Úvod do praktické fyziky

1. Test

Úloha 1. (5 bodů)

Detektor neutrin detekuje v průměru 5 neutrin za den. Jedná se o neutrina vznikající ve Slunci a jejich tok dopadající na Zemi je přibližně konstantní. Jaká je pravděpodobnost, že detektor jeden den nedetekuje žádné neutrino?

Řešení

Pravděpodobnost detekce neutrina je velice nízká. Přitom na Zemi dopadá za jeden den velké množství neutrin. Počet neutrin k detekovaných za 1 den je tedy náhodná proměnná, která se řídí Poissonovým rozdělením se střední hodnotou $\nu = 5$, což je dlouhodobý průměr počtu neutrin detekovaných za den.

Pravděpodobnost detekce k neutrin za den je potom v rámci Poissonova rozdělení dána výrazem $P(k|\nu) = \frac{\nu^k e^{-\nu}}{k!}$.

Pravděpodobnost, že během jednoho dne nebude detekováno žádné neutrino je $P(k = 0|\nu = 5) = e^{-5} \cong 0.0067$.

Úloha 2. (10 bodů)

Náhodná proměnná x se vyskytuje v intervalu $(0,a)$ všude se stejnou pravděpodobností. Pro $x > a$ tato pravděpodobnost lineárně klesá z původní hodnoty tak že v $2a$ klesne na nulu. Všude mimo interval (0,2a) je pravděpodobnost výskytu náhodné proměnné x nulová. Nalezněte hustotu pravděpodobnosti této náhodné proměnné. Dále vypočítejte očekávanou hodnotu a rozptyl této náhodné proměnné.

Řešení

Protože se náhodná proměnná x vyskytuje všude uvnitř intervalu $(0,a)$ všude se stejnou pravděpodobností je hustota pravděpodobnosti v tomto intervalu konstantní. Označme tuto konstantu ξ. V intervalu $(a,2a)$ potom lineárně klesá k nule. Tuto lineární závislost můžeme obecně napsat jako $y = kx + q$. Z podmínky, že tato přímka musí procházet bodem $[a,\xi]$ a $[2a,0]$ dostáváme pro koeficienty k,q této lineární funkce dvě podmínky

$$\xi = ka + q$$
$$0 = k2a + q$$

z kterých vychází $k = -\xi/a$ a $q = 2\xi$. Pro lineární funkci dostáváme tedy předpis $\xi(-x/a + 2)$. Všude jinde je hustota pravděpodobnosti nulová. Hustotu náhodné proměnné x je tedy možné zapsat ve tvaru

$$f(x) = \begin{cases} \xi & \text{pro } x \in (0,a) \\ \xi\left(-\frac{x}{a} + 2\right) & \text{pro } x \in (a,2a) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Konstantu ξ zjistíme z normalizační podmínky na funkci $f(x)$, tj. celková plocha pod touto funkcí musí být 1). $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Pokud dosadíme do této normalizační podmínky konkrétní tvar funkce f tak dostáváme

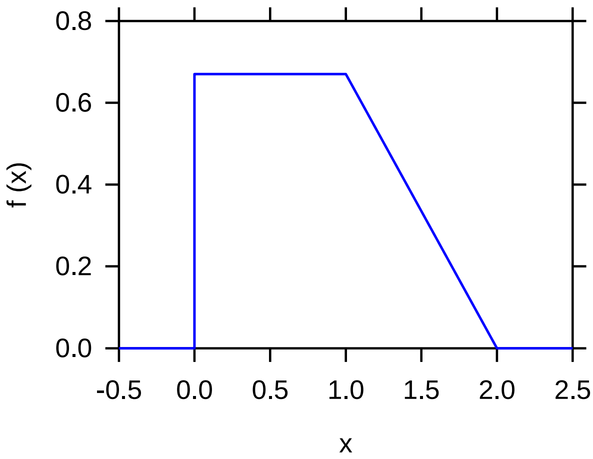
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{a} \xi dx + \int_{a}^{2a} \xi\left(-\frac{x}{a}+2\right)dx + \int_{2a}^{\infty} 0dx =$$

$$= [\xi x]_0^a + \left[\xi\left(-\frac{x^2}{2a}+2x\right)\right]_a^{2a} = \xi a - 2\xi a + 4\xi a + \xi\frac{a}{2} - 2\xi a = \xi\frac{3a}{2} = 1$$

Tedy $\xi = \frac{2}{3a}$. Hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné x má tedy vyjádření

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3a} & \text{pro } x \in (0,a) \\ \frac{2}{3a}\left(-\frac{x}{a}+2\right) & \text{pro } x \in (a,2a) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Tato funkce je nakreslena na následujícím obrázku (pro případ a = 1).



Očekávanou hodnotu μ této náhodné proměnné vypočítáme takto

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{a} \frac{2}{3a}xdx + \int_{a}^{2a} \frac{2}{3a}x\left(-\frac{x}{a}+2\right)dx + \int_{2a}^{\infty} 0dx =$$

$$= \frac{2}{3a}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a + \left[-\frac{x^3}{3a} + 2\frac{x^2}{2}\right]_a^{2a}\right\} = \frac{2}{3a}\left\{\frac{7}{6}a\right\} = \frac{7a}{9}.$$

Rozptyl σ^2 náhodné proměnné x spočítáme takto

$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2$, kde

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0x^2dx + \int_{0}^{a} \frac{2}{3a}x^2dx + \int_{a}^{2a} \frac{2}{3a}x^2\left(-\frac{x}{a}+2\right)dx + \int_{2a}^{\infty} 0x^2dx =$$

$$= \frac{2}{3a}\left\{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a + \left[-\frac{x^4}{4a} + \frac{2x^3}{3}\right]_a^{2a}\right\} = \frac{5}{6}a^2$$

Pokud tento výsledek dosadíme do vztahu pro σ^2 dostáváme, že rozptyl náhodné proměnné x je

$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2 = \frac{5}{6}a^2 - \frac{49}{81}a^2 = \frac{37}{162}a^2 \approx 0.228a^2.$