**Seminární úlohy 5**

**1.** Náhodná proměnná $x$ má exponenciální rozdělení popsané hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}} \quad \text{pro } x \geq 0,$$

$$f(x) = 0 \quad \text{pro } x < 0.$$

Vypočítejte

(a) očekávanou hodnotu této náhodné proměnné $\mu = \mathrm{E}[x]$

(b) distribuční funkci $\mathrm{F}(x)$ tohoto rozdělení.

(c) Jaké hodnoty nabývá distribuční funkce pro $x = \mu$ ?

(d) Jaká je pravděpodobnost, že $x$ bude větší než $\mu$ ?

*Řešení:*

Nejdříve ověříme, že hustota pravděpodobnosti je normalizovaná

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}} dx = 0 + \left[ -e^{-\frac{x}{\tau}} \right]_0^{\infty} = 1.$$

(a) Střední hodnota je

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}} dx = 0 + \left[ -xe^{-\frac{x}{\tau}} \right]_0^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{\tau}} dx = 0 + 0 + \left[ -\tau e^{-\frac{x}{\tau}} \right]_0^{\infty} = \tau.$$

Integrace byla provedena metodou *per partes*.

(b) Distribuční funkce je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \left[ -e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^{x} = 1 - e^{-\frac{x}{\tau}}.$$

(c) Hodnota distribuční funkce pro $x = \mu$ je $F(\mu) = F(\tau) = 1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}} = 1 - e^{-1}$.

(d) Pravděpodobnost, že $x > \mu$ je $P(x > \mu) = P(x > \tau) = 1 - F(\tau) = e^{-1}$.

**2.** Diskrétní náhodná proměnná *k* může nabývat hodnot všech přirozených čísel a má rozdělení popsané posloupností pravděpodobností

$$P_k = \frac{1}{e\,k!} \quad .$$

Vypočítejte střední hodnotu $\mu$ a standardní odchylku $\sigma$ této náhodné proměnné. Jaká je pravděpodonost, že $k > 4$?

*Řešení:*

Nejprve ověříme, že pravděpodobnosti jsou normované, tj. že platí $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$

Pokud použijeme Taylorův rozvoj exponenciální funkce $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, tak

dostáváme $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e\,k!} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{e} e = 1.$

Střední hodnota je:

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{e\,k!} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \frac{1}{e}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{e}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{m!} - 1\right) = \frac{1}{e}(e-1) = 1 - e^{-1} \approx 0.632,$$

kde index $m \equiv k-1$.

Pro výpočet rozptylu použijeme vztah $\sigma^2 = E\left[k^2\right] - \mu^2$.

$$E\left[k^2\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{e\,k!} = \frac{1}{e}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!}\right) = \frac{1}{e}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}\right) = \frac{1}{e}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\right) =$$

$$= \frac{1}{e}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 2 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} - 1\right) = \frac{1}{e}(e - 2 + e - 1) = 2 - 3e^{-1} \approx 0.896,$$

kde index $n \equiv k-2$ a $m \equiv k-1$.

Rozptyl je tedy $\sigma^2 = 2 - 3e^{-1} - \left(1 - e^{-1}\right)^2 = 1 - e^{-1} - e^{-2}$.

Standardní odchylka je $\sigma = \sqrt{1 - e^{-1} - e^{-2}} \approx 0.705$.

Pravděpodobnost, že $k > 4$ je $P(k > 4) = 1 - P(k \le 4) = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) \approx 0.0037.$