

1. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná proměnná padne mimo interval  $(-2,2)$  pro standardní normální rozdělení a pro Cauchyho rozdělení?

*Řešení:*

Pravděpodobnost, že náhodná proměnná  $x$  padne mimo interval  $(-2,2)$  je

$$1 - P(x \in (-2,2)) = 1 - [F(2) - F(-2)],$$

kde  $F$  je distribuční funkce daného rozdělení.

Pro standardní normální rozdělení je distribuční funkce

$$F_{0,1}(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right].$$

$$1 - P(x \in (-2,2)) = 1 - \left[ \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( -\frac{2}{\sqrt{2}} \right) \right] = 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = 0.046$$

Pro Cauchyho rozdělení je

$$F_C(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \left( \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$1 - P(x \in (-2,2)) = 1 - \left[ \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(2) - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(-2) \right] = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(2) = 0.295$$

2. Na Zemi dopadá konstantní tok neutrin, vznikajících ve Slunci. Dlouhodobým měřením jsme zjistili, že průměrný počet neutrin detekovaných naším detektorem za den je 3.8. Jeden den jsme ale detekovali rekordní množství 9 neutrin. Jaká je pravděpodobnost, že se to stane za předpokladu, že se tok neutrin nezměnil, a jde jen o náhodnou fluktuaci?

*Řešení:*

Počet detekovaných neutrin za den je náhodná proměnná, která se řídí Poissonovým rozdělením. Tedy pravděpodobnost, že detekujeme za den  $k$  neutrin je

$$P(k|\nu) = \frac{\nu^k e^{-\nu}}{k!},$$

kde  $\nu = 3.8$  je průměrný počet neutrin detekovaných za den.

Pravděpodobnost, že vlivem náhodné fluktuace je počet detekovaných neutrin  $k \geq 9$  je

$$P(k \geq 9|\nu) = \sum_{k=9}^{\infty} \frac{\nu^k e^{-\nu}}{k!}.$$

Spočítáme pravděpodobnost doplňkového jevu, tj. pravděpodobnost, že detekujeme 0,1,2,3,4,5,6,7,8 neutrin

$$P(k \leq 8|\nu) = \sum_{k=0}^8 \frac{\nu^k e^{-\nu}}{k!} = 0.984.$$

Pravděpodobnost, že vlivem náhodné fluktuace je počet detekovaných neutrin  $k \geq 9$  je tedy  $1 - 0.984 = 0.016$ .