

Seminární úlohy 1

1. Neutrina produkovaná urychlovačem SPS v CERNu se registrují podzemním detektorem OPERA v laboratoři Gran Sasso vzdálené přibližně 730 km. Maximální chyba stanovení času vzniku a času detekce neutrina je 10 ns. Jak přesně je nutno znát vzdálenost mezi urychlovačem SPS a detektorem OPERA aby bylo možné spolehlivě detekovat překročení rychlosti světla ve vakuu ($c = 299\,792\,458$ m/s) o tisícinu procenta.

Řešení:

Rychlost neutrin je

$$c = \frac{l}{\Delta t}, \quad (1)$$

kde $l = 730$ km a $\Delta t = t_d - t_e$ je rozdíl času emise t_e a času detekce t_d neutrina. Maximální relativní chyba určení rychlosti je

$$\frac{\varepsilon_c}{c} = \frac{\varepsilon_{\Delta t}}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_l}{l}. \quad (2)$$

Maximální chyba určení času emise a detekce je stejná a označíme jí ε_t , tj. $\varepsilon_t = \varepsilon_{te} = \varepsilon_{td} = 10$ ns.

Potom maximální chyba určení časového intervalu Δt je

$$\varepsilon_{\Delta t} = 2 \varepsilon_t. \quad (3)$$

Dosazením Δt vyjádřeného z rovnice (1) a $\varepsilon_{\Delta t}$ z rovnice (3) do rovnice (2) dostáváme pro maximální relativní chybu určení rychlosti

$$\frac{\varepsilon_c}{c} = \frac{2\varepsilon_t}{l}c + \frac{\varepsilon_l}{l}. \quad (4)$$

odtud vyjádříme maximální relativní chybu vzdálenosti

$$\varepsilon_l = l \frac{\varepsilon_c}{c} - 2\varepsilon_t c. \quad (5)$$

Po dosazení číselných hodnot $\varepsilon_t = 10$ ns, $c = 299\,792\,458$ m/s, $l = 730$ km, $\frac{\varepsilon_c}{c} = 10^{-5}$ dostáváme

$$\varepsilon_l = 1.3 \text{ m.}$$

Tedy maximální chyba vzdálenosti musí být menší než 1 m.

2. Hustota vzorku se při studovaném efektu mění o 10 %. Měříme vzorek o výchozí hustotě 7874 kg m^{-3} . Hustotu měříme Archimedovou metodou, tj. vážením ve vodě a na vzduchu při pokojové teplotě. Jaká musí být minimální přesnost měření hmotnosti (maximální relativní nejistota) aby bylo možné daný efekt spolehlivě detekovat?

Řešení:

Při vážení na vzduchu navážíme hmotnost m_1

$$m_1 = V\rho \quad (1)$$

kde V je objem vzorku a ρ hustota vzorku.

Při vážení ve vodě nadnáší vzorek hydrostatická vztlaková síla proto navážíme menší hmotnost m_2

$$m_2 = V\rho - V\rho_V, \quad (2)$$

kde ρ_V hustota vody. Vztlakovou sílu vzduchu zanedbáváme protože je 1000-krát menší než vztlaková síla vody.

Kombinací rovnic (1) a (2) dostaneme

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1} = \frac{\rho_V}{\rho} \quad (3)$$

a odtud vyjádříme hustotu ρ

$$\rho = \frac{m_1}{m_1 - m_2} \rho_V. \quad (4)$$

Maximální relativní chyba hustoty je

$$\frac{\varepsilon_\rho}{\rho} = \frac{\varepsilon_{m_1}}{m_1} + \frac{\varepsilon_{m_1 - m_2}}{m_1 - m_2}. \quad (5)$$

Vzhledem k tomu, že měření na vzduchu a ve vodě provádíme na stejných vahách je rozumné předpokládat, že maximální chyba určení hmotnosti m_1 i m_2 je stejná, tj. $\varepsilon_{m_1} = \varepsilon_{m_2} \equiv \varepsilon_m$.

Tedy maximální chyba $\varepsilon_{m_1 - m_2} = 2\varepsilon_m$. Dosazením do rovnice (5) a vyjádřením $m_1 - m_2$ z rovnice (3) dostáváme

$$\frac{\varepsilon_\rho}{\rho} = \frac{\varepsilon_m}{m_1} + \frac{2\varepsilon_m}{m_1} \frac{\rho}{\rho_V} = \frac{\varepsilon_m}{m_1} \left(1 + 2 \frac{\rho}{\rho_V} \right). \quad (6)$$

Pro maximální relativní chybu vážení na vzduchu tedy dostáváme

$$\frac{\varepsilon_m}{m_1} = \frac{\varepsilon_\rho}{\rho} \left(1 + 2 \frac{\rho}{\rho_V} \right)^{-1}. \quad (7)$$

Po dosazení číselných hodnot $\frac{\varepsilon_\rho}{\rho} = 0.1$, $\rho = 7.874 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_V = 1 \text{ kg m}^{-3}$, dostáváme

$$\frac{\varepsilon_m}{m_1} \approx 0.6\%.$$

Pro určení maximální relativní vážení ve vodě upravíme rovnici (6) na tvar

$$\frac{\varepsilon_\rho}{\rho} = \frac{\varepsilon_m}{m_2} \frac{m_2}{m_1} + \frac{2\varepsilon_m}{m_2} \frac{m_2}{m_1} \frac{\rho}{\rho_V}, \quad (8)$$

s použitím vztahu $m_2 / m_1 = (\rho - \rho_V) / \rho$ dostáváme

$$\frac{\varepsilon_\rho}{\rho} = \frac{\varepsilon_m}{m_2} \frac{\rho - \rho_V}{\rho} \left(1 + 2 \frac{\rho}{\rho_V} \right), \quad (9)$$

a tedy

$$\frac{\varepsilon_m}{m_2} = \frac{\varepsilon_\rho}{\rho} \frac{\rho}{\rho - \rho_V} \left(1 + 2 \frac{\rho}{\rho_V} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Po dosazení číselných hodnot $\frac{\varepsilon_\rho}{\rho} = 0.1$, $\rho = 7.874 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_V = 1 \text{ kg m}^{-3}$, dostáváme

$$\frac{\varepsilon_m}{m_2} \approx 0.7\%.$$