaži

$\frac{m}{[\text{kg}]}$	$\frac{y_p}{[\text{mm}]}$	$\frac{y_o}{[\text{mm}]}$	$\frac{y-y_0}{[\text{mm}]}$
0,00	2,6	2,6	0,00
0,01	2,8	2,8	0,20
0,02	3,0	3,0	0,40
0,03	3,1	3,2	0,55
0,04	3,3	3,3	0,70
0,05	3,5	3,5	0,90
0,06	3,7	7,7	1,10
0,07	3,9	3,9	1,30
0,08	4,1	4,0	1,45
0,09	4,2	4,2	1,60
0,10	4,4	4,4	1,80

Tab. 5: Meranie závislosti ohybu mosadzného trámu na záťaži

Oba súbory dát v grafe sme fitovali závislosťou $y = \lambda \cdot x$ s výsledkami postupne $\lambda_{ocel} = (0,0097 \pm 0,0002) \text{ m kg}^{-1}$, $\lambda_{mosadz} = (0,0181 \pm 0,0005) \text{ m kg}^{-1}$



Obr. 2: Graf závislosti ohybu trámov na záťaži

Moduly E určíme pre oba materiály úpravou vzorca (7):

$$E = \frac{gl^3}{4\lambda ab^3}$$

S ohľadom na prenos neistoty podľa vzorca (9) je teda $E_{ocel} = (233 \pm 15)$ GPa, $E_{mosadz} = (119 \pm 8)$ GPa.

4 Diskusia výsledkov

Hodnoty Youngovho modulu boli namerané s relatívnou presnosťou postupne 3%, 6% a 7%. Nižšie presnosti pri meraniach ohybu trámu mohli byť spôsobené jednak nižším počtom meraní (pri meraní ohybu oceľového trámu bolo pôvodným zámerom merať až po záťaži 1 kg, no už pri záťaži 0,4 kg bola dosiahnutá hranica stupnice objektívového mikrometra), jednak veľkým rozptylom hodnôt priamych meraní väčších dĺžok. Tento rozptyl je možné vysvetliť ľudským faktorom. Na závažiach neboli uvedené presnosti ich ciachovania, no odchýlky ich hmotností môžeme považovať za pomerne zanedbateľné. Namerané dáta zodpovedali lineárnym závislostiam pomerne dobre (relatívna chyba fitov menšia než 3%), čo potvrdzuje, že počas experimentov sme sa pohybovali v oblasti deformácie, kde je odozva skúmaných materiálov Hookovská.

Pre modul pružnosti v ťahu ocele sa v [2] uvádza hodnota 205 GPa, v [4] je to 220 GPa. Hodnota nameraná pri ohybe trámu sa v rámci chyby dobre zhoduje s tabuľkovou hodnotou z [4], no oproti hodnote z [2] je príliš vysoká. Značný rozdiel týchto dvoch tabuľkových hodnôt naznačuje, že merané hodnoty Youngovho modulu silne závisia od podrobnejších parametrov (napr. presné zloženie a vnútorná štruktúra materiálu). Na základe vyššie uvedených porovnaní teda môžeme zhodnotiť, že oceľový trám je z druhu ocele podobného tomu, ktorý bol použitý k určeniu modulu E v [4]. Hodnota E zistená pre drôt sa nezhoduje v rámci odchýlky ani s jednou z vyššie diskutovaných tabuľkovaných hodnôt. Z hodnôt uvedených v [4] sa najviac blíži platine s modulom pružnosti v ťahu 170 GPa. Z toho sa dá odhadnúť, že pri drôte sa nejednalo o čistú oceľ, ale o oceľ s prímiesou, no nemôžeme s určitosťou argumentovať, že ide o prímies platiny, nakoľko vplyv zloženia a vnútornej štruktúry materiálu na Youngov modul je zložitý a vyžadoval by si štúdium materiálu na mikroskopickej úrovni.

Modul pružnosti v ťahu pre mosadz sa podľa údajov v [2] a [4] pohybuje v rozmedzí od 98 GPa po 110 GPa. Hodnota zistená v praktiku pre ohýbaný trám je (119 ± 8) GPa, čo v rámci chyby prevyšuje hornú hranicu intervalu o 1 GPa. Táto odchýlka je takmer zanedbateľná a môžeme ju opäť pripísať miernym nečistotám nachádzajúcim sa v použitej vzorke materiálu.

5 Záver

Cieľom práce v praktiku bolo zistiť moduly pružnosti jednak drôtu pomocou zaťažovania a merania predĺženia zrkadlovou metódou, jednak dvoch trávov metódou ohybu. Výsledky meraní boli graficky znázornené a spracované lineárnou regresiou. V zadaní úlohy boli uvedené materiály, z ktorých majú byť použité vzorky. Voči ich tabuľkovým hodnotám bola vykonaná diskusia. Súhrnné výsledky merania sú uvedené nižšie.

- meranie natiahnutia drôtu: $E = (178 \pm 5)$ GPa
- meranie ohybu oceľového trámu: $E_{ocel} = (233 \pm 15)$ GPa
- meranie ohybu mosadzného trámu: $E_{mosadz} = (119 \pm 8)$ GPa

Zoznam použitej literatúry

- [1] Študijný text k úlohe http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_109.pdf. aktuálne k 29.3. 2018.
- [2] J. BROŽ a kol. *Základy fyzikálních měření I*. Praha: SPN, 1967.
- [3] Dr. D.G. Simpson. Physics recreations: Helmhert's equation <http://www.pgccphy.net/rec/rec002-helmert.pdf>. aktuálne k 29.3. 2018.

- [4] J. MIKULČÁK a kol. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*. Praha: SPN, 1988.