1. Jaká je pravděpodobnost, že když házíme třikrát kostkou padnou tři stejné číslice? Kolikrát musíme tento experiment opakovat aby pravděpodobnost, že alespoň jednou padnou tři stejné číslice byla alespoň 0.90?

Řešení:
Házení kostkou je experiment typu náhodný výběr. Počet výsledků příznivých jevu, že padnou 3 stejné číslice je 6. Počet všech možných výsledků při házení kostkou 3-krát je 6^3. Tedy pravděpodobnost, že padnou tři stejné číslice je $6/6^3 = 1/36$.
Provádíme tedy N-krát experiment házení kostkou 3-krát a sledujeme počet případů k kolikrát nastal úspěch, tj. padly 3 stejné číslice. Pravděpodobnost úspěchu v jednom opakování je $p = 1/36$. Použijeme tedy binomické rozdělení. Požadujeme aby

$$P(k \geq 1 | N, p) \geq 0.9$$

Je mnohem výhodnější použít pravděpodobnost doplňkového jevu. Pravděpodobnost, že při N-opakování experimentu ani jednou nenastane úspěch je

$$P(k = 0 | N, p) = (1 - p)^N .$$

Tedy požadujeme

$$P(k = 0 | N, p) = (1 - p)^N \leq 1 - 0.9$$

$$(1 - p)^N \leq 0.1$$

Po zlogaritmování dostaneme

$$N \ln(1 - p) \leq \ln(0.1)$$

A z této nerovnice vyjádříme počet opakovaní N

$$N \geq \frac{\ln(0.1)}{\ln(1 - p)}$$

Znaménko nerovnosti se obrací, protože $\ln(1-p) < 0$.
Po dosazení $p = 1/36$ dostáváme $N \geq 82$.

2. Náhodná proměnná x se vyskytuje se stejnou pravděpodobností kdekoliv v intervalu $\langle -1,1 \rangle$, pro $|x| > 1$ klesá pravděpodobnost výskytu náhodné proměnné x s kvadrátem vzdálenosti od počátku.
Napište hustotu pravděpodobnosti náhodné proměnné x a její distribuční funkci.
Připojte také náčrtek obou funkcí.
Vypočtěte pravděpodobnost že $x > 1$.

Řešení:
Označme hledanou hustotu pravděpodobnosti $f(x)$. V intervalu $\langle -1,1 \rangle$ je $f(x)$ konstantní, tj. $f(x) = a$. Mimo tento interval je $f(x) = a/x^2$. Stejná hodnota konstanty a v obou vyjádřeních je nutná z důvodu spojitosti funkce $f(x)$, tj. v bodech $x = -1$ a $x = 1$ musí na sebe funkce $f(x)$ navazovat. Hodnotu konstanty a určíme z normalizační podmínky

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Po dosazení

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-1} \frac{a}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} a\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} \frac{a}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{a}{x}\right]_{-\infty}^{-1} + \left[ax\right]_{-1}^{1} + \left[-\frac{a}{x}\right]_{1}^{\infty} = a + a + a + a = 4a = 1$$

Tedy dostáváme $a = \dfrac{1}{4}$.

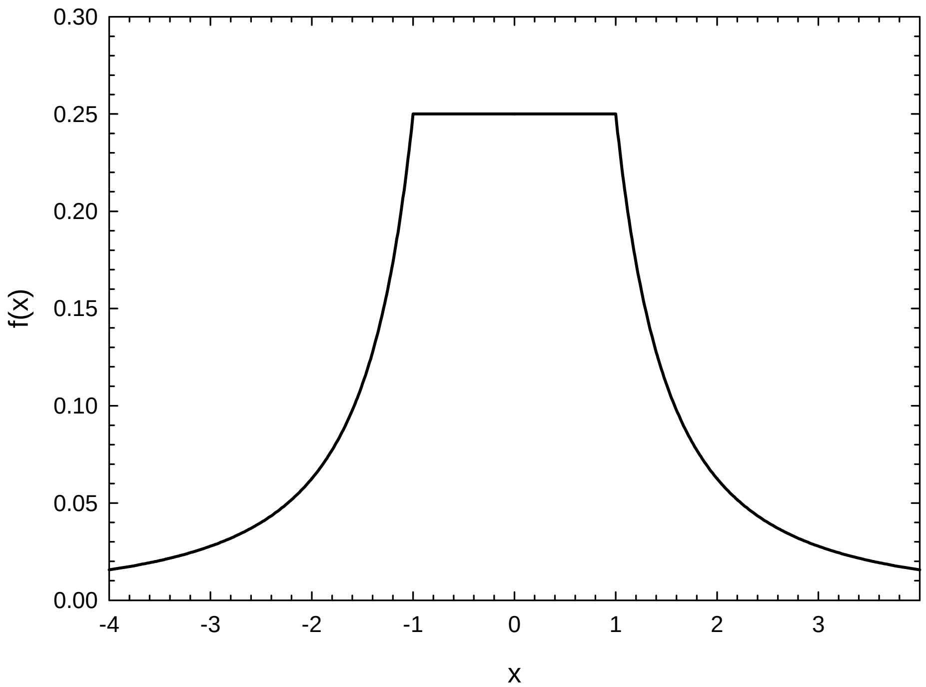
Hustotu pravděpodobnosti náhodné proměnné x můžeme tedy zapsat takto:

$$f(x) = \frac{1}{4} \quad \text{pro } |x| \le 1,$$

$$f(x) = \frac{1}{4x^2} \quad \text{pro } |x| > 1.$$

Pravděpodobnost, že $x > 1$ vypočítáme jako

$$P(x > 1) = \int_{1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4x}\right]_{1}^{\infty} = \frac{1}{4}.$$



Distribuční funkce je:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

je potřeba rozlišit několik možností:

1. pro $x \le -1$ je $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{4t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4x}$
2. pro $-1 < x < 1$ je $F(x) = F(-1) + \int_{-1}^{x} \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$
3. pro $x \ge 1$ je $F(x) = F(1) + \int_{1}^{x} \frac{1}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4x}$