Radim Kusák
F1-X-12

Seminární práce č.1

1) Důkazy odchylek

a) Odchylka součtu dvou naměřených veličin

Nejprve si označme c jako součet veličin a, b. Poté si definujeme čísla a, b, c:

$$c = a + b$$

$$a = \tilde{a} \pm \varepsilon_a \qquad b = \tilde{b} \pm \varepsilon_b \qquad c = \tilde{c} \pm \varepsilon_c$$

Průměrnou hodnotu $\tilde{c}$ určíme jako $\tilde{c} = \tilde{a} + \tilde{b}$. Odtud dosazením do vztahu $c = \tilde{c} \pm \varepsilon_c$, a dosazením do téhoř vztahu za c vztah $c = a + b$ dostáváme:

$$a + b = \tilde{a} + \tilde{b} \pm \varepsilon_c$$

Nyní do tohoto vztahu dosadíme za a vztah $a = \tilde{a} \pm \varepsilon_a$ a za b vztah $b = \tilde{b} \pm \varepsilon_b$. Odtud dostáváme:

$$\tilde{a} + \tilde{b} \pm \varepsilon_a \pm \varepsilon_b = \tilde{a} + \tilde{b} \pm \varepsilon_c$$

Odtud vztah pro ε (uvažujeme maximální hodnotu) :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_a + \varepsilon_b$$

Pro relativní odchylku platí vztah:

$$\eta_c = \frac{\varepsilon_c}{\tilde{c}} \qquad \Longrightarrow \qquad \eta_c = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{\tilde{a} + \tilde{b}}$$

b) Odchylka rozdílu dvou naměřených veličin

Nyní si označme c jako rozdíl veličin a, b. Poté si definujeme čísla a, b, c:

$$c = a - b$$

$$a = \tilde{a} \pm \varepsilon_a \qquad b = \tilde{b} \pm \varepsilon_b \qquad c = \tilde{c} \pm \varepsilon_c$$

Průměrnou hodnotu $\tilde{c}$ určíme jako $\tilde{c} = \tilde{a} - \tilde{b}$. Odtud dosazením do vztahu $c = \tilde{c} \pm \varepsilon_c$, a dosazením do téhoř vztahu za c vztah $c = a - b$ dostáváme:

$$a - b = \tilde{a} - \tilde{b} \pm \varepsilon_c$$

Nyní do tohoto vztahu dosadíme za a vztah $a = \tilde{a} \pm \varepsilon_a$ a za b vztah $b = \tilde{b} \pm \varepsilon_b$. Odtud dostáváme:

$$\tilde{a} - \tilde{b} \pm \varepsilon_a \pm \varepsilon_b = \tilde{a} - \tilde{b} \pm \varepsilon_c$$

Odtud vztah pro ε (uvažujeme maximální hodnotu) :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_a + \varepsilon_b$$

Pro relativní odchylku platí vztah:

$$\eta_c = \frac{\varepsilon_c}{\tilde{c}} \qquad \Longrightarrow \qquad \eta_c = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{\tilde{a} - \tilde{b}}$$

Radim Kusák
F1-X-12

c) Odchylka součinu dvou naměřených veličin

Nejprve si označme c jako součin veličin a, b. Poté si definujeme čísla a, b, c:

$$c = a \cdot b$$

$$a = \tilde{a} \pm \varepsilon_a \qquad b = \tilde{b} \pm \varepsilon_b \qquad c = \tilde{c} \pm \varepsilon_c$$

Průměrnou hodnotu $\tilde{c}$ určíme jako $\tilde{c} = \tilde{a} \cdot \tilde{b}$. Odtud dosazením do vztahu $c = \tilde{c} \pm \varepsilon_c$, a dosazením do téhoř vztahu za c vztah $c = a \cdot b$ dostáváme:

$$a \cdot b = \tilde{a} \cdot \tilde{b} \pm \varepsilon_c$$

Nyní do tohoto vztahu dosadíme za a vztah $a = \tilde{a} \pm \varepsilon_a$ a za b vztah $b = \tilde{b} \pm \varepsilon_b$. Odtud dostáváme:

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} \pm \tilde{a} \cdot \varepsilon_a \pm \tilde{b} \cdot \varepsilon_b \pm \varepsilon_a \varepsilon_b = \tilde{a} \cdot \tilde{b} \pm \varepsilon_c$$

Výraz $\varepsilon_a \varepsilon_b$ zanedbáme. Odtud vztah pro ε (uvažujeme maximální hodnotu) :

$$\varepsilon_c = a \cdot \varepsilon_b + b \cdot \varepsilon_a$$

Pro relativní odchylku platí vztah:

$$\eta_c = \frac{\varepsilon_c}{\tilde{c}} \qquad \Longrightarrow \qquad \eta_c = \frac{a \cdot \varepsilon_b + b \cdot \varepsilon_a}{\tilde{a} \cdot \tilde{b}} \qquad \Longrightarrow \qquad \eta_c = \eta_a + \eta_b$$

Radim Kusák
F1-X-12

d) Odchylka podílu dvou naměřených veličin

Nejprve si označme c jako podíl veličin a, b. Poté si definujeme čísla a, b, c:

$$c = \frac{a}{b}$$

$$a = \tilde{a} \pm \varepsilon_a \qquad b = \tilde{b} \pm \varepsilon_b \qquad c = \tilde{c} \pm \varepsilon_c$$

Průměrnou hodnotu $\tilde{c}$ určíme jako $\tilde{c} = \tilde{a}/\tilde{b}$. Odtud dosazením do vztahu $c = \tilde{c} \pm \varepsilon_c$, a dosazením do téhoř vztahu za c vztah $c = a/b$ dostáváme:

$$\frac{a}{b} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} \pm \varepsilon_c$$

Nyní do tohoto vztahu dosadíme za a vztah $a = \tilde{a} \pm \varepsilon_a$ a za b vztah $b = \tilde{b} \pm \varepsilon_b$. Odtud dostáváme:

$$\frac{\tilde{a} \pm \varepsilon_a}{\tilde{b} \pm \varepsilon_b} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} \pm \varepsilon_c$$

Čitatele i jmenovatele zlomku na levé straně rovnice vynásobíme $\tilde{b} \mp \varepsilon_b$ (hodnota výrazu se nezmění) a čitale zlomku roznásobíme:

$$\frac{(\tilde{a} \pm \varepsilon_a)(\tilde{b} \mp \varepsilon_b)}{(\tilde{b} \pm \varepsilon_b)(\tilde{b} \mp \varepsilon_b)} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} \pm \varepsilon_c \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\tilde{a}\tilde{b} \pm \tilde{a}\varepsilon_b \pm \tilde{b}\varepsilon_a \pm \varepsilon_a\varepsilon_b}{b^2 \pm \varepsilon_b^2} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} \pm \varepsilon_c$$

Členy $\varepsilon_a\varepsilon_b$ a ε_b^2 můžeme zanedbat a odtud vztah pro ε_c:

$$\varepsilon_c = \frac{\tilde{a}\varepsilon_b + \tilde{b}\varepsilon_a}{\tilde{b}^2}$$

Pro relativní odchylku platí vztah:

$$\eta_c = \frac{\varepsilon_c}{\tilde{c}} \qquad \Longrightarrow \qquad \eta_c = \frac{\tilde{a}\varepsilon_b + \tilde{b}\varepsilon_a}{\tilde{a}\tilde{b}} \qquad \Longrightarrow \qquad \eta_c = \eta_a + \eta_b$$

Radim Kusák
F1-X-12

e) Odchylka umocněné naměřené veličiny

Nejprve si označme c jako mocninu veličiny a. Poté si definujeme číslo a:

$$c = a^n \qquad\qquad a = \tilde{a} \pm \varepsilon_a$$

Průměrnou hodnotu $\tilde{c}$ určíme jako $\tilde{c} = \tilde{a}^n$. Odtud dosazením do vztahu $c = \tilde{c} \pm \varepsilon_c$, a dosazením do téhoř vztahu za c vztah $c = a^n$ dostáváme:

$$a^n = \tilde{a}^n \pm \varepsilon_c$$

Nyní do tohoto vztahu dosadíme za a vztah $a = \tilde{a} \pm \varepsilon_a$ Odtud dostáváme:

$$(a \pm \varepsilon_a)^n = \tilde{a}^n \pm \varepsilon_c$$

Rozložením výrazu na levé straně dostaneme polynom členů, přičemž fyzikálně mají smysl pouze první dva ostatní zanedbáváme (ε_a na mocninu větší než 1 je zanedbatelné oproti měřené veličině). Dostáváme:

$$\tilde{a}^n \pm n a^{n-1} \varepsilon_a = \tilde{a}^n \pm \varepsilon_c$$

Odtud vztah pro ε_c:

$$\varepsilon_c = n a^{n-1} \varepsilon_a$$

Pro relativní odchylku platí vztah:

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\tilde{c}} \qquad \Longrightarrow \qquad \eta = \frac{n\varepsilon_a}{\tilde{a}} \qquad \Longrightarrow \qquad \eta_c = n\eta_a$$

Radim Kusák
F1-X-12

2) Hustota tělesa

$$m = (\tilde{m} \pm \varepsilon_m)[m] \qquad\qquad V = (\tilde{V} \pm \varepsilon_V)[V]$$

$$m = (8.930 \pm 0.002)\mathrm{kg} \qquad\qquad \mathrm{V} = (1.002 \pm 0.001) \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^3$$

Pro průměrnou hustotu ($\tilde{\varrho}$), absolutní odchylku a relativní odchylku platí vztahy:

$$\tilde{\varrho} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{V}} \qquad \varepsilon_\varrho = \frac{\tilde{m}\varepsilon_V \pm \tilde{V}\varepsilon_m}{\tilde{V}^2} \qquad \eta_\varrho = \frac{\tilde{m}\varepsilon_V + \tilde{V}\varepsilon_m}{\tilde{m}\tilde{V}}$$

Číselně:

$$\tilde{\varrho} = \frac{8.930}{1.002}\ \mathrm{kg.m^{-3}} \qquad \varepsilon_\varrho = \frac{8.930 \cdot 0.001 \cdot 10^{-3} + 1.002 \cdot 10^{-3} \cdot 0.002}{(1.002 \cdot 10^{-3})^2}\ \mathrm{kg.m^{-3}}$$

$$\eta_\varrho = \frac{8.930 \cdot 0.001 \cdot 10^{-3} + 1.002 \cdot 10^{-3} \cdot 0.002}{8.930 \cdot 1.002 \cdot 10^{-3}} \cdot 100\%$$

Zaokrouhleně:

$$\varepsilon_\varrho = 11\mathrm{kg.m^{-3}}$$

Odtud počet platných cifer pro $\tilde{\varrho}$ a její hodnota:

$$\tilde{\varrho} = 8912\mathrm{kg.m^{-3}}$$

A nakonec relativní odchylka:

$$\eta_\varrho = 0.12\%$$

Hustota předmětu je

$$\varrho = (8912 \pm 11)\mathrm{kg.m^{-3}}$$

Hustota tělesa je $(8912 \pm 11)\mathrm{kg.m^{-3}}$, přičemž hodnota je s relativní odchylkou 0,12

Radim Kusák
F1-X-12

3) Průřez

$$d = (\tilde{d} \pm \varepsilon_d)[d]$$
$$d = (1.26 \pm 0.02)\text{mm}$$

Pro průměrný průřez ($\tilde{S}$), relativní odchylku a absolutní odchylku, platí:

$$\tilde{S} = \frac{\pi \tilde{d}^2}{4} \qquad \eta_S = 2\eta_d \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon_S = \frac{\pi \varepsilon_d \tilde{d}}{2}$$

Číselně:

$$\tilde{S} = \frac{\pi \cdot 1.26^2}{4}\text{mm}^2 \qquad \varepsilon_\varrho = \frac{\pi \cdot 0.02 \cdot 1.26}{2}\text{mm}^2$$

$$\eta_S = 2 \cdot \frac{0.02}{1.26} \cdot 100\%$$

Zaokrouhleně:

$$\varepsilon_S = 0.040\text{mm}^2$$

Odtud počet platných cifer pro $\tilde{\varrho}$ a její hodnota:

$$\tilde{S} = 1,247\text{mm}^2$$

A nakonec relativní odchylka:

$$\eta_S = 3.2\%$$

Průřez předmětu je

$$S = (1,247 \pm 0.04)\text{mm}^2$$

Průřez předmětu $(1,247 \pm 0.040)\text{mm}^2$. Tato hodnota je s relativní odchylkou 3.2%.