Radim Kusák
F1-X-12

Semestrální práce

Tloušťka destičky

Bylo změřeno:

č. měř.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d [mm]	1,23	1,20	1,42	1,21	1,26	1,24	1,20	1,27	1,20	1,24

Z naměřených hodnot určíme střední hodnotu:

$$\tilde{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$$

Pro standardní odchylku platí:

$$\tilde{\sigma}^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \tilde{d}\right)^2}$$

Pro pravděpodobnou chybu platí:

$$\tilde{\vartheta}^* = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \tilde{d}\right)^2}$$

Pro střední kvadratickou chybu aritmetického průměru platí:

$$\frac{\tilde{\sigma}^*}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \tilde{d}\right)^2}$$

Pro relativní odchylku platí:

$$\tilde{\eta}^* = \frac{\tilde{\sigma}^*}{\tilde{d}}$$

Popř.:

$$\tilde{\eta}_2^* = \frac{\tilde{\sigma}^*}{\sqrt{n}\cdot\tilde{d}}$$

Číselně

Střední hodnota:

$$\tilde{d} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} d_i \qquad \tilde{d} = 1{,}247\,\text{mm}$$

Standardní odchylka:

$$\tilde{\sigma}^* = \sqrt{\frac{1}{10-1}\cdot\sum_{i=1}^{10}\left(d_i - \tilde{d}\right)^2} \qquad \tilde{\sigma}^* = 0{,}066\,\text{mm}$$

Pravděpodobná chyba:

$$\tilde{\vartheta}^* = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{10\cdot(10-1)}\cdot\sum_{i=1}^{10}\left(d_i - \tilde{d}\right)^2} \qquad \tilde{\vartheta}^* = 0{,}014\,\text{mm}$$

Střední kvadratická chyba aritmetického průměru:

$$\frac{\tilde{\sigma}^*}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{10\cdot(10-1)}\sum_{i=1}^{10}\left(d_i - \tilde{d}\right)^2} \qquad \frac{\tilde{\sigma}^*}{\sqrt{n}} = 0{,}021\,\text{mm}$$

Relativní odchylka:

$$\tilde{\eta}^* = \frac{\tilde{\sigma}^*}{\tilde{d}} \qquad \tilde{\eta}^* = 5{,}3\,\%$$

Popř.:

$$\tilde{\eta}_2^* = \frac{\tilde{\sigma}^*}{\sqrt{n}\cdot\tilde{d}} \qquad \tilde{\eta}_2^* = 1{,}7\,\%$$

Výsledek měření

a,b)

$$\boldsymbol{d = (1{,}247 \pm 0{,}066)\ \mathrm{mm}}$$

Tloušťka destičky je (1,247±0,066) mm, toto měření je s relativní chybou 5,3%. Pravděpodobná chyba je 0,014mm.

c)

$$\boldsymbol{d = (1{,}247 \pm 0{,}021)\ \mathrm{mm}}$$

Tloušťka destičky je (1,247±0,021) mm, toto měření je s relativní chybou 1,7%.

Radim Kusák
F1-X-12

Viskozita

Bylo změřeno:

č. měření	1	2	3	4	5
t [s]	368,34	366,4	368,58	367,02	367,3

$d = (1{,}29 \pm 0{,}03)$ mm

$l = (147{,}4 \pm 0{,}1)$ mm

$h = (6{,}5 \pm 0{,}2)$ mm

$V = (100 \pm 1)$ ml

$\rho = 1000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

$g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

(Reakční doba experimentátora $t_0 \sim 0{,}2$s)

Pro střední hodnotu času platí:

$$\tilde{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$$

Pro disperzi času platí:

$$\left(\tilde{\sigma}_t^*\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \tilde{t}\right)^2$$

Disperze experimentátora:

$$\sigma_{t_0}^2 = \left(\frac{t_0}{3}\right)^2$$

Jelikož disperze experimentátora je zanedbatelná vůči disperzi statistické, tak pro celkovou disperzi času platí:

$$\left(\tilde{\sigma}_{t_{cel}}^*\right)^2 = \left(\tilde{\sigma}_t^*\right)^2$$

Pro viskozitu platí vztah:

$$\eta = \frac{\pi p t r^4}{8Vl}$$

Úpravou:

$$\eta = \frac{\pi \rho g}{128} \cdot \frac{h t d^4}{Vl}$$

Pro střední hodnotu viskozity platí:

$$\tilde{\eta} = \frac{\pi \rho g}{128} \cdot \frac{\tilde{h}\tilde{t}\tilde{d}^4}{\tilde{V}\tilde{l}}$$

Odhad střední hodnoty disperze viskozity:

$$\left(\tilde{\sigma}_\eta^2\right)^* = \left(\frac{\partial\left(\frac{\pi\rho g}{128}\cdot\frac{\tilde{h}\tilde{t}\tilde{d}^4}{\tilde{V}\tilde{l}}\right)}{\partial h}\right)^2_{\tilde{h},\tilde{t},\tilde{d},\tilde{l},\tilde{V}} \cdot \left(\tilde{\sigma}_h^2\right)^* + \left(\frac{\partial\left(\frac{\pi\rho g}{128}\cdot\frac{\tilde{h}\tilde{t}\tilde{d}^4}{\tilde{V}\tilde{l}}\right)}{\partial t}\right)^2_{\tilde{h},\tilde{t},\tilde{d},\tilde{l},\tilde{V}} \cdot \left(\tilde{\sigma}_{t_{cel}}^2\right)^* + \left(\frac{\partial\left(\frac{\pi\rho g}{128}\cdot\frac{\tilde{h}\tilde{t}\tilde{d}^4}{\tilde{V}\tilde{l}}\right)}{\partial d}\right)^2_{\tilde{h},\tilde{t},\tilde{d},\tilde{l},\tilde{V}} \cdot \left(\tilde{\sigma}_d^2\right)^*$$

$$+ \left(\frac{\partial\left(\frac{\pi\rho g}{128}\cdot\frac{\tilde{h}\tilde{t}\tilde{d}^4}{\tilde{V}\tilde{l}}\right)}{\partial l}\right)^2_{\tilde{h},\tilde{t},\tilde{d},\tilde{l},\tilde{V}} \cdot \left(\tilde{\sigma}_l^2\right)^* + \left(\frac{\partial\left(\frac{\pi\rho g}{128}\cdot\frac{\tilde{h}\tilde{t}\tilde{d}^4}{\tilde{V}\tilde{l}}\right)}{\partial V}\right)^2_{\tilde{h},\tilde{t},\tilde{d},\tilde{l},\tilde{V}} \cdot \left(\tilde{\sigma}_V^2\right)^*$$

Úpravou:

$$\left(\tilde{\sigma}_\eta^2\right)^* = \frac{\pi^2\rho^2 g^2}{128^2\tilde{V}^2\tilde{l}^2}\cdot\left[\tilde{t}^2\tilde{d}^8\cdot\left(\tilde{\sigma}_h^2\right)^* + \tilde{h}^2\tilde{d}^8\cdot\left(\tilde{\sigma}_t^2\right)^* + 16\cdot\tilde{t}^2\tilde{h}^2\tilde{d}^6\left(\tilde{\sigma}_d^2\right)^* + \frac{\tilde{h}^2\tilde{t}^2\tilde{d}^8}{\tilde{l}^2}\cdot\left(\tilde{\sigma}_l^2\right)^* + \frac{\tilde{h}^2\tilde{t}^2\tilde{d}^8}{\tilde{V}^2}\cdot\left(\tilde{\sigma}_V^2\right)^*\right]$$

Odtud:

$$\tilde{\sigma}_\eta^* = \frac{\pi\rho g}{128\cdot\tilde{V}\tilde{l}}\sqrt{\tilde{t}^2\tilde{d}^8\cdot\left(\tilde{\sigma}_h^2\right)^* + \tilde{h}^2\tilde{d}^8\cdot\left(\tilde{\sigma}_t^2\right)^* + 16\cdot\tilde{t}^2\tilde{h}^2\tilde{d}^6\left(\tilde{\sigma}_d^2\right)^* + \frac{\tilde{h}^2\tilde{t}^2\tilde{d}^8}{\tilde{l}^2}\cdot\left(\tilde{\sigma}_l^2\right)^* + \frac{\tilde{h}^2\tilde{t}^2\tilde{d}^8}{\tilde{V}^2}\cdot\left(\tilde{\sigma}_V^2\right)^*}$$

Pro relativní odchylku platí:

$$\eta_\eta = \sqrt{\frac{\left(\widetilde{\sigma}_\eta^2\right)^*}{\eta^2}}$$

Úpravou:

$$\eta_\eta = \sqrt{\frac{\left(\widetilde{\sigma}_h^2\right)^*}{\widetilde{h}^2} + \frac{\left(\widetilde{\sigma}_t^2\right)^*}{\widetilde{t}^2} + 16 \cdot \frac{\left(\widetilde{\sigma}_d^2\right)^*}{\widetilde{d}^2} + \frac{\left(\widetilde{\sigma}_V^2\right)^*}{\widetilde{V}^2} + \frac{\left(\widetilde{\sigma}_l^2\right)^*}{\widetilde{l}^2}}$$

Číselně:

Střední hodnota času (nezaokrouhleno):

$$\widetilde{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \qquad \widetilde{t} = 367{,}528\,\mathrm{s}$$

Disperze času (nezaokrouhleno):

$$\left(\widetilde{\sigma}_t^*\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \widetilde{t}\right)^2 \qquad \left(\widetilde{\sigma}_t^*\right)^2 = 0{,}83712\,\mathrm{s}^2 \qquad \sigma_{t_0}^2 = \left(\frac{t_0}{3}\right)^2 \qquad \sigma_{t_0}^2 = 4{,}\overline{4} \cdot 10^{-5}\, s^2$$

Výsledný čas ($\sigma_{t_0}^2$ je zanedbatelné):

$$t = (367{,}5 \pm 0{,}9)\,\mathrm{s}$$

Odchylka viskozity:

$$\widetilde{\sigma}_\eta^* = \frac{\pi\rho g}{128 \cdot \widetilde{V}\widetilde{l}}\sqrt{\widetilde{t}^2\widetilde{d}^8 \cdot \left(\widetilde{\sigma}_h^2\right)^* + \widetilde{h}^2\widetilde{d}^8 \cdot \left(\widetilde{\sigma}_t^2\right)^* + 16 \cdot \widetilde{t}^2\widetilde{h}^2\widetilde{d}^6\left(\widetilde{\sigma}_d^2\right)^* + \frac{\widetilde{h}^2\widetilde{t}^2\widetilde{d}^8}{\widetilde{l}^2} \cdot \left(\widetilde{\sigma}_l^2\right)^* + \frac{\widetilde{h}^2\widetilde{t}^2\widetilde{d}^8}{\widetilde{V}^2} \cdot \left(\widetilde{\sigma}_V^2\right)^*}$$

$$\boldsymbol{\widetilde{\sigma}_\eta^* = 1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}}$$

Střední hodnota viskozity (zaokrouhleno):

$$\tilde{\eta} = \frac{\pi \rho g}{128} \cdot \frac{\tilde{h}\,\tilde{t}\,\tilde{d}^4}{\tilde{V}\tilde{l}} \qquad \tilde{\eta} = \frac{\pi \cdot 1000 \cdot 9{,}81}{128} \cdot \frac{6{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 367{,}5 \cdot (1{,}29 \cdot 10^{-3})^4}{0{,}1 \cdot 147{,}4 \cdot 10^{-3}}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

$$\boldsymbol{\tilde{\eta} = 1{,}1 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}}$$

Relativní odchylka viskozity:

$$\eta_\eta = \sqrt{\frac{\left(\tilde{\sigma}_h^2\right)^*}{\tilde{h}^2} + \frac{\left(\tilde{\sigma}_t^2\right)^*}{\tilde{t}^2} + 16 \cdot \frac{\left(\tilde{\sigma}_d^2\right)^*}{\tilde{d}^2} + \frac{\left(\tilde{\sigma}_V^2\right)^*}{\tilde{V}^2} + \frac{\left(\tilde{\sigma}_l^2\right)^*}{\tilde{l}^2}}$$

$$\boldsymbol{\eta_\eta = 9{,}9\%}$$

$$\boldsymbol{\eta = (1{,}1 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}}$$

Výsledek měření

Dynamická viskozita vody je $(1{,}1 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-4}$Pa·s. Toto měření je zatíženo relativní chybou 9,9%. Toto měření obsahuje systematickou chybu, jelikož hodnota dynamické viskozity udávaná např. v studijních textech FO je $1{,}065 \cdot 10^{-3}$Pa·s.

Radim Kusák
F1-X-12

Tuhost pružiny

Bylo změřeno:

m [g]	0	5	10	15	20	25	30
y [cm]	0	2,5	4,7	7,1	9,4	11,7	13,7

m [g]	35	40	45	50	55	60	70
y [cm]	17	18,4	19,7	22,8	25	27,1	31,3

m [g]	80	90	100	110	120	130
y [cm]	34,8	39,9	44,5	48,5	52,9	57,3

Jelikož chybu veličiny y je možno ve všech bodech považovat za stejnou, platí pro střední hodnotu tuhosti pružiny:

$$\widetilde{k} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Použitím vztahu F = m·g a jelikož g je konstanta platí:

$$\widetilde{k} = g \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Chybu tuhosti pružiny určíme ze vztahu:

$$\left(\widetilde{\sigma}_k^*\right)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(F_i - \widetilde{k} \cdot y_i\right)^2$$

Úpravou:

$$\tilde{\sigma}_k^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i \cdot g - \tilde{k} \cdot y_i\right)^2}$$

Pro relativní odchylku platí:

$$\eta_k = \frac{\tilde{\sigma}_k^*}{\tilde{k}}$$

Úpravou:

$$\eta_k = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i \cdot g - \tilde{k} \cdot y_i\right)^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2}{g \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}$$

Číselně:

Střední hodnota tuhosti pružiny (nezaokrouhleno):

$$\tilde{k} = g \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \qquad \tilde{k} = 2{,}207309\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

Chyba tuhosti pružiny:

$$\tilde{\sigma}_k^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i \cdot g - \tilde{k} \cdot y_i\right)^2} \qquad \tilde{\sigma}_k^* = 0{,}012\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

Relativní odchylka:

$$\eta_k = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i \cdot g - \widetilde{k} \cdot y_i\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2}}{g \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i} \qquad \eta_k = 0{,}54\,\%$$

Výsledek měření

$$\underline{\underline{\boldsymbol{k} = \mathbf{(2{,}207 \pm 0{,}012)\,N \cdot m^{-1}}}}$$

Tuhost pružiny je $(2{,}207 \pm 0{,}012)\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$. Toto měření je zatíženo relativní chybou 0,54%. Výpočty a graf viz níže.