Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum I

Úloha č. II

Název úlohy: Studium harmonických kmitů mechanického oscilátoru

Jméno: Ondřej Skácel

Obor: FOF

Datum měření: 2.3.2015

Datum odevzdání: ....

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 - 5	
Teoretická část	0 - 1	
Výsledky měření	0 - 8	
Diskuse výsledků	0 - 4	
Závěr	0 - 1	
Seznam použité literatury	0 - 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval:.................................. dne: ....

Pracovní úkoly

1) Změřte tuhost *k* pěti pružin metodou statickou.
2) Sestrojte graf závislosti prodloužení pružiny na působící síle $y = y(F)$
3) Změřte tuhost *k* pěti pružin metodou dynamickou.
4) Z doby kmitu tělesa známé hmotnosti a výchylky pružiny po zavěšení tohoto tělesa určete místní tíhové zrychlení *g*.
5) Sestrojte grafy závislostí:
   $$\omega = f\left(\sqrt{k}\right)$$
   $$\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$$
6) Při zpracování použijte lineární regresi.

Teoretická část

Pro lineární pružinu platí vztah**[1]**:

$$F = k\Delta y$$

kde *F* je síla potřebná k natažení pružiny o *Δy*. Konstanta *k* je charakteristická pružině a nazývá se tuhost pružiny. Pro statické protažení platí:

$$k = \frac{mg}{\Delta y}$$

kde *m* je hmotnost zavěšeného závaží a *g* je gravitační zrychlení. Při vychýlení z rovnovážné polohy začne závaží harmonicky kmitat s periodou *T.* Platí pro ni:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Úhlová frekvence kmitů *ω* je:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Z rovnic **(2)** a **(3)** získáme:

$$k = m\frac{4\pi^2}{T^2}$$

Kombinací rovnic **(2)** a **(5)** dostaneme vztah:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}\Delta y$$

Měření tuhosti pružiny provádíme :

a) metodou statickou
   Zavěsíme na pružinu závaží o hmotnosti m, katetometrem změříme prodloužení Δy a pro výpočet použijeme rovnici **(2)**.

b) metodou dynamickou
   Zavěsíme na pružinu závaží o hmotnosti m a rozkmitáme ho ve svislém směru. Sonarem změříme deset period jeho kmitů a pro výpočet použijeme vztah **(5)**.

Výsledky měření

Naměřené hodnoty
Vnější podmínky neměly vliv na výsledky měření.
Přesnost měření výchylky u_y je ±*1mm*. Přesnost měření periody u_T je ±*0,01s*.
Naměřené hodnoty pro jednotlivé pružiny:

1. pružina

m[g]	60	80	90	100	120	140	160	180	200	220	240	260
Δy[cm]	1,8	2,4	2,7	3,2	3,9	4,5	5,2	5,8	6,5	7,1	7,8	8,4
T[s]	0,28	0,32	0,35	0,36	0,40	0,43	0,45	0,49	0,51	0,53	0,56	0,58

2. pružina

m[g]	60	80	90	100	120	140	160	180	200	220	240	260
Δy[cm]	3,8	5,3	5,8	6,6	8,0	9,4	10,7	11,9	13,2	14,6	15,8	17,2
T[s]	0,40	0,46	0,49	0,52	0,56	0,61	0,65	0,68	0,72	0,76	0,79	0,82

3. pružina

m[g]	60	80	90	100	120	140	160	180	200	220	240
Δy[cm]	7,8	10,8	12,0	13,4	16,1	18,8	21,3	23,9	26,6	29,2	32,0
T[s]	0,58	0,67	0,70	0,74	0,81	0,88	0,93	0,99	1,04	1,09	1,13

4. pružina

m[g]	20	40	60	80	90	100	120
Δy[cm]	5,3	11,5	17,2	23,0	25,7	28,8	34,3
T[s]	0,51	0,70	0,85	0,98	1,03	1,08	1,19

5. pružina

m[g]	60	80	90	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280
Δy[cm]	0,8	1,1	1,4	1,5	2,0	2,6	3,1	3,9	4,5	5,1	5,7	6,3	7,1
T[s]	0,22	0,28	0,30	0,32	0,37	0,42	0,46	0,49	0,52	0,56	0,58	0,61	0,64

Protože 5. pružina vykazuje značnou nelinearitu pro *m<120g*, pro další zpracování byly použity pouze hodnoty naměřené se zatížením alespoň *120g*. Pro statickou metodu bylo jako referenční použito měření pro *m=100g*.
Tedy:

5. pružina(použitá data)

m-100[g]	20	40	60	80	100	120	140	160	180
Δy-1,5[cm]	0,5	1,1	1,6	2,4	3,0	3,6	4,3	4,8	5,6
m[g]	120	140	160	180	200	220	240	260	280
T[s]	0,37	0,42	0,46	0,49	0,52	0,56	0,58	0,61	0,64

<u>Způsob zpracování dat</u>

Pro statickou metodu byl odhad správné hodnoty *k* určen minimalizací výrazu**[2]**

$$\sum_i \frac{(\frac{m_i g}{k} - \Delta y_i)^2}{{\eta_{\Delta y_i}}^2}$$

Vzhledem k zanedbatelnosti statistických chyb lineární regrese vůči chybám způsobeným nepřesností měření jsou chyby určeny podle vzorce

$$u_k = g\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i (\frac{m_i}{{\Delta y_i}^2} u_y)^2}$$

Pro dynamickou metodu byla hodnota *k* odhadnuta minimalizací

$$\sum_i \frac{(2\pi\sqrt{\frac{m_i}{k}} - T_i)^2}{{\eta_{T_i}}^2}$$

Vzorec pro chyby je

$$u_k = 4\pi^2\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i (2\frac{m_i}{{T_i}^3} u_T)^2}$$

Při odhadování *g* se minimalizoval výraz

$$\sum_i \frac{(g\frac{{T_i}^2}{4\pi^2} - \Delta y_i)^2}{{\eta_{\Delta y_i}}^2}$$

Chyba je dána

$$u_g = 4\pi^2\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i (2\frac{\Delta y_i}{{T_i}^3} u_T)^2 + (\frac{u_y}{T_i})^2}$$

Výsledky

Všechny chyby jsou vztaženy na pravděpodobnost *1σ*.

Tuhosti pružin

pružina	k[N/m] statická	k[N/m] dynamická
1. pružina	30,39±0,94	30,2±1,5
2. pružina	14,84±0,21	15,10±0,54
3. pružina	7,365±0,053	7,29±0,18
4. pružina	3,426±0,034	3,336±0,086
5. pružina	32,1±2,8	28,4±1,3

Gravitační zrychlení

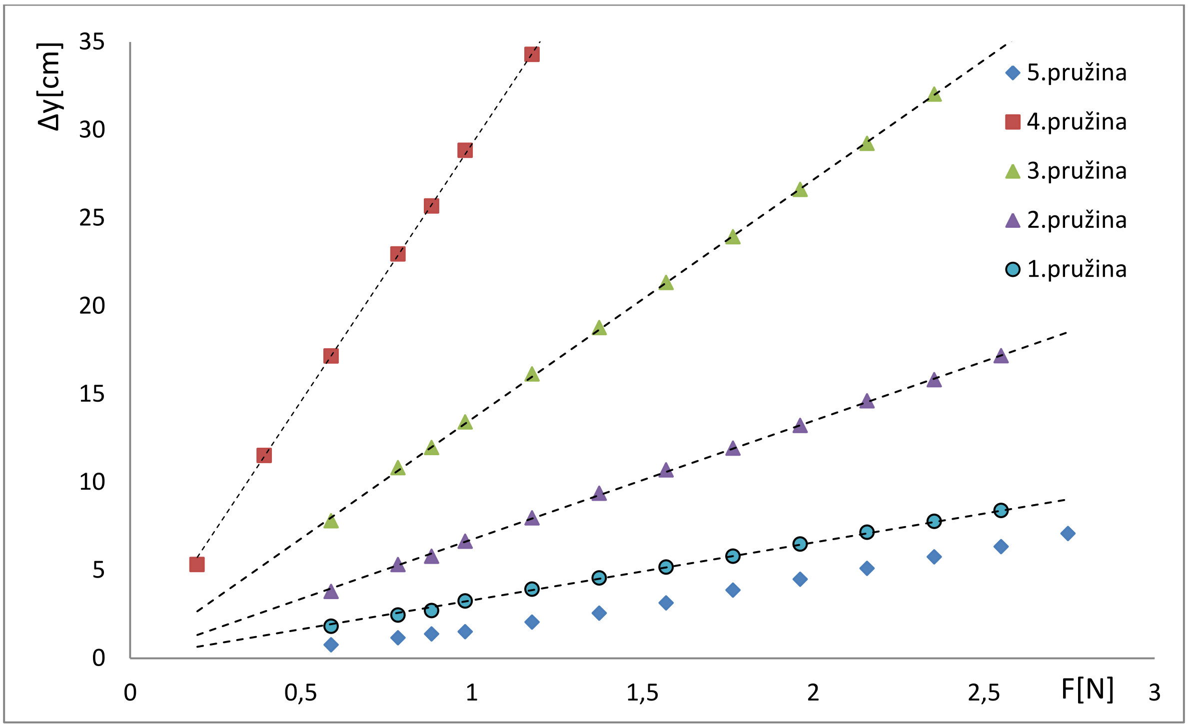
pružina	g[ms^{-2}]
1. pružina	9,79±0,55
2. pružina	10,02±0,38
3. pružina	9,76±0,26
4. pružina	9,59±0,25

Pro 5. pružinu není uveden výsledek, protože **(6)** platí pouze pro lineární pružiny a výsledek by byl zjevně nesmyslný(přibližně $6ms^{-2}$).

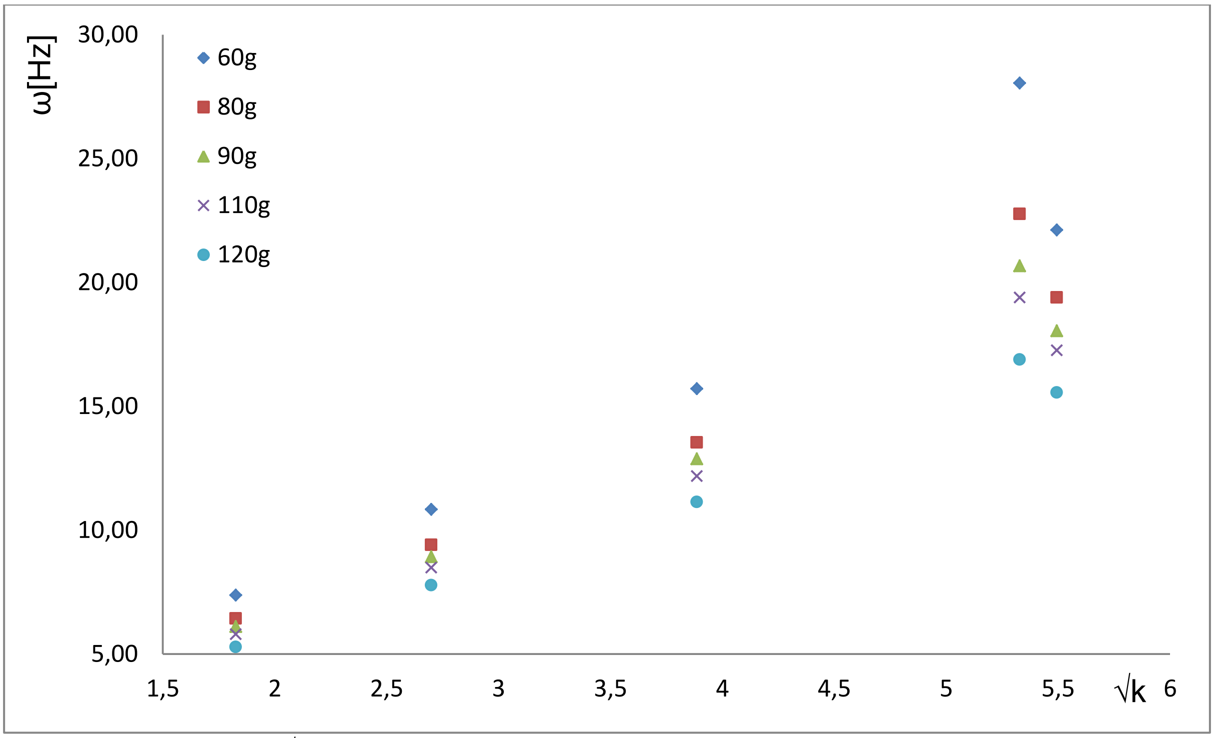
Dohromady dostáváme výsledek:

$$g = (9{,}69 \pm 0{,}38)ms^{-2}$$

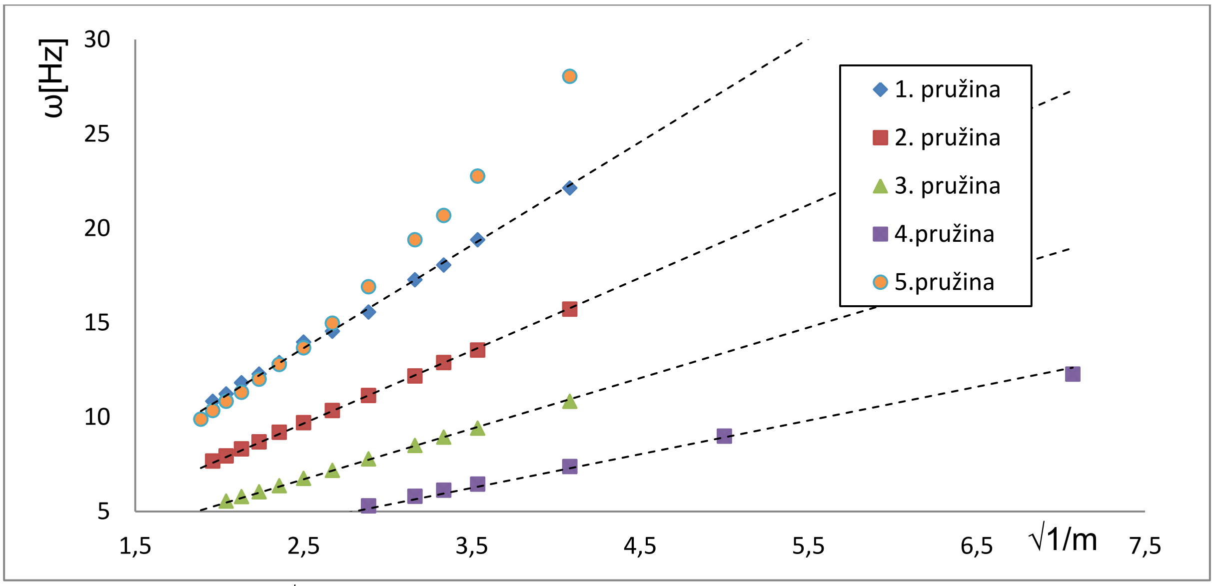
Grafy



Graf 1: závislost prodloužení pružiny na působící síle. *Δy(F)*



Graf 2: závislost *ω(√k)*



Graf 3: závislost *ω(√1/m)*

Diskuze výsledků

Tuhosti pružin změřené statickou respektive dynamickou metodou si navzájem odpovídají v rámci uvedených chyb. 5. pružina vykazuje značnou nelinearitu pro malá zatížení, která nelze vysvětlit ani její nezanedbatelnou hmotností(44g)**[3]**. To znemožnilo podle ní určit gravitační zrychlení.

Výsledná gravitační zrychlení všechna odpovídají v mezích odchylek teoretické hodnotě $9{,}81 ms^{-2}$.

Závislosti vynesené na grafu 1 jsou s vyjímkou 5. pružiny přibližně lineární, což souhlasí s teorií. Na grafu 2 není vidět teoretická lineární závislost, což je zčásti způsobeno 5. pružinou, která v daném oboru zatížení není lineární a také příliš velkým rozdílem mezi tuhostí jednotlivých pružin, který způsobil nemožnost změření výraznějšího počtu společných hodnot zatížení. Graf 3 opět s vyjímkou 5. pružiny viditelně vykazuje teoretickou lineární závislost.

Závěr

Výsledné tuhosti pružin

pružina	k[N/m] statická	k[N/m] dynamická
1. pružina	30,39±0,94	30,2±1,5
2. pružina	14,84±0,21	15,10±0,54
3. pružina	7,365±0,053	7,29±0,18
4. pružina	3,426±0,034	3,336±0,086
5. pružina	32,1±2,8	28,4±1,3

Naměřené gravitační zrychlení

$$g = (9{,}69 \pm 0{,}38) ms^{-2}$$

Závislosti *Δy(F), ω(√k) a ω(√1/m)* jsou všechny přibližně lineární.

Použitá literatura

[1] studijní text dostupný na
http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_102.pdf
[2] Jiří Englich: Úvod do praktické fyziky I, Matfyzpress, Praha 2006
[3] Scott A. Yost: článek dostupný na
http://physics.citadel.edu/syost/spring.pdf