

1 Pracovní úkoly

1. Změřte modul pružnosti v tahu E oceli z protažení drátu.
2. Změřte modul pružnosti v tahu E oceli a mosazi z průhybů trámku.
3. Výsledky měření graficky znázorněte, modul pružnosti určete pomocí lineární regrese.

2 Teoretická část

Pokud drát délky l_0 protahujeme silou F , změní se jeho délka o hodnotu [1]

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{l_0 F}{S} \quad (1)$$

kde E je modul pružnosti v tahu daného drátu a S je jeho příčný průřez.

V našem případě síla F bude dána tíhou závaží, které položíme na misku připojenou ke konci drátu. Platí tedy $F = mg$, kde m je hmotnost závaží a $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ je místní tíhové zrychlení.

Budeme předpokládat drát kruhového průřezu, takže plocha jeho příčného řezu bude dána vztahem $S = \frac{\pi d^2}{4}$, kde d je průměr drátu.

Poslední veličina, kterou potřebujeme změřit je Δl , tu určíme zrcátkovou metodou. Natahovaný drát povedeme přes kladku o poloměru r . Na kladce bude pevně upevněné zrcátko, ve kterém bude vidět osvětlená stupnice vzdálená L od zrcátka. Na počátku je ve zrcátku vidět dílek n_0 na stupnici. Pokud se nyní kladka pootočí o úhel $\Delta\alpha$, je v zrcátku vidět dílek n a platí $\Delta l = r\Delta\alpha$. Jelikož úhly budou nabývat malých hodnot, můžeme určit úhel $\Delta\alpha$ jako

$$\Delta\alpha = \frac{n_0 - n}{2L} \quad (2)$$

Celkově takto dostaneme závislost

$$(n_0 - n) = \frac{8l_0 L g}{\pi d^2 r E} m \quad (3)$$

$$\Delta n = A \cdot m \quad (4)$$

Pokud budeme postupně přidávat závaží a změříme závislost $\Delta n(m)$, můžeme lineární regresí určit parametr A a modul pružnosti v tahu poté dopočítat podle rovnice

$$E = \frac{8l_0 L g}{\pi d^2 r A} \quad (5)$$

Modul pružnosti dále určíme metodou nepřímou. Pokud máme trámek obdélníkového průřezu podepřený dvěma břity ve vzdálenosti l a působíme na něj uprostřed silou F svisle dolů, trámek se prohne v místě působitě síly o y , pro které platí

$$y = \frac{F l^3}{4E a b^3} \quad (6)$$

kde a je šířka trámku, b jeho výška a E jeho modul pružnosti v tahu. Síla F bude opět způsobena tíhou závaží, které budeme přikládat na misku, takže platí $F = mg$.

Na začátku se trámek prohne o velikost průhybu y_0 , což je způsobeno částečně jeho vlastní hmotností a částečně tíhou misky, na kterou budeme přikládat závaží. Platí tedy

$$(y - y_0) = \frac{g l^3}{4E a b^3} m \quad (7)$$

$$\Delta y = B \cdot m \quad (8)$$

Pokud změříme závislost $\Delta y(m)$, můžeme určit lineární regresí parametr B a modul pružnosti E dopočítat podle rovnice

$$E = \frac{g l^3}{4B a b^3} \quad (9)$$

3 Výsledky měření

Měření bylo provedeno při teplotě $23,8^\circ\text{C}$, tlaku $979,6\text{ hPa}$ a relativní vlhkosti vzduchu $27,3\%$.

3.1 Protahování drátu

Původní délku drátu l_0 a vzdálenost zrcátka od stupnice L jsem změřil posuvným metrem, který má nejmenší dílek stupnice 1 mm . Chybu těchto měření jsem však odhadl na $\sigma_{l_0} = \sigma_L = 0,5\text{ cm}$.

Dále jsem posuvným měřidlem změřil vnitřní průměr kladky, přes kterou byl drát veden. Chyba tohoto měření je dána chybou měřicího přístroje, tedy $\sigma_{2r} = 0,05\text{ mm}$.

Hodnoty veličin l_0 , L i $2r$ byly stejné pro všechny měření, takže jsem v tabulkách uvedl vždy pouze jednu hodnotu.

Poslední z rozměrů, který jsem změřil, byl průměr samotného drátu d . Měřil jsem mikrometrem. Chyba měřicího přístroje v tomto případě tedy byla $\sigma_P = 0,005\text{ mm}$. Hodnoty d se trochu lišily v závislosti na místě měření. Naměřené hodnoty ukazuje tabulka 1. Změřil jsem tedy 10 hodnot, udělal průměr a chybu výsledku určil jako

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{(n-1)n}} + \sigma_P^2 \quad (10)$$

Tabulka 1: Naměřené hodnoty průměru drátu d

$\frac{d}{\text{mm}}$	0,51	0,50	0,51	0,51	0,51	0,51	0,50	0,50	0,51	0,51
-----------------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Výsledky měření všech rozměrů aparatury a drátu shrnuje tabulka 2.

Tabulka 2: Změřené rozměry aparatury a vzorku při protahování drátu

$\frac{l_0}{\text{cm}}$	$\frac{r}{\text{mm}}$	$\frac{L}{\text{cm}}$	$\frac{d}{\text{mm}}$
$114,0 \pm 0,5$	$19,28 \pm 0,03$	$89,5 \pm 0,5$	$0,507 \pm 0,005$

Drát jsem poté protahoval pomocí závaží o hmotnostech 100 g . Když žádná závaží na misce nebyla, na stupnici byl vidět dílek $n_0 = 18,9\text{ cm}$. Závaží jsem nejdříve přidával a poté ve stejném pořadí ubíral. Naměřené hodnoty ukazuje tabulka 3.

Chybu měření jednoho dílku n odhaduji na $\sigma_n = 1\text{ mm}$. Když poté počítám rozdíl $\Delta n = (n_0 - n)$ tak chybu tohoto výsledku určím ze zákona šíření chyb jako

$$\sigma_{\Delta n} = \sqrt{2}\sigma_n \quad (11)$$

Jedním z předpokladů lineární regrese je, že chyba měření veličiny na ose x je zanedbatelně malá [2]. Když jsem si závaží převážil na vahách, zjistil jsem, že běžová závaží se řádově liší o $0,06\text{ g}$ a černá závaží o $0,4\text{ g}$ od udávané hodnoty 100 g . Tuto chybu považuji za zanedbatelnou.

Naměřenými body proložím přímkou ve tvaru $\Delta n = Am$. Jelikož všechny měření Δn mají stejnou chybu, mohu parametr lineární regrese spočítat podle rovnice [2]

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta n_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i^2} \quad (12)$$

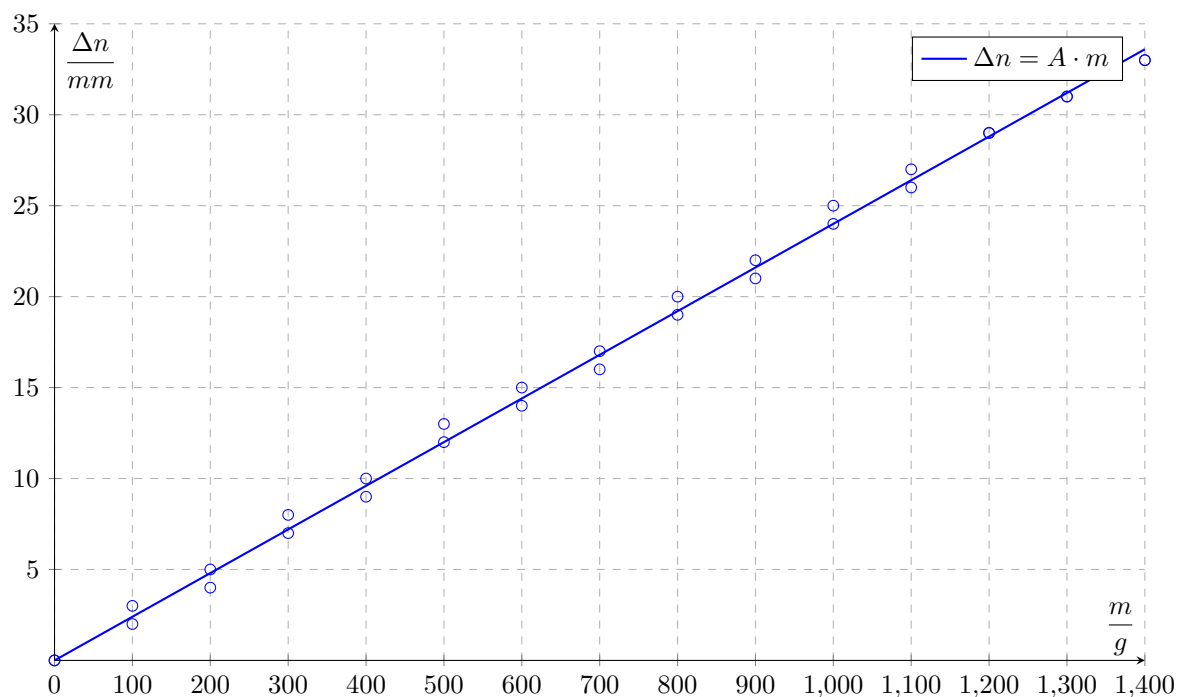
a chybu výsledku určit ze vztahu

$$\sigma_A = \frac{\sigma_{\Delta n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n m_i^2}} \quad (13)$$

Tabulka 3: Naměřené hodnoty při protahování drátu

$\frac{m}{g}$	$\frac{n}{cm}$ při zatěžování	$\frac{n}{cm}$ při odlehčování
0	18,9	18,9
100	18,7	18,6
200	18,5	18,4
300	18,2	18,1
400	18,0	17,9
500	17,7	17,6
600	17,5	17,4
700	17,3	17,2
800	17,0	16,9
900	16,8	16,7
1 000	16,5	16,4
1 100	16,3	16,2
1 200	16,0	16,0
1 300	15,8	15,8
1 400	15,6	15,6

Hodnotu parametru A jsem takto určil na $A = (24,0 \pm 0,3) \cdot 10^{-3} m \cdot kg^{-1}$. Výsledek ukazuje graf 1.



Graf 1: Výsledek lineární regrese při protahování drátu

Modul pružnosti v tahu oceli poté můžu vypočítat pomocí vztahu (5) a chybu výsledku určit ze zákona šíření chyb jako

$$\sigma_E = E \sqrt{\left(\frac{\sigma_{l_0}}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2} \quad (14)$$

kde E značí hodnotu modulu pružnosti vypočítanou dle vztahu (5). Celkově takto z měření protažení drátu dostanu, že $E = (21,4 \pm 0,7) \cdot 10^{10} \text{ Pa}$.

3.2 Průhyb trámků

Vzdálenost břitů při měření průhybu trámků jsem změřil posuvným metrem s přesností 1 mm. Naměřil jsem hodnotu $l = (41,0 \pm 0,1) \text{ cm}$. Šířku a a výšku b jsem poté změřil mikrometrem s přesností 0,005 mm, naměřené rozměry vzorků ukazuje tabulka 4. Chybu měření a a b určím podobně jako chybu při měření d v protahování drátu (10), tedy jako odmocninu z kvadrátu chyby měřicího přístroje a kvadrátu výběrové směrodatné odchylky aritmetického průměru.

Pro ocelový trám takto dostanu šířku $a = (11,955 \pm 0,007) \text{ mm}$ a výšku $b = (1,952 \pm 0,009) \text{ mm}$. Pro mosazný trám dostanu šířku $a = (11,82 \pm 0,02) \text{ mm}$ a výšku $b = (1,982 \pm 0,007) \text{ mm}$.

Tabulka 4: Rozměry trámků

ocel		mosaz	
$\frac{a}{\text{mm}}$	$\frac{b}{\text{mm}}$	$\frac{a}{\text{mm}}$	$\frac{b}{\text{mm}}$
11,96	1,96	11,80	1,98
11,96	1,95	11,81	1,98
11,95	1,95	11,82	1,99
11,96	1,96	11,81	1,98
11,95	1,96	11,81	1,98
11,95	1,94	11,82	1,98
11,95	1,95	11,82	1,99
11,96	1,96	11,84	1,98
11,96	1,95	11,90	1,98
11,95	1,94	11,85	1,98

Trámky jsem poté prohýbal za pomoci závaží. Pro ocelový trámek byla použita stejná závaží jako pro ocelový drát z předchozího měření a pro mosazný drát byla použita sada menších závaží s maximální hmotností 100 g a minimální 2 g. Chybu hmotnosti závaží opět zanedbávám.

Když na zavěšené misce žádná závaží nebyla, tak byl ocelový trámek prohnut o $y_0 = 4,50 \text{ mm}$ a mosazný trámek o $y_0 = 2,30 \text{ mm}$. Závaží jsem opět nejdříve přidával a poté ve stejném pořadí odebíral. Naměřené hodnoty ukazuje tabulka 5 a 6.

Chybu měření prohnutí trámku y odhaduji na $\sigma_y = 0,05 \text{ mm}$. Když poté počítám $\Delta y = (y - y_0)$ tak chybu tohoto výsledku určím ze zákona šíření chyb jako

$$\sigma_{\Delta y} = \sqrt{2}\sigma_y \quad (15)$$

Naměřenými body poté proložím přímkou ve tvaru $\Delta y = Bm$ a jelikož opět platí, že všechny Δy mají stejnou chybu, mohu použít stejné rovnice lineární regrese jako jsem použil při měření protažení drátu. Pro ocelový trámek tak dostanu hodnotu parametru lineární regrese $B_o = (9,63 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$ a pro mosazný trámek $B_m = (18,15 \pm 0,09) \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$. Výsledky lineární regrese ukazuje graf 2.

Tabulka 5: Průhyb ocelového trámku

$\frac{m}{g}$	$\frac{y}{mm}$ zatěžování	$\frac{y}{mm}$ odlehčování
0	4,50	4,50
100	5,50	5,50
200	6,40	6,40
300	7,40	7,40
400	8,35	8,35
500	9,30	9,30
550	9,80	9,80
570	10,00	10,00

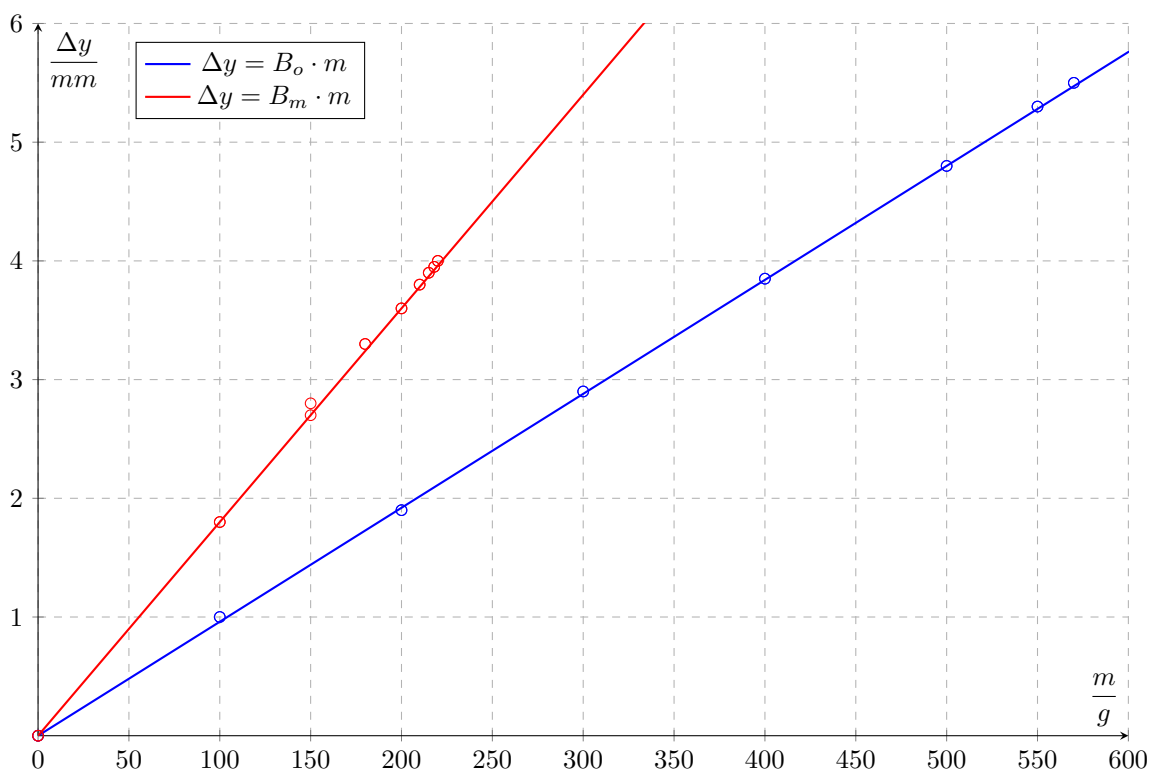
Tabulka 6: Průhyb mosazného trámku

$\frac{m}{g}$	$\frac{y}{mm}$ zatěžování	$\frac{y}{mm}$ odlehčování
0	2,30	2,30
100	4,10	4,10
150	5,10	5,00
180	5,60	5,60
200	5,90	5,90
210	6,10	6,10
215	6,20	6,20
218	6,25	6,25
220	6,30	6,30

Modul pružnosti v tahu poté mohou dopočítat z rovnice (9) a chybu výsledku určit ze zákona šíření chyb jako

$$\sigma_E = E \sqrt{\left(\frac{3\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{3\sigma_b}{b}\right)^2} \quad (16)$$

Pro ocelový trámeček takto dostanu hodnotu modulu pružnosti v tahu $E = (19,7 \pm 0,2) \cdot 10^{10} Pa$ a pro mosazný trámeček $E = (10,1 \pm 0,1) \cdot 10^{10} Pa$.



Graf 2: Výsledek lineární regrese při průhybu trámků

4 Diskuse

Tabulky [3] udávají hodnotu modulu pružnosti v tahu oceli v rozmezí mezi 200 až 210 GPa a hodnotu modulu pružnosti v tahu mosazi 99 GPa . Všechny naměřené hodnoty se s těmito hodnotami shodují v rámci dvou směrodatných odchylek, přičemž měření modulu pružnosti přímo z protahování drátu bylo méně přesné, s relativní chybou 3,3%, než měření metodou nepřímou z průhybů trámků, s relativní chybou 1,0%.

Hodnota E oceli určená z protahování drátu se shoduje s hodnotou určenou z průhybu trámku v rámci dvou směrodatných odchylek.

Větší nepřesnost měření E přímo z protahování drátu mohla být způsobena již při měření rozměrů aparatury. Při měření původní délky drátu l_0 nebylo zřejmé, v kterém místě drát přesně dosedá na kladku, proto také byla chyba tohoto měření nadhodnocena na 0,5 cm . Dále již v odvozování vzorců byl použit vzorec $\tan(2\Delta\alpha) \approx 2\Delta\alpha$, což do měření také mohlo vnést částečnou chybu. Jinak při měření poloměru kladky r a průměru drátu d k žádným komplikovanostem nedošlo.

Další faktor, který mohl ovlivnit přesnost měření protahování drátu, bylo prokluzování kladky. Nezdálo se, že by drát nějak výrazně prokluzoval, také jsem po odebrání všech závaží naměřil stejný dílek na stupnici jako na začátku měření. Ovšem úplně tento faktor vyloučit nemůžu.

Měření rozměrů trámků a vzdálenosti břitů proběhlo bez problémů. Stejně tak většinou bylo jednoduché odečítat hodnoty průhybu y . Pouze u mosazného trámku vždy po nandání závaží docházelo ke značnému kmitání, takže jsem musel vždy počkat, až se zastaví. Jelikož toto měření bylo ovlivněno méně faktory, považoval bych hodnoty naměřené z průhybu trámku za přesnější oproti hodnotě naměřené z protahování drátu.

V obou případech se naměřené hodnoty Δn , resp. Δy , při nandávání závaží v rámci chyby měření shodují s naměřenými hodnotami při odebírání závaží. Ověřil jsem tak, že deformace byla pružná.

5 Závěr

Při teplotě 23,8°C jsem z protahování drátu určil modul pružnosti v tahu oceli na $E = (21,4 \pm 0,7) \cdot 10^{10} Pa$. Naměřené hodnoty ukazuje tabulka 3 a proložení hodnot přímkou graf 1.

Dále jsem nepřímou metodou z průhybu ocelového trámku určil modul pružnosti v tahu oceli na $E_o = (19,7 \pm 0,2) \cdot 10^{10} Pa$ a z průhybu mosazného trámku modul pružnosti v tahu mosazi na $E_m = (10,1 \pm 0,1) \cdot 10^{10} Pa$. Naměřené hodnoty jsou vidět v tabulkách 5 a 6 a grafické zpracování zobrazuje graf 2.

6 Seznam použité literatury

- [1] Měření modulu pružnosti v tahu. Fyzikální praktikum [online]. [cit. 2018-03-30]. http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_109.pdf
- [2] English, Jiří. Úvod do praktické fyziky I. 1. vyd. Praha: MATFYYPRESS, 2006, 145 s. ISBN 80-86732-93-2.
- [3] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch. Fyzikální a matematické tabulky SNTL, Praha 1980