1. Elektrostatika

1.1. Pole bodových nábojů a nabitých vodičů

1.1.1 Dvě stejné částice, jejichž rozměry můžeme zanedbat, jsou nabity náboji rovnými náboji elektronu. Jakou hmotu by tyto částice musely mít, aby přitažlivá gravitační síla působící mezi nimi byla v rovnováze se silou elektrostatickou. Kolikrát by tato hmota byla větší než hmota elektronu.

1.1.2 Jak velké stejné náboje musíme umístit do středu dvou homogenních koulí z nichž každá má hmotu rovnou hmotě Země /$M_z = 6 \,.\, 10^{24}$ kg/, aby gravitační a elektrostatická síla byly v rovnováze.

1.1.3 Mějme dvě měděné kuličky v poloměru $r = 1.10^{-2}$ m. Jakou silou F by tyto kuličky na sebe působily ve vzdálenosti $R = 1$ m, kdyby každému atomu mědi scházel 1 elektron. Jaká by musela být hmota kuličky, aby v gravitačním poli s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81$ m/s^2 na ni působila stejná síla.

1.1.4 Dvě kuličky zanedbatelného průřezu jsou od sebe vzdáleny 1 m. Jedna z nich je nabita nábojem $+ 1.10^{-3}$ C, druhá nábojem $- 3.10^{-3}$C:

a/ jak velkou silou se budou kuličky přitahovat

b/ jak velkou silou na sebe budou působit jestliže se před umístěním do předepsané vzdálenosti kuličky dotkly.

1.1.5 Dva hmotné body, každý o hmotě $m = 1$ g jsou v gravitačním poli s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81$ m/s^2 zavěšeny na nehmotných závěsech délky $\ell = 1$ m. Tyto hmotné body se po nabití stejnými náboji rozestoupí na vzdálenost $r = 5.10^{-2}$ m. Jak velký náboj Q nese každý hmotný bod.

1.1.6 Ve vrcholech čtverce o straně a jsou stejné náboje e. Jaký náboj q opačného znamení musíme umístit doprostřed čtverce, aby síly působící na každý náboj byly rovny nule. Je tato rovnováha stabilní?

1.1.7 V rozích rovnostranného trojúhelníka jsou umístěny stejné náboje Q. Jak velký náboj q musíme umístit do středu trojúhelníka, aby elektrické síly působící na náboje byly nulové.

1.1.8 Jaká je intenzita elektrického pole v bodě ležícím uprostřed mezi náboji o velikosti $Q_1 = 1 \,.\, 10^{-3}$C a $Q_2 = 3 \,.\, 10^{-3}$C. Tyto náboje jsou od sebe vzdáleny 1 m.

1.1.9 Poměr velikostí dvou bodových nábojů opačných znamének je n, vzdálenost obou nábojů je d. Dokažte, že povrch nulového potenciálu je kulová plocha.

Vypočítejte poloměr R této plochy a vzdálenost jejího středu od jednoho z nábojů.

1.1.10 Vypočítejte průběh potenciálu a intenzity pole dipólu o momentu $p = q \cdot \ell$. Při výpočtu předpokládejte, že vzdálenost místa, v němž počítáme intensitu pole od středu dipólu je mnohem větší než délka ℓ dipólu.

1.1.11 Elektrické pole je buzeno elementárním dipólem, umístěným v počátku souřadné soustavy. Dipólový moment p má směr osy z

a/ ukažte, že intensita pole má stejný směr ve všech bodech ležících na libovolné přímce procházející dipólem;

b/ jaký je směr a velikost intensity pro body ležící na přímkách svírajících úhel $\vartheta = 0, \pi/4, \frac{\pi}{2}$ s osou z.

1.1.12 Do homogenního elektrického pole o intenzitě $E \equiv (0,0,E_0)$ je vložen elementární dipól s momentem p majícím též směr osy z $(p = (0, 0, p))$

a/ Dokažte, že ekvipotenciální plochou s nulovým potenciálem je kulová plocha a určete její poloměr a.

b/ Změní se tvar pole jestliže do této ekvipotenciální plochy umístíme vodivou plochu nabitou na nulový potenciál?

c/ Jaká by byla hustota náboje na této vodivé ploše? $E_L(a) > \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

d/ Jaký by byl celkový dipólový moment P vodivé plochy?

1.1.13 Uzemněná koule poloměru R je vložena do homogenního elektrického pole, jehož intensita byla $\vec{E}_0 = (0, 0, E_0)$. Jaký průběh bude mít intenzita pole po vložení koule a jaké bude rozložení hustoty náboje na kouli?

1.1.14 Určete potenciál elektrostatického pole vzbuzeného bodovým nábojem q nacházejícím se ve vzdálenosti a od vodivé rovinné stěny udržované na nulovém potenciálu. Určete dále plošnou hustotu η náboje na vodivé stěně, jeho celkovou velikost a sílu F, kterou je náboj přitahován ke stěně.

1.1.15 Mezi dvěma vodivými nenabitými polorovinami $x \geq 0$, $y = 0$ a $y \geq 0$, $x = 0$ je v bodě $A = (a, a, 0)$ $(a > 0)$ umístěn náboj q. Jaká síla bude na náboj působit?

1.1.16 Mezi body A, B o souřadnicích $A \equiv (0,0,0)$ a $B \equiv (x_1,0,0)$ je napjat přímý vodič zanedbatelného průřezu. Tento vodič je nabit nábojem Q, který je po vodiči rovnoměrně rozložen. Vypočítejte, jaký bude průběh potenciálu v okolí vodiče. Dále určete limitní hodnoty potenciálu pro

a/ $y \to \infty$ resp. $z \to \infty$

b/ $y, z \to 0$

1.1.17 Disk zanedbatelné tloušťky o poloměru R je nabit povrchovým nábojem hustoty σ. Vypočítejte intenzitu pole na ose disku ve vzdálenosti h.

1.1.18 Určete potenciál pole nabité kulové vrstvy o vnějším poloměru R_1 a vnitřním R_2 pomocí vztahu $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho \, dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Hustota náboje je konstantní. Průběh potenciálu znázorněte graficky.

1.1.19 Vypočítejte průběh intenzity elektrického pole vně i uvnitř homogenně nabité koule poloměru R. Celkový náboj koule je Q. Při výpočtu použijte Gaussovy věty.

1.1.20 Určete pomocí Gaussovy věty intenzitu pole následujících nabitých ploch

a/ nabité roviny

b/ dvou rovnoběžných nabitých rovin

c/ kulové plochy poloměru R

d/ nekonečně dlouhé válcové plochy poloměru R. Náboj je na plochách rozložen rovnoměrně s plošnou hustotou σ.

1.1.21 Mějme dvě vodivé roviny kolmé k ose x. Tuto osu protínají v bodech $x = x_1$ a $x = x_2$ $(0 < x_1 < x_2)$. Roviny jsou spolu vodivě spojeny a jejich celkový náboj je roven nule. Mezi těmito rovinami je napjata nevodivá blána, která je s rovinami rovnoběžná. Tato blána protíná osu x v bodě $x = x_1 + \left(\frac{x_2 - x_1}{n}\right)$, $(n > 1)$ a je na ní rovnoměrně rozložen náboj s plošnou hustotou σ. Určete intenzitu pole.

1.1.22 Dva dlouhé tenké vodiče, vložené rovnoběžně ve vzdálenosti d od sebe jsou nabity s lineární hustotou $+\lambda$ a $-\lambda$ (λ = konst.). Určete intenzitu pole E v bodě, který leží v rovině symetrie ve vzdálenosti x od roviny, v níž leží vodiče.

1.1.23 Mezi dvěma rovnoběžnými vodivými rovinami vzdálenými o d je průběh potenciálu dán vztahem $\varphi = k x^n$ (k a n > 1) jsou konstanty, x je vzdálenost od jedné z rovin). Je třeba určit průběh objemové hustoty ρ náboje v prostoru mezi rovinami a plošnou hustotu σ náboje na vodivých rovinách.

1.1.24 Kulová vrstva o vnějším poloměru R_1 a vnitřním R_2 je nabita rovnoměrně nábojem s objemovou hustotou ρ = konst. Předpokládejte, že potenciál φ pole buzeného touto kulovou vrstvou je vzhledem k symetrii tělesa funkcí pouze vzdálenosti $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ od středu koule. Nalezněte průběh potenciálu pomocí integrace Laplaceovy rovnice $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

1.1.25 Dvě stejně veliké nabité plochy S_1 a S_2 umístěné vedle sebe tvoří tak zvanou elektrickou dvojvrstvu, je-li hustota náboje σ na obou plochách stejně veliká, ale opačného znamení. Vypočtěte jaký bude průběh potenciálu v okolí této dvojvrstvy za předpokladu, že vzdálenost l ploch je velmi malá.

1. Elektrostatika

1.1 Pole bodových nábojů a nabitých vodičů

1.1.1 Označíme m hledanou hmotu částice. $e = 1{,}6.10^{-19}\,C$ náboj elektronu a r vzdálenost částic. Síla gravitační je dána Newtonovým gravitačním zákonem $F_g = \varkappa \dfrac{m^2}{r^2}$; elektrostatická síla zákonem Coulombovým $F_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{e^2}{r^2}$.

Tyto dvě síly mají být v rovnováze

$$F_g = \varkappa \frac{m^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} = F_e$$

Z této podmínky vyplývá pro hledanou hmotu částic vztah

$$m = \frac{e}{\sqrt{4\pi\,\varepsilon_0\varkappa}}$$

Hodnoty konstant ε_0 a $\varkappa$ v soustavě SI jsou $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ F/m$, $\varkappa = 6{,}67.10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.

Po dosazení získáme hodnotu

$$m = \frac{1{,}6 \,.\, 10^{-19}\ As}{(4\pi\,.8.85.10^{-12} m^{-3} kg^{-1} s^{4}\ A^2\ .\ 6{,}67.10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2})^{1/2}} =$$

$$= \frac{1{,}6 \,.\, 10^{-19}\ As}{(74{,}1{,}10^{-22} kg^{-2} A^2\ s^2)^{1/2}} = 1{,}86.10^{-9}\ kg$$

Klidová hmota elektronu je $9{,}11.10^{-31}$ kg takže hmota částice by musela být asi 2.10^{21} větší než hmota elektronu.

1.1.2 $Q = 5{,}2\ .\ 10^{14}\ C$

1.1.3 $F = 2{,}9.10^{19}\ N$, $m = 5.10^{18}$ kg.

1.1.4 a) $f = -2{,}7.10^{4}\ N$ b) $f = 8{,}9.10^{3}\ N$

1.1.5 $Q = 8{,}2\ .\ 10^{-9}\ C$

1.1.6 Vypočítáme sílu, která působí na náboj umístěný v jednom rohu čtverce (např.4) od nábojů umístěných ve zbývajících rozích (1, 2, 3). Náboje 1 a 3 působí stejně velkými silami

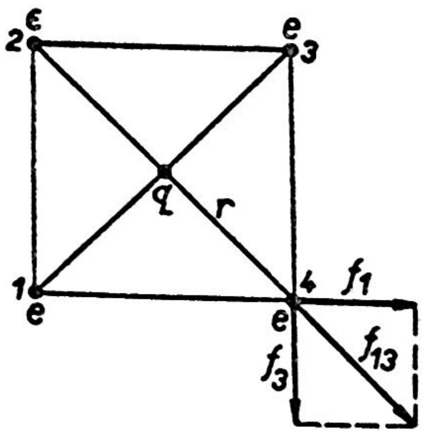
27245 P5

$$f_1 = f_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{q^2}$$

Jejich výslednice má směr úhlopříčky a velikost $f_{13} = |\vec{f}_1 + \vec{f}_3| =$

$$= 2 f_1 \quad \cos 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{2}} f_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{a^2} \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Stejný směr má i síla působící od náboje 2 ležícího v protilehlém rohu čtverce /viz obr.1.4/. Její velikost je rovna



Obr. 1.4

$$f_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{2a^2}$$

Náboje 1 až 3 na náboj 4 budou působit silou

$$f_{123} = f_{13} + f_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{a^2} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)$$

Aby výsledná síla působící na náboj 4 byla rovna nule musíme do středu čtverce umístit náboj opačného znamení tak velký, aby síla kterou působí na náboj v rohu byla v absolutní hodnotě stejně velká jako síla f_{123}

$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \cdot e}{r^2} = f_{123}$$

Vzdálenost $\underline{r}$ středu od rohu je rovna $\underline{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{a}$. Po dosazení a úpravě získáme, že

$$q = \frac{e}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{e}{4}\left(2\sqrt{2} + 1\right)$$

1.1.7 $q = \frac{Q}{\sqrt{3}}$

1.1.8 Výslednou intenzitu nalezneme jako vektorový součet intenzit elektrického pole od jednotlivých nábojů

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r_1^3} \cdot \vec{r}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{r_2^3} \cdot \vec{r}_2$$

Veličiny $\vec{r}_1$ resp. $\vec{r}_2$ jsou vektory mající velikost a směr spojnice náboje Q_1 resp. Q_2 a místa v němž zjišťujeme intenzitu pole. Oba tyto vektory leží na jedné přímce, jsou stejně veliké ($r_1 = r_2 = 0{,}5$ m), mají však opačný směr. Pomocí jednotkového vektoru $\vec{n}$, který má stejný

2720

směr jako vektor $\vec{r}_2$ můžeme vektory $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ vyjádřit ve tvaru

$$\vec{r}_1 = -r_1\vec{n} \; ; \qquad \vec{r}_2 = r_2\vec{n} \, .$$

Předchozí vztah pak můžeme napsat ve tvaru

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{Q_1}{r_1^2}+\frac{Q_2}{r_2^2}\right)\vec{n} = \frac{1}{12{,}56.8{,}86.10^{-12}\,A^2 kg^{-1} m^{-3}\, s^4} \, .$$

$$\cdot\left(-\frac{1.10^{-3}C}{0{,}5^2 m^2}+\frac{3.10^{-3}C}{0{,}5^2 m^2}\right)\vec{n} = 7{,}19.10^7\,\vec{n}\, .\, Vm^{-1}$$

1.1.9 Platí $\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{n}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}\right) = 0$

Tuto rovnici je možno upravit na tvar

$$\left(x + \frac{n^2 d}{n^2-1}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{d^2 n^2}{(n^2-1)^2}$$

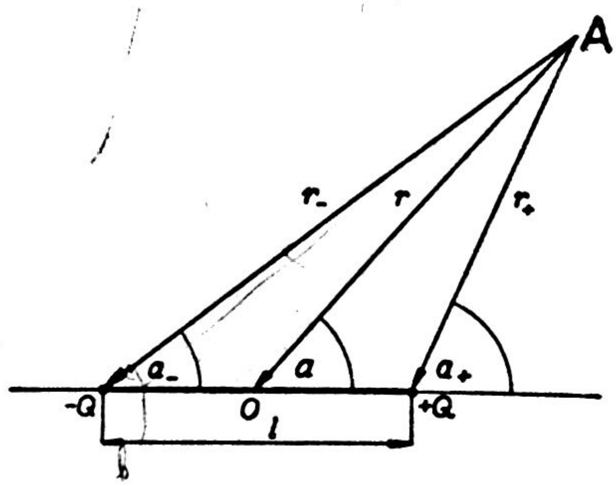
což je rovnice koule o poloměru $R = \frac{dn}{n^2-1}$ a se středem v bodě $\left(-\frac{d}{n^2-1}, 0, 0\right)$. Vzdálenost středu kružnice od náboje Q_1 je $\frac{d}{n^2-1}$.

1.1.10 $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ \cdot r_-}\right)$

Pokud $l \ll r_+$, r_- je možno položit $r_+ r_- \doteq r^2$ a $\alpha_+ \doteq \alpha_- = \alpha$ /obr.1.5/. Potom $r_- - r_+ = l \cos\alpha$ a výraz pro potenciál je možno psát ve tvaru

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q\, l\cos\alpha}{r^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \; \frac{p\cos\alpha}{r^2}$$



Obr.1.5

Vzhledem k tomu, že skalární součin $(\vec{p}, \vec{r}) = pr\cos\alpha$, můžeme předchozí výraz přepsat na tvar

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p}\,\vec{r})}{r^3}$$

Pro intenzitu pole platí

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\,\frac{(\vec{p}\,\vec{r})}{r^2}\cdot\vec{r} - \vec{p}\right)$$

1.1.11 Potenciál pole buzeného dipólem je dán vztahem /viz příklad 1.1.1(

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(\vec{p}\,\vec{r})}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p\cos\vartheta}{r^2}$$

kde ϑ je úhel mezi osou z /vektorem $\vec{p}$) a polohovým vektorem

a/ Radiální složka intenzity v kulových souřadnicích (r , ψ, ϑ
bude rovna

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2p\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Složka intenzity spadající do roviny kolmé k přímce procházející d
bodem a dipólem /tangenciální složka/ bude rovna

$$E_\vartheta = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p\sin\vartheta}{r^3}.$$

Úhel α mezi vektorem a přímkou procházející dipólem lze určit ze

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{E_\vartheta}{E_r} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\vartheta$$

Z této rovnice vyplývá, že úhel α nezávisí na vzdálenosti od dip
čili zůstává podél přímky konstantní

b/ pro $\vartheta = 0$ $\qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2\vec{p}}{r^3}$

pro $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\,\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{p}}{p}\right)$

pro $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{p}}{r^3}$

1.1.12 a/ Výsledný potenciál je superposicí potenciálu vnějšího homogenního
pole a pole dipólu

$$\varphi = -E_0 z + \frac{p\,z}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Poloměr a plochy o nulovém potenciálu je

$$a = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0\,E_0}\right)^{1/3}$$

b/ Tvar pole se nezmění

c/ Pro hustotu σ náboje platí

$$\sigma = \varepsilon_0 E_r(a)$$

Výslednou intenzitou pole $\vec{E}_V$ dostaneme pomocí principu superposice

$$\vec{E}_V = \vec{E}_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{3(\vec{p}\vec{r})}{r^2}\,\vec{r} - \vec{p}\right)$$

pro $r = a = (p/4\pi\varepsilon_0 E_0)^{\frac{1}{3}}$ bude

$$E_V(a) = 3\,E_0\,\frac{z}{r} = 3\,E_0 \cos\vartheta$$

(ϑ je úhel mezi osou $\underline{z}$ a průvodičem zvoleného místa na kouli).
Hustota náboje bude rovna

$$\sigma = 3\varepsilon_0\ E_0 \cos\vartheta$$

d/ Dipólový moment kulové plochy S o poloměru a bude

$$P = \int_{(S)} a\sigma\, dS = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0 = p$$

1.1.13 Použijeme výsledku předchozího příkladu (1.1.12). Pole vně koule bude stejné jako pole vzniklé superposicí původního homogenního pole a pole dipólu s momentem

$$\vec{p} = (0, 0, 4\pi\varepsilon_0 E_0 R^3)$$

takže

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{3(\vec{p}\,.\,\vec{r})}{r^2}\,\vec{r} - \vec{p}\right) \quad pro\ r > R$$

Uvnitř koule bude

$$E = 0 \qquad r < R$$

Hustota náboje bude

$$\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\vartheta$$

kde ϑ je úhel mezi průvodičem a osou $\underline{z}$.

1.1.14 Je známo, že v soustavě dvou bodových nábojů stejně velikých, ale opačného znamení, je rovina symetrie ekvipotenciální plochou. Průběh pole se proto nezmění položíme-li do této roviny symetrie vodivou plochu. Odtraníme-li po vložení této plochy jeden z nábojů nezmění se v poloprostoru, ve kterém náboj zůstal, tvar pole. Působení odstraněného náboje nahradí náboj indukovaný na vodivé ploše.

Zavedeme-li souřadnou soustavu tak, aby osy y a z ležely ve vodivé stěně a náboj q se nacházel v místě o souřadnicích $(a, 0, 0)$ bude potenciál φ v poloprostoru $x \geq 0$ dán vztahem

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}}\right\}$$

Plošná hustota náboje na ploše je úměrná rozdílu normálových složek i-
tenzity nad a pod plochou. Normálová složka intenzity v poloprostoru
$x < 0$ je rovna nule /zde není náboj/; v poloprostoru $x > 0$ je
málová složka $E_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ takže

$$\eta = -\varepsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/_{x=0} = -\frac{aq}{2\pi}\ \frac{1}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Celkový náboj Q vodivé stěny dostaneme integrací plošné hustoty p
celé stěně S

$$Q = \int_S \eta\, dS = -\frac{aq}{2\pi}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{dy\,dz}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Pro usnadnění integrace zavedeme polární souřadnice, ve kterých je z^2
$+ y^2 = r^2$ / r je vzdálenost místa o souřadnicích / 0, y, z / na
ploše od počátku/ a budeme integrovat po kruhových prstencích o šířce
jejichž plocha je $2\pi r\,dr$

$$Q = \int_S \eta\, dS = -\frac{aq}{2\pi}\int_0^\infty \frac{2\pi r\,dr}{(a^2+r^2)^{3/2}} =$$

$$= +aq\,(a^2+r^2)^{-1/2}\Big|_0^\infty = -q$$

Síla F působící na náboj q je rovna $F = qE$, kde E je inten
pole v místě náboje q. Jelikož víme, že pole vzbuzené v poloprostor
$x > 0$ nabitou stěnou je stejné jako pole bodového náboje $-q$ umís
ného v bodě /$-a$, 0, 0/ bude $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q}{(2a)^2}$ takže

$$F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{4a^2} = F_x$$

1.1.15 Při řešení použijeme následujícího poznatku:

V soustavě čtyř nábojů $q_A = q$, $q_B = -q$, $q_C = q$ a $q_D = -q$
umístěných v bodech A = /$a,a,0$/, B = /$-a,a,0$/, C = /$-a,-$
D = /$a,-a,0$/ jsou ekvipotenciálními plochami roviny $x = 0$ a
$= 0$. Silové působení mezi polorovinami a nábojem q_A bude stejné ja
mezi náboji q_B, q_C, q_D a nábojem q_A.
S použitím Coulombova zákona dostaneme

$$F_x = F_y = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{-2\sqrt{2}+1}{8\sqrt{2}}\right)$$

1.1.16 Potenciál v bodě o souřadnicích / x, y, z / je udán integrálem

$$\varphi(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x_1}\int_0^{x_1} \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2+y^2+z^2}}$$

integruje se přitom podél celého vodiče, tj. integrační proměnná x' je z intervalu $(0, x_1)$.

Vzdálenost zvoleného místa pole od osy x je $r = \sqrt{y^2 + z^2}$.

Výraz pro potenciál přepíšeme na tvar

$$\varphi(x,r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x_1} \int_0^{x_1} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 - 2xx' + x^2 + r^2}}$$

Toto je integrál typu $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + bu + c}} = \sinh^{-1} \frac{2u + b}{\sqrt{4c - b^2}}$

Vzhledem k tomu, že platí $\sinh^{-1} v = \ln(v + \sqrt{v^2 + 1})$ můžeme pro potenciál psát

$$\varphi(x,r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x_1} \ln \frac{x' - x + \sqrt{(x' - x)^2 + r^2}}{r} \Bigg|_0^{x_1} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x_1} \ln \frac{x_1 - x + \sqrt{(x_1 - x)^2 + r^2}}{-x + \sqrt{x^2 + r^2}}$$

Limitní hodnoty potenciálu budou pro

a/ $r \to \infty$ $\quad \varphi \sim \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{r}$

Úpravu provádíme následovně:

$$\ln \frac{x_1 - x + \sqrt{(x_1 - x)^2 + r^2}}{-x + \sqrt{x^2 + r^2}} =$$

$$= \ln \frac{\frac{x_1 - x}{r} + \sqrt{1 + \frac{(x_1 - x)^2}{r^2}}}{-\frac{x}{r} + \sqrt{\frac{x^2}{r^2} + 1}} \doteq \ln \frac{1 + \frac{x_1 - x}{r} + \frac{1}{2}\frac{(x_1 - x)^2}{r^2}}{1 - \frac{x}{r} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{r^2}} \doteq$$

$$\doteq \ln\left(1 + \frac{x_1 - x}{r} + \frac{x}{r}\right) \doteq \frac{x_1}{r}$$

b/ $r \to 0$ $\quad \varphi \sim \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x_1} \ln \dfrac{4x(x_1 - x)}{r^2}$

neboť

$$\ln \frac{x_1 - x + \sqrt{(x_1 - x)^2 + r^2}}{-x + \sqrt{x^2 + r^2}} = \ln \frac{x_1 - x}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{r^2}{(x_1 - x)^2}}}{-1 + \sqrt{1 + \frac{r^2}{x^2}}} \doteq$$

$$\doteq \ln \frac{x_1 - x}{x} \cdot \frac{1 + 1 + \frac{r^2}{2(x_1 - x)^2}}{-1 + 1 + \frac{r^2}{2x^2}} \doteq \ln \frac{4(x_1 - x)\, x}{r^2} .$$

.1.17 V daném bodě určíme potenciál. Disk rozdělíme na prstence poloměru $r < R$ a šířky dr. Elementy těchto prstenců jsou stejně vzdáleny o $\sqrt{r^2 + h^2}$

od daného bodu, takže všechny přispívají, pokud jsou stejně velké, ...ným příspěvkem k potenciálu. Potenciál buzený jedním prstencem je

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2\pi r\, dr\, \sigma}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

Celkový potenciál dostaneme integrací přes celý prstenec

$$\varphi = \int_0^R d\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi r dr}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (\sqrt{h^2+R^2}-h$$

z čehož intensita je rovna

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial h} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right).$$

1.1.18 Výpočet provedeme ve sférických souřadnicích. Souřadnice nabité kulové slupky označujeme čárkovaně r', α', ϑ', souřadnice místa, v němž počítáme potenciál označujeme bez čárek. Střed nabité kulové vrstvy ...íme do počátku souřadné soustavy.

Vzhledem k symetrii tělesa lze předpokládat, že potenciál bude záviset pouze na r. Spočítáme proto potenciál pro body na ose $\vartheta = 0$. Ve sférických souřadnicích bude

$$dV' = r'^2 \sin\vartheta' d\alpha' d\vartheta' dr'$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\vartheta'} \qquad pro \quad \vartheta = ($$

takže

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_2}^{R_1} \frac{r'^2 \sin\vartheta' d\alpha' d\vartheta' dr'}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\vartheta'}} =$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r} \int_{R_2}^{R_1} (r' + r - |r'-r|)\, r' dr'$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_1^2 - R_2^2) \qquad r < R_2$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_1^2 - \frac{1}{3}r^2 - \frac{2}{3}\frac{R_2^3}{r}\right) \qquad R_2 < r < R_1$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(R_1^3 - R_2^3)\frac{1}{r} \qquad r > R_1$$

1.1.19 U některých vodičů s velkou symetrií, na kterých je náboj rovnoměrně rozložen můžeme předem odhadnout tvar silokřivek. V těchto případech je výhodné použít k výpočtu intenzity pole E Gaussovy věty, podle které je tok intenzity pole uzavřenou plochou S roven $1/\varepsilon_0$ násobku ... Q uvnitř plochy

$$N = \int_{(S)} (\vec{E}\, d\vec{S}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Plochu, přes kterou počítáme tok intenzity pole, volíme tak, aby části této plochy byly buď kolmé na silokřivky nebo byly s nimi rovnoběžné. V těchto případech je výpočet toku intenzity jednoduchý, neboť tok plochou rovnoběžnou se siločarami je nulový.

Pokud je na ploše kolmé k siločarám intenzita pole konstantní je tok touto plochou roven $N = ES$.

U nabité koule lze z důvodů symetrie předpokládat, že siločáry budou mít tvar polopřímek vycházejících ze středu koule. Plochu, kterou počítáme tok intenzity, proto volíme jako soustřednou kulovou plochu poloměru r procházející bodem v němž chceme spočítat intenzitu. Na této ploše bude mít zřejmě intenzita konstantní velikost. Tok intenzity bude roven

$$N = ES = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

kde q je náboj uvnitř plochy.
Pokud $R \leq r$ bude $q = Q$, takže

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \qquad r \geq R$$

Pro $r \leq R$ bude $q = Q\frac{r^3}{R^3}$ takže

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} r \qquad r \leq R$$

Intenzita vně rovnoměrně nabité koule bude stejná jakoby náboj byl umístěn v jejím středu.
Uvnitř koule roste intenzita přímo úměrně vzdálenosti od středu.

1.1.20 a/ Spočítáme tok intenzity válečkem, jehož osa je kolmá k rovině $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

b/ Použijeme výsledku ad a/ a zjistíme vektorový součet intenzit od každé z rovin

$E = 0$ v prostoru mezi rovinami

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ vně rovin

c/ Spočítáme tok intenzity soustřednou kulovou plochou poloměru r procházející bodem v němž určujeme intenzitu

$$E = 0 \qquad r < R$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi R^2 \sigma \qquad r \geq R$$

d/ Tok intenzity počítáme přes plášť válce poloměru r konečné výšky. Tento válec je souosý s nabitým válcem

$$E = 0 \quad \text{pro} \quad r < R$$

$$E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} \qquad r \geq R$$

1.1.21 $E = 0 \quad$ pro $\quad x < x_1 \quad$ a $\quad x > x_2$

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\frac{n-1}{n} \quad \text{pro} \quad x_1 < x < x_1 + \frac{x_2 - x_1}{n}$$

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 n} \quad \text{pro} \quad x_1 + \frac{x_2 - x_1}{n} < x < x_2$$

Z Gaussovy věty určíme, že $E_1 + E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Pole mezi nabitou blánou a vodivou rovinou musí být homogenní. Jeli potenciál obou rovin je stejný, musí platit

$$E_1\left(\frac{x_2 - x_1}{n}\right) = E_2\,\frac{(x_2 - x_1)(n-1)}{n}$$

1.1.22 Pomocí Gaussovy věty určíme intenzitu pole každého z vodičů $= E_{1,2} = \pm \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + d^2/4}}$. Vektorový součet intenzit od obou vodičů udává kovou intenzitu $E = \dfrac{2\lambda d}{\pi\varepsilon_0\,(4x^2 + d^2)}$, jejíž směr je rovnoběžný s rovinou v níž leží vodiče.

1.1.23 Potenciál je funkcí pouze jediné souřadnice vzdálenosti od jedné z Laplaceova rovnice bude mít tvar

$$\Delta\varphi = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = \frac{d^2\varphi}{dx^2}$$

z čehož

$$\rho(x) = \varepsilon_0 n\,(n-1)\,k\,x^{(n-2)} \qquad 0 < x < d$$

Plošná hustota náboje bude rovna

$$\sigma(0) = \varepsilon_0\,E(0) = -\,\varepsilon_0\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad \text{pro } x$$

$$\sigma(d) = \varepsilon_0\,E(d) = -\,\varepsilon_0\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=d} = -n\,\varepsilon_0\,k\,d^{n-1} \quad \text{pro } x$$

1.1.24 Potenciál derivujeme parciálně jako složenou funkci

$\varphi\left(r(x^2, y^2, z^2)\right)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\,\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+r^2}}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\,\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,\frac{x}{r}\right) = \frac{x}{r}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\,\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} + x\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} =$$

$$= \frac{x^2}{r^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{x^2}{r^3}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

Obdobně pro zbývající souřadnice y a z :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2}\,\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d\varphi}{dr} - \frac{y^2}{r^3}\,\frac{d\varphi}{dr}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^3}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{z^2}{r^3}\frac{d\varphi}{dr}$$

Laplaceův operátor bude roven:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}(x^2+y^2+z^2)\frac{d^2\varphi}{dr^2} +$$

$$+ \frac{3}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r^3}(x^2+y^2+z^2)\frac{d\varphi}{dr}$$

$$\Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr},$$

jelikož $r^2 = x^2+y^2+z^2$

Zjistíme nyní čemu je rovna druhá derivace podle r součinu $r\cdot\varphi$

$$\frac{d^2}{dr^2}(r.\varphi) = \frac{d}{dr}\left(\varphi + r\frac{d\varphi}{dr}\right) = 2\frac{d\varphi}{dr} + r\frac{d^2\varphi}{dr^2}$$

Porovnáme-li tento výsledek s předchozím vyjádřením výrazu $\Delta\varphi$, vidíme že je možno psát:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\left(\frac{d^2(r\varphi)}{dr^2}\right)$$

Laplaceova rovnice bude mít při splnění předpokladů udaných v zadání příkladu tvar:

a/ $\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\varphi) = 0$ $\qquad r < R_2$

b/ $\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\varphi) = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$ $\qquad R_2 < r < R_1$

c/ $\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\varphi) = 0$ $\qquad R_1 < r$

Tyto rovnice lze poměrně jednoduše integrovat:

a/ Je-li druhá derivace rovna nule, pak první derivace bude rovna konstantě

$$\frac{d}{dr}(r\varphi) = A_1 \Rightarrow d(r\varphi) = A_1\,dr$$

takže

$$r\varphi = A_1 r + A_2$$

$$\varphi = \frac{A_2}{r} + A_1$$

b/ Rovnici upravíme na tvar:

$$d\left(\frac{d}{dr}(r\varphi)\right) = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}\,r\,dr$$

Integrálem této rovnice je: $\frac{d}{dr}(r\varphi) = -\frac{1}{2}\,\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,r^2 + B_1$

Obdobně:

$$d(r\varphi) = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\,\rho r^2 dr + B_1 dr$$

Z čehož po integrování dostaneme:

$$r\varphi = -\frac{1}{6\varepsilon_0}\,\rho r^3 + B_1 r + B_2$$

takže

$$\varphi = -\frac{1}{6\varepsilon_0}\,\rho r^2 + \frac{B_2}{r} + B_1 \qquad R_2 < r < R_1$$

c/ Obdobně jako v případě a/ bude:

$$\varphi = \frac{C_2}{r} + C_1 \qquad R_1 < r$$

Hodnoty konstant A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 dostaneme z okrajových podmínek.

1/ pro $R = 0$ musí být potenciál konečný

Z této podmínky vyplývá $A_2 = 0$

2/ pro $R \to \infty$ musí $\varphi \to 0$. Z této podmínky vyplývá $C_1 = 0$.

3/ Intenzita pole musí být pro $r = R_1$ a $R_2 = r$ spojitá $E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}$

pro $r = R_2$

$$0 = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho R_2 - \frac{B_2}{R_2^2}$$

$$B_2 = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\,\rho R_2^3$$

pro $r = R_1$

$$-\frac{1}{3\varepsilon_0}\,\rho R_1 - \frac{B_2}{R_1^2} = -\frac{C_2}{R_1^2}$$

$$C_2 = \frac{1\rho}{3\varepsilon_0}\,(R_1^3 - R_2^3)$$

4/ Potenciál musí být pro $r = R_1, R_2$ spojitý

pro $r = R_1$

$$\frac{C_2}{R_1} = -\frac{1}{6\varepsilon_0}\,\rho R_1^3 + \frac{B_2}{R_1} + B_1$$

$$B_1 = \frac{1}{2\varepsilon_0}\,\rho R_1^2$$

pro $r = R_2$

$$A_1 = -\frac{1}{6\varepsilon_0}\,\rho R_2^2 - \frac{1}{3}\,\rho R_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon_0}\,\rho R_1^2$$

$$A_1 = \frac{1}{2\varepsilon_0}\,\rho(R_1^2 - R_2^2)$$

Získané hodnoty konstant dosadíme do výrazu pro potenciál a/ $\varphi = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}\,\rho\,(R_1^2 - R_2^2)$ $\qquad r \le R_2$

b/ $\varphi = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}\,\rho\,(-\frac{1}{3}r^2 - \frac{2}{3}R_2^3 r^{-1} + R_1^2)$ $\qquad R_2 \le r \le R_1$

c/ $\varphi = \dfrac{1}{3\varepsilon_0}\,\rho\,(R_1^3 - R_2^3)\,r^{-1}$ $\qquad r \ge R_1$

Stejný výsledek bychom pochopitelně dostali při použití Gaussovy věty. Výpočet by byl podstatně kratší.

1.1.25
$$U = U_1 + U_2 = \int_{S_1}\frac{\sigma dS}{r_1} - \int_{S_2}\frac{\sigma dS}{r_2} = \int_{S_1}\sigma\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)dS =$$
$$= \int_{S_1}\sigma\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\,dS\,.$$

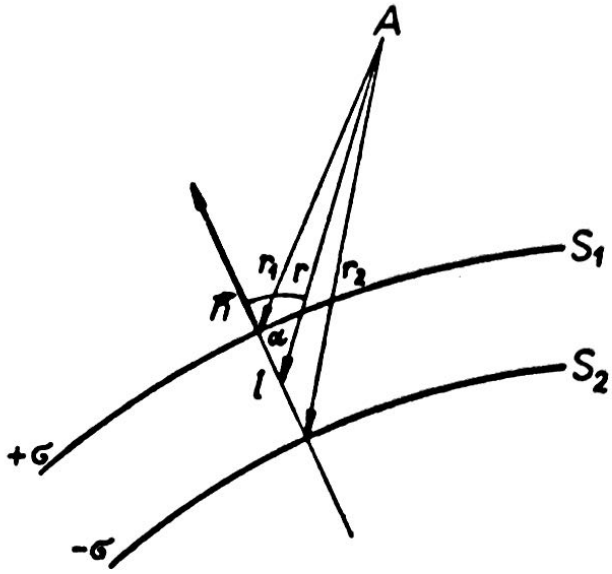
Pokud je $r \gg l$ je možno psát $r_2 r_1 \doteq r^2$ a $r_2 - r_1 = l\cos\alpha$ /význam symbolů viz obr.1.6/.

$$U = \int_{S_1}\frac{\sigma l\cos\alpha\, dS}{r^2} =$$
$$= \int_{\Omega}\sigma l\, d\Omega$$

Zde je $d\Omega$ prostorový úhel, pod kterým je vidět z místa A element dS a Ω je prostorový úhel, pod kterým je vidět z místa A celou dvojvrstvu.

Veličina $\eta = \sigma l$ se nazývá elektrickým momentem dvojvrstvy.

Pokud η = konst. bude
$$U = \eta\,\Omega$$



Obr.1.6

1.2 Kapacitní a influenční koeficienty soustavy vodičů

Kapacita kondensátorů

1.2.1 Kapacita osamoceného vodiče je definována jako poměr náboje vodiče q a jeho potenciálu φ.
$$C = \frac{q}{\varphi}$$