Seminární úloha 2.2.:
Dokažte, že Normální rozdělení má v bodech $x = \mu \pm \sigma$ inflexní body.

Tvrzení dokážeme tím, že ukážeme, že v bodech $x = \mu \pm \sigma$ je druhá derivace rovna nule.

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$p'(x) = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} * \frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2}$$

$$p''(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} * \frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2} * \frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2} - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} * \frac{1}{\sigma^2}$$

$$p''(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} * \left(\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2} * \frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2}\right)$$

$$p''(\mu \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\pm\sigma)^2}{2\sigma^2}} * \left(\frac{2(\pm\sigma)}{2\sigma^2} * \frac{2(\pm\sigma)}{2\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2}\right)$$

$$p''(\mu \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\pm\sigma)^2}{2\sigma^2}} * \left(\frac{\pm 1}{\sigma} * \frac{\pm 1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^2}\right)$$

$$p''(\mu \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\pm\sigma)^2}{2\sigma^2}} * (0)$$

Vidíme, že pro $x = \mu \pm \sigma$ je druhá derivace skutečně rovna nule.

Seminární úloha 2.3.:
Dokažte, že pro Binomické rozdělení platí:

Dk = N.p.(1-p)   a   μk3c = N.p.(1-p).(1-2p)

Poznámka: pro p = 1/2 je μk3c = 0 a rozdělení je symetrické kolem střední hodnoty.

a)
V případě binomického rozdělení platí

$$D_k = \sum_{k=0}^{N} (k-\mu)^2 * p(k) = \sum_{k=0}^{N} (k-\mu)^2 * \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} (k-\mu)^2 * \frac{N!}{(N-k)!*k!} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$D_k = \sum_{k=0}^{N} (k^2 - 2k\mu + \mu^2) * \frac{N!}{(N-k)!*k!} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$D_k = \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{N!}{(N-k)!*k!} p^k (1-p)^{N-k} - \sum_{k=0}^{N} 2k\mu \frac{N!}{(N-k)!*k!} p^k (1-p)^{N-k} + \sum_{k=0}^{N} \mu^2 \frac{N!}{(N-k)!*k!} p^k (1-p)^{N-k}$$

Z normovací podmínky víme, že $\mu^2 \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{(N-k)!*k!} p^k (1-p)^{N-k} = \mu^2 * 1 = \mu^2$. Upravujeme dále:

$$D_k = \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{N!}{(N-k)!*k!} p^k (1-p)^{N-k} - \sum_{k=0}^{N} 2k\mu \frac{N!}{(N-k)!*k!} p^k (1-p)^{N-k} + \mu^2$$

$$D_k = \sum_{k=1}^{N} k \frac{N!}{(N-k)!*(k-1)!} p^k (1-p)^{N-k} - 2\mu \sum_{k=1}^{N} k \frac{N!}{(N-k)!*k!} p^k (1-p)^{N-k} + \mu^2$$

$$D_k = p \sum_{k=1}^{N} \frac{N!}{(N-k)!*(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{N-k} + p \sum_{k=1}^{N} (k-1) \frac{N!}{(N-k)!*(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{N-k} - 2\mu\mu p + \mu^2$$

$$D_k = pN + p \sum_{k=1}^{N} (k-1) \frac{N!}{(N-k)!*(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{N-k} - 2\mu\mu p + \mu^2$$

$$D_k = pN + p^2 \sum_{k=1}^{N} \frac{N!}{(N-k)!*(k-2)!} p^{k-2} (1-p)^{N-k} - 2\mu\mu p + \mu^2$$

$$D_k = pN + p^2 (N^2 - N) - 2\mu\mu p + \mu^2 = pN + p^2 N^2 - p^2 N - 2pNpN + p^2 N^2$$

$$D_k = pN(1-p)$$

---

b)
Pro třetí centrální moment binomického rozdělení platí vztah:

$$cE_k^3 = \sum_{k=0}^{N} (k-\mu)^3 \frac{N!}{(N-k)!*k!} p^k (1-p)^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} (k^3 - 3\mu\mu^2 + 3k\mu^2 - \mu^3) \frac{N!}{(N-k)!*k!} p^k (1-p) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} k^3 \frac{N!}{(N-k)!*k!} p^k (1-p) - \sum_{k=0}^{N} 3\mu\mu^2 \frac{N!}{(N-k)!*k!} p^k (1-p) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N} 3k\mu^2 \frac{N!}{(N-k)!*k!} p^k (1-p) - \mu^3 \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{(N-k)!*k!} p^k (1-p)$$

$$cE_k^3 = pN + 3p^2 N(N-1) + p^3 N(N-1)(N-2) - 3\mu(pN + p^2 N(N-1)) + +3\mu^2 pN - \mu^3$$

$$cE_k^3 = Np(1-p)(1-2p)$$

Seminární úloha 2.4.:
Dokažte, že pro Poissonovo rozdělení platí:

a) <k> = μ, b) Dk = μ, c) γ = μ-1/2

a)

$$\langle k\rangle = \sum_{k=0}^{N} k * p_{(k)}$$

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = 1 \text{ a z toho: } \langle k\rangle = \sum_{k=0}^{N} k\frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\mu^k}{(k-1)!} e^{-\mu} = \mu\sum_{k=1}^{N} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu} = \mu$$

b)

Pro disperzi Poissonova rozdělení platí vztah:

$$D_k = \sum_{k=0}^{N} (k-\mu)^2 \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} - 2\mu\sum_{k=0}^{N} k\frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} + \mu^2\sum_{k=0}^{N} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$D_k = \mu^2 - 2\mu^2 + \mu + \mu^2 = \mu$$

c)

$$cE_k^3 = \sum_{k=0}^{N} (k-\mu)^3 * \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$cE_k^3 = \sum_{k=0}^{N} k^3 \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} - 3\mu \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} + 3\mu^2 \sum_{k=0}^{N} k\frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} - \mu^3 \sum_{k=0}^{N} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$cE_k^3 = \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{\mu^k}{(k-1)!} e^{-\mu} - 3\mu \sum_{k=0}^{N} k\frac{\mu^k}{(k-1)!} e^{-\mu} + 3\mu^2 \sum_{k=0}^{N} \frac{\mu^k}{(k-1)!} e^{-\mu} - \mu^3$$

$$cE_k^3 = \mu\sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu} - 3\mu^2 \sum_{k=0}^{N} k\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu} + 3\mu^3 \sum_{k=0}^{N} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu} - \mu^3$$

$$cE_k^3 = \mu\sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu} - 3\mu^2 \sum_{k=0}^{N} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu} - 3\mu^2 \sum_{k=0}^{N} (k-1)\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu} + 3\mu^3 \sum_{k=0}^{N} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu} - \mu^3$$

$$cE_k^3 = \mu\sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu} - 3\mu^2 - 3\mu^2 \sum_{k=0}^{N} \frac{\mu^{k-1}}{(k-2)!} e^{-\mu} + 3\mu^3 - \mu^3$$

...

$$cE_k^3 = 3\mu^3 - 3\mu^3 - \mu^3 + 2\mu^2 + \mu^2 - 3\mu^2 + \mu + \mu^3$$

$$cE_k^3 = \mu$$

$$\gamma = \frac{cE_k^3}{\sigma^3},\ \sigma = \sqrt{D_k},\ D_k = \mu \text{ a tedy } \underline{\gamma = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^3}} = 1/\sqrt{\mu}}$$

Seminární úloha 2.5.:
Dokažte, že pro Normální rozdělení platí:
a) <x> = μ, b) Dx = σ2, c) γ = 0

a)

Pro střední hodnotu platí $<x>=\int_{-\infty}^{+\infty} x * p_{(x)} dx$, pro normální rozdělení je hustota pravděpodobnosti $p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, po dosazení dostáváme

$$<x>=\int_{-\infty}^{+\infty} x * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * \int_{-\infty}^{+\infty} x * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$<x>=\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} * \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$<x>=\frac{\mu}{\sqrt{\pi}} * \sqrt{\pi} * + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$<x>=\frac{\mu}{\sqrt{\pi}} * \sqrt{\pi} * +0$$

$$<x>=\mu$$

---

b)

$$D_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$$

c)

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^3 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sigma^3}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)^3 * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 0$$

Seminární úloha 2.6.:
Dokažte, že při „náhodné procházce“ (random walk) platí pro střední hodnotu čtverce vzdálenosti uražené po N krocích: μ_{x2}=NL^2.

Po prvním kroku je střední hodnota čtverce vzdálenosti $\mu_{x^2} = (\pm L)^2 = L^2$. Při dalším kroku se ke vzdálenosti přičte $\pm L$. Dostáváme: $x_{N+1}^2 = (x_N \pm L)^2 = \left(\sqrt{\mu_{x^2}} \pm L\right)^2 = \mu_{x^2} \pm 2\sqrt{\mu_{x^2}} L + L^2$.

Pro střední hodnotu potom: $\mu_{x_{N+1}^2} = \frac{\left\langle \mu_{x^2} + 2\sqrt{\mu_{x^2}} L + L^2 \right\rangle + \left\langle \mu_{x^2} - 2\sqrt{\mu_{x^2}} L + L^2 \right\rangle}{2} = \mu_{x_N^2} + L^2$.

Jelikož $\mu_{x_1^2} = L^2$, tak po N krocích je $\mu_{x_1^2} = NL^2$.

Seminární úloha 2.7.:
Vypočítejte střední hodnotu a dispersi rovnoměrného, spojitého rozdělení v intervalu <a,b>.

a) střední hodnosta

Budeme vycházet ze vztahu $\mu_{ab} = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx$. Upravujeme:

$$\mu_{ab} = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2b-2a} - \frac{a^2}{2b-2a} = \frac{(a+b)(a-b)}{2b-2a} = \frac{a+b}{2}$$

b) disperze

Budeme vycházet ze vztahu $D_{ab} = \int_a^b (x - \mu)^2 \frac{1}{b-a} dx$. Upravujeme:

$$D_{ab} = \int_a^b (x - \mu)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x^2 - 2x\mu + \mu^2) dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3}{3} + b^2\mu - \frac{a^3}{3} - a^2\mu + \mu^2 b - \mu^2 a \right) =$$

$$= \frac{a^2 + ab + b^2 - 3\mu(a+b) + 3\mu^2}{3} = \frac{\frac{1}{4}a^2 - \frac{2}{4}ab + \frac{1}{4}b^2}{3} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Seminární úloha 2.8.:
Vypočítejte střední hodnotu a dispersi rovnoměrného diskrétního rozdělení veličiny k v intervalu $k \in <1,N>$.

a) střední hodnosta

$$E_{kn} = \sum_{l=k}^{n} \frac{l}{n-k+1} = E_{kn} = \frac{1}{n-k+1} \left[\sum_{l=0}^{n} l - \sum_{l=0}^{k-1} l \right] = \frac{1}{n-k+1} \left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} \right] = \frac{n+k}{2}$$

b) disperze

$$D_{kn} = \sum_{l=k}^{n} \frac{(l - E_{kn})^2}{n-k+1} = \frac{1}{n-k+1} \left(E_{kn}^2 \sum_{l=k}^{n} l - E_{kn} \sum_{l=k}^{n} l + \sum_{l=k}^{n} l^2 \right) = \frac{6E_{kn}^2 - 6E_{kn}(n+k) + 2n^2 + n + 2kn + k + 2k^2}{6} =$$

$$= \frac{6\left(\frac{n+k}{2}\right)^2 - 6\frac{n+k}{2}(n+k) + 2n^2 + n + 2kn + k + 2k^2}{6} = \frac{(n-k+2)(n-k)}{12}$$

Seminární úloha 3.1.:
Odvoďte výše uvedený vztah pro odhad disperse normálního rozdělení.

Budeme vycházet ze vztahu: $\dfrac{\partial \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{\partial\sigma} = 0$

$$\frac{\partial \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{\partial\sigma} = \frac{\partial \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{\partial\sigma} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n * \left\{ -n \frac{\tilde{\sigma}^{-n}}{\tilde{\sigma}} e^{-\tilde{\sigma}^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \tilde{\mu})^2}{2}} + \tilde{\sigma}^{-n} \left(e^{-\tilde{\sigma}^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \tilde{\mu})^2}{2}} \right) \left[2\tilde{\sigma}^{-3} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \tilde{\mu})^2}{2} \right] \right\} = 0$$

Máme na paměti, že výraz je roven nule:

$$0=\frac{1}{\tilde{\sigma}^3}*\sum_{i=1}^{n}(x_i-\tilde{\mu})^2-\frac{n}{\tilde{\sigma}};\ \rightarrow \tilde{\sigma}^2=\frac{1}{n}*\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\tilde{\mu}\right)^2$$

Seminární úloha 3.2.:
Dokažte, že v případě Binomického rozdělení je při n-násobném nezávislém opakování experimentu odhadem parametru p (pravděpodobnost) veličina:
kde ki je počet pozitivních výsledků při každém z n opakování.

$$0=\frac{\partial\prod_{i=1}^{n}\binom{n}{k_i}p^{k_i}(1-p)^{N-k_i}}{\partial\sigma}=\frac{\partial\left[p^{\sum_{i=1}^{n}k_1}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}N-k_1}\prod_{i=1}^{n}\binom{n}{k_i}\right]}{\partial\sigma}=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\binom{n}{k_i}*\left[\tilde{p}^{-1+\sum_{i=1}^{n}k_1}*\sum k_i(1-\tilde{p})^{\sum_{i=1}^{n}N-k_1}-\tilde{p}^{\sum_{i=1}^{n}k_1}*\sum k_i(1-\tilde{p})^{-1+\sum_{i=1}^{n}N-k_1}\sum_{i=1}^{n}(N-k_i)\right]$$

Odtud:

$$\frac{1}{\tilde{p}}*\sum_{i=1}^{n}k_i+\frac{-nN+\sum_{i=1}^{n}k_i}{1-\tilde{p}}\rightarrow \tilde{p}=\frac{1}{n}*\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{N}$$

Seminární úloha 3.3.:
Dokažte, že při n-násobném nezávislém opakování experimentu je podle principu maximální pravděpodobnosti v případě Poissonova rozdělení odhadem parametru μ veličina: $\tilde{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k_i$

$$0=\frac{\partial\left[\prod_{i=1}^{n}\frac{\mu^{k_i}}{k_i!}e^{-\mu}\right]}{\partial\mu}=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i!}\right)\left(e^{-n\tilde{\mu}}*\tilde{\mu}^{-1+\sum_{i=1}^{n}k_i}*\sum k_i-n*e^{-n\tilde{\mu}}*\tilde{\mu}^{\sum_{i=1}^{n}k_i}\right)\Rightarrow\frac{1}{\tilde{\mu}}*\sum_{i=1}^{n}k_i-n=0$$

Odtud potom: $\tilde{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k_i$

Seminární úloha 3.4

$$\tilde{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{N}$$

z toho střední hodnota je rovna:

$$\langle\tilde{p}\rangle=\left\langle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{N}\right\rangle=\frac{1}{nN}\sum_{i=1}^{n}\langle k_i\rangle$$

dále víme, že $\langle k_i\rangle=k$, dosadíme:

$$\langle \tilde{p} \rangle = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{n} k = \frac{1}{nN} nk = \frac{k}{N}$$

Vztah pro $\langle \tilde{p} \rangle$ je tedy stejný jako pro p, jedná se tedy o nevychýlený odhad.

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i$$

a opět střední hodnota:

$$\langle \tilde{\mu} \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i \right\rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \langle k_i \rangle = \frac{1}{n} nk = k$$

Tento vztah je opět stejný jako vztah pro μ, jde tedy opět nevychýlený odhad.

Seminární úloha 3.5

$$d = (1{,}26 \pm 0{,}02)\text{mm}$$
$$\tilde{d} = 1{,}26\text{mm}$$
$$\tilde{\sigma}_d = 0{,}02\text{mm}$$

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$
$$\tilde{S} = \frac{\pi \cdot \tilde{d}^2}{4}$$

$$\tilde{\sigma}_S^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial d}\right)_{\tilde{d}}^2 \cdot \tilde{\sigma}_d^2 = \left(\frac{\pi \cdot \tilde{d}}{2}\right)^2 \tilde{\sigma}_d^2 = \frac{\pi^2 \cdot \tilde{d}^2}{4} \tilde{\sigma}_d^2 \Rightarrow \tilde{\sigma}_S = \frac{\pi \cdot \tilde{d}}{2} \tilde{\sigma}_d$$

Pro $\tilde{\eta}_S^2$ platí:

$\tilde{\eta}_S^2 = \frac{\tilde{\sigma}_S^2}{\tilde{S}^2}$, po dosazení $\tilde{\eta}_S = \frac{2 \cdot \tilde{\sigma}_d}{\tilde{d}}$

Nyní dosadíme konkrétní hodnoty:

$$\tilde{\sigma}_S = \frac{\pi \cdot 1{,}26}{2} \cdot 0{,}02 \cong \mathbf{0{,}040mm^2}$$

$$\tilde{S} = \frac{\pi \cdot 1{,}26^2}{4} \cong \mathbf{1{,}247mm^2}$$

$$\tilde{\eta}_S = \frac{2 \cdot 0{,}02}{1{,}26} \cdot 100\% \cong \mathbf{3{,}2\%}$$

Průřez vlákna je $(1{,}247 \pm 0{,}040)\mathrm{mm}^2$, relativní odchylka je 3,2%.

Seminární úloha 3.6

Známe: $\tilde{J}, \tilde{l}, \tilde{r}, \tilde{T}, \tilde{\sigma}_J, \tilde{\sigma}_l, \tilde{\sigma}_r, \tilde{\sigma}_T$.

$$G = \frac{8\pi J l}{r^4 T^2} \Rightarrow \mathbf{\tilde{G}} = \frac{\mathbf{8\pi \tilde{J}\tilde{l}}}{\mathbf{\tilde{r}^4\tilde{T}^2}}$$

$$\tilde{\sigma}_G^2 = \sum_{i=1}^{4}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x_i}\right)_{\tilde{J},\tilde{l},\tilde{r},\tilde{T}}^2 \sigma_{x_i}{}^2\right] = \left(\frac{\partial G}{\partial J}\right)^2 \cdot \tilde{\sigma}_J^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial l}\right)^2 \cdot \tilde{\sigma}_l^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)^2 \cdot \tilde{\sigma}_r^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)^2 \cdot \tilde{\sigma}_T^2 =$$

$$= \left(8\pi\tilde{l}\,\tilde{r}^{-4}\tilde{T}^{-2}\right)^2 \cdot \tilde{\sigma}_J^2 + \left(8\pi\tilde{J}\tilde{r}^{-4}\tilde{T}^{-2}\right)^2 \cdot \tilde{\sigma}_l^2 + \left(32\pi\tilde{J}\tilde{l}\,\tilde{r}^{-5}\tilde{T}^{-2}\right)^2 \cdot \tilde{\sigma}_r^2 + \left(16\pi\tilde{J}\tilde{l}\,\tilde{r}^{-4}\tilde{T}^{-3}\right)^2 \cdot \tilde{\sigma}_T^2 =$$

$$= \frac{64\pi^2}{\tilde{r}^8\tilde{T}^4}\left(\tilde{l}^2\tilde{\sigma}_J^2 + \tilde{J}^2\tilde{\sigma}_l^2 + \frac{16\tilde{J}^2\tilde{l}^2\tilde{\sigma}_r^2}{\tilde{r}^2} + \frac{4\tilde{J}^2\tilde{l}^2\tilde{\sigma}_T^2}{\tilde{T}^2}\right) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\tilde{\sigma}_G} = \frac{\mathbf{8\pi}}{\mathbf{\tilde{r}^4\tilde{T}^2}} \cdot \sqrt{\left(\mathbf{\tilde{l}^2\tilde{\sigma}_J^2} + \mathbf{\tilde{J}^2\tilde{\sigma}_l^2} + \frac{\mathbf{16\tilde{J}^2\tilde{l}^2\tilde{\sigma}_r^2}}{\mathbf{\tilde{r}^2}} + \frac{\mathbf{4\tilde{J}^2\tilde{l}^2\tilde{\sigma}_T^2}}{\mathbf{\tilde{T}^2}}\right)}$$

$$\tilde{\eta}_G^2 = \frac{\tilde{\sigma}_G^2}{\tilde{G}^2} = \frac{64\pi^2}{\tilde{r}^8\tilde{T}^4} \cdot \left(\tilde{l}^2\tilde{\sigma}_J^2 + \tilde{J}^2\tilde{\sigma}_l^2 + \frac{16\tilde{J}^2\tilde{l}^2\tilde{\sigma}_r^2}{\tilde{r}^2} + \frac{4\tilde{J}^2\tilde{l}^2\tilde{\sigma}_T^2}{\tilde{T}^2}\right) \cdot \frac{\tilde{r}^8\tilde{T}^4}{64\pi^2\tilde{J}^2\tilde{l}^2} =$$

$$= \frac{1}{\tilde{J}^2\tilde{l}^2} \cdot \left(\tilde{l}^2\tilde{\sigma}_J^2 + \tilde{J}^2\tilde{\sigma}_l^2 + \frac{16\tilde{J}^2\tilde{l}^2\tilde{\sigma}_r^2}{\tilde{r}^2} + \frac{4\tilde{J}^2\tilde{l}^2\tilde{\sigma}_T^2}{\tilde{T}^2}\right) = \frac{\tilde{\sigma}_J^2}{\tilde{J}^2} + \frac{\tilde{\sigma}_l^2}{\tilde{l}^2} + 16\frac{\tilde{\sigma}_r^2}{\tilde{r}^2} + 4\frac{\tilde{\sigma}_T^2}{\tilde{T}^2} =$$

$$= \tilde{\eta}_J^2 + \tilde{\eta}_l^2 + 16\tilde{\eta}_r^2 + 4\tilde{\eta}_T^2 \Rightarrow \boldsymbol{\tilde{\eta}_G} = \sqrt{\boldsymbol{\tilde{\eta}_J^2} + \boldsymbol{\tilde{\eta}_l^2} + \mathbf{16}\boldsymbol{\tilde{\eta}_r^2} + \mathbf{4}\boldsymbol{\tilde{\eta}_T^2}}$$