Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM ...

Úloha č. ....

Název: ....

Pracoval: .... stud. skup. .... dne ....

Odevzdal dne: ....

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 – 5	
Teoretická část	0 – 1	
Výsledky měření	0 – 8	
Diskuse výsledků	0 – 4	
Závěr	0 – 1	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval: .... dne ....

Pracovní úkoly

1. Změřte dobu kmitu T_0 dvou stejných nevázaných fyzických kyvadel.
2. Změřte doby kmitů T_i dvou stejných fyzických kyvadel vázaných slabou pružnou vazbou vypouštěných z klidu při počátečních podmínkách:
   (a) $y_1 = y_2 = B$ ... doba kmitu T_1
   (b) $y_2 = -y_2 = B$ ... doba kmitu T_2
   (c) $y_1 = 0, y_2 = B$
      i. doba kmitu T_3
      ii. doba $T_4/4$, za kterou dojde k maximální výměně energie mezi kyvadly
3. Vypočtěte kruhové frekvence ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 a ω_4 odpovídající dobám T_0, T_1, T_2, T_3 a T_4, ověřte měřením platnost vztahů odvozených pro ω_3 a ω_4.
4. Vypočtěte stupeň vazby κ.
5. Pro jednu pružinu změřte závislost stupně vazby na vzdálenosti zavěšení pružiny od uložení závěsu kyvadla a graficky znázorněte.

1 Teoretická část

Při vyšetřování vázaných kmitů se omezíme na harmonické kmity dvou hmotných bodů o stejné hmotnosti m. Počátky souřadných soustav leží v rovnovážných polohách bodů. Frekvenci ω_0 těchto oscilátorů nazveme jejich vlastní freknvecí. Mezi oscilátory necháme působit sílu F_1 úměrnou rozdílu souřadnic y_1 a y_2 oscilátorů [1] :

$$F_1 = k_1(y_2 - y_1) \tag{1}$$

Díky principu akce a reakce působí na druhý bod stejná síla opačného směru a dostáváme tak dvě pohybové rovnice:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} = -F + F_1 = -ky_1 + k_1(y_2 - y_1) \tag{2}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}t^2} = -F - F_1 = -ky_2 - k_1(y_2 - y_1) \tag{3}$$

Rovnice jednou sečteme a jendou odečteme a řešíme tak soustavu dvou rovnic pro neznámé $X_1 = y_1 + y_2$ a $X_2 = y_1 - y_2$:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 X_1}{\mathrm{d}t^2} = -kX_1 \tag{4}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 X_2}{\mathrm{d}t^2} = -kX_2 - 2k_1X_2 \tag{5}$$

což jsou rovnice harmonických kmitů, neboť předpokládáme, že $k + 2k_1 > 0$. Rovnice (4) je pro harm. kmit s frekvencí $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, rovnice (5) pro kmit s frekvencí $\omega_2 = \sqrt{(k + 2k_1)/m}$, tyto nazýváme základními frekvencemi vázaných oscilátorů. Řešení rovnic (a_1, a_2, b_1, b_2 jsou integrační konstanty):

$$X_1 = a_1 \mathrm{sin}\omega_1 t + b_1 \mathrm{cos}\omega_1 t \tag{6}$$

$$X_2 = a_2 \mathrm{sin}\omega_2 t + b_2 \mathrm{cos}\omega_2 t \tag{7}$$

A pro původně hledané výchylky y_1 a y_2:

$$y_1 = \frac{1}{2}(a_1 \mathrm{sin}\omega_1 t + b_1 \mathrm{cos}\omega_1 t + a_2 \mathrm{sin}\omega_2 t + b_2 \mathrm{cos}\omega_2 t) \tag{8}$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(a_1 \mathrm{sin}\omega_1 t + b_1 \mathrm{cos}\omega_2 t - a_2 \mathrm{sin}\omega_2 t - b_2 \mathrm{cos}\omega_2 t) \tag{9}$$

Intergační konstanty určíme z počátečních podmínek pro tři různé případy, tělesa vypouštíme z klidu, tedy $\dot{y_1} = \dot{y_2} = 0$:

1. $y_1 = y_2 = B$
   Z rovnic (8) a (9) plyne $a_1 = B$ a $a_2 = b_1 = b_2 = 0$:

$$y_1 = y_2 = B\mathrm{cos}\omega_1 t \tag{10}$$

2. $y_1 = -y_2 = B$

$$y_1 = B\cos\omega_2 t \tag{11}$$
$$y_2 = -B\cos\omega_2 t \tag{12}$$

3. $y_1 = 0$; $y_2 = B$

$$y_1 = \frac{B}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) \tag{13}$$
$$y_2 = \frac{B}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \tag{14}$$

Ty můžeme při použití goniometrických vzorců upravit:

$$y_1 = A\sin\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t \cdot \sin\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t \tag{15}$$
$$y_2 = A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t \cdot \cos\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t \tag{16}$$

Pokud jsou ω_2 a ω_1 blízké ($k_1 \ll k$), lze tyto považovat za rovnice harmonických kmitů s frekvencí:

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \tag{17}$$

jejichž amplituda se periodicky mění s frek.:

$$\omega_4 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tag{18}$$

Stupeň vazby κ charakterizuje sílu vazby mezi oscilátory:

$$\kappa = \frac{k_1}{k_1 + k} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \tag{19}$$

Více o vázaných oscilátorech viz. [1, str. 162-166].

Experiment ke zkoumání kmitů vázaných oscilátorů realizujeme pomocí dvou stejných kyvadel, jejichž ramena spojíme pružinkou. Pro takový systém platí analogické rovnice jako výše uvedené: namísto tuhosti k, k_1 dosazujeme direkční moment kyvadel D, D_1, hmotnost m nahradíme momentem setrvačnosti kyvadel I, odpovídající síly jejich momenty a výchylky y úhlem vychýlení kyvadla φ. Uvažujeme dostatečně dlouhá ramena kyvadel a malé výchylky, tedy platí $y \sim \varphi$. Více viz. [2]. Vztahy (17), (18) a (19) pro výpočet jednotlivých frekvencí a stupně vazby zůstávají identické.

Počáteční podmínky uskutečňujeme použitím důmyslného zařízení se stupnicí pro zjištění y. Pomocí stopek měříme doby kmitů kyvadel T_0, T_1, T_2, T_3 a T_4 periodu změny amplitudy kmitů vázaných osc. Pro přesnější výsledky měříme dobu více kmitů (deseti). T_4 určíme změřením $T_4/4$ doby od maximální amplitudy kyvadla do chvíle, kdy veškerou svou energii předá druhému kyvadlu, to se kýve s největší výchylkou, zatímco měřené se nekýve ideálně vůbec. Před začátkem měření musíme kyvadla posunováním jejich čoček po závěsech zkorigovat, aby se kývala se stejnou periodou T_0. Ještě dodejme, že odpovídající frekvence spočítáme jednoduše jako:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{20}$$

Použité přístroje

Elektronické stopky Elektronické stopky měří s přesností setin sekund, ještě připočteme lidskou chybu zachycení přesných časových okamžiků cca 0.20 s [1, str. 84] . $\Delta T = 0.21\ s$.

Rolovací metr Ke zjištění vzdálenosti uchycení pružinky od závěsu kyvadel h: $\Delta h = 0.1\ cm$

Spouštěcí zařízení se stupnicí K určení počáteční výchylky kyvadel y: $\Delta y = 0.1\ cm$

2 Výsledky měření

Vlastní frekvence ω_0, perioda T_0

	kyvadlo 1	kyvadlo 2
č. měření	$10T_0$ $[s]$	$10T_0$ $[s]$
1	18.93	18.87
2	18.85	18.81
3	18.85	18.86
$\overline{10T}$ $[s]$	18.88	18.85

Tabulka 1: Naměřené časy $10T_0$ kmitů obou kyvadel a jejich průměr.

Z hodnot v tabulce 1 jednoduše spočteme periodu $T_0 = 10T_0/10$. Chybu $\Delta T = 0.21\ s$ s jakou určíme čas $10T_0$ dělíme odmocninou z počtu měření (v tomto případě 3), neboť zjištujeme aritmetický průměr. Chybu T_0 pak získáme rovnou z výrazu:

$$\Delta T_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial T_0}{\partial 10T_0}\Delta 10T_0\right)^2} = \frac{1}{10} \cdot \frac{\Delta T}{\sqrt{n}} \tag{21}$$

kde n je počet měření. Stejný postup výpočtu chyby posléze opakujeme i při výpočtech dalších period. Dostáváme:

$$T_{0(1)} = (1.89 \pm 0.01)\ s$$
$$T_{0(2)} = (1.89 \pm 0.01)\ s$$

Hledanou vlastní frekvenci ω_0 spočteme podle (20), chybu vyjádříme pomocí relativní chyby:

$$\omega_{0(1)} = (3.33 \pm 0.02)\ s^{-1}$$
$$\omega_{0(2)} = (3.33 \pm 0.02)\ s^{-1}$$

$y_1 = y_2 = B$, základní frekvence ω_1, perioda T_1

Při měření frekvence ω_1 je již přítomna pružinka mezi kyvadly, hodnoty jsou měřeny pro dvě různé pružinky A a B připevněné ve stejné vzdálenosti h od závěsů kyvadla. Přesnost s jakou je měřena h jsem ještě oproti očekávané odchylce nadhodnotil vzhledem ke špatnému úhlu, z něhož je při měřené výšce na stupnici metru nahlíženo, nebo její naklonění. Není přítomno např. žádné zrcátko ke kontrole apod. Stejné problémy provázejí i měření počáteční výchylky y na stupnici. Různé hodnoty y_1 a y_2 však mohou ovlivnit naměřené výsledky (viz. diskuse). Navíc zatímco kyvadlo 1 se pohybuje kolem rovnovážné polohy 0 cm na stupnici, kyvadlo 2 kolem rovnovážné polohy 1 cm. I proto byly počáteční výchylky štelovány tak, aby naměřená čísla odpovídala (blížila se) předpokládanému $\omega_0 = \omega_1$. y_1 a y_2 jsou proto spíše odhadnuty a jejich chyba je také nadhodnocena. Nicméně v dalších měřeních byly jednou nalezené vhodné výchylky použity znovu.

vzdálenost pružiny od závěsu	$h = (19.0 \pm 0.5)\ cm$	
počáteční podmínky	$y_1 = y_2 = (2.0 \pm 0.3)\ cm$	$\varphi_1 = \varphi_2 \doteq 0.02\ rad$

Periody $T_{1(A)}$ a $T_{1(B)}$ pro pružiny A a B spočteme analogicky předchozímu případu s chybou podle (21) při použití naměřených hodnot (viz. tabulka 2):

$$T_{1(A)} = (1.90 \pm 0.01)\ s$$
$$T_{1(B)} = (1.90 \pm 0.01)\ s$$

Stejným způsobem jako ω_0 získáme i hledanou frekvenci ω_1:

$$\omega_{1(A)} = (3.31 \pm 0.02)\ s^{-1}$$
$$\omega_{1(B)} = (3.31 \pm 0.02)\ s^{-1}$$

	pružina A		pružina B	
č. měření	$10T_1$ $[s]$	$10T_2$ $[s]$	$10T_1$ $[s]$	$10T_2$ $[s]$
1	19.05	18.48	18.94	18.18
2	19.04	18.60	18.94	18.22
3	18.94	18.62	19.09	18.31
4	18.91	18.70	18.83	18.15
5	18.84	18.66	19.08	18.21
6	18.98	18.70	19.05	18.31
$\overline{10T}$ $[s]$	18.96	18.63	18.99	18.23

Tabulka 2: Naměřené časy $10T_1$ a $10T_2$ kmitů kyvadel vázaných pružinami A a B a jejich průměr.

$y_1 = -y_2 = B$, základní frekvence ω_2, perioda T_2

Vzdálenost pružinek od závěsů h už zůstává stejná jako v předešlém případě.

počáteční podmínky $\quad y_1 = -y_2 = (2.0 \pm 0.3)\ cm \quad \varphi_1 = -\varphi_2 \doteq 0.02$

Periody T_2 pro pružinu A i B, jako i druhé vlastní frekvence ω_2 počítáme znovu stejným způsobem. Chyba je pro jistotu zaokrouhlena nahoru, vychází asi 0.009 s. Naměřené hodnoty jsou k nahlédnutí v tabulce 2:

$$T_{2(A)} = (1.86 \pm 0.01)\ s$$
$$T_{2(B)} = (1.82 \pm 0.01)\ s$$

$$\omega_{2(A)} = (3.37 \pm 0.02)\ s^{-1}$$
$$\omega_{2(B)} = (3.45 \pm 0.02)\ s^{-1}$$

$y_1 = 0; y_2 = B$, frekvence ω_3 a ω_4, perioda T_3 a T_4

počáteční podmínky $\quad y_1 = (0 \pm 0.3)\ cm \quad \varphi_1 \doteq 0\ rad$
$\quad y_2 = (2.0 \pm 0.3)\ cm \quad \varphi_2 \doteq 0.02\ rad$

	pružina A	pružina B
č. měření	$10T_3$ $[s]$	$10T_3$ $[s]$
1	19.26	18.70
2	19.16	18.83
3	19.06	18.65
4	19.10	18.90
5	19.06	18.89
6	19.15	18.88
$\overline{10T}$ $[s]$	19.13	18.80

	pružina A	pružina B
č. měření	$T_4/4$ $[s]$	$T_4/4$ $[s]$
1	84	31
2	86	28
3	87	32
4	92	31
$\overline{T/4}$ $[s]$	87	30

Tabulka 3: Tabulky naměřených časů $10T_3$ a $T_4/4$ pro spočtení odpovídajících frekvencí a jejich průměr při vazbě pružinkami A a B.

Konečně stejným způsobem spočítáme i periodu T_3, T_4 a odpovídající frekvence. Vzhledem k problémům při určení přesného momentu, kdy se kyvadlo přestane ideálně zcela kývat, zatímco druhé se právě kývá s maximální amplitudou, byla chyba $T_4/4$ nadhodnocena a odhadnuta na 1 s, odpovídají tomu i zaznamenané naměřené hodnoty v tabulce 3. Tomu se přizpůsobuje i výpočet T_4 jinak analogický (21):

$$T_{3(A)} = (1.91 \pm 0.01)\ s \qquad T_{4(A)} = (347 \pm 2)\ s$$
$$T_{3(B)} = (1.88 \pm 0.01)\ s \qquad T_{4(B)} = (121 \pm 2)\ s$$

$$\omega_{3(A)} = (3.28 \pm 0.02)\ s^{-1} \quad \omega_{4(A)} = (18.1 \pm 0.1)\ \text{x}10^{-3}\ s^{-1}$$
$$\omega_{3(B)} = (3.34 \pm 0.02)\ s^{-1} \quad \omega_{4(B)} = (51.9 \pm 0.8)\ \text{x}10^{-3}\ s^{-1}$$

Porovnání výsledných hodnot

Teoretické hodnoty v tabulce 4 byly spočteny skrze chyby naměřených hodnot jako maximální chyby. Velká chyba ω_4 je způsobena odečítáním dvou velice blízkých hodnot.

Pružina A			Pružina B		
frekvence	změřená hodnota	teoret. hodnota	frekvence	změřená hodnota	teoret. hodnota
ω_0 $[s^{-1}]$	3.33 ± 0.02		ω_0 $[s^{-1}]$	3.33 ± 0.02	
ω_1 $[s^{-1}]$	3.31 ± 0.02	3.33 ± 0.02	ω_1 $[s^{-1}]$	3.31 ± 0.02	3.33 ± 0.02
ω_2 $[s^{-1}]$	3.37 ± 0.02		ω_2 $[s^{-1}]$	3.45 ± 0.02	
ω_3 $[s^{-1}]$	3.28 ± 0.02	3.34 ± 0.02	ω_3 $[s^{-1}]$	3.34 ± 0.02	3.38 ± 0.02
ω_4 $[10^{-3}s^{-1}]$	18.1 ± 0.1	30 ± 20	ω_4 $[10^{-3}s^{-1}]$	51.9 ± 0.8	70 ± 20

Tabulka 4: Tabulky pro porovnání naměřených hodnot frekvencí ω a jejich teoretických hodnot podle vztahů (17) a (18), popř. podle předpokladu $\omega_0 = \omega_1$.

Stupeň vazby κ

Stupeň vazby je spočten pro obě pružiny podle (19), jeho chyba:

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\frac{\partial\kappa}{\partial\omega_1}\Delta\omega_1\right)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial\omega_2}\Delta\omega_2\right)^2} \tag{22}$$

Výsledky:

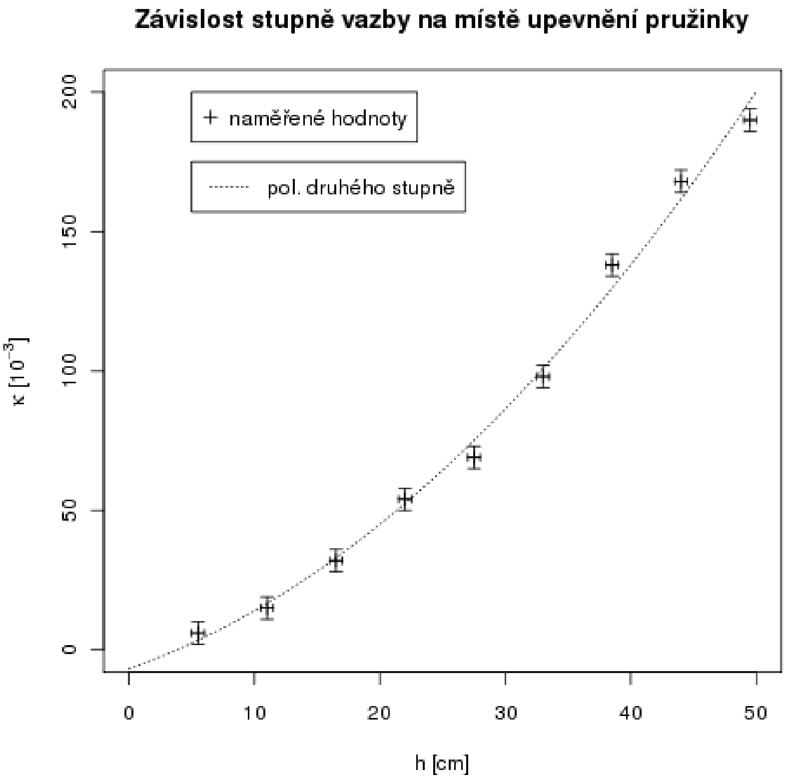
$$\kappa_{(A)} = (18 \pm 4)\ \mathrm{x}10^{-3}$$
$$\kappa_{(B)} = (41 \pm 4)\ \mathrm{x}10^{-3}$$

Závislost stupně vazby na vzdálenosti h pružiny od uložení závěsu kyvadel

Měření bylo provedeno pro silnější pružinu B. Výsledky uvádí tabulka 5. Veličiny byly počítány podle již používaných vztahů (20) a (19) s chybami podle (21) a (22). Graf je na obr. 1.

h $[cm]$	$10T_1$ $[s]$			T_1 $[s]$	ω_1 $[s^{-1}]$	$10T_2$ $[s]$			T_2 $[s]$	ω_2 $[s^{-1}]$	κ $[10^{-3}]$
5.5	18.82	18.88	19.02	1.89	3.33	18.74	18.84	18.82	1.88	(3.34 ± 0.02)	(6 ± 4)
11.0	18.86	18.87	18.94	1.89	3.33	18.66	18.55	18.63	1.86	(3.38 ± 0.02)	(15 ± 4)
16.5	18.92	18.88	18.90	1.89	3.33	18.26	18.32	18.32	1.83	(3.43 ± 0.02)	(32 ± 4)
22.0	18.84	18.85	18.82	1.88	3.34	17.84	17.84	17.87	1.79	(3.52 ± 0.02)	(54 ± 4)
27.5	18.86	18.80	18.85	1.88	3.34	17.53	17.58	17.61	1.76	(3.58 ± 0.02)	(69 ± 4)
33.0	18.78	18.80	18.83	1.88	3.34	17.05	17.06	17.02	1.70	(3.69 ± 0.02)	(98 ± 4)
38.5	18.85	18.90	18.87	1.89	3.33	16.41	16.41	16.45	1.64	(3.83 ± 0.02)	(138 ± 4)
44.0	18.88	18.80	18.83	1.88	3.34	15.88	15.92	15.87	1.59	(3.95 ± 0.02)	(168 ± 4)
49.5	18.87	18.92	18.83	1.89	3.33	15.58	15.57	15.54	1.56	(4.03 ± 0.03)	(190 ± 4)

Tabulka 5: Souhrn naměřených hodnot, T_1 a T_2, odpovídajících frekvencí a stupně vazby v závislosti na vzdálenosti upevnění pružinky od uložení závěsů kyvadel. Chyba zůstává pro všechna měření stejná u hodnot, u kterých není uvedena: $\Delta h = 0.5$ cm; $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 0.01$ s; $\Delta\omega_1 = 0.02$ s^{-1}.



Obr. 1: Graf závislosti stupně vazby κ na vzdálenosti h umístění pružiny B od uložení závěsů kyvadel, naměřené hodnoty jsou proloženy křivkou polynomu druhého stupně, kv. funkcí.

3 Diskuse výsledků

Z tabulky 1 a výsledných ω_0 je patrno, že byla v rámci chyby splněna zásadní podmínka, aby se obě kyvadla kývala se stejnou vlastní frekvencí.

Naměřená frekvence ω_3 pro silnější pružinu B odpovídá teoretické v krajních bodech chybového intervalu, jak je vidět z tabulky 4. Pro slabší pružinu A leží teoretická hodnota v intervalu tří std. odchylek naměřené hodnoty, nicméně ta principielně odporuje předpokladu $\omega_1 < \omega_3 < \omega_0$. Tyto nesrovnalosti mohou být způsobeny např. již zmíněným problémem přesného určení počáteční výchylky kyvadla y. Kyvadla se kývají kolem rovnovážné polohy umístěné jinde na stupnici než je očekáváno (tj. kolem 0 cm), lehce vychýlené na tu či onu stranu (jedno z kyvadel se pohybovalo spíše kolem 1 cm). Pak vznikají další nejistoty při nastavování počátečních podmínek spojené se špatným úhlem náhledu na stupnici a její viditelností. Pokoušel jsem se o lepší nastavení pomocí předmětů s pravými úhly (nakonec nejvhodnější byly tvrdé desky na papíry). Větší nepřesnosti byly vcelku rychle identifikovatelné. Např. při zjišťování periody T_1 bylo občas už po pěti kyvech viditelně patrné, že se kyvadla pohybují naprosto asynchroně a měření bylo nutné přenastavit a opakovat. Čím více kmitů měříme, tím je rozdíl naměřené hodnoty od očekávané větší. Mohlo by proto pomoci zkoumat menší počet kmitů než deset, což by ale na druhou stranu zvětšilo chybu měření.

Odchylky od teorie mohlo zapříčinit i samotné realizování vazby mezi kyvadly. Jde o to, do jaké míry je splněn předpokládaný vztah (1). Pružinky jsou připevněny k ramenům kyvadel volně na háčcích. K nesrovnalostem dochází již v momentu, kdy je pružinka kratší/delší než vzdálenost mezi kyvadly, ta tak na sebe působí silou odpovídající prodloužení/zkrácení pružiny i v klidu a vychylují se (to však pozorováno nebylo). Naopak při měření frekvence ω_2 ($y_1 = -y_2 = B$) během pohybu kyvadel směrem k sobě se v jisté chvíli pružina prověsí a zdánlivě neklade z teorie předpokládaný odpor. K dalšímu prohýbání pružiny je sice síla zapotřebí, ta ale nejspíše nesplňuje (1), neboť již nedochází k deformaci pružiny v přímém směru. Toto bylo zjevné hlavně u slabší pružinky A, proto byla k měření závislosti κ na h vybrána druhá.

Naměřené frekvence ω_4 odpovídají v rámci chyby teoretickým, jejichž nepřesnost je však vzhledem k rozdílu dvou blízkých hodnot obrovská. Nelze proto mluvit o přesvědčivém ověření vztahu (18). Řádově ale vyhovuje.

Závislost stupně vazby κ na vzdálenosti uchycení pružinky h od uložení závěsů v grafu na obr. 1 a shrnuta v tabulce 5 byla proložena kvadratickou funkcí, neboť ta odpovídá naměřeným hodnotám lépe než závislost lineární. Bylo tak provedeno a graf byl vytvořen pomocí programu *R 2.10.1*.

4 Závěr

Byly naměřeny periody T_0, T_1, T_2, T_3 a T_4 a odpovídající frekvence ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 a ω_4 kmitů vázaných kyvadel pro dvě různé vazby realizované pružinkami A a B. Výsledky jsou uvedeny v příslušných statích, měření popisují tabulky 1-3. Frekvence a jejich porovnání s teoretickými hodnotami uvádí tabulka 4.

Spočten byl stupeň vazby κ pro obě pružiny ve vzdálenosti $h = (19.0 \pm 0.5)$ cm od závěsů:

$$\kappa_{(A)} = (18 \pm 4) \text{ x}10^{-3}$$
$$\kappa_{(B)} = (41 \pm 4) \text{ x}10^{-3}$$

Zkoumanou závislost stupně vazby na vzdálenosti upevnění pružinky od uložení závěsů ilustrují tabulka 5 a graf na obr. 1.

5 Literatura

Použitá literatura

[1] J. Brož a kol.: Základy fyzikálních měření I, SPN, Praha 1983

[2] Studijní text, VII Studium kmitů vázaných oscilátorů , http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/