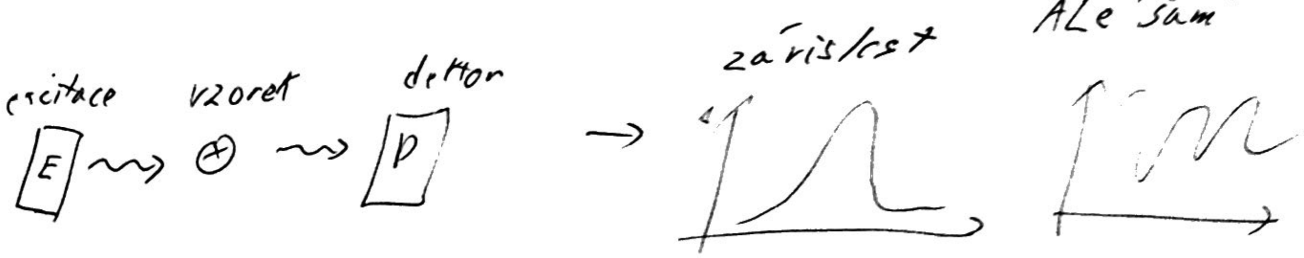
Úvod do praktické fyziky I

- odevzdat vypočítané příklady každý týden
  = podmínka zápočtu + docházka

- web: physics.mff.cuni.cz/kfnt/index.htm
  - prezentace, vytisknout + pak doplnit
- Knihy: Úvod do prakt. fyziky I., J. Englich
- systém SI
  Statistics, Hudson D.J.
  Základní fyzikální konstanty, J. Brož
  ! Základy fyzikálních měření, J. Brož



Amplitudově ... převodník
→ počítač

- Poměr signálu a šumu
  - porovnáváme amplitudy
  - (se standardní odchylkou)

- Koherence systému
  - musíme vidět signál i s šumem
  - signál je vždy na stejném místě = koherence
    ⇒ signál lze ~~vidět~~ získat i s nižším poměrem signál : šum

1. Chyby měření

Systematika chyb:

chyby **hrubé** - vznikají hrubým zásahem do procesu měření, jejich velikost významně převyšuje rozptyl chyby statistické

systematické - vznikají v důsledku chybných kalibrací, interpretací a pod., zatěžují stejným způsobem výsledek každého nezávisle opakovaného měření

statistické - jsou důsledkem náhodných fluktuací, které se popisují metodami matematické statistiky

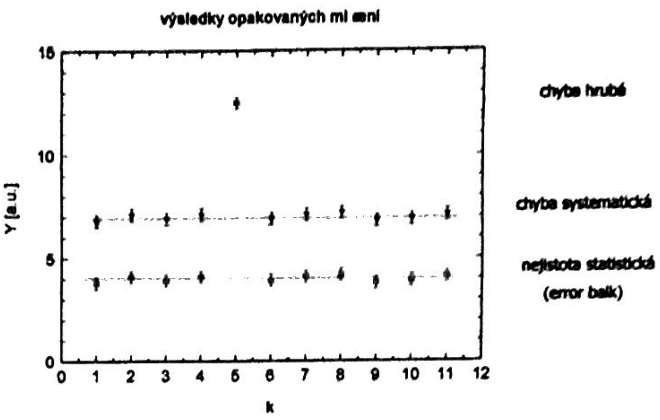
Nejistota (výsledku) měření - uncertainty

CIMP - Comité International des Poinds et Mesures (1981, 1985)
ISO (Mezinárodní Organisace pro Normalisaci) -
Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements (1993)

US National Institute of Standards and Technology , Technical Note 1297

- nejistota - vzhik ze zpracov statistického souboru
- chyba - rozdíl mezi skutečnou a naměřenou hodnotou
  - skutečnou hodnotu nelze změřit → nelze určit
- pro nás: chyba = nejistota

Grafická ilustrace



} nejistota záznamu, "standardní odchylka" $= \frac{1}{2}$ úsečky

- chyba systematická - měření se opakují s různou aparaturou

1.1. Základní pojmy

metody zpracování výsledků měření - **statistické** (typu A)
ostatní (typu B)

výsledek měření ve tvaru: $x = (\tilde{\mu}_x \pm u_{c,x})\ [x]$

$\tilde{\mu}$ - odhad správné hodnoty měřené veličiny

$u_c^2 = u_A^2 + u_B^2$ - kombinovaná standardní nejistota

$u_A^2 = s^2$ - standardní odchylka (statistické zpracování)

u_B^2 - odhad

$u_{c,x}$ - absolutní chyba (nejistota) , $\eta = \frac{u_{c,x}}{\tilde{\mu}_x}$ - relativní chyba (nejistota)

$[x]$

- $\tilde{u}$ odhadneme pomocí statistiky
- "měřit "na pomile" = η řádu 10^{-2}

$[x]$ - označení jednotky - veličiny základní SI - m, kg, s, A, K, mol, cd

- veličiny pojmenované (v daném systému) SI - N, J, C, F, Ω, T..

- rozměr - vyjádření jednotky veličiny odvozené jednotkami veličin základních

SI $[v] = ms^{-1}$, $[a] = ms^{-2}$, $[F] = kgms^{-2}$, $J = kg\, m^2 s^{-2}$,

- rozměr mohou mít i univerzální konstanty

v SI: $[\kappa] = kg^{-1} m^4 s^{-1}$,

$[\varepsilon_0] = A^2 kg^{-1} m^{-3} s^4$

Rozměrová analýza:

pomocná metoda - srovnání rozměrů pravé a levé strany fyzikálních rovnic

a) Kontrola odvozených rovnic, b) hledání správného tvaru rovnic

Příklady: ad a) nechť jsme odvodili (chybně) vztah pro dobu kyvu matematického kyvadla ve tvaru:

$$T \cong \sqrt{\frac{l_k}{m_k}} \quad \rightarrow \quad [P]=[T]=s, \quad [L]=\left[l_k^{\frac{1}{2}} m_k^{-\frac{1}{2}}\right]=m^{\frac{1}{2}} kg^{-\frac{1}{2}} \qquad [L] \neq [P]$$

vzorec je tedy špatně !!!!

Ad b) Těleso hmotnosti se pohybuje rovnoměrně zrychleně, přímočaře. Počáteční rychlost je nulová. Zrychlení tělesa je a. Užitím rozměrové analýzy odvoďte vztah pro rychlost tělesa po uražení dráhy x?

návod: předpokládáme: $v \cong a^{\alpha} x^{\beta}$

$$[L]=ms^{-1}, [P]=m^{\alpha} s^{-2\alpha} m^{\beta}$$

srovnáním exponentů: $\alpha+\beta=1, -1=-2\alpha, \quad \alpha=\frac{1}{2}, \beta=\frac{1}{2}$

správný vzorec: $v \cong \sqrt{ax}$

• rozměrová analýza - nutné pro vernost (?) - ne jediná podmínka

"$\cong$" = "je úměrné", lze vynásobit bezrozměrovou konstantou

Seminární úloha 1.1.(1.3):
Užitím rozměrové analýzy odvoďte vztah pro odpor prostředí hustoty ρ působící na automobil pohybující se rovnoměrně rychlostí v. Maximální plocha příčného průřezu automobilu je S. (aerodynamické efekty zanedbejte).
Návod: předpokládáme $F \cong S^{\alpha} \rho^{\beta} v^{\gamma}$

Seminární úloha 1.2.(1.5):
Užitím rozměrové analýzy stanovte vzorec pro dobu oběhu planety v gravitačním poli slunce.
Návod: předpokládáme $T \cong \kappa^{\alpha} R^{\beta} M^{\gamma}$

Seminární úloha 1.3.:
Užitím rozměrové analýzy stanovte vzorec pro dobu kyvu matematického kyvadla.
Návod: předpokládáme $T \cong l^{\alpha} g^{\beta}$

Seminární úloha 1.4(1.4):
Užitím rozměrové analýzy stanovte vztah pro odporovou sílu působící na kuličku poloměru r pohybující se rychlostí v ve viskozním kapalině popsané dynamickou viskozitou η.
Návod: předpokládáme: $F \cong r^{\alpha} v^{\beta} \eta^{\gamma}$

- uvádět pouze 1. číslo = DÚ

Př. mechanika: - tříjednotková báze - LMT

Systémy jednotek

- máme bázi → odvozené jednotky
- požadujeme, aby soustava byla "koherentní"
  - např. $v \cong \frac{s}{t}$ $\quad a = k_a \cdot \frac{v}{t}, k_a = 1$
  - ale $F = k_N ma \quad F = k_G \frac{m^2}{r^2}$
  - volíme $k_N = 1$, ale $k_G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} kg^{-1} m^3 s^{-2}$

• lze zavést dvoujednotkovou bázi $m = \frac{k_N}{k_G} a r^2$

Normou (ČSN 01 1300) povolené desetinné předpony

Název	Značka	Poměr k hlavní jednotce	Příklad
atto**)	a	10^{-18}	attojoule aJ = 10^{-18} J
femto**)	f	10^{-15}	femtocoulomb fC = 10^{-15} C
pico	p	10^{-12}	picofarad pF = 10^{-12} F
nano	n	10^{-9}	nanosekunda ns = 10^{-9} s
mikro	μ	10^{-6}	mikroampér μA = 10^{-6} A
mili	m	10^{-3}	milihenry mH = 10^{-3} H
centi*)	c	10^{-2}	centigram cg = 10^{-2} g
deci*)	d	10^{-1}	decimetr dm = 10^{-1} m
deka*)	da	10	dekalumen dalm = 10 lm
hekto*)	h	10^{2}	hektolitr hl = 10^{2} l
kilo	k	10^{3}	kilovolt kV = 10^{3} V
mega	M	10^{6}	megawatt MW = 10^{6} W
giga	G	10^{9}	giganewton GN = 10^{9} N
tera	T	10^{12}	teraohm TΩ = 10^{12} Ω

*) Násobků a dílů jednotek tvořených první a druhou mocninou deseti se užívá jen ve zvláštních případech.
**) Předpony málo používané.

Šindelář V., Smrž L.: Nová soustava jednotek, SPN Praha 1968

→ ~~problém~~ máme $\frac{k_N}{k_G} = 1$ ⇒ problém: síla F má obří hodnoty

• čtyřjednotková báze:
- vezmeme Newton jako základní jednotka
  $F = k_N ma \quad F = k_G \frac{m^2}{r^2} \quad k_N, k_G$ - univerzální konstanty

Zásady pro formu zápisu výsledků měření:

a) nejistotu (chybu) měření uvádíme na **nejvýše** dvě platné číslice

b) ve výsledku **zaokrouhlujeme** v řádu poslední platné číslice nejistoty (chyby)

Platnými číslicemi se nazývají všechny číslice zaokrouhleného čísla s výjimkou nul na začátku přibližné hodnoty.

Příklad: a = 0.001234 → 4 platné číslice

a = 0.6070120 → 7 platných číslic

Příklady: v = (3.86 ± 0.03) ms^{-1} I = (2.3 ± 0.1). 10^{-3} A

P = (8.706 ± 0.054) mW   B = 4.56(5) T to samé: (4,56 ± 0,05)

Poznámka: Pokud se chyba měření ve výsledku neudává, předpokládá se implicitně, že je menší, než polovina řádu za poslední platnou číslicí výsledku:

v = 3.5 ms^{-1} ≡ (3.45 ≤ v ≤ 3.55) ms^{-1}

• jednotková báze
  - mohu nadefinovat jako s = c t → c = 1

• bez jednotek
  - Planck, vše pomocí základ. konstant

1.2. Odhad maximální chyby (nepřímých měření)

Základní pravidla pro práci s neúplnými čísly

metoda mezí, maximální odhad

nechť: $a = \bar{\mu}_a \pm u_{o,a}$, $b = \bar{\mu}_b \pm u_{o,b}$

potom: **součet** $S = a + b = (\bar{\mu}_a + \bar{\mu}_b) \pm (u_{o,a} + u_{o,b})$

$$\bar{u}_{o,S} = u_{o,a} + u_{o,b}$$

$$\eta_s = \frac{u_{o,a} + u_{o,b}}{u_a + u_b}$$

rozdíl $R = a - b = (\bar{\mu}_a - \bar{\mu}_b) \pm (u_{o,a} + u_{o,b})$

$$\bar{u}_{o,R} = u_{o,a} + u_{o,b}$$

$$\eta_R = \frac{u_{o,a} + u_{o,b}}{u_a - u_b}$$

Pozor na možnost enormního zvýšení relativní chyby při rozdílu téměř stejných hodnot !!!!!!!

$a = 10{,}1 \pm 0{,}1$ $\quad b = 10{,}2 \pm 0{,}1$

$R = 0{,}1 \pm 0{,}2$! zvětšení rel. chyby!

$R = b - a$

$\Rightarrow$ měřit přesněji/jinak

$$(a \cdot b) = (\tilde{\mu}_a \pm \mu_a)(\tilde{\mu}_b \pm \mu_b)$$

$$= \tilde{\mu}_a \cdot \tilde{\mu}_b \pm \tilde{\mu}_a \cdot \mu_b \pm \tilde{\mu}_b \mu_a + \underbrace{\mu_a \mu_b}_{\text{zanedbám}}$$

$$= \tilde{\mu}_a \cdot \tilde{\mu}_b \pm (\tilde{\mu}_a \mu_b + \tilde{\mu}_b \mu_a)$$

součin

$$N = ab = \bar{\mu}_a \bar{\mu}_b \pm (\bar{\mu}_a u_b + \bar{\mu}_b u_a)$$

$$u_N = (u_a \cdot \bar{\mu}_b + u_b \cdot \bar{\mu}_a)$$

$$\eta_N = \frac{(u_a \cdot \bar{\mu}_b + u_b \cdot \bar{\mu}_a)}{\bar{\mu}_a \bar{\mu}_b} = \eta_a + \eta_b$$

$10^{-2} \cdot 10^{-2} = 10^{-4}$

(správně $\eta_N^2 = \eta_a^2 + \eta_b^2$)

podíl

$$\eta_P = \left(\frac{u_a}{\bar{\mu}_b} + \frac{\bar{\mu}_a u_b}{\bar{\mu}_b^2}\right) \cdot \frac{\bar{\mu}_b}{\bar{\mu}_a} = \eta_a + \eta_b$$

- jmenovatel doplnit na úplné čtverce $\Rightarrow$ zanedbat

mocnina

$$\eta_M = n \cdot \eta_a$$

$$P = \frac{a}{b} = \frac{\bar{\mu}_a}{\bar{\mu}_b} \pm \left(\frac{u_a}{\bar{\mu}_b} + \frac{\bar{\mu}_a u_b}{\bar{\mu}_b^2}\right)$$

$$u_P = \frac{u_a}{\bar{\mu}_b} + \frac{\bar{\mu}_a u_b}{\bar{\mu}_b^2}$$

$$M = a^n = \bar{\mu}_a^n \pm n \bar{\mu}_a^{n-1} u_a$$

$$u_M = n \bar{\mu}_a^{n-1} u_a$$

$$\eta_M = n \eta_a$$

DÚ: - odvodit vzorec pro podíl

Seminární úloha 1.5: Dokažte výše uvedené vztahy pro **maximální** absolutní a relativní interval nejistoty podílu a mocniny.

DÚ - **Seminární úloha 1.6.**: Hustota kovového materiálu byla stanovena vážením a změřením objemu při pokojové teplotě. Byly zjištěny následující hodnoty: m = (8.930 ± 0.002) kg , V = (1.002 ± 0.001) . 10^{-3} m^3 . Stanovte **maximální** interval nejistoty měření (absolutní a relativní). Srovnáním s tabulkovými hodnotami stanovte o jaký materiál se jedná?

Seminární úloha 1.7.: Při měření průřezu (kruhového) kovového drátu byl měřením mikrometrem na několika místech stanoven průměr vlákna: d = (1.26 ± 0.02) mm. Stanovte **maximální** absolutní a relativní interval nejistoty průřezu.

1.3. Chyby měřidel, chyba metody

chyba metody - obvykle chyba systematická

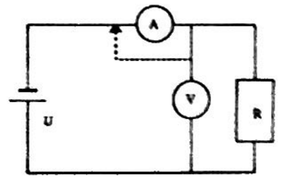
posouzení využívaných jevů a zákonitostí

posouzení kvality použitých přístrojů

možnosti korekce X stanovení odhadem

Příklad: měření odporu metodou přímou

korekce na vnitřní odpor přístrojů



Elektromechanické (ručkové) měřicí přístroje - třída přesnosti:

Třída přesnosti je údajem výrobce, který je získán statistickým šetřením na seriích hotových výrobků (měřicích přístrojů):

$$\Delta_i = |X_i - X_0|$$

p - třída přesnosti (udává se v procentech)

R - použitý rozsah měřicího přístroje

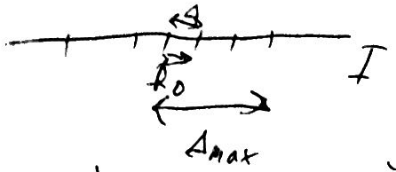
$$p = \frac{\Delta_{i,max}}{R}.100\%$$

Rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti v intervalu (-a,a):

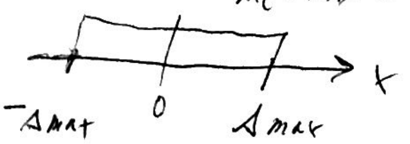
disperse: a... velikost intervalu

$$\tilde{\sigma}_p^2 \equiv u_B^2 = \frac{(2a)^2}{12} = \frac{(2\Delta_{i,max})^2}{12} = \frac{\Delta_{i,max}^2}{3} \rightarrow \qquad u_B = \frac{pR}{\sqrt{3}}.10^{-2}$$

Poznámka: v intervalu $(\_u_B, u_B)$ kolem odhadnuté hodnoty měřené veličiny se skutečná (správná) hodnota měřené veličiny nachází s pravděpodobností P = 0.58



- předpoklad: - rovnoměrné rozděl. prav. měřených hod. v intervalu R



Dělení přístrojů podle třídy přesnosti:

méně přesné ↓

p	*Kategorie*
0.1	etalony, normály
0.2	nejpřesnější
0.5	laboratorní
1	laboratorní
1.5	provozní
2.5	provozní

Příklad: rozsah ampérmetru je R = 3 A , třída přesnosti je p = 1.5.
Absolutní nejistota (chyba) měření proudu na tomto rozsahu je:

$$u_B = \frac{pR}{\sqrt{3}}.10^{-2} \rightarrow \qquad u_{B,I} = \frac{1{,}5.10^{-2}}{\sqrt{3}}.3A = 0{,}026\,A$$

! **Poznámka:** je zřejmé, že z důvodů **minimalisace relativní nejistoty (chyby)** měření je nutno měřit v horní polovině stupnice ručkového měřicího přístroje

=> přepnout rozsah

Pojem třídy přesnosti je možno **zobecnit** i na jiné měřicí přístroje.

Někdy je možno **odhadnout** absolutní chybu měření z dělení stupnice.

Předpokládejme **rovnoměrné rozdělení** v intervalu (-a,a)

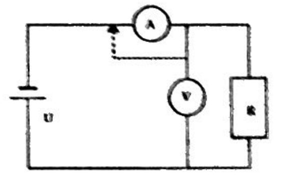
Volíme: Δ_{max} **= d** (dílek nejjemnějšího dělení stupnice)
někdy se uvádí d/2

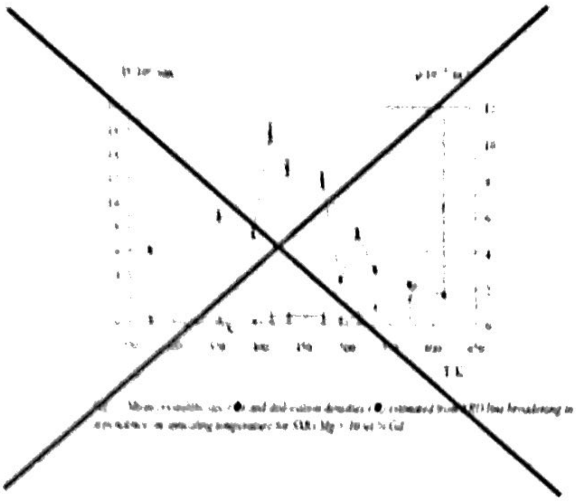
Potom: $u_B = \frac{d}{\sqrt{3}}$

Příklad: Při měření posuvným měřítkem je Δ= 0.1 mm. Nejistotu měření odhadneme:

$$u_B = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{0.1}{\sqrt{3}}\,mm \approx 0.05\,mm$$

Seminární úloha 1.8. (příloha 6.2):
Měření odporu metodou přímou (viz schema) bylo provedeno s přístroji třídy přesnosti 1. Byly naměřeny následující hodnoty: I = 210 mA (rozsah 0.3 A), U = 18.5 V (rozsah 30 V). Vnitřní odpor voltmetru je 10^5 Ω a vnitřní odpor ampérmetru je 7 Ω. Stanovte velikost měřeného odporu a odhadněte **maximální** chybu měření. Diskutujte možné **alternativy** zapojení a nutné korekce s ohledem na chybu metody.





1.4. Značení elektrických měřicích přístrojů

Brož J., a kol.: Základy fyzikálních měření I,
SPN Praha 1967,
tab.1.1 a tab. 1.2 str.208

[illegible]	[illegible]	—
	[illegible]	~
	[illegible]	≂
	[illegible]	≋
[illegible]	[illegible]	⊥
	[illegible]	—
	[illegible]	∠
[illegible]	[illegible] V	☆
	[illegible] V	☆
[illegible] 1,5		1,5
[illegible]		⏚

Systémy jednotek

- Klesající počet jednotek ~~[illegible]~~ base
  → méně univerzál. konst.
  – komplikovanější rozměr. analýza
  – jednotky nepraktické
- rostoucí → více konst.
  – snazší rozměr. analýza

Seminární úloha 1.9 (2.2):
Jaká bude maximální nejistota aritmetického průměru $\bar{a}$ veličiny a při n-krát nezávisle opakovaném měření? Maxmální nejistota měření veličiny a je $u_{c,a}$.

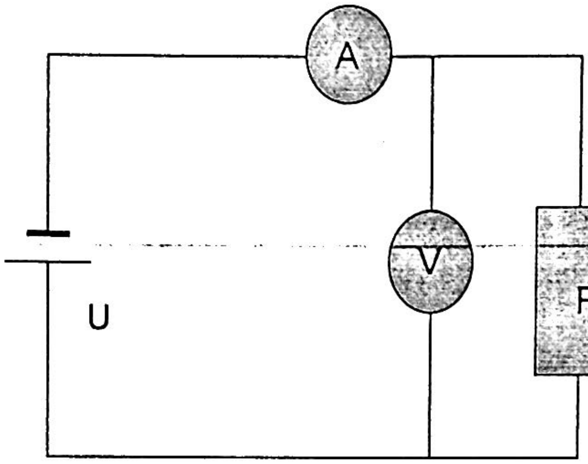
NÚ

Seminární úloha 1.10. (2.6):
Proud v měřeném obvodu se pohybuje v rozmezí od 0 do 3 A. Potřebujeme ho změřit s přesností ± 10 mA. Stanovte jaká je minimální podmínka na třídu přesnosti použitého ampérmetru.

Seminární úlohy 1.11. (2.7):
Napětí na měřeném prvku se pohybuje okolo 1.5 V. Je lepší použít pro měření přístroj třídy přesnosti 0.5 s rozsahem (0-5) V a nebo přístroj třídy přesnosti 1 s rozsahy (0-2) V nebo (0-10) V?

Seminární úloha 1.8. (příloha 6.2):

Měření odporu metodou přímou (viz schema) bylo provedeno s přístroji třídy přesnosti 1. Byly naměřeny následující hodnoty: I = 210 mA (rozsah 0.3 A), U = 18.5 V (rozsah 30 V). Vnitřní odpor voltmetru je 10^5 Ω a vnitřní odpor ampérmetru je 7 Ω. Stanovte velikost měřeného odporu a z třídy přesnosti použitých přístrojů odhadněte **maximální** chybu měření. Diskutujte chybu metody a nutnost její korekce.



1) Odhad U = 18.5 V (rozsah 30 V) I = 210 mA (rozsah 03 A) $R' = \frac{U}{I} = \frac{18{,}5V}{0{,}21A} \approx 90\,\Omega$

2) posouzení zapojení $R_{i,A} = 7\ \Omega$ $R_{i,V} = 10^5\ \Omega$

3) výpočet odporu $R' = \frac{U}{I} = \frac{18{,}5V}{0{,}21A} = 88{,}095238\ \Omega$

4) výpočet nejistoty

$$u_B = \frac{pR}{\sqrt{3}}.10^{-2}$$

absolutní nejistota měření napětí $u_{B,V} = \frac{1.30V}{\sqrt{3}}.10^{-2} = 0{,}173205\,V$

absolutní nejistota měření proudu $u_{B,I} = \frac{1.0{,}3A}{\sqrt{3}}.10^{-2} = 0{,}00173205\,A$

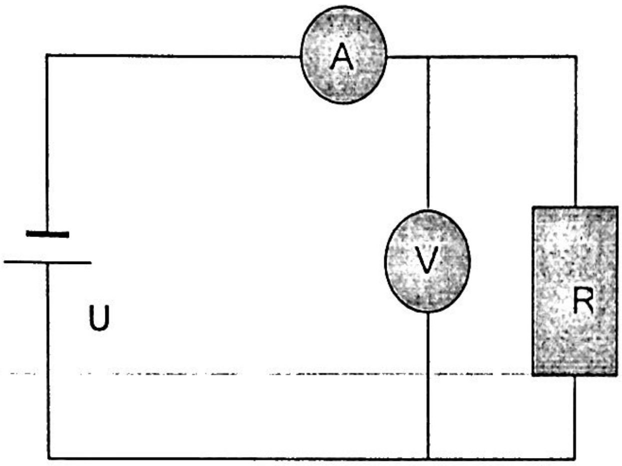
relativní nejistoty: $\eta_{B,V} = \frac{0{,}173205\,V}{18{,}5\,V} = 0{,}0093624$ $\eta_{B,I} = \frac{0{,}00173205\,A}{0{,}21\,A} = 0{,}0082479$

maximální relativní nejistota odporu $\eta_{B,R'} = \eta_{B,I} + \eta_{B,V} = 0{,}0176103$

maximální nejistota odporu $u_{B,R'} = \eta_{B,R'}.R' = 0{,}0176103.(88{,}095238\Omega) = 1{,}551383\,\Omega$

Výsledek $R' = \frac{U}{I} = \frac{18{,}5V}{0{,}21A} = (88{,}1 \pm 1{,}6)\ \Omega$

5) korekce na metodu měření



$$I_A = I_R + I_V \qquad R = \frac{U_V}{I_R} = \frac{U_V}{I_A - I_V} = \frac{U_V}{I_A - \frac{U_V}{R_{i,V}}}$$

$$R = \frac{U_V}{I_A}\frac{1}{1-\frac{U_V}{I_A R_{i,V}}} = R'\frac{1}{1-\frac{R'}{R_{i,V}}} \cong R'(1+\frac{R'}{R_{i,V}}) \cong R'(1+\frac{88,095238}{10^5})$$

$$R \cong R'(1+0,88\,10^{-3}) \qquad R \cong R' + \Delta R$$

$$\Delta R = 0,077\,\Omega \qquad u_{B,R'} = 1,6\,\Omega$$

závěr: korekce není podstatná

Úvod do prakt. fyziky – přednáška IX

• Experiment – množina možných výsledků $\{V_E\}$
- výsledek $v \in \{V_E\}$
- náhodný jev A na experimentu E

• náhodná proměnná x – určeno pravidlem, které výsledku přiřazuje číslo
- diskrétní
- spojitá

(př.: náhodný výběr)

Definice:
1) non A_E = jev A nenastane
2) jev $\bigvee_{i=1}^{n} A_{iE}$ = nastane aspoň jeden z jevů A_{iE}
3) jev $\bigcap_{i=1}^{n} A_{iE}$ = nastane každý z jevů A_{iE}
4) $A_{jE} \cap A_{iE} = \emptyset$ ... jevy vzájemně disjunktní

Pravděpodobnost

jevů A, B jako míra podmnožin $\{V(A)\}$, $\{V(B)\}$ nastalování
- míra = počet prvků

a) $p_{A,B} \geq 0$

b) $p_V = 1$

c) $p(A \cup B) = p_A + p_B - p(A \cap B)$

• Pro náhodný výběr: $p_A = \frac{n_A}{n}$

$p(A \cup \text{non}A) = 1$

$p(\text{non}A) = 1 - p(A)$

Spojení experimentů

- při házení z kostkami
- nezávislé
- závislé

• jevy jsou nezávislé jsou-li def. na nezáv. exper.

• Pro náhodný jev na spojení nezáv. exp. platí

$$\boxed{p_A = \prod_{i=1}^{n} p_{Ai}}$$

• opakování experimentu

Alternativní definice pravděpodobnosti

- relativní četnost jevu A: $p'_A = \frac{n_A}{n}$ $\quad p_A = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n_A}{n}\right)$
- integrace metodou Monte-Carlo