Radim Kusák
F1-X-12

Seminární práce č.4

Binomické rozdělení

a) Disperze

Pro disperzi binomického rozdělení platí vztah:

$$D_k = \sum_{k=0}^{N} (k-\mu)^2 \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

Umocněním první závorky a poté roznásobením dostaneme tři součty :

$$D_k = \sum_{k=0}^{N} (k^2 - 2k\mu + \mu^2) \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$D_k = sum_1 + sum_2 + sum_3$$

$$sum_1 = \sum_{k=0}^{N} \mu^2 \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$sum_2 = -2\mu \sum_{k=0}^{N} k \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$sum_3 = \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

Výraz μ^2 můžeme ve vztahu pro sum_1 vytknou před sumu. Výraz za sumačním znamínkem je z normovací podmínky roven 1 a tudíž $\mathbf{sum_1 = \mu^2}$.

Zbylé sumy budeme upravovat postupně:

$$sum_2 = -2\mu \sum_{k=0}^{N} k \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = -2\mu \sum_{k=1}^{N} k \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} =$$

$$= -2\mu \sum_{k=1}^{N} \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = \qquad k = l+1 \qquad M = N-1$$

$$= -2\mu \sum_{l=0}^{N-1} \frac{N!}{l!(N-l-1)!} p^{l+1} (1-p)^{N-l-1} = -2\mu \cdot p \sum_{l=0}^{M} \frac{(M+1)!}{l!(M-l)!} p^l (1-p)^{M-l} =$$

$$= -2\mu \cdot p \cdot (M+1) \sum_{l=0}^{M} \frac{M!}{l!(M-l)!} p^l (1-p)^{M-l} = \boldsymbol{-2\mu \cdot p \cdot N}$$

$$sum_3 = \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = \sum_{k=1}^{N} k^2 \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} k \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = \qquad k = l+1$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} (l+1) \frac{N!}{l!(N-l-1)!} p^{l+1} (1-p)^{N-l-1} = \qquad M = N-1$$

$$= p \sum_{l=0}^{N-1} \frac{N!}{l!(N-l-1)!} p^l (1-p)^{N-l-1} + p \sum_{l=0}^{N-1} l \frac{N!}{l!(N-l-1)!} p^l (1-p)^{N-l-1} =$$

$$= p \sum_{l=0}^{M} \frac{(M+1)!}{l!(M-l)!} p^l (1-p)^{M-l} + p \sum_{l=0}^{N-1} l \frac{N!}{l!(N-l-1)!} p^l (1-p)^{N-l-1} = \boldsymbol{pN + sum_{31}}$$

$$sum_{31} = p \sum_{l=0}^{N-1} l \frac{N!}{l!(N-l-1)!} p^l (1-p)^{N-l-1} = p \sum_{l=1}^{N-1} \frac{N!}{(l-1)!(N-l-1)!} p^l (1-p)^{N-l-1} =$$

$$l = m+1 \qquad M = N-2$$

$$= p \sum_{m=0}^{N-2} \frac{N!}{m!(N-m-2)!} p^{m+1} (1-p)^{N-m-2} = p^2 \sum_{m=0}^{M} \frac{(M+2)!}{m!(M-m)!} p^m (1-p)^{M-m} = \boldsymbol{p^2 N^2 - p^2 N}$$

$$\boldsymbol{sum_3 = pN + p^2 N^2 - p^2 N}$$

Dosazením do vztahu:

$$D_k = sum_1 + sum_2 + sum_3$$

dostáváme:

$$D_k = \mu^2 - 2\mu \cdot pN + pN + p^2N^2 - p^2N$$

Jelikož platí, že $\mu = pN$, dostáváme pro D_k vztah:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{D_k = Np \cdot (1 - p)}}}$$

Radim Kusák
F1-X-12

b) Asymetrie

Pro třetí centrální moment binomického rozdělení platí vztah:

$$cE_k^3 = \sum_{k=0}^{N} (k-\mu)^3 \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

Umocněním první závorky a poté roznásobením dostaneme čtyři součty :

$$cE_k^3 = \sum_{k=0}^{N} (k^3 - 3k^2\mu + 3k\mu^2 - \mu^3) \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$cE_k^3 = sum_1 + sum_2 + sum_3 + sum_4$$

$$sum_1 = -\mu^3 \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$sum_2 = 3\mu^2 \sum_{k=0}^{N} k \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$sum_3 = -3\mu \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$sum_4 = \sum_{k=0}^{N} k^3 \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$sum_1 = -\mu^3 \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = \boldsymbol{-\mu^3}$$

$$sum_2 = 3\mu^2 \sum_{k=0}^{N} k \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = 3\mu^2 \sum_{k=1}^{N} \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} =$$

$$k = l+1 \qquad M = N-1$$

$$= 3\mu^2 \sum_{l=0}^{N-1} \frac{N!}{l!(N-l-1)!} p^{l+1} (1-p)^{N-l-1} = 3\mu^2 p \sum_{l=0}^{N-1} \frac{N!}{l!(N-l-1)!} p^l (1-p)^{N-l-1} =$$

$$= 3\mu^2 p \sum_{l=0}^{M} \frac{(M+1)!}{l!(M-l)!} p^l (1-p)^{M-l} = \boldsymbol{3\mu^2 pN}$$

$$sum_3 = -3\mu \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = -3\mu \sum_{k=1}^{N} k \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} =$$

$$k = l + 1$$

$$= -3\mu \sum_{l=0}^{N-1} (l+1) \frac{N!}{l!(N-l-1)!} p^{l+1} (1-p)^{N-l-1} =$$

$$= -3\mu \cdot p \sum_{l=0}^{N-1} \frac{N!}{l!(N-l-1)!} p^l (1-p)^{N-l-1} - 3\mu \cdot p \sum_{l=0}^{N-1} l \frac{N!}{l!(N-l-1)!} p^l (1-p)^{N-l-1} =$$

$$M = N - 1$$

$$= -3\mu \cdot p \sum_{l=0}^{M} \frac{(M+1)!}{l!(M-l)!} p^l (1-p)^{M-l} - 3\mu \cdot p \sum_{l=1}^{N-1} \frac{N!}{(l-1)!(N-l-1)!} p^l (1-p)^{N-l-1} =$$

$$= -3\mu \cdot pN - 3\mu \cdot p \sum_{l=1}^{N-1} \frac{N!}{(l-1)!(N-l-1)!} p^l (1-p)^{N-l-1} = \boldsymbol{-3\mu \cdot (pN + sum_{31})}$$

$$l = m + 1$$

$$sum_{31} = p \sum_{l=1}^{N-1} \frac{N!}{(l-1)!(N-l-1)!} p^l (1-p)^{N-l-1} = p \sum_{m=0}^{N-2} \frac{N!}{m!(N-m-2)!} p^{m+1} (1-p)^{N-m-2} =$$

$$M = N - 2$$

$$= p^2 \sum_{m=0}^{M} \frac{(M+2)!}{m!(M-m)!} p^m (1-p)^{M-m} = \boldsymbol{p^2 N \cdot (N-1)}$$

$$\boldsymbol{sum_3 = -3\mu \cdot [pN + p^2 N \cdot (N-1)]}$$

$$sum_4 = \sum_{k=0}^{N} k^3 \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = \sum_{k=1}^{N} k^2 \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} =$$

$$k = l + 1$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} (l+1)^2 \frac{N!}{l!(N-l-1)!} p^{l+1} (1-p)^{N-l-1} = p \sum_{l=0}^{N-1} (l^2 + 2l + 1) \frac{N!}{l!(N-l-1)!} p^l (1-p)^{N-l-1}$$

$$\boldsymbol{sum_4 = sum_{41} + sum_{42} + sum_{43}}$$

$$sum_{41} = p \sum_{l=0}^{N-1} \frac{N!}{l!(N-l-1)!} p^l (1-p)^{N-l-1}$$

$$sum_{42} = 2p \sum_{l=0}^{N-1} l \frac{N!}{l!(N-l-1)!} p^l (1-p)^{N-l-1}$$

$$sum_{43} = p \sum_{l=0}^{N-1} l^2 \frac{N!}{l!(N-l-1)!} p^l (1-p)^{N-l-1}$$

$$M = N-1$$

$$sum_{41} = p\sum_{l=0}^{N-1}\frac{N!}{l!(N-l-1)!}p^l(1-p)^{N-l-1} = p\sum_{l=0}^{M}\frac{(M+1)!}{l!(M-l)!}p^l(1-p)^{M-l} = \boldsymbol{pN}$$

$$sum_{42} = 2p\sum_{l=0}^{N-1} l\frac{N!}{l!(N-l-1)!}p^l(1-p)^{N-l-1} = 2p\sum_{l=1}^{N-1}\frac{N!}{(l-1)!(N-l-1)!}p^l(1-p)^{N-l-1} =$$

$$l = m+1 \qquad M = N-2$$

$$= 2p\sum_{m=0}^{N-2}\frac{N!}{m!(N-m-2)!}p^{m+1}(1-p)^{N-m-2} = 2p^2\sum_{m=0}^{M}\frac{(M+2)!}{m!(M-m)!}p^m(1-p)^{M-m} = \boldsymbol{2p^2 N\cdot(N-1)}$$

$$sum_{43} = p\sum_{l=0}^{N-1} l^2\frac{N!}{l!(N-l-1)!}p^l(1-p)^{N-l-1} = p\sum_{l=1}^{N-1} l\frac{N!}{(l-1)!(N-l-1)!}p^l(1-p)^{N-l-1} =$$

$$l = m+1$$

$$= p\sum_{m=0}^{N-2}(m+1)\frac{N!}{m!(N-m-2)!}p^{m+1}(1-p)^{N-m-2}$$

$$\boldsymbol{sum_{43} = sum_{431} + sum_{432}}$$

$$sum_{431} = p^2\sum_{m=0}^{N-2}\frac{N!}{m!(N-m-2)!}p^m(1-p)^{N-m-2}$$

$$sum_{432} = p^2\sum_{m=0}^{N-2} m\frac{N!}{m!(N-m-2)!}p^m(1-p)^{N-m-2}$$

$$M = N-2$$

$$sum_{431} = p^2\sum_{m=0}^{N-2}\frac{N!}{m!(N-m-2)!}p^m(1-p)^{N-m-2} = p^2\sum_{m=0}^{M}\frac{(M+2)!}{m!(M-m)!}p^m(1-p)^{M-m} = \boldsymbol{p^2 N\cdot(N-1)}$$

$$sum_{432} = p^2 \sum_{m=0}^{N-2} m \frac{N!}{m!(N-m-2)!} p^m (1-p)^{N-m-2} = p^2 \sum_{m=1}^{N-2} \frac{N!}{(m-1)!(N-m-2)!} p^m (1-p)^{N-m-2} =$$

$$m = n+1 \qquad M = N-3$$

$$= p^2 \sum_{n=0}^{N-3} \frac{N!}{n!(N-n-3)!} p^{n+1} (1-p)^{N-n-3} = p^3 \sum_{n=0}^{M} \frac{(M+3)!}{n!(M-n)!} p^n (1-p)^{M-n} = \boldsymbol{p^3 N \cdot (N-1) \cdot (N-2)}$$

$$\boldsymbol{sum_{43} = sum_{431} + sum_{432}}$$

$$\boldsymbol{sum_{43} = p^2 N \cdot (N-1) + p^3 N \cdot (N-1) \cdot (N-2)}$$

$$\boldsymbol{sum_4 = sum_{41} + sum_{42} + sum_{43}}$$

$$\boldsymbol{sum_4 = pN + 2p^2 N \cdot (N-1) + p^2 N \cdot (N-1) + p^3 N \cdot (N-1) \cdot (N-2)}$$

$$\boldsymbol{cE_k^3 = sum_1 + sum_2 + sum_3 + sum_4}$$

$$\boldsymbol{cE_k^3 = -\mu^3 + 3\mu^2 pN - 3\mu \cdot [pN + p^2 N \cdot (N-1)] + pN + 2p^2 N \cdot (N-1) + p^2 N \cdot (N-1) + p^3 N \cdot (N-1) \cdot (N-2)}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{cE_k^3 = Np \cdot (1-p) \cdot (1-2p)}}}$$

Pro γ platí vztah:

$$\gamma = \frac{cE_k^3}{\sigma^3}$$

Jelikož $\sigma = \sqrt{D_k}$ pak pro γ platí:

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{1-2p}{\sqrt{Np \cdot (1-p)}} \neq Np \cdot (1-p) \cdot (1-2p)}$$

Radim Kusák
F1-X-12

Poissonovo rozdělení

a) první moment

Pro první moment a normovací podmínku Poisonova rozdělení platí vztah:

$$E_k = \sum_{k=0}^{N} k \cdot p_k \qquad \sum_{k=0}^{N} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = 1$$

Odtud:

$$k = l + 1 \qquad M = N - 1$$

$$E_k = \sum_{k=0}^{N} k \cdot \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\mu^k}{(k-1)!} e^{-\mu} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\mu^k}{(k-1)!} e^{-\mu} = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\mu^{l+1}}{l!} e^{-\mu} = \mu \sum_{l=0}^{M} \frac{\mu^l}{l!} e^{-\mu} = \boldsymbol{\mu}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{E_k = \mu}}}$$

b) Disperze

Pro disperzi Poisonova rozdělení platí vztah:

$$D_k = \sum_{k=0}^{N} (k-\mu)^2 \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

Odtud:

$$D_k = \sum_{k=0}^{N} (k-\mu)^2 \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \mu^2 \sum_{k=0}^{N} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} - 2\mu \sum_{k=0}^{N} k \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} + \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} =$$

$$k = l + 1$$

$$= \mu^2 - 2\mu \sum_{k=1}^{N} \frac{\mu^k}{(k-1)!} e^{-\mu} + \sum_{k=1}^{N} k \frac{\mu^k}{(k-1)!} e^{-\mu} = \mu^2 - 2\mu^2 \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\mu^l}{l!} e^{-\mu} + \sum_{l=0}^{N-1} (l+1) \frac{\mu^{l+1}}{l!} e^{-\mu} =$$

$$l = m + 1$$

$$= \mu^2 - 2\mu^2 + \mu \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\mu^l}{l!} e^{-\mu} + \mu \sum_{l=1}^{N-1} \frac{\mu^l}{(l-1)!} e^{-\mu} = \mu^2 - 2\mu^2 + \mu + \mu^2 \sum_{m=0}^{N-2} \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu} =$$

$$M=N-2$$

$$=\mu^2-2\mu^2+\mu+\mu^2\sum_{m=0}^{N-2}\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}=\mu^2-2\mu^2+\mu+\mu^2\sum_{m=0}^{M}\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}=\mu^2-2\mu^2+\mu+\mu^2=\boldsymbol{\mu}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{D_k=\mu}}}$$

c) Asymetrie

Pro třetí centrální moment Poisonova rozdělení platí vztah:

$$cE_k^3=\sum_{k=0}^{N}(k-\mu)^3\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$$

Odtud:

$$cE_k^3=\sum_{k=0}^{N}(k-\mu)^3\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}=-\mu^3\sum_{k=0}^{N}\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}+3\mu^2\sum_{k=0}^{N}k\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}-3\mu\sum_{k=0}^{N}k^2\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}+\sum_{k=0}^{N}k^3\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}=$$

$$=-\mu^3+3\mu^2\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu^k}{(k-1)!}e^{-\mu}-3\mu\sum_{k=1}^{N}k\frac{\mu^k}{(k-1)!}e^{-\mu}+\sum_{k=1}^{N}k^2\frac{\mu^k}{(k-1)!}e^{-\mu}=$$

$$k=l+1$$

$$=-\mu^3+3\mu^2\sum_{l=0}^{N-1}\frac{\mu^{l+1}}{l!}e^{-\mu}-3\mu\sum_{l=0}^{N-1}(l+1)\frac{\mu^{l+1}}{l!}e^{-\mu}+\sum_{l=0}^{N-1}(l+1)^2\frac{\mu^{l+1}}{l!}e^{-\mu}=$$

$$M=N-1$$

$$=-\mu^3+3\mu^3\sum_{l=0}^{M}\frac{\mu^l}{l!}e^{-\mu}-3\mu^2\sum_{l=0}^{M}\frac{\mu^l}{l!}e^{-\mu}-3\mu^2\sum_{l=0}^{N-1}l\frac{\mu^l}{l!}e^{-\mu}+\mu\sum_{l=0}^{N-1}(l+1)^2\frac{\mu^l}{l!}e^{-\mu}=$$

$$M=N-1$$

$$=-\mu^3+3\mu^3-3\mu^2-3\mu^2\sum_{l=1}^{N-1}\frac{\mu^l}{(l-1)!}e^{-\mu}+\mu\sum_{l=0}^{M}\frac{\mu^l}{l!}e^{-\mu}+2\mu\sum_{l=0}^{N-1}l\frac{\mu^l}{l!}e^{-\mu}+\mu\sum_{l=0}^{N-1}l^2\frac{\mu^l}{l!}e^{-\mu}=$$

$$l=m+1$$

$$=-\mu^3+3\mu^3-3\mu^2+\mu-3\mu^2\sum_{m=0}^{N-2}\frac{\mu^{m+1}}{m!}e^{-\mu}+2\mu\sum_{l=1}^{N-1}\frac{\mu^l}{(l-1)!}e^{-\mu}+\mu\sum_{l=1}^{N-1}l\frac{\mu^l}{(l-1)!}e^{-\mu}=$$

$$l=m+1 \qquad M=N-2$$

$$=-\mu^3+3\mu^3-3\mu^2+\mu-3\mu^3\sum_{m=0}^{M}\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}+2\mu\sum_{m=0}^{N-2}\frac{\mu^{m+1}}{m!}e^{-\mu}+\mu\sum_{m=0}^{N-2}(m+1)\frac{\mu^{m+1}}{m!}e^{-\mu}=$$

$$=-\mu^3+3\mu^3-3\mu^3-3\mu^2+\mu+2\mu^2\sum_{m=0}^{N-2}\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}+\mu^2\sum_{m=0}^{N-2}\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}+\mu^2\sum_{m=1}^{N-2}\frac{\mu^m}{(m-1)!}e^{-\mu}=$$

$$m=n+1 \qquad M=N-2$$

$$=-\mu^3+3\mu^3-3\mu^3-3\mu^2+\mu+2\mu^2\sum_{m=0}^{M}\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}+\mu^2\sum_{m=0}^{M}\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}+\mu^2\sum_{n=0}^{N-3}\frac{\mu^{n+1}}{n!}e^{-\mu}=$$

$$M=N-3$$

$$=+3\mu^3-3\mu^3-\mu^3+2\mu^2+\mu^2-3\mu^2+\mu+\mu^3\sum_{n=0}^{M}\frac{\mu^n}{n!}e^{-\mu}=$$

$$=+3\mu^3-3\mu^3+\mu^3-\mu^3+2\mu^2+\mu^2-3\mu^2+\mu=\boldsymbol{\mu}$$

Jelikož pro asymetrii platí vztah:

$$\gamma=\frac{cE_k^3}{\sigma^3}$$

Pro σ platí:

$$\sigma=\sqrt{D_k}$$

Jelikož $D_k=\mu$ dostáváme pro asymetrii Poisonova rozdělení vztah:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma=\mu^{-1/2}}}}$$

Radim Kusák
F1-X-12

Normální rozdělení

a) Střední hodnota

Pro střední hodnotu normálního rozdělení platí vztah:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Úpravami:

$$y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \qquad \sqrt{2}\sigma \cdot y + \mu = x \qquad \sqrt{2}\sigma \cdot dy = dx$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma \cdot y + \mu) \cdot e^{-y^2} dy =$$

$$z = -y^2 \qquad dy = -\frac{dz}{2y}$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-y^2} dy = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} e^{z} dz = \boldsymbol{\mu}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{E_x = \mu}}}$$

b) Disperze

Pro disperzi normálního rozdělení platí vztah:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Úpravami:

$$y=\frac{x-\mu}{\sigma} \qquad \sigma\cdot dy=dx$$

$$D_x=\frac{\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\cdot e^{-\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}}dx=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y^2\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\boldsymbol{\sigma^2}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{D_x=\sigma^2}}}$$

c) Asymetrie

Pro asymetrii normálního rozdělení platí vztah:

$$\gamma=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^3\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Úpravami:

$$y=\frac{x-\mu}{\sigma} \qquad \sigma\cdot dy=dx \qquad z=-\frac{y^2}{2} \qquad dy=-\frac{dz}{y}$$

$$\gamma=\frac{\sigma^3}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^3\cdot e^{-\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}}dx=\frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y^3\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy=-\frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\infty}z\cdot e^{z}dz=\boldsymbol{0}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma=0}}}$$

Radim Kusák
F1-X-12

Náhodná procházka

Při prvním kroku urazí člověk vzdálenost L nebo –L. Označíme-li si vzdálenost od počátku d_1 pak platí:

$$d_1 = \pm L$$

Avšak v druhé mocnině nabývá tento výraz tvar:

$$d_1^2 = L^2$$

Obdobně pro střední hodnotu tohoto výrazu:

$$\left\langle d_1^2 \right\rangle = L^2$$

Při N-tém kroku se může člověk pohybovat buď dopředu nebo dozadu, tudíž platí:

$$d_N = d_{N-1} + L \quad \text{nebo} \quad d_N = d_{N-1} - L$$

Pro druhé mocniny těchto výrazů platí:

$$d_N^2 = d_{N-1}^2 + 2d_{N-1}L + L^2 \qquad\qquad d_N^2 = d_{N-1}^2 - 2d_{N-1}L + L^2$$

Pro střední hodnotu těchto výrazů platí:

$$\left\langle d_N^2 \right\rangle = \frac{\left\langle d_{N-1}^2 + 2d_{N-1}L + L^2 \right\rangle + \left\langle d_{N-1}^2 + 2d_{N-1}L + L^2 \right\rangle}{2}$$

Odtud

$$\left\langle d_N^2 \right\rangle = \left\langle d_{N-1}^2 \right\rangle + L^2$$

Jelikož $\left\langle \mathrm{d}_1^2 \right\rangle = \mathrm{L}^2$ pak pro $\left\langle \mathrm{d}_\mathrm{N}^2 \right\rangle$ po N krocích platí:

$$\left\langle d_N^2 \right\rangle = N \cdot L^2$$

Výraz $\left\langle \mathrm{d}_\mathrm{N}^2 \right\rangle$ nám označuje střední hodnotu čtverce vzdálenosti po N krocích stejně jako $\left\langle \mathrm{x}^2 \right\rangle$, tak platí:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\left\langle x^2 \right\rangle = N \cdot L^2}}}$$

Radim Kusák
F1-X-12

Rovnoměrné, spojité rozdělení na intervalu $\langle a,b \rangle$

a) Střední hodnota

Pro střední hodnotu rovnoměrného spojitého rozdělení na intervalu $\langle a,b \rangle$ platí:

$$\mu_{ab} = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx$$

Úpravami:

$$\mu_{ab} = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \boldsymbol{\frac{a+b}{2}}$$

$$\boldsymbol{\mu_{ab} = \frac{a+b}{2}}$$

b) Disperze

Pro disperzi rovnoměrného rozdělení na intervalu $\langle a,b \rangle$ platí:

$$D_{ab} = \int_a^b (x-\mu)^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx$$

Úpravami:

$$D_{ab} = \int_a^b (x-\mu)^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \mu^2 \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b 1 dx - \frac{2\mu}{b-a} \int_a^b x dx + \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx =$$

$$= \mu^2 - \frac{2\mu}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} = \mu^2 - \mu \cdot (a+b) + \frac{a^2 + b^2 + ab}{3} =$$

$$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a^2+b^2+ab}{3}=\frac{3\cdot\left(a^2+b^2+2ab\right)-6\cdot\left(a^2+b^2+2ab\right)+4\left(a^2+b^2+ab\right)}{12}=$$

$$\frac{3a^2+3b^2+6ab-6a^2-6b^2-12ab+4a^2+4b^2+4ab}{12}=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{\boldsymbol{(a-b)^2}}{\boldsymbol{12}}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{D_{ab}=\frac{(a-b)^2}{12}}}}$$

Radim Kusák
F1-X-12

Rovnoměrné, diskrétní rozdělení na úseku $0 \leq k \leq n$

a) Střední hodnota

Z normovací podmínky pro pravděpodobnost jevu nabývajícího diskrétních hodnot na úseku $0 \leq k \leq n$ platí:

$$1 = \sum_{i=k}^{n} p(i) = \sum_{i=0}^{n} p(i) - \sum_{i=0}^{k-1} p(i) = p \cdot (n-k+1)$$

$$p = \frac{1}{n-k+1}$$

Pro střední hodnotu rovnoměrného diskrétního rozdělení na úseku $0 \leq k \leq n$ platí:

$$E_{nk} = \sum_{l=k}^{n} \frac{l}{n-k+1}$$

Úpravami:

$$E_{nk} = \frac{1}{n-k+1}\left(\sum_{l=0}^{n} l - \sum_{l=0}^{k-1} l\right) = \frac{1}{n-k+1}\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2} - \frac{(k-1)\cdot k}{2}\right] = \boldsymbol{\frac{n+k}{2}}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{E_{nk} = \frac{n+k}{2}}}}$$

b) Disperze

Pro disperzi rovnoměrného diskrétního rozdělení na úseku $0 \le k \le n$ platí:

$$D_{nk} = \sum_{l=k}^{n} \frac{\left(l - E_{nk}\right)^2}{n-k+1}$$

Úpravami:

$$D_{nk} = \frac{1}{n-k+1}\left(E_{nk}^2 \sum_{l=k}^{n} 1 - 2E_{nk}\sum_{l=k}^{n} l + \sum_{l=k}^{n} l^2\right) =$$

$$= E_{nk}^2 + \frac{1}{n-k+1}\left[-2E_{nk}\frac{(n+k)\cdot(n-k+1)}{2} + \frac{(n-k+1)\cdot\left(2n^2+n+2nk-k+2k^2\right)}{6}\right] =$$

$$= E_{nk}^2 - E_{nk}(n+k) + \frac{2n^2+n+2nk-k+2k^2}{6}$$

Dosazením za E_{nk} vztah:

$$E_{nk} = \frac{n+k}{2}$$

Dostáváme:

$$D_{nk} = \left(\frac{n+k}{2}\right)^2 - \frac{n+k}{2}\cdot(n+k) + \frac{2n^2+n+2nk-k+2k^2}{6} = \frac{(n-k+2)\cdot(n-k)}{12}$$

$$\boldsymbol{D_{nk} = \frac{(n-k+2)\cdot(n-k)}{12}}$$