Seminární úlohy 6

1. Při měření histogramu jsme zjistily, že do i-tého binu padly 2 hodnoty. Jaké je pravděpodobnost, že při novém měření histogramu nepadne do i-tého binu žádná hodnota?

Řešení:

Pravděpodobnost, že do i-tého binu padne N hodnot je dána Poissonovým rozdělením

$$P(k|\nu)=\frac{\nu^k}{k!}e^{-\nu},$$

kde ν je střední počet hodnot v i-tém binu při opakovaném měření histogramu za stejných podmínek. Protože v daném případě máme jen jedno měření histogramu, náš odhad parametru ν je $\hat{\nu}=2$. Pravděpodobnost, že do i-tého binu nepadne žádná hodnota je $P(k=0|\nu)=e^{-\nu}$. Tedy dosazením odhadu $\hat{\nu}=2$ dostáváme $P(k=0|\hat{\nu}=2)=e^{-2}\approx 0.14$.

2. Dokažte, že v limitě $p \to 0$ a $N \to \infty$ přičemž $Np = \nu =$ konst. přejde binomické rozdělení na Poissonovo.

Řešení:

Binomické rozdělení: pravděpodobnost, že k-krát nastane úspěch je

$$P(k|N,p)=\frac{N!}{(N-k)!k!}p^k(1-p)^{N-k}, \qquad (1)$$

kde N je počet opakovaní a p je pravděpodobnost, že při jednom provedení experimentu nastane úspěch.

$Np = \nu$ a tedy můžeme v (1) místo p psát ν/N. Když to uděláme dostaneme

$$\frac{N!}{(N-k)!k!}\frac{\nu^k}{N^k}\left(1-\frac{\nu}{N}\right)^{N-k}. \qquad (2)$$

Limita výrazu (2) pro $N \to \infty$ je

$$P(k|\nu)=\lim_{N\to\infty}\frac{N!}{(N-k)!N^k}\frac{\nu^k}{k!}\left(1-\frac{\nu}{N}\right)^{N-k}=\frac{\nu^k}{k!}\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\nu}{N}\right)^{N}, \qquad (3)$$

protože ve jmenovateli i čitateli zlomku $\frac{N!}{(N-k)!N^k}$ je nejvyšší mocnina řádu N a limita pro $N \to \infty$ je pro tento zlomek 1. Navíc $\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\nu}{N}\right)^{N-k}$ je stejná jako $\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\nu}{N}\right)^{N}$.

Nyní využijeme toho, že $\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^{N}=e^x$.

V našem případě je $x = -\nu$ a vztah (3) je tedy

$$P(k|\nu)=\frac{\nu^k}{k!}\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\nu}{N}\right)^{N}=\frac{\nu^k}{k!}e^{-\nu},$$

což je Poissonovo rozdělení.