1 Pracovní úkoly

1. Změřte dobu kmitu T_0 dvou stejných nevázaných fyzických kyvadel.
2. Změřte doby kmitů T_i dvou stejných fyzických kyvadel vázaných slabou pružnou vazbou vypouštěných z klidu při počátečních podmínkách
   a. $y_1 = y_2 = B \cdots$ doba kmitu T_1
   b. $y_1 = -y_2 = B \cdots$ doba kmitu T_2
   c. $y_1 = 0, y_2 = B$
      a. doba kmitu T_3
      b. doba $T_4/4$, za kterou dojde k maximální výměně energie mezi kyvadly
3. Vypočtěte kruhové frekvence $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ a ω_4 odpovídající dobám T_0, T_1, T_2, T_3 a T_4, ověřte měřením platnost vztahů odvozených pro 3 a 4.
4. Vypočtěte stupeň vazby.
5. Pro jednu pružinu změřte závislost stupně vazby na vzdálenosti zavěšení pružiny od uložení závěsu kyvadla a graficky znázorněte.

2 Teoretický úvod

Pro jednoduché fyzické kyvadlo, které kmitá s malou úhlovou výchylkou, můžeme použít pro úhlovou frekvenci kmitů kyvadla ω_0 vzorec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}}, \tag{1}$$

kde D je direkční moment kyvadla a I je jeho moment setrvačnosti.

Vztah mezi dobou kmitu T_i a úhlovou frekvencí kmitů ω_i je[1]

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}. \tag{2}$$

Pokud dvě stejná fyzická kyvadla svážeme slabou pružnou vazbou, pak budou moci být jejich výchylky popsány rovnicemi

$$y_1 = a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \cos \omega_2 t, \tag{3}$$

$$y_1 = a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t - a_2 \cos \omega_2 t - b_2 \cos \omega_2 t, \tag{4}$$

kde a_1, a_2, b_1 a b_2 jsou konstanty a ω_1 a ω_2 jsou úhlové frekvence, pro které platí

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{I}}, \tag{5}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D_p}{I}}, \tag{6}$$

kde D_p je direkční moment pružiny.

a. Pro počáteční podmínku $y_1 = y_2 = B$ po dosazení do rovnic (3) a (4) pro časový průběh kmitů vychází

$$y_1 = y_2 = B \cos \omega_1 t, \tag{7}$$

takže se v tomto případě nebude vazba uplatňovat.

[1] Index i bereme od 0 do 4 podle zadání.

b. Stejným postupem jako v bodě a. pro jinou počáteční podmínku $y_1 = -y_2 = B$ dostáváme

$$y_1 = -y_2 = B \cos \omega_2 t. \tag{8}$$

c. Pokud máme počáteční podmínku $y_1 = 0$ a $y_2 = B$, pak dostáváme:

$$y_1 = B \sin \omega_3 t \sin \omega_4 t, \tag{9}$$

$$y_2 = B \cos \omega_3 t \cos \omega_4 t, \tag{10}$$

kde úhlové frekvence jsou

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tag{11}$$

$$\omega_4 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}. \tag{12}$$

Kde ω_3 je úhlová frekvence kmitů jednotlivých kyvadel a ω_4 odpovídá změnám amplitudy - odpovídá době, za kterou dojde ke dvěma přenosům kinetické energie z jednoho kyvadla na druhé a z druhého na první.

Stupeň vazby je definován jako

$$\kappa = \frac{D_p}{D + D_p}. \tag{13}$$

Stupeň vazby můžeme díky rovnicím (5) a (6) vyjádřit pomocí ω_1 a ω_2 a pak díky vzorci (2) i přímo z naměřených dob T_1 a T_2

$$\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2} \tag{14}$$

3 Měření

Chyby měření byly určeny pomocí vzorců pro přenos chyb - pro statistickou chybu veličiny f závislé na n jiných naměřených veličinách x_j platí

$$s_{f_1} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 s_{x_j}^2}. \tag{15}$$

Pro celkovou chybu veličiny f pak platí

$$s_f = \sqrt{s_{f_1}^2 + s_{f_2}^2}, \tag{16}$$

kde s_{f_2} je systematická chyba = chyba měřidla. Ve většině případů v tomto měření je ovšem statistická chyba prakticky zanedbatelná a převážnou část chyby tvoří chyba měřidla.

Počáteční výchylka B a tedy i maximální výchylka kyvadel, byla vždy $(4,0 \pm 0,1)$ cm.

Vzdálenost umístění pružiny od os otáčení kyvadel d je součtem vzdáleností x a x_0, kde x je vzdálenost mezi horním koncem pohyblivé zarážky, na které je umístěn háček a spodním koncem upevnění kyvadla a x_0 je vzdálenost mezi háčkem a osou otáčení pro nastavení $x = 0$cm. Chyby měření x a x_0 jsou $s_x = 0,1$ cm a $s_{x_0} = 0,1$ cm (byl použitý pásový metr). A pro d je tedy chyba určení $d = 0,14$ cm.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty doby kmitů jednotlivých nevázaných kyvadel

levé	pravé
20 T_0/s	20 T_0/s
38,44	38,50
38,55	38,56

Tabulka 2: Naměřené hodnoty vázaných kyvadel pro dvě pružiny

1. pružina	2. pružina		1. pruž	2. pruž		1. pruž	2. pruž	1. pruž	2. pruž
20 T_1/s	20 T_1/s		10 T_2/s	10 T_2/s		10 T_3/s	5 T_3/s	$\frac{3}{4}T_4$/s	T_4/s
38,18	38,40		18,47	17,79		18,85	9,22	94,28	51,36
38,16	38,29		18,39	17,85		18,76	9,27	95,52	52,21
38,09			18,44	17,67		18,79	9,23	97,53	52,26
38,19							9,11		
							9,22		

3.1 Měření doby kmitu jednotlivých kyvadel

Nejprve byla změřena doby kmitu obou nevázaných kyvadel. Naměřené hodnoty jsou v tabulce č. 1. Měření probíhalo s háčky pro pro pružinu nastavenými co nejvýše na kyvadlech. Pro měření ve všech případech byly použity stopky ovládané ručně, takže chyba určení času je určena zejména reakční dobou, která je zhruba $s_T = 0,2\,\mathrm{s}$.

Doba kmitu levého kyvadla je tedy

$$T_{0_L} = (1,925 \pm 0,010)\,\mathrm{s}$$

a pravého kyvadla

$$T_{0_P} = (1,927 \pm 0,010)\,\mathrm{s}.$$

Doby kmitů se shodují v rámci chyby a proto nebylo potřeba přenastavovat polohu čoček kyvadel. Odpovídající úhlové frekvence jsou

$$\omega_{0_L} = (3,264 \pm 0,018)\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\omega_{0_P} = (3,261 \pm 0,017)\,\mathrm{s}^{-1}$$

3.2 Měření doby kmitu vázaných kyvadel

Naměřené doby T_1, T_2, T_3 a T_4 pro dvě pružiny jsou v tabulce č. 2. Pro doby T_1, T_2, T_3 platí stejná chyba určení jako pro T_0 způsobená dobou lidských reflexů. Ovšem chyba určení T_4 je daleko vyšší, protože je potřeba odhadnout chvíli, kdy se kyvadlo přesně zastavilo, což není jednoduché, protože v průběhu několika vteřin má opravdu malou výchylku. Můj odhad pravděpodobné systematické chyby určení je $s_{t_4} = 1,5\,s$. Pružina byla nastavena ve výšce $x = (21,6 \pm 0,1)\,\mathrm{cm}$

Naměřené doby kmitu jsou zaznamenány v tabulce č. 3 a z nich vypočítané hodnoty úhlových frekvencí v tabulce č. 4.

Pokud vypočteme polovinu rozdílu a součtu ω_1 a ω_2 pro první pružinu

$$\frac{\omega_{2_1} + \omega_{1_1}}{2} = (3,35 \pm 0,04)\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\frac{\omega_{2_1} - \omega_{1_1}}{2} = (0,058 \pm 0,041)\,\mathrm{s}^{-1}$$

Tabulka 3: Naměřené doby kmitu

	1. pružina	2. pružina
T_1/s	$1,908 \pm 0,010$	$1,917 \pm 0,010$
T_2/s	$1,843 \pm 0,020$	$1,777 \pm 0,020$
T_3/s	$1,880 \pm 0,020$	$1,84 \pm 0,04$
T_4/s	128 ± 2	$51,9 \pm 1,5$

Tabulka 4: Vypočtené úhlové frekvence

	1. pružina	2. pružina
ω_1/s^{-1}	$3,294 \pm 0,018$	$3,277 \pm 0,018$
ω_2/s^{-1}	$3,41 \pm 0,04$	$3,536 \pm 0,04$
ω_3/s^{-1}	$3,34 \pm 0,04$	$3,411 \pm 0,07$
ω_4/s^{-1}	$0,0492 \pm 0,0008$	$0,121 \pm 0,003$

a pro druhou použitou pružinu

$$\frac{\omega_{2_2} + \omega_{1_2}}{2} = (3,41 \pm 0,04)\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\frac{\omega_{2_2} - \omega_{1_2}}{2} = (0,129 \pm 0,044)\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Pak zjistíme, že hodnoty první hodnoty velice dobře odpovídají naměřené ω_3 a druhé hodnoty odpovídají ω_4. S tím, že ovšem u rozdílů úhlových rychlostí je stejná chyba jako u součtů, čímž pádem je relativně velmi vysoká.

Koeficient vazby pro první pružinu vychází $\kappa_1 = 0,034 \pm 0,012$ a pro druhou $\kappa_2 = 0,76 \pm 0,013$.

3.3 Závislost koeficientu vazby na d

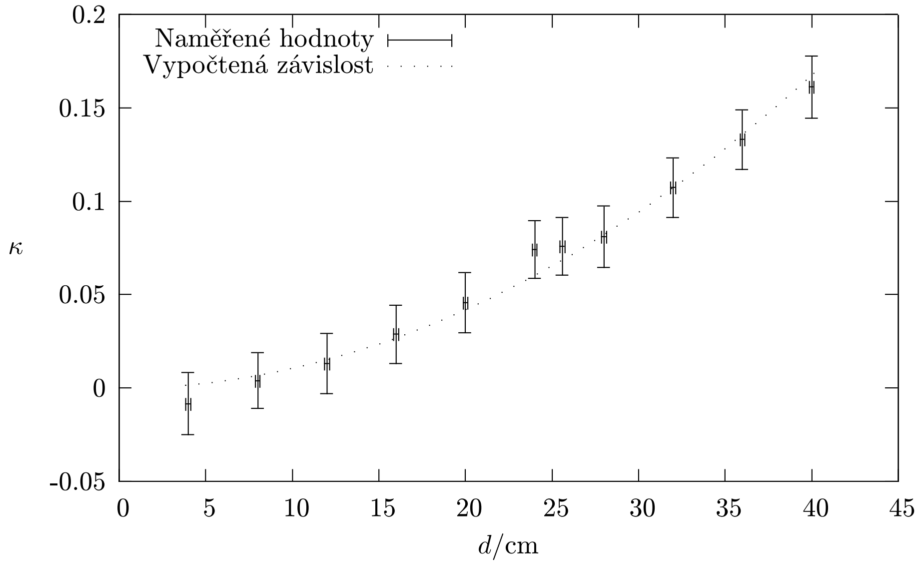
Pro měření, které sloužilo k určení závislosti vazby κ na umístění pružiny, byla použita druhá pružina z předchozího měření.

Chybu měření veličiny κ určíme jako

$$s_\kappa = \frac{4T_1T_2}{\left(T_1^2 + T_2^2\right)^2}\sqrt{T_2^2 s_{T_1}^2 + T_1^2 s_{T_2}^2}. \tag{17}$$

Tabulka 5: Naměřené hodnoty T_1 a T_2 pro různé polohy pružiny

x/cm		$10\ T_1/\mathrm{s}$	$10\ T_1/\mathrm{s}$	$10\ T_1/\mathrm{s}$		$10\ T_2/\mathrm{s}$	$10\ T_2/\mathrm{s}$	$10\ T_2/\mathrm{s}$
0,0		19,03	19,26	19,02		19,36	19,31	19,12
4,0		19,14	19,19	19,11		19,06	19,06	19,09
8,0		19,02	19,29	19,22		18,88	18,93	18,97
12,0		19,23	19,12	19,09		18,63	18,53	18,65
16,0		19,36	19,18	19,18		18,32	18,48	18,34
20,0		19,22	19,22	19,30		17,90	17,88	17,82
24,0		19,04	19,23	19,06		17,53	17,65	17,68
28,0		19,21	19,07	19,13		17,19	17,16	17,20
32,0		19,34	19,38	19,26		16,92	16,83	16,97
36,0		19,30	19,32	19,25		16,50	16,40	16,29



Obrázek 1: Graf závislosti κ na d

tato chyba je znázorněna v grafu na obrázku č. 1 pomocí chybových úseček. Z grafu je patrné, že se jedná o slabou kvadratickou závislost - tou jsou data proložena. Do grafu je přidána i bod vypočtený z předchozího úkolu.

4 Diskuse

Měření doby kmitu samotných nevázaných kyvadel potvrdilo, že obě dvě mají stejnou dobu kmitu v rámci chyby měření. Ovšem menší systematická chyba mohla vzniknout právě tím, že ve skutečnosti není doba kmitu úplně stejná.

Měření jednotlivých dob kmitu potvrdilo relativně dobře potvrdilo vztahy mezi ω_0, ω_1, ω_2 ω_3 a ω_4. Při ověřování rovnice (12) docházíme k velké relativní chybě pravé strany rovnice, což je způsobeno tím, že je ve výpočtu rozdíl dvou hodnot, které jsou podobně velké.

První hodnota v grafu závislosti κ je záporná, což ukazuje na to, že je v měření přítomna buď hrubá chyba, nebo systematická. Ovšem to, jak vypadá rozložení bodů, tak se bude jednat spíše o systematickou chybu. Není ovšem příliš vysoká - vzhledem k tomu, že chybové úsečka zasahují velkou částí i do kladné části i u prvního bodu.

Chyby mohly být způsobeny tím, že u každého kyvadla byly nastaveny háčky v trochu jiné vzdálenosti. Také kmity neprobíhaly vždy jen v ose, ve které bylo požadováno, ale mírně i v kolmé ose. Největší chyba byla ovšem způsobena tím, že doby kmitů byly měřeny stopkami ručně a ve většině případů záleželo na určení průchodu maximální výchylkou a u měření T_4 bylo zase kritické určit správně čas, kdy se kyvadlo zastavilo. Tuto chybu jsem se snažil eliminovat měřením více kmitů po sobě jdoucích.

Dalšími vlivy mohlo být tření v ose otáčení, odpor vzduchu a disipace energie v pružině. Ty mohly také mírně ovlivnit dobu kmitu.

Provedli jsme několik dalších zanedbání - zanedbali jsme to, že kyvadlo má nějakou maximální výchylku, možné další vlivy pružiny - například vliv jejích rozměrů.

5 Závěr

Doby kmitu nevázaných jednotlivých kyvadel

$$\text{levé } T_{0_L} = (1,925 \pm 0,010)\,\mathrm{s}$$
$$\text{pravé } T_{0_P} = (1,927 \pm 0,010)\,\mathrm{s}$$

Pro $x = (21,6 \pm 0,1)\,\mathrm{cm}$

	1. pružina	2. pružina
T_1/s	$1,908 \pm 0,010$	$1,917 \pm 0,010$
T_2/s	$1,843 \pm 0,020$	$1,777 \pm 0,020$
T_3/s	$1,880 \pm 0,020$	$1,84 \pm 0,04$
T_4/s	128 ± 2	$51,9 \pm 1,5$

	1. pružina	2. pružina
ω_1/s^{-1}	$3,294 \pm 0,018$	$3,277 \pm 0,018$
ω_2/s^{-1}	$3,41 \pm 0,04$	$3,536 \pm 0,04$
ω_3/s^{-1}	$3,34 \pm 0,04$	$3,411 \pm 0,07$
ω_4/s^{-1}	$0,0492 \pm 0,0008$	$0,121 \pm 0,003$

Koeficient vazby pro první pružinu $\kappa_1 = 0,034 \pm 0,012$ a pro druhou $\kappa_2 = 0,76 \pm 0,013$.

6 Literatura

[1] *J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch:* **Fyzikální a matematické tabulky**
SNTL, Praha 1980

[2] *Wikipedia contributors:* **Pendulum (mathematics) [online]**
Wikipedia, The Free Encyclopedia,
`http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pendulum_(mathematics)&oldid=344584072`
17 February 2010, 09:43 UTC, [accessed 28 March 2010]