Seminární úlohy 4

1. Napište hustotu pravděpodobnosti a distribuční funkci rovnoměrného rozdělení na intervalu (a,b). Tj. rozdělení kdy se náhodná proměnná nachází se stejnou pravděpodobností kdekoli v intervalu (a,b), ale žádné hodnoty mimo tento interval nabývat nemůže. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl této náhodné proměnné.

Řešení:

Pravděpodobnost výskytu náhodné proměnné kdekoliv uvnitř intervalu (a,b) je stejná a mimo tento interval nulová. Hustota pravděpodobnosti je proto

$$f = \begin{cases} k, & \text{pro } x \in (a,b) \\ 0, & \text{pro } x \notin (a,b) \end{cases}$$

Konstantu k zjistíme z normalizační podmínky

$$\int_a^b k\,dx = 1\text{, tedy } [kx]_a^b = k(b-a) = 1.$$

Dostáváme, že

$$k = \frac{1}{b-a}.$$

Hustota pravděpodobnosti je tedy

$$f = \begin{cases} \dfrac{k}{b-a}, & \text{pro } x \in (a,b) \\ 0, & \text{pro } x \notin (a,b) \end{cases}$$

Očekávaná hodnota náhodné proměnné x je

$$E[x] = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}.$$

Rozptyl náhodné proměnné x je

$$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. Dokažte následující často používané vlastnosti pravděpodobnosti

1. $P(\{0\}) = 0$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, kde $\overline{A}$ je doplnek množiny A
3. $0 \leq P(A) \leq 1$
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Řešení:

Použijeme definiční axiomy pravděpodobnosti
(i) $P(\Omega) = 1$
(ii) $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \geq 0$
(iii) $A \cap B = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ad 1) $\Omega = \Omega \cup \{0\}$. Prázdná množina je disjuktní s každou monožinou tedy i Ω.
Podle (iii) můžeme psát $P(\Omega) = P(\Omega \cup \{0\}) = P(\Omega) + P(\{0\})$. Podle (i) je $P(\Omega) = 1$ a tedy musí být i $P(\Omega) + P(\{0\}) = 1$. Z toho dostáváme, že $P(\{0\}) = 0$.

ad 2) $\Omega = A \cup \overline{A}$ a A, $\overline{A}$ jsou disjunktní množiny. Proto podle (iii) $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$.
Platí tedy $P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$. Odtud dostáváme $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

ad 3) Nerovnost $P(A) \geq 0$ platí podle (ii). Zbývá tedy dokázat, že $P(A) \leq 1$. To provedeme sporem
Nechť B je takový jev pro který je $P(B) > 1$. Platí $B \cup \overline{B} = \Omega$ a B, $\overline{B}$ jsou disjunktní jevy. Proto podle (iii) $P(B) + P(\overline{B}) = P(\Omega) = 1$. Jelikož současně platí, že $P(B) > 1$, musí být $P(\overline{B}) < 0$. To je ale spor s axiomem (ii).

ad 4) Označme jako $B \setminus A$ doplněk množiny *B* v množině *A*, tj. $B \setminus A$ množina všech prvků, které patří do *A* ale nepatří do *B*. Protože $A \subset B$ je množinu *B* je možné psát jako sjednocení dvou disjuktních množin A a $B \setminus A$, tj. $B = A \cup B \setminus A$. Platí tedy $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$. Protože $P(B \setminus A) \geq 0$, musí být $P(B) \geq P(A)$.

ad 5) Množinu *B* lze psát jako sjednocení dvou disjunktních množin $B = (A \cap B) \cup B \setminus A$.
Podobně $A = (A \cap B) \cup A \setminus B$. Pro pravděpodobnosti tedy podle (iii) platí

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B) \qquad \text{(a1)}$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A). \qquad \text{(a2)}$$

Množinu $A \cup B$ je možné vyjádřit jako sjednocení tří disjunktních množin
$A \cup B = (A \cap B) \cup B \setminus A \cup A \setminus B$ a tedy pro praděpodobnost platí podle (iii)

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A) + P(A \setminus B) \qquad \text{(a3)}$$

Pravděpodobnosti $P(A \setminus B)$ a $P(B \setminus A)$ si vyjádříme z (a1) a (a2) a dosadíme do (a3)

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$