Seminární úlohy 7

1. Měření náhodné proměnné x, která je výběrem z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, opakujeme 20-krát. Jaká je pravděpodobnost, že více než 2/3 naměřených hodnot bude ležet v intervalu $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$, tj. intervalu jedné standardní odchylky od očekávané hodnoty?

Řešení:

Pravděpodobnost, že náhodná proměnná z normálním rozdělením bude ležet v intervalu $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ je $p\equiv P(x\in(\mu-\sigma,\mu+\sigma))=F_{\mu,\sigma}(\mu+\sigma)-F_{\mu,\sigma}(\mu-\sigma)=erf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cong 0.683$

Pravděpodobnost, že k hodnot z N měření padne do intervalu $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ je dána binomickým rozdělením: $P(k|N,p)=\frac{N!}{(N-k)!k!}p^k(1-p)^{N-k}$, kde $N=20$, $p=0.683$.

Protože 2/3 z 20 je 13.333 je hledaná pravděpodobnost

$$P(k>13)=\sum_{k=14}^{20}P(k|20{,}0.683)=\sum_{k=14}^{20}\frac{20!}{(20-k)!k!}0.683^k 0.317^{N-k} = 0.543.$$

2. Pozitron je antičástice elektronu. Pokud se setká elektron a pozitron dojde k anihilaci a obě částice se změní na záření. Nejčastěji (v 99.27 % případech) dojde ke změně anihilujího páru elektron-pozitron na dva fotony. Zbylé vzácné případy odpovídají tří-fotonové anihilaci. Kolik opakovaných měření pozitronové anihilace je nutné provést aby pravděpodobnost, že v naměřené sadě dat bude aspoň jedna tří-fotoná anihilace byla 0.99 ? (návod: použijte binomické rozdělení).

Řešení:

Pravděpodobnost 3-fotonové anihilace je $p=1-0.9927=0.0073$.

Označme $P(k)$ pravděpodobnost, že v naměřené sadě N dat bude k tří-fotonových anihilací.Tato pravděpodobnost se řídí binomickým rozdělením

$$P(k|N,p)=\frac{N!}{(N-k)!k!}p^k(1-p)^{N-k}.$$

Pravděpodobnost, že v sadě N naměřených hodnot nebude žádná tří-fotonová událost je $P(0|N,p)=(1-p)^N$. Hledaná pravděpodobnost, že v sadě naměřených N naměřených hodnot bude aspoň 1 tří-fotonová anihilace je doplněk k pravděpodobnosti $P(0|N,p)$.

Tedy

$$1-P(0|N,p)=0.99$$

$$(1-p)^N=1-0.99$$

$$N=\frac{\ln 0.01}{\ln(1-p)}=\frac{\ln 0.01}{\ln 0.9927}\approx 629.$$