Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I.

Úloha č. VII

Název: Studium kmitů vázaných oscilátorů

Pracoval: Pavel Ševeček stud. skup.: F/F1X/11 dne: 27. 2. 2012

Odevzdal dne:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 – 5	
Teoretická část	0 – 1	
Výsledky měření	0 – 8	
Diskuse výsledků	0 – 4	
Závěr	0 – 1	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval:.. dne ....

1 Pracovní úkol

1. Změřte dobu kmitu T_0 dvou stejných nevázaných fyzických kyvadel.
2. Změřte doby kmitů T_i dvou stejných fyzických kyvadel vázaných slabou pružnou vazbou vypouštěných z klidu při počátečních podmínkách:
   (a) $y_1 = y_2 = B$ ... doba kmitu T_1
   (b) $y_1 = -y_2 = B$ ... doba kmitu T_2
   (c) $y_1 = 0, y_2 = B$
      i. doba kmitu T_3
      ii. doba $\frac{T_4}{4}$, za kterou dojde k maximální výměně energie mezi kyvadly
3. Vypočtěte kruhové frekvence $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ a ω_4 odpovídající dobám T_0, T_1, T_2, T_3 a T_4, ověřte měřením platnost vztahů odvozených pro ω_3 a ω_4.
4. Vypočtěte stupeň vazby κ.
5. Pro jednu pružinu změřte závislost stupně vazby na vzdálenosti zavěšení pružiny od uložení závěsu kyvadla a graficky znázorněte.

2 Teorie

Uvažujme dvě fyzická kyvadla vázaná slabou pružnou vazbou. Každé z kyvadel má moment setrvačnosti I a direkční moment D, jejich vlastní úhlová rychlost je potom

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}} \tag{1}$$

Vlivem pružiny je rovnovážná poloha obou kyvadel vychýlena z vertikálního směru o úhel α. Moment sil, kterými působí pružina na kyvadlo, je tedy

$$M_0 = D \cdot \sin\alpha \doteq D \cdot \alpha \tag{2}$$

Při daných výchylkách je aproximace v rovnici (2) splněna s přesností mnohem vyšší, než je přesnost měření samotné výchylky[1].

Při vychýlení o úhel φ_1 působí na kyvadlo 1 výsledný moment:

$$M_1 = -D(\varphi_1 + \alpha) + M_0 + \tilde{D}(\varphi_2 - \varphi_1) = -D\varphi_1 - \tilde{D}(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{3}$$

kde $\tilde{D}$ je direkční moment pružiny. Pro druhé kyvadlo dostáváme analogickou rovnici

$$M_2 = -D(\varphi_2 - \alpha) - M_0 - \tilde{D}(\varphi_2 - \varphi_1) = -D\varphi_2 + \tilde{D}(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{4}$$

Dosazením do pohybové rovnice ve tvaru $I\ddot{\varphi} = M$ dostáváme:

$$I\ddot{\varphi}_1 = -D\varphi_1 - \tilde{D}(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{5}$$

$$I\ddot{\varphi}_2 = -D\varphi_2 + \tilde{D}(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{6}$$

Zavedením substituce $\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ a $\psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ přejdou pohybové rovnice na tvar:

$$I\ddot{\psi}_1 = -D\psi_1 \tag{7}$$

$$I\ddot{\psi}_2 = -(D + 2\tilde{D})\psi_2 \tag{8}$$

jejichž obecným řešením je

$$\psi_1 = a_1 \cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t \tag{9}$$

$$\psi_2 = a_2 \cos\omega_2 t + b_2 \sin\omega_2 t \tag{10}$$

kde $\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{I}}$ a $\omega_2 = \sqrt{\frac{D+2\tilde{D}}{I}}$, a_1, a_2, b_1, b_2 jsou integrační konstanty. Při dosazení za φ_1, φ_2 dostaneme:

$$\varphi_1 = a_1 \cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t + a_2 \cos\omega_2 t + b_2 \sin\omega_2 t \tag{11}$$

$$\varphi_2 = a_1 \cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t - a_2 \cos\omega_2 t - b_2 \sin\omega_2 t \tag{12}$$

Nyní rozlišíme tři různé případy počátečních podmínek.

1. $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = A$

   Z rovnic (11) a (12) plyne: $a_2 = A$, $a_1 = b_1 = b_2 = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = A\cos\omega_1 t$

   Kyvadla se tedy pohybují se stejnou frekvencí, jako bez pružné vazby.

2. $\varphi(0) = -\varphi(0) = A$

   Z rovnic (11) a (12) plyne: $a_2 = A, a_1 = b_1 = b_2 = 0$, $\varphi_1 = -\varphi_2 = A\cos\omega_2 t$

   Obě kyvadla kmitají se stejnou frekvencí ω_2, ale fázovým posunem π.

[1] Hodnota α se liší od $\sin\alpha$ až na pátém desetinném místě.

3. $\varphi_1(0) = 0, \varphi_2(0) = A$

   Z rovnic (11) a (12) plyne: $a_1 = -a_2 = \frac{A}{2}, b_1 = b_2 = 0$

$$\varphi_1 = \frac{A}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) = A\sin\left(\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t\right)\sin\left(\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t\right) \tag{13}$$

$$\varphi_2 = \frac{A}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = A\cos\left(\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t\right)\cos\left(\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t\right) \tag{14}$$

   Pokud je vazba slabá, tj. ω_2 se příliš neliší od ω_1, lze rovnice (13) a (14) interpretovat tak, že obě kyvadla kmitají se stejnou frekvencí

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) \tag{15}$$

   a amplitudy kmitání se periodicky mění s frekvencí

$$\omega_4 = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \tag{16}$$

   Známe-li frekvence ω_3, ω_4, můžeme dopočítat ω_1, ω_2 podle

$$\omega_1 = \omega_3 - \omega_4 \tag{17}$$

$$\omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \tag{18}$$

Stupeň vazby κ je definován jako:

$$\kappa = \frac{\tilde{D}}{D + \tilde{D}} \tag{19}$$

Porovnáním se zavedením frekvencí ω_1, ω_2 dostaneme:

$$\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \tag{20}$$

3 Měření

3.1 Kalibrace

Nejprve je nutné se přesvědčit, že obě kyvadla se pohybují se stejnou frekvencí ω_0. Pokud by se jejich frekvence lišily, je možné mírně upravit moment setrvačnosti šroubem v dolní části kyvadla. Změřil jsem 20 period obou kyvadel, dostal jsem:

$$20T_0 = 37,98 \text{ s} \quad \text{pro kyvadlo 1}$$
$$20T_0 = 38,06 \text{ s} \quad \text{pro kyvadlo 2}$$

Uvážím-li chybu měření způsobenou reakční dobou $\Delta t = 0,2$ s, spočtu chybu periody ΔT podle vztahu

$$\Delta T = \frac{1}{20} \cdot \frac{\Delta t}{\sqrt{n}} \tag{21}$$

kde n je počet měření, v mém případě $n = 3$.

Mohu tedy říct, že obě kyvadla mají stejnou periodu (1.90 ± 0.01) s.

3.2 Měření kmitů vázaných kyvadel

K dispozici máme dvě různé pružiny, označím je A a B. Pro obě pružiny budeme měřit periody kmitání při různých počátečních podmínkách, jak je popsáno v teorii. Kyvadla vychýlím o $A = (3,0 \pm 0,2)$ cm a změřím dvacet period (resp. čtvrtinu periody v případě ω_4).

Naměřil jsem tyto hodnoty:

Poč. podmínka	Veličina	1	2	3	Průměr	T [s]	ω [s^{-1}]	Teorie
$\varphi_1 = \varphi_2 = A$	$20T_1$	37,97	38,18	38,11	38,09	$1,90 \pm 0,01$	$3,30 \pm 0,01$	
$\varphi_1 = -\varphi_2 = A$	$20T_2$	35,75	35,86	35,86	35,82	$1,79 \pm 0,01$	$3,51 \pm 0,01$	
$\varphi_1 = A, \varphi_2 = 0$	$20T_3$	36,83	36,68	36,76	36,76	$1,84 \pm 0,01$	$3,42 \pm 0,01$	$3,40 \pm 0,01$
	$\frac{T_4}{4}$	14,42	14,03	14,12	14,19	$56,76 \pm 0,46$	$0,111 \pm 0,001$	$0,113 \pm 0,012$

Tabulka 1: Naměřené a odvozené veličiny u pružiny A.

Poč. podmínka	Veličina	1	2	3	Průměr	T [s]	ω [s^{-1}]	Teorie
$\varphi_1 = \varphi_2 = A$	$20T_1$	38,11	38,21	38,17	38,16	$1,91 \pm 0,01$	$3,29 \pm 0,01$	
$\varphi_1 = -\varphi_2 = A$	$20T_2$	37,13	37,10	37,07	37,10	$1,86 \pm 0,01$	$3,39 \pm 0,01$	
$\varphi_1 = A, \varphi_2 = 0$	$20T_3$	36,74	36,73	36,61	36,69	$1,83 \pm 0,01$	$3,42 \pm 0,01$	$3,34 \pm 0,01$
	$\frac{T_4}{4}$	29,77	30,54	30,20	30,17	$120,68 \pm 0,46$	$0,052 \pm 0,000$	$0,047 \pm 0,012$

Tabulka 2: Naměřené a odvozené veličiny u pružiny B.

V tabulce 1, resp. 2, jsou shrnuty nameřené i odvozené veličiny. V tabulce je uvedeno:

- *Poč. podmínka* specifikuje počáteční podmínky daného měření tak, jak je uvedeno v teorii.
- *Veličina* udává, co konkrétně měřím.
- *1,2,3,Průměr* jsou jednotlivé výsledky měření veličiny a jejich aritmetický průměr.
- *Teorie* udává vypočítané hodnoty ω_3, resp. ω_4 podle vztahů (15), resp. (16).

Všechny časy jsou měřeny s přesností $\Delta t = 0,2$ s. Chyba ω je odvozena podle relativní chyby T, chyba u teoretické hodnoty ω_3, resp. ω_4, je dána součtem chyb u ω_1, resp. ω_2.

Stupeň vazby určíme dle vztahu (20). Vzdálenost pružiny od závěsu d byla $27,0 \pm 0,2$ cm, dostáváme:

$$\kappa = 0,066 \pm 0,003 \text{ pro pružinu } A$$
$$\kappa = 0,028 \pm 0,003 \text{ pro pružinu } B$$

Chybu stupně vazby určíme zákonem přenosu chyb, dostáváme:

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\frac{\partial\kappa}{\partial\omega_1}\Delta\omega_1\right)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial\omega_2}\Delta\omega_2\right)^2} \tag{22}$$

Dosazením vztahu (20) a derivováním dostáváme vztah:

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\frac{4\omega_1\omega_2^2}{(\omega_2^2+\omega_1^2)^2}\Delta\omega_1\right)^2 + \left(\frac{4\omega_2\omega_1^2}{(\omega_2^2+\omega_1^2)^2}\Delta\omega_2\right)^2} \tag{23}$$

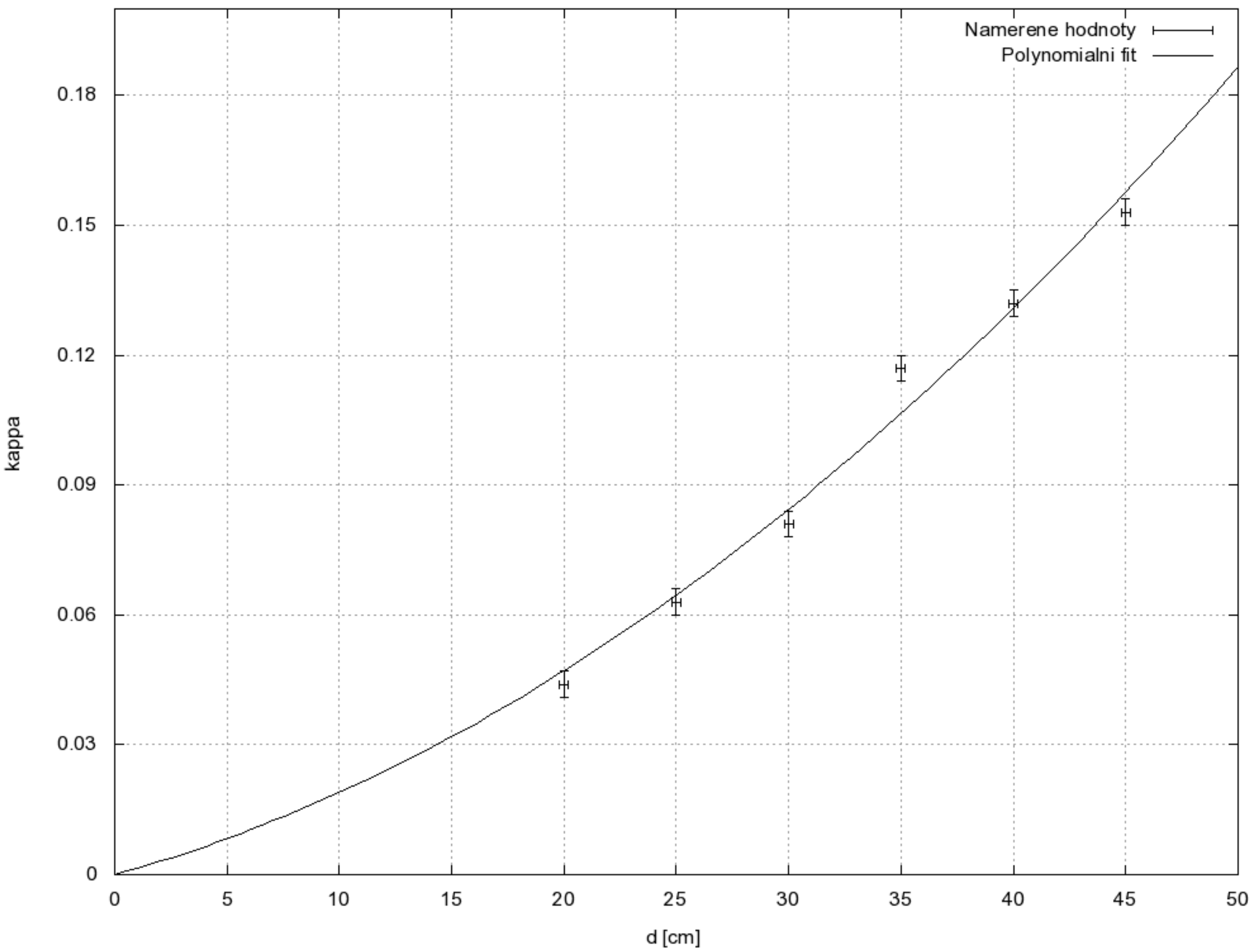
3.3 Závislost $\kappa = \kappa(d)$

Dále je třeba určit závislost κ na d. K měření jsem si vybral pružinu A. Provedl jsem celkem 12 měření, vždy dvakrát pro každou vzdálenost d. Nastavil jsem počáteční podmínky $\varphi(0) = A, \varphi(0) = 0$ a změřil jsem 20 period kyvadla ($20T_3$) a dobu, za kterou se přenese energie z jednoho kyvadla na druhé ($\frac{T_4}{4}$). Z těchto hodnot jsem spočetl ω_3, resp. ω_4, pomocí nich jsem dopočetl ω_1 vztahem (17) a ω_2 vztahem (18). Nakonec jsem vyjádřil κ podle vztahu (20).

Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce.

Č.m.	d [cm]	$20T_3$ [s]	$\frac{T_4}{4}$ [s]	ω_3 [s^{-1}]	ω_4 [s^{-1}]	ω_1 [s^{-1}]	ω_2 [s^{-1}]	κ
1	20	37,27	21,37	$3,37 \pm 0,01$	$0,074 \pm 0,000$	$3,30 \pm 0,01$	$3,45 \pm 0,01$	$0,044 \pm 0,003$
2	20	37,29	21,42	$3,37 \pm 0,01$	$0,073 \pm 0,000$	$3,30 \pm 0,01$	$3,44 \pm 0,01$	$0,044 \pm 0,003$
3	25	36,95	14,61	$3,40 \pm 0,01$	$0,108 \pm 0,001$	$3,29 \pm 0,01$	$3,51 \pm 0,01$	$0,063 \pm 0,003$
4	25	36,97	14,70	$3,40 \pm 0,01$	$0,107 \pm 0,001$	$3,29 \pm 0,01$	$3,51 \pm 0,01$	$0,063 \pm 0,003$
5	30	36,50	11,26	$3,44 \pm 0,01$	$0,140 \pm 0,001$	$3,30 \pm 0,01$	$3,58 \pm 0,01$	$0,081 \pm 0,003$
6	30	36,50	11,23	$3,44 \pm 0,01$	$0,140 \pm 0,001$	$3,30 \pm 0,01$	$3,58 \pm 0,01$	$0,081 \pm 0,003$
7	35	35,92	7,67	$3,50 \pm 0,01$	$0,205 \pm 0,003$	$3,29 \pm 0,01$	$3,70 \pm 0,01$	$0,117 \pm 0,003$
8	35	35,95	7,86	$3,50 \pm 0,01$	$0,200 \pm 0,003$	$3,30 \pm 0,01$	$3,70 \pm 0,01$	$0,114 \pm 0,003$
9	40	35,59	6,72	$3,53 \pm 0,01$	$0,234 \pm 0,003$	$3,30 \pm 0,01$	$3,76 \pm 0,01$	$0,132 \pm 0,003$
10	40	35,57	7,04	$3,53 \pm 0,01$	$0,223 \pm 0,003$	$3,31 \pm 0,01$	$3,76 \pm 0,01$	$0,126 \pm 0,003$
11	45	35,00	5,69	$3,59 \pm 0,01$	$0,276 \pm 0,005$	$3,31 \pm 0,02$	$3,87 \pm 0,02$	$0,153 \pm 0,003$
12	45	35,08	5,87	$3,58 \pm 0,01$	$0,268 \pm 0,005$	$3,31 \pm 0,01$	$3,85 \pm 0,01$	$0,149 \pm 0,003$

Tabulka 3: Výsledky měření závislosti stupně vazby κ na vzdálenosti pružiny od uložení závěsu d. Chyba měření vzdálenosti je $\Delta d = 0,2$ cm, chyba měření času je jako výše $\Delta t = 0,2$ s. Celková chyba u κ je spočtena pomocí vztahu (23).



Obrázek 1: Graf závislosti stupně vazby κ na vzdálenosti d. Naměřené hodnoty jsou proloženy polynomem $f(x) = ax^2 + bx$.

4 Diskuze

Měření úhlové rychlost ω_1 (s počátečními podmínkami $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = A$) se v rámci chyby $\Delta t = 0,2s$ shoduje s teorií, totiž že $\omega_1 = \omega_0$. V tomto případě, kdy se amplituda kmitání nemění, je však chyba měření nadhodnocená; směrodatná odchylka veličiny $20T_1$ u pružiny A je pouze $\sigma_{T_A} = 0,09$ s (tedy méně než polovina stanovené chyby) a u pružiny B dokonce pouze $\sigma_{T_B} = 0,05$ s. Vidíme tedy, že u obou pružin jsou časy $20T_1$ vyšší než naměřené časy $20T_0$. Chyba není velká, nicméně určitě je přítomna. Pravděpodobně hraje roli počáteční vychýlení kyvadel z vertikálního směru. Nepřesnost může vzniknout i při meření počáteční výchylky $A = 3,0$ cm - stupnice není v bezprostřední blízkosti kyvadel a proto pozorované vychýlení závisí na úhlu náhledu. Snažil jsem se o směr náhledu co možná nejbližší kolmici, avšak nebyla žádná možnost kontroly.

Výsledky měření úhlových rychlostí ω_3 a ω_4 se v rámci chyby shodují s teorií (tedy se vztahy (15), resp. (16)) pouze u pružiny A. Vidíme, že u pružiny B se naměřená hodnota ω_3 liší od teoretické hodnoty o 0,08 s^{-1}, což je značně více než je chyba měření. Příčin může být několik. Jistě hrála roli již zmíněná nepřesnost měření počáteční výchylky, chyba však může nastat i v samotné pružné vazbě. Pružina B byla relativně dlouhá ve srovnání se vzdáleností kyvadel a při přiblížení kyvadel k sobě docházelo k prověšení pružiny. V takové situaci zřejmě neplatí vztah (3), resp. (4), a výsledek se tedy bude lišit od teoretické hodnoty.

Meření stupně vazby κ jsem provedl pro šest různých vzdáleností pružiny od závěsu kyvadla d. Hodnoty jsem vynesl do grafu a proložil je kvadratickou funkcí tvaru[2] $f(x) = ax^2 + bx$. Lze vidět poměrně dobrá shoda kromě hodnoty $d = 35$ cm, která z kvadratické závislosti mírně vybočuje. Nepřesnost je pravděpodobně způsobena chybným změřením vzdálenosti d nebo některou z výše uvedených chyb.

5 Závěr

Byly změřeny doby T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 a z nich spočteny úhlové frekvence $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, výsledky jsou uvedeny v tabulkách 1 a 2. Teoretická hodnota ω_3 a ω_4 byla ověřena pro obě pružiny, u pružiny B s relativní chybou okolo 2 %. Byl spočítán stupeň vazby κ pro vzdálenost $d = 27,0 \pm 0,2$ cm pro obě pružiny.

$$\kappa = 0,066 \pm 0,003 \text{ pro pružinu } A$$
$$\kappa = 0,028 \pm 0,003 \text{ pro pružinu } B$$

Dále byla naměřena závislost stupně vazby κ na vzdálenosti pružiny od závěsu kyvadla d, výsledky jsou uvedeny v tabulce 3 a grafu 1. Ukázalo se, že závislost dobře odpovídá kvadratické funkci.

Reference

[1] Studijní text k fyzikálnímu praktiku I, úloha VII
http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt_107.pdf

[2] Englich, J. *Úvod do praktické fyziky I.* Praha: Matfyzpress, 2006.
http://www.mff.cuni.cz/fakulta/mfp/download/books/englich_-_uvod_do_prakticke_fyziky_1.pdf

[2]Do funkce jsem nezahrnul konstantní člen c, protože $\kappa = 0$ pro $d = 0$ cm, musí proto být $f(x) = 0$ pro $x = 0$.