1. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná proměnná s exponenciálním rozdělením bude ležet mezi očekávanou hodnotou a mediánem?
pozn. Exponenciální rozdělení je popsané hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}} \quad \text{pro } x \geq 0,$$
$$f(x) = 0 \quad \text{pro } x < 0.$$

Medián je takové číslo pro které je hodnota distribuční funkce 0.5, tj. platí $F(m) = \frac{1}{2}$.

Řešení:

Distribuční funkce pro exponenciální rozdělení je $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau = \left[-e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x}{\tau}}$.

Hodnotu mediánu zjistíme vyřešením rovnice $1 - e^{-\frac{m}{\tau}} = \frac{1}{2}$. Dostáváme $m = \tau \ln 2$.

Očekávaná hodnota je $\mu = \int_0^\infty \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau = \tau$. Je tedy evidentně $\mu > m$.

Pravděpodobnost, že náhodná proměnná x padne do intervalu (m,μ) je

$$P(x \in (m, \mu)) = F(\mu) - F(m) = 1 - e^{-\frac{\mu}{\tau}} - \left(1 - e^{-\frac{m}{\tau}} \right) = -e^{-1} + e^{-\ln 2} = \frac{1}{2} - e^{-1} \approx 0.132.$$

2. Výška člověka je náhodná proměnná s normálním rozdělením s očekávanou hodnotou μ = 173 cm a standardní odchylkou σ = 10 cm. Kolik lidí musím potkat aby pravděpodobnost, že narazím na člověka s výškou nad 2 m byla vyšší než 90%?

Řešení:
Výška člověka x je náhodná proměnná s hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right).$$

Pravděpodobnost, že výška člověka bude větší než 2 m je $P(x > 200 \text{ cm}) = 1 - F_{\mu,\sigma}(200 \text{cm})$, kde $F_{\mu,\sigma}$ je distribuční funkce normálního rozdělení. S použitím vztahu

$$F_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right)$$ dostáváme tedy

$$P(x > 200 \text{ cm}) = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{200-173}{10\sqrt{2}} \right) \right) = 0.0035.$$

Označme tuto pravděpodobnost p.

Pokud potkám N lidí, tak pravděpodobnost, že k z nich bude vyšších než 2 m je daná binomickým rozdělením $P(k|N,p) = \frac{N!}{(N-k)!k!} p^k (1-p)^{N-k}$, kde p = 0.0035.

Pro výpočet použijeme pravděpodobnost doplňkového jevu. Pravděpodobnost, že z N lidí nebude ani jeden vyšší než 2 m je $P(0|N,p) = (1-p)^N$.

Aby platilo $1-(1-p)^N > 0.9$ musí být $(1-p)^N < 1-0.9$ a tedy $N > \dfrac{\ln 0.1}{\ln(1-p)}$.

Po dosazení $p = 0.0035$ dostáváme $N > 657$.