4. Elektromagnetické pole

4.1 Fázová rychlost v elektromagnetické vlny frekvence ω a vlnového vektoru $\vec{k}$ je dána vztahem $v = \omega/k$. Naproti tomu grupová rychlost nemonochromatické vlny je definována jako $(\partial\omega/\partial k)$.

Určete: a/ Kdy je grupová rychlost stejná jako rychlost fázová.

b/ Za jakých podmínek může být rychlost grupová větší než rychlost fázová.

4.2 Rovinnou elektromagnetickou vlnu lze popsat dvěma funkcemi které vyjadřují závislost intenzity elektrického pole $\vec{E}$ a magnetické indukce $\vec{B}$ na čase t a na poloze $\vec{r}$ v prostoru

$$\vec{E} = \vec{E}\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{v}\right)$$
$$\vec{B} = \vec{B}\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{v}\right)$$

Dokažte pro případ nevodivého homogenního a neomezeného prostředí, že uvedené vztahy vyhovují Maxwellovým rovnicím, jestliže $\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou kolmé jednak navzájem, jednak k jednotkovému vektoru $\vec{n}$ který vyjadřuje směr šíření vlny. Rychlost jejího šíření v je přitom dána vztahem $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ kde ε je permitivita a μ permeabilita prostředí.

4.3 Ve vakuu se šíří lineárně polarizovaná monochromatická vlna frekvence ω. Amplituda elektrického pole je E_0. Určete okamžitou hodnotu a časovou střední hodnotu hustoty energie a toku hustoty energie.

4.4 Předchozí úlohu řešte pro kruhově polarizovanou vlnu.

4.5 Válcovým vodičem, jehož poloměr je r, délka l a odpor R, protéká proud I. Stanovte velikost a směr Poyntingova vektoru na povrchu vodiče a vypočtěte jeho tok celým pláštěm vodiče.

4.6 Rovinná elektromagnetická vlna /viz úlohu 4.2/ se šíří v dielektricky anisotropním prostředí jehož relativní permeabilita je rovna jedné. Položme osy soustavy souřadné do hlavních os tensoru permitivity. Permitivita prostředí pak bude vyjádřena hlavními hodnotami tensoru permitivity ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz}. Vlna nechť se šíří ve směru vektoru $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Dokažte, že pak platí Fresnelova rovnice

$$\frac{\cos^2\alpha}{v_x^2 - v^2} + \frac{\cos^2\beta}{v_y^2 - v^2} + \frac{\cos^2\gamma}{v_z^2 - v^2} = 0$$

ve které v je rychlost vlny v daném směru $\vec{n}$ a $v_x = (\mu_0 \varepsilon_{xx})^{-1/2}$, $v_y = (\mu_0 \varepsilon_{yy})^{-1/2}$, $v_z = (\mu_0 \varepsilon_{zz})^{-1/2}$

jsou hlavní rychlosti vlny.

4.7 Zabývejte se elektromagnetickým polem v isotropním vodiči s vodivostí σ permitivitou μ a permeabilitou ε. Elektrická a magnetická intenzita toh pole v bodě $\vec{r}$ nechť jsou harmonickými funkcemi času t.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\, e^{i\omega t}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}(\vec{r})\, e^{i\omega t}$$

/Podle běžné konvence mají fyzikální smysl reálné části uvedených výrazů/. Uk že za uvedených předpokladů

a/ lze Maxwellovy rovnice psát ve formálně stejném tvaru jako pro dielekt kum; místo permitivity je však třeba dosadit $\bar{\varepsilon} = \varepsilon + \dfrac{\sigma}{i\omega}$

b/ stačí splníme-li dvě Maxwellovy rovnice

$$rot\ \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$rot\ \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E}.$$

Zbylé dvě podmínky

$$div\ \vec{D} = \rho$$

$$div\ \vec{B} = 0$$

jsou splněny automaticky.

c/ Je-li vodič homogenní, je objemová hustota náboje $\rho(\vec{r},t) = 0$.

4.8 V isotropním homogenním vodiči vyšetřujte elektromagnetické pole, jehož intenzity mají tvar

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$$

Zde komplexní amplitudy $\vec{E}$, $\vec{H}$ a vlnový vektor $\vec{k}$ jsou konstantní.

Vlnový vektor může být reálný i komplexní. Jaký je jeho smysl v prvním a hém případě a jaká je interpretace odpovídajícího pole? Jaké vztahy musí pro $\vec{H}$ a $\vec{k}$ platit, aby byly splněny Maxwellovy rovnice? Speciálně ukažte, že ře ní je jednoznačně určeno, jsou-li dány vektory $\vec{E}$, $\vec{k}$ takové, že $(\vec{E}.\vec{k}) =$ $(\vec{k}.\vec{k}) = \bar{\varepsilon}\mu\omega^2$ ./Význam symbolů uveden v zadání úlohy 4.7/.

4.9 Na rovinné rozhraní dvou dielektrik /1 a 2/ dopadá se strany dielektrika 1 rovinná postupná elektromagnetická vlna, která se částečně odráží a částečně láme do prostředí 2. Úhel dopadu je α. Permeabilitu a permitivitu prvního respektive druhého prostředí označíme μ_1, ε_1 respektive μ_2, ε_2. Stanovte úhel odrazu α', úhel lomu β a intenzitu odražené a lomené vlny

a/ je-li intenzita elektrického pole dopadající vlny kolmá k rovině dopadu,

b/ leží-li intenzita elektrického pole dopadající vlny v rovině dopadu.

4.10 Světlo o vlnové délce $\lambda = 0{,}6\ \mu m$ /ve vakuu/ šířící se ve skle o indexu lomu $n = 1{,}50$, dopadá pod úhlem $\alpha = 60^\circ$ na rozhraní se vzduchem. Vypočtěte

a/ fázový posuv odraženého paprsku v případě a/ příkladu 4.9

b/ hloubku průniku do druhého prostředí /vzduchu/ - tj. vzdálenost na které amplituda poklesne o jeden neper.

Poznámka:

Pro sklo můžeme položit $\mu = \mu_0$, pro vzduch $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$.

4.11 Úlohu 4.9 modifikujte pro případ, že prostředí 2 je vodič s měrnou vodivostí σ_2. Získané obecné výsledky užijte pro následující číselné výpočty:

a/ Určete hloubku vniku pole a směr vlnoploch pod /klidnou/ hladinou mořské vody, šíří-li se ve vzduchu elektromagnetická vlna vlnové délky λ = = 10 cm jednak kolmo k hladině /úhel dopadu $\alpha = 0$/, jednak rovnoběžně s ní /$\alpha = 90^\circ$/. Pro mořskou vodu užijte hodnoty $\sigma_2 = 4\,\Omega^{-1}m^{-1}$, $\varepsilon_2 = 81\,\varepsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$

b/ Stejný výpočet proveďte pro měď s použitím hodnot $\sigma = 6 \cdot 10^7\,\Omega^{-1}m^{-1}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$.

4.12 Vypočtěte ohmický odpor /tj. reálnou část impedance/ měděného vodiče délky $l = 5$ cm s válcovým průřezem o poloměru $r = 0{,}5$ mm při frekvenci 300 MHz. Měrný odpor mědi je $1{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega$ m.

4.13 V teorii elektrických obvodů resp. vedení se často užívá pojmu impedance, což je veličina udávající souvislost mezi napětím a proudem. Analogicky k teorii obvodů lze zavést pojem impedance i v teorii elektromagnetického pole. Budeme-li intenzitu elektrického pole $\vec{E}$ chápat jako analogii napětí a intenzitu magnetického pole $\vec{H}$ jako analogii proudu, můžeme zavést obecně komplexní veličinu Z_0, která vyjadřuje vztah mezi $\vec{E}$ a $\vec{H}$ co do velikosti i fáze. Mluvíme pak o charakteristické impedanci daného prostředí pro vlnu určitého typu.

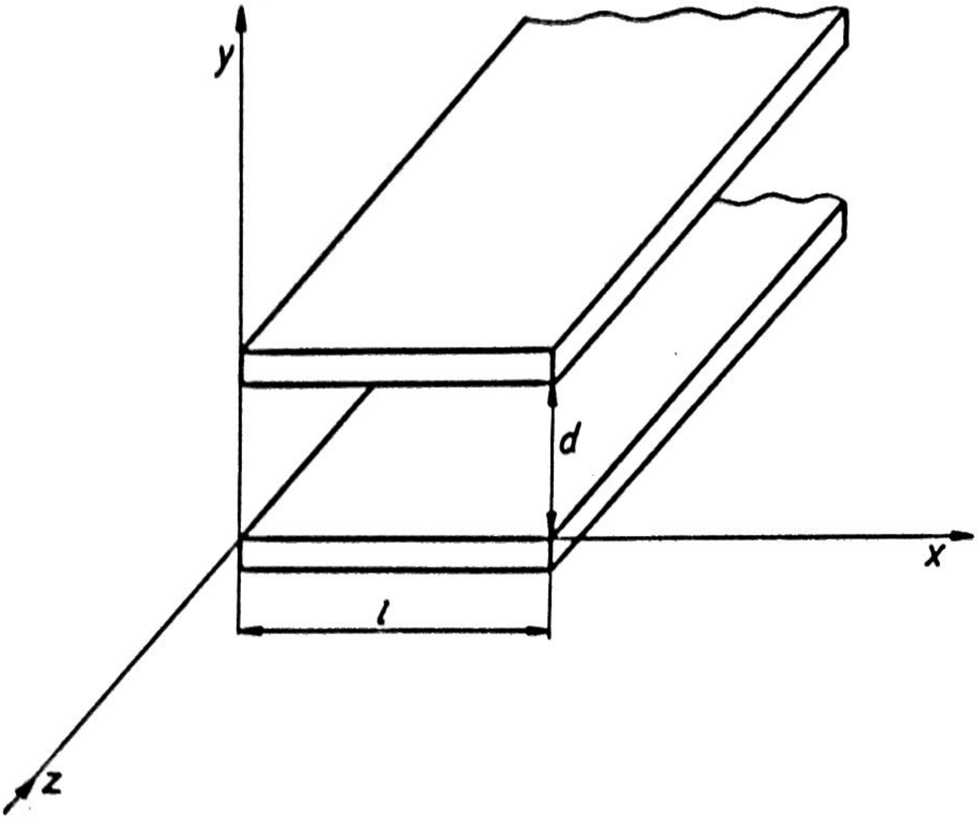
Uvažujme rovinnou monochromatickou vlnu o frekvenci ω a vlnovém vektoru $\vec{k}$ /viz úlohu 4.2, 4.7/. Jelikož vektory $\vec{E}$, $\vec{H} \times \vec{n}$ leží ve stejném směru a vektor $\vec{H} \times \vec{n}$ má stejnou velikost jako intenzita magnetického pole $\vec{H}$, můžeme charakteristickou impendanci prostředí Z_0 definovat vztahem

$$\vec{E} = Z_0 (\vec{H} \times \vec{n})$$

Vyjádřete impedanci Z_0 pomocí konstant prostředí ε, μ, σ. Vypočít[illegible] její číselnou hodnotu pro případ vakua.

4.14 Uvažujte rovinnou monochromatickou vlnu šířící se ve vzduchu kolmo k ro[illegible] nému rozhraní vodivého prostředí. Vyjádřete charakteristickou impedanci povrc[illegible] vodiče /viz úlohu 4.14/ pomocí jeho vodivosti σ, permitivity ε a perme[illegible] lity μ.

4.15 Ukažte, že mezi dvěma rovnoběžnými ideálně vodivými pásky /viz obr.4.1/ [illegible] může šířit elektromagnetická vlna jejíž nenulové složky pole jsou



Obr.4.1

$$E_y = i k C e^{i(\omega t - kz)}$$

$$H_x = i \omega C e^{i(\omega t - kz)}$$

Určete velikost konstanty k a ukažte, že tato vlna nazývaná vlnou TEM se [illegible] podél vedení, tj. ve směru osy z.

4.16 Charakteristickou impedanci vedení lze definovat jako poměr příčných /tj[illegible] kolmých ke směru šíření/ složek intenzity elektrického a magnetického pole /sr[illegible] úlohu 4.13/. Analogickou veličinou charakterizující vlastnosti vedení je vlnov[illegible] odpor definovaný jako poměr napětí a proudu v nekonečně dlouhém vedení daného [illegible]

Pro případ páskového vedení /viz úlohu 4.15/ vypočítejte charakteristick[illegible] impedanci Z a vlnový odpor Z_0 za předpokladu, že vedením se šíří vlna ty[illegible]

TEM. Dokažte, že platí $Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$, kde L_0 a C_0 je indukčnost a kapacita připadající na jednotku délky vedení.

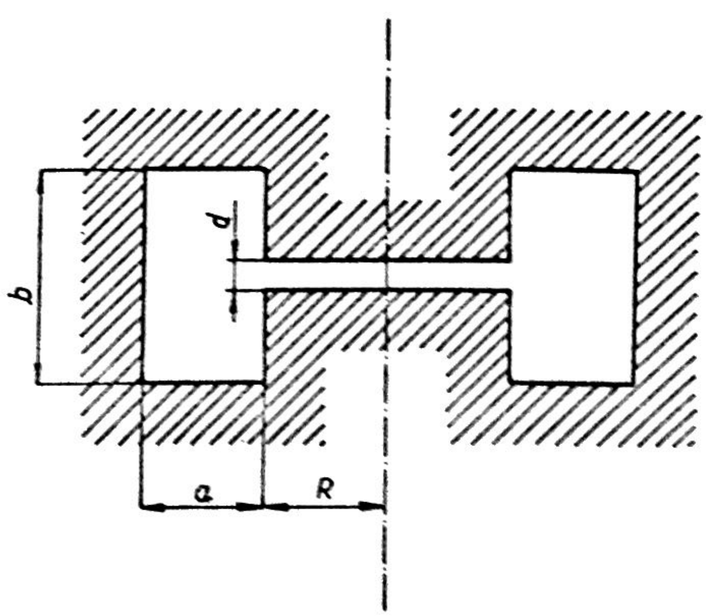
4.17 Předpokládejte, že páskovým vedením podle obr.4.1 se šíří monochromatická vlna typu TEM /viz úlohu 4.15/. Určete její fázovou rychlost v_f . Určete dále rychlost v_g, se kterou se podél vedení šíří energie přenášená danou vlnou.

4.18 K vedení elektromagnetických vln o krátkých vlnových délkách se užívá vlnovodů - trubic z vodivého materiálu, jejichž dutinou se vlna šíří. Uvažujte přímý vlnovod, jehož stěny jsou ideálně vodivé. Dutina má obdélníkový průřez a je vyplněna dielektrikem s permitivitou ε a permeabilitou μ . Souřadná osa x nechť splývá s delší stranou průřezu a , osa y s kratší stranou b a osa z nechť míří podél vlnovodu.

Ukažte, že ve vlnovodu může existovat pole, které se získá superposicí dvou rovinných vln s těmito vlastnostmi: jejich vlnové vektory $\vec{k}$, $\vec{k}'$ leží v rovině xz , jejich vektory elektrického pole $\vec{E}$, $\vec{E}'$ mají směr osy y . Ukažte dále, že toto pole se šíří podél vlnovodu ve formě vlny, stanovte její vlnovou délku, fázovou a grupovou rychlost. Pro jaký obor frekvencí se tato vlna může vlnovodem šířit? Vypočtěte hustotu energie elektrického a magnetického pole, Poyntingův vektor a rychlost postupu energie vlnovodem.

4.19 Pro decimetrové a centimetrové vlny se místo obvyklých resonančních obvodů /viz odstavec 5.2/ užívá tzv. dutinových resonátorů, tvořených dutinami vyplněnými dielektrikem /s permitivitou ε a permeabilitou μ / jejichž stěny jsou zhotoveny z dobrého vodiče. V takové dutině může totiž vzniknout stojaté elektromagnetické vlnění určité frekvence.

Jedním z užívaných typů je tzv. toroidní resonátor tvořený dutinou tvaru kruhového prstence, jejíž řez je uveden na obr.4.2. Elektrické pole je v toroidním resonátoru soustředěno převážně v úzké mezeře šířky d , naopak magnetické pole je soustředěno v okrajovém prstenci. Předpokládejte, že elektrické pole v mezeře je homogenní a že lze zanedbat jeho rozptyl do prostoru prstence. Analogicky předpokládejte, že lze zanedbat magnetické pole v mezeře. Za těchto předpokladů vypočtěte resonanční frekvenci resonátoru s rozměry podle obr.4.2.



Obr.4.2

4.20 Důležitou vlastností Maxwellových rovnic je jejich invariance vůči Lorentzově transformaci. Studujte názorně její vlastnosti pro případ translačního pohybu rychlostí $\underline{v}$ ve směru osy x. Lorentzova transformace je pak dána v...

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

v nichž x' a t' představují transformované hodnoty x-ové souřadnice a ...su t.

a/ Dvojici čísel / x, ct / chápejte jako kartézské souřadnice bodu v ...ně. Lorentzova transformace pak představuje přechod ke kosoúhlým sou...nicím s jiným měřítkem na osách. Nakreslete osy této kosoúhlé sousta... pro $v = c/2$. Dále vyneste do roviny prostoročasové body /události/

$U_1 : x = 1,\ ct = 0$ $\qquad$ $U_3 : x' = 1,\ ct' = 0$

$U_2 : x = 0,\ ct = 1$ $\qquad$ $U_4 : x' = 0,\ ct' = 1$.

Konečně vyznačte v grafu tzv. světelný kužel, pro nějž prostoročasový interval $d = \sqrt{x^2 - c^2t^2} = 0$, množinu událostí M pro níž d ... a množinu událostí N pro níž $d = i$.

b/ Grafického znázornění využijte k vysvětlení tohoto paradoxu: V dlouh... desce položené podél osy x je vyříznut otvor délky 1 m. Podél des... se ve směru $\underline{x}$ pohybuje rychlostí $\underline{v}$ tyč, jejíž klidová délka je rovněž 1 m tak, že zůstává stále orientována podél osy x. Z vlastn... Lorentzovy transformace plyne, že pohybující se tyč je kratší než vy...nutý otvor. Může jím tedy projít, udělíme-li jí ještě určitou rychlo... kolmo k desce. Ze stanoviska pozorovatele, který se pohybuje s tyčí, s... však pohybuje otvor; má proto menší rozměr než délka tyče a tyč jím ... může projít.

4.21 Stanovte, jakou rychlostí vzhledem ke klidné soustavě souřadné se šíří světlo ve směru osy $\underline{x}$ v prostředí o indexu lomu $\underline{n}$, jestliže se toto pr...středí pohybuje rychlostí $\underline{v}$ ve směru osy x.

4. Elektromagnetické pole

4.1 a/ V prostředí ve kterém nenastává disperse. Fásová rychlost nesávisí na vlnovém vektoru $\vec{k}$. Platí $\omega = v k$. Odtud

$$u = v = \frac{\omega}{k}$$

b/ Platí $k = 2\pi/\lambda$, kde λ je vlnová délka.

Odtud

$$u = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial (vk)}{\partial k} = v + k\,\frac{dv}{dk} = v - \lambda\,\frac{dv}{d\lambda}$$

Tedy $u > v$ pro $dv/d\lambda < 0$.

4.2 Pomocí derivování Maxwellových rovnic podle času dostaneme pro vektory $\vec{E}$, $\vec{B}$ podmínky

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta\vec{B} - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Oba vztahy mají tvar vlnové rovnice. Jejich řešení jsou tedy funkce typu $\vec{E} = \vec{E}(\eta)$, $\vec{B} = \vec{B}(\eta)$ kde $\eta = t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{v}$. Rychlost šíření má hodnotu $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. K tomu, aby zmíněné funkce vyhovovaly Maxwellovým rovnicím je třeba, aby splňovaly další podmínky. Derivujeme-li vektor $\vec{E}$ podle souřadnic x , y , z, máme

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} = -\,\frac{n_x}{v}\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} = -\,\frac{n_y}{v}\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial z} = -\,\frac{n_z}{v}\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Tedy $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\,\frac{1}{v}\left(\vec{n} \times \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{v}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{n} \times \vec{E}\right)$

Použitím Maxwellovy rovnice dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{n}\times\vec{E}) = v\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Po integraci, položíme-li integrační konstantu rovnou nule, máme

$$\vec{B} = \frac{1}{v}\left(\vec{n} \times \vec{E}\right).$$

Analogickým postupem lze získat vztah

$$\vec{E} = \frac{-1}{\varepsilon\mu v}\left(\vec{n}\times\vec{B}\right)$$

Vektory $\vec{n}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ jsou tedy navzájem kolmé a tvoří v uvedeném pořadí pravotočivý systém.

4.3 Prosté hodnoty intenzity elektrického pole $\vec{E}$ a magnetické indukce $\vec{B}$ jsou určeny vztahy /viz úlohu 4.2/

$$E = Re\, E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$$

$$B = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, E$$

kde $\vec{k}$ je vlnový vektor zavedený běžným způsobem / $k = 2\pi/\lambda$ /. Pro hustotu energie w v bodě $\vec{r}$ a čase t pak platí

$$w = \frac{1}{2}(ED + HB) = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) + \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}\,\vec{r})\right]$$

$$w = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$$

Střední hodnota hustoty energie za jednu periodu T činí

$$\bar{w} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r})\,dt = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

Hustota toku energie je určena Poyntingovým vektorem $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$

Pro jeho okamžitou hodnotu platí

$$P = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) = c\, \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

Tedy $$P = c\, w$$

Střední hodnota za jednu periodu $\bar{P}$

$$\bar{P} = c\bar{w} = \frac{c\, \varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

4.4 Prostá hodnota intenzity elektrického pole E i magnetické indukce B v daném bodě nezávisí na čase.

Bude proto

$$w = \bar{w} = \varepsilon_0 E_0^2$$

$$P = \bar{P} = c\, \varepsilon_0 E_0^2$$

4.5 Intenzita elektrického pole na povrchu vodiče má hodnotu IR/ℓ ; její směr je rovnoběžný s osou válce. Vektor intenzity $\vec{H}$ magnetického pole je kolmý k ose válce a má směr tečny k jeho plášti. Platí $H = I/2\pi r$.

Poyntingův vektor $\vec{E} \times \vec{H} = I^2 R/2\pi r \ell$ má tedy radiální směr a míří dovnitř vodiče. Celkový tok pláštěm válce je roven $R I^2$, což představuje ztráty výkonu v odporu vodiče.

4.6 Podle úlohy 4.2 platí pro rovinnou vlnu

$$\vec{B} = \frac{1}{v}(\vec{n} \times \vec{E})$$

$$\vec{D} = \frac{1}{\mu_0 v}(\vec{B} \times \vec{n})$$

Použitím známé identity pro dvojnásobný vektorový součin plyne z uvedených vztahů

$$\vec{D} = \vec{\varepsilon}\vec{E} = -\frac{1}{\mu_0 v^2}\left[\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E})\right]$$

$$\mu_0 v^2 \varepsilon_{xx} E_x + (\vec{n}.\vec{E}) \cos\alpha - E_x = 0$$

$$\mu_0 v^2 \varepsilon_{yy} E_y + (\vec{n}.\vec{E}) \cos\beta - E_y = 0$$

$$\mu_0 v^2 \varepsilon_{zz} E_z + (\vec{n}.\vec{E}) \cos\gamma - E_z = 0$$

Složky vektoru E_x, E_y, E_z musí tedy vyhovovat soustavě tří homogenních algebraických rovnic prvního stupně. Netriviální řešení existuje jen tehdy, je-li determinant soustavy nulový.

Tedy

$$\begin{vmatrix} \mu_0 v^2 \varepsilon_{xx} - \sin^2\alpha, & \cos\alpha \cdot \cos\beta, & \cos\alpha . \cos\gamma \\ \cos\beta . \cos\alpha, & \mu_0 v^2 \varepsilon_{yy} - \sin^2\beta, & \cos\beta . \cos\gamma \\ \cos\gamma . \cos\alpha, & \cos\gamma . \cos\beta, & \mu_0 v^2 \varepsilon_{zz} - \sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0$$

Po vyčíslení determinantu dostaneme pro v^2 rovnici třetího stupně. Lze se ovšem snadno přesvědčit, že jeden kořen je roven nule. Vezmeme-li tuto skutečnost v úvahu, můžeme stupeň rovnice redukovat. Dostaneme

$$v^4 - v^2\left[v_x(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) + v_y^2(\cos^2\gamma + \cos^2\alpha) + \right.$$
$$\left. + v_z^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)\right] + v_y^2 v_z^2 \cos^2\alpha + v_z^2 v_x^2 \cos^2\beta +$$
$$+ v_x^2 v_y^2 \cos^2\gamma = 0$$

Uvážíme-li, že $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, získáme po roznásobení

$$(v_y^2 - v^2)(v_z^2 - v^2)\cos^2\alpha + (v_x^2 - v^2)(v_z^2 - v^2)\cos^2\beta +$$
$$+ (v_x^2 - v^2)(v_y^2 - v^2)\cos^2\gamma = 0$$

Podělením rovnice výrazem $(v_x^2 - v^2)(v_y^2 - v^2)(v_z^2 - v^2)$ dostaneme tvar žádaný v zadání úlohy.

1a/Dosazením výrazů vyjadřujících tvar vlny /viz zadání úlohy/ do Maxwellových rovnic dostaneme

$$\text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) = (\sigma + i\omega\varepsilon)\vec{E}(\vec{r}, t) \qquad \text{(A)}$$

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = -i\,\omega\mu\,\vec{H}(\vec{r}, t)$$

Uvedené vztahy lze snadno převést do požadovaného tvaru

$$rot\,\vec{H} - \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\varepsilon}\vec{E}) = 0$$
$$rot\,\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\mu\vec{H}) = 0 \qquad (B)$$

b/ Za předpokladu platnosti rovnic (A) platí na základě identity $div\,rot\,\vec{\lambda} = 0$ / $\vec{\lambda}$ libovolné vektorové pole/:

$$div\,(\bar{\varepsilon}\vec{E}) = 0$$
$$div\,(\mu\vec{H}) = 0 . \qquad (C)$$

Odtud $div\,(\varepsilon\vec{E}) = -\frac{1}{i\omega}div(\sigma\vec{E})$. Veličina $\rho(\vec{r},t) = -\frac{1}{i\omega}div(\sigma\vec{E})$ má význam objemové hustoty proudu. Použijeme-li totiž prvních rovnic (A) a (C) spolu s Ohmovým zákonem, dostaneme rovnici kontinuity proudu.

c/ Pro homogenní vodič

$$div(\sigma\vec{E}) = \sigma\,div\,\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho(\vec{r},t)$$

Podle bodu b/ pak platí

$$(i\omega + \frac{\sigma}{\varepsilon})\rho(\vec{r},t) = 0$$

Jelikož v našem případě je $i\omega + \frac{\sigma}{\varepsilon} \neq 0$, musí být $\rho(\vec{r},t) = 0$.

4.8 Je-li vlnový vektor $\vec{k}$ reálný, šíří se pole jako rovinná monochromatická vlna. Její vlnoplochy jsou kolmé k vektoru $\vec{k}/k = \vec{n}$, a postupují ve směru $\vec{n}$ fázovou rychlostí $v = \omega/k$. Vlnová délka $\lambda = 2\pi/k$. Platí tedy $\vec{k} = (2\pi/\lambda)\vec{n}$.

Je-li $\vec{k}$ komplexní, lze psát $\vec{k} = \vec{k}_1 + i\vec{k}_2$ kde $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ jsou již reálné. Vektor $\vec{k}_1$ má stejný význam jako v předchozím případě. Vektor $\vec{k}_2$ popisuje změny amplitudy vlny, která nyní exponenciálně ubývá ve směru $\vec{k}_2/k_2$. Na vzdálenosti $1/k_2$ klesne v poměru $1/e$, tj. o jeden nepr.

Maxwellovy rovnice dávají /srovn. úlohu 4.2, 4.7/ $-(\vec{k}\times\vec{H}) = \omega(\bar{\varepsilon}\vec{E})$, $\vec{k}\cdot\vec{E} = \omega\mu\vec{H}$. Skalárním násobením první rovnice s vektorem $\vec{k}$ dostaneme $\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$. Podobně z druhé rovnice dostaneme $\vec{E}\cdot\vec{H} = 0$, $\vec{k}\cdot\vec{H} = 0$. Užitím známé identity z vektorové algebry pak dostaneme

$$-\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E}) = \omega^2\mu\bar{\varepsilon}\vec{E} = (\vec{k}.\vec{k})\vec{E}$$
$$(\vec{k}.\vec{k}) = \omega^2\mu\bar{\varepsilon}$$

Jsou-li zadány vektory $\vec{E}$, $\vec{k}$, platí pro intenzitu magnetického pole $\vec{H} = \frac{1}{\mu\omega}(\vec{k}\times\vec{E})$. Dále pak platí $-(\vec{k}\times\vec{H}) = -\frac{1}{\mu\omega}\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E}) = \omega\bar{\varepsilon}\vec{E}$. Jsou tedy splněny podmínky požadované Maxwellovými rovnicemi.

4.9 Označíme $\vec{k}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$; $\vec{k}'$, $\vec{E}'$, $\vec{H}'$; $\vec{k}''$, $\vec{E}''$, $\vec{H}''$ vlnový vektor a komplexní amplitudy dopadající, odražené a lomené vlny. Rovinu xy sou-

...soustavy ztotožníme s rozhraním, rovinu xz s rovinou dopadu; osu z orientujeme směrem do prostředí 2. Pak vektor $\vec{k} = k(\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$.

Složky intenzit ve směrech x, resp. y jsou pro jednotlivé vlny úměrny faktorem /viz úloha 4.7/

$$e^{-ik_xX}, \quad e^{-ik'_xX}, \quad e^{-ik''_xX} \quad \text{respektive} \quad e^{-ik_yY}, \quad e^{-ik'_yY}, \quad e^{-ik''_yY}$$

V celé rovině rozhraní musí vlny splňovat okrajové podmínky, které požadují spojitost tečných složek intenzit elektrického i magnetického pole. Odtud plyne požadavek

$$k_x = k'_x = k''_x = k\sin\alpha, \quad k_y = k'_y = k''_y = 0$$

Vezmeme-li dále v úvahu že $k^2 = k'^2 = \varepsilon_1\mu_1\omega^2$, a $k''^2 = \varepsilon_2\mu_2\omega^2$, lze pro dané $\vec{k}$ stanovit vektory $\vec{k}'$, $\vec{k}''$.

Speciálně pro $\vec{k}'$, $\vec{k}''$ reálné můžeme psát

$$\vec{k}' = k'(\sin\alpha', 0, -\cos\alpha')$$

$$\vec{k}'' = k''(\sin\beta, 0, \cos\beta).$$

Odtud ihned plyne zákon odrazu $\alpha = \alpha'$ a zákon lomu $\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sin\alpha = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\sin\beta$.

Pro určení intenzity odražené a lomené vlny stačí nyní požadovat splnění okrajových podmínek v jediném bodě rozhraní – např. v počátku.

a/ Leží-li intenzita el. pole dopadající vlny kolmo k rovině dopadu, dává požadavek spojitosti tečných složek intenzity el. pole podmínku

$$E_y + E'_y = E''_y$$

Z požadavku spojitosti tečných složek intenzity magnetického pole máme vzhledem k relaci mezi $\vec{E}$ a $\vec{H}$ /viz úloha 4.2/ podmínku

$$\frac{1}{\mu_1}\left(E_y k_z + E'_y k'_z\right) = \frac{1}{\mu_2} E''_y k''_z$$

Řešením obou rovnic

$$E'_y = \frac{k_z - \frac{\mu_1}{\mu_2} k''_z}{\frac{\mu_1}{\mu_2} k''_z - k'_z} E_y$$

$$E''_y = \frac{k_z - k'_z}{\frac{\mu_1}{\mu_2} k''_z - k'_z} E_y$$

b/ Řešení tohoto případu dostaneme z předchozího, zaměníme-li navzájem elektrické a magnetické intenzity, dále permitivity a permeability.

4.10 Chápeme-li ve smyslu symboliky užívané v úloze 4,9 sklo jako prostředí 1, vzduch jako prostředí 2, je $\varepsilon_1 = n^2\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$.

Označíme-li dále $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, platí podle výsledků této úlohy $k = n k_0$, $k'' = k_0$

Složky vektorů $\vec{k}'$, $\vec{k}''$ nejsou však nyní obecně reálné. Platí

$$k_z = -k_z' = n k_0 \cos\alpha$$

$$k_z'' = -i k_0 \sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}.$$

a/ Dosadíme-li, máme pro intenzitu odražené vlny

$$E_y' = \frac{n\cos\alpha + i\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}}{n\cos\alpha - i\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}} E_y$$

Zlomek ve výrazu představuje fázový faktor. Číselný výpočet dává, že E_y' má vůči E_y předstih o $95^\circ\ 44'$.

b/ Hloubku vniku do druhého prostředí určuje veličina $1/|k_z''|$ /viz úloha 4.8/.

Platí

$$\frac{1}{|k_z''|} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot 0{,}829} = 0{,}115\ \mu m.$$

4.11 Modifikace spočívá v záměně $\varepsilon_2 \to \bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 + \frac{\sigma_2}{i\omega}$ /viz příklad 4.7/. Jinak je možno použít postup řešení úlohy 4.9.

Položíme-li pro náš případ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ máme

$$k''^2 = k_z''^2 + k_x^2 = \left(\varepsilon_2 + \frac{\sigma_2}{i\omega}\right)\mu_0\omega^2$$

Označíme-li λ vlnovou délku v prostředí 1, je $k_x = \sqrt{\varepsilon_1\mu_0}\,\omega\sin\alpha = (2\pi/\lambda)\sin\alpha$. Pro k_z'' pak lze psát rovnici

$$k_z''^2 = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\alpha + \frac{\sigma}{i\omega\varepsilon_1}\right)\frac{4\pi^2}{\lambda^2}$$

Ze dvou jejích kořenů volíme ten, pro jehož imaginární část platí $Im(k_z'') \leq 0$. V opačném případě by totiž amplituda vlny v druhém prostředí neomezeně vzrůstala. Hloubka vniku h do druhého prostředí pak má hodnotu

$$h = \frac{1}{-Im\, k_z''}$$

Směr vlnoploch ve druhém prostředí je určen reálnou složkou vektoru $\vec{k}''$. $Re\,\vec{k}'' = (k_x, 0, Re\,k_z'')$.

a/ Pro $\alpha = 0$, $h = 1{,}19$ cm, $Re\,\vec{k}'' = (0;0;9{,}1)\,\frac{2\pi}{\lambda}$

Pro $\alpha = 90^o$, $h = 1{,}2$ cm, $Re\,\vec{k}'' = (1;0;9{,}04)\,\frac{2\pi}{\lambda}$

b/ V případě mědi se pro hodnotu k_z'' uplatňuje pouze člen s vodivostí σ: $k_z'' = (1 - i)\,1{,}34\;10^4\,\frac{2\pi}{\lambda}$

Pro $\alpha = 0$ je $h = 1{,}19\,\mu m$, $Re\,\vec{k}'' = (0;0;1{,}34.10^4)\,\frac{2\pi}{\lambda}$

Pro $\alpha = 90^o$ je $h = 1{,}19\,\mu m$, $Re\,\vec{k}'' = (1;0;1{,}34.10^4)\,\frac{2\pi}{\lambda}$

Hloubka vniku i směr vlnoploch se tedy pro kolmý a rovnoběžný dopad téměř neliší.

Jak ilustruje úloha 4.11, proud protéká pouze v tenké vrstvě na povrchu vodiče. Lze ho proto popsat plošnou hustotou proudu $\vec{i}_p$. Její hodnotu lze získat integrací objemové hustoty přes souřadnici z, která vyjadřuje vzdálenost od povrchu vodiče. Tedy /viz úloha 4.8 /

$$\vec{i}_p = \int_0^\infty \sigma \vec{E} e^{-ik_z'' z}\,dz = \frac{\sigma}{ik_z''}\vec{E}$$

Na druhé straně, protéká-li vodičem proud I, platí $i_p = I/2\pi r$. Pro napětí $U = El$ podél vodiče dostaneme pak

$$U = \frac{ik_z''}{\sigma}\,i_p l = \frac{i k_z'' l}{2\pi r \sigma}\,I$$

Pro činnou složku odporu bereme pouze reálnou část impedance $i k_z'' l/2\pi r\sigma$ /imaginární část přispívá k indukčnosti vodiče/. Zavedeme-li hloubku vniku /viz úloha 4.11/. $h = \sqrt{2/\mu\sigma\omega}$, dostaneme pro vysokofrekvenční odpor vodiče R

$$R = Re\left[i\,\frac{l}{2\pi r\sigma}\,k_z''\right] = \frac{l}{2\pi r \sigma h}$$

Po dosazení číselných hodnot ze zadání $R = 7{,}1\,.\,10^{-2}\,\Omega$

Poznámka: V úvodu řešení jsme použili výsledků úlohy 4.11, která se týkala rovinného rozhraní a rovinné vlny. Intenzity pole v daném místě povrchové vrstvy vodiče jsou však určeny polem na rozhraní v plošné oblasti o rozměrech několikanásobku hloubky průniku. V této oblasti lze náš vodič pokládat za rovinný. Podobně, jelikož se v dielektriku pole mění s polohou poměrně pomalu, lze v této oblasti vlnu šířící se podél vodiče pokládat za rovinnou.

Použijeme výsledků úlohy 4.8; podle níž

$$\vec{E} = \frac{1}{\omega \bar{\varepsilon}}\,(\vec{H} \times \vec{k})$$

Jelikož $\vec{k} = \vec{n} k$, $k = \omega\sqrt{\mu\bar{\varepsilon}}$, platí

$$\vec{E} = \frac{k}{\omega\bar{\varepsilon}}\,(\vec{H} \times \vec{n})$$

Pro charakteristickou impedanci Z_0 pak dostaneme podle definice

$$Z_0 = \frac{k}{\omega \varepsilon}$$

Po dosazení za k

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\omega \varepsilon - i\sigma}}$$

Speciálně pro vakuum

$$Z_0 = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} = 376{,}6\ \Omega$$

4.14 Využijeme-li výsledku úlohy 4.11, můžeme použít postup stejný jako v předchozí úloze.

4.15 Složky intenzit E_y, H_x podle zadání vyhovují vlnovým rovnicím /viz úloha 4.2/

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

jestliže $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$. Podél vedení se ovšem může šířit jen vlna, která navíc splňuje okrajové podmínky na rozhraní vodiče /tečná složka intenzity elektrického pole a normálová složka intenzity magnetického pole musí být nulové/. Naše vlna podmínky evidentně splňuje, neboť $E_t = E_x = 0$, $H_n = H_y = 0$.

Vlna se šíří ve směru osy z, neboť Poyntingův vektor má nenulovou pouze složku $P_z = k \omega \varepsilon C^2$.

4.16 Pro páskové vedení je charakteristická impedance Z zřejmě rovna /srovn. úlohu 4.13, 4.14/

$$Z = \frac{E_t}{H_t} = \frac{E_y}{H_x} = \frac{k}{\omega \varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Vlnový odpor Z_0 je určen poměrem napětí U a proudu I v nekonečně dlouhém vedení

$$Z_0 = \frac{U}{I}$$

Pro páskové vedení /viz obr.4.1/

$$U = \int_{y=0}^{y=d} E_y \, dy = i k C d \, e^{i\omega t} e^{-ikz}$$

Proud tekoucí páskem dostaneme cirkulací intenzity magnetického pole po křivce S, která tento pásek obepíná, např. po obdélníku ležícím v rovině z = 0, jehož vrcholy jsou $A = (0, d)$, $B = (l, d)$, $C = (l, \infty)$, $D = (0, \infty)$

$$I = \int_s (\vec{H}\, d\vec{s}) = \int_0^{l} H_x\, ds = H_x l = i\omega\varepsilon C e^{i\omega t} e^{-ikz} . l$$

$$Z_0 = \frac{U}{I} = \frac{k}{\omega\varepsilon} \frac{d}{l} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{d}{l}$$

Indukčnost připadající na jednotkovou délku vedení je možno spočítat ze vztahu

$$\frac{1}{2} L_0 \bar{J}^2 = \frac{1}{4}\int_V \mu (\vec{H}.\vec{H}^*) dV = \frac{1}{4}\int_0^{l}\int_0^{d}\int_0^{z=1} \mu H_x H_x^* dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{1}{4} \mu \omega^2 \varepsilon^2 C^2 l d$$

Z předchozích vztahů vyplývá

$$\bar{J}^2 = \frac{1}{2} J J^* = \frac{1}{2} \omega^2 \varepsilon^2 C^2 l^2$$

to znamená, že

$$L_0 = \mu \frac{d}{l}$$

Kapacitu určíme jako pro deskový kondenzátor. Na jednotkovou délku desek šířky l , vzdálených o d bude připadat kapacita C_0 rovná

$$C_0 = \frac{\varepsilon l}{d}$$

Vlnový odpor bude roven

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{d}{l} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

což souhlasí s výše uvedeným výrazem.

4.17 Časová a prostorová závislost složek intenzity pole vlny TEM /viz zadání příkladu 4.15/ je dána členem

$$f(z,t) = e^{i(\omega t - kz)}$$

Pro místa konstantní fáze musí být splněno

$$i(\omega t - kz) = \text{konst.}$$

Rychlost postupu těchto míst ve směru šíření tj. ve směru osy z je $v_f = dz/dt$ z čehož

$$v_f = \omega / k$$

Jelikož pro zkoumanou vlnu $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = c$$

c je rychlost světla.

Rychlost v_g se kterou elektromagnetická vlna přenáší energii /signál/ je obecně různá od fázové rychlosti v_f. Veličina $1/v_g$ určuje dobu, za kterou elektromagnetická energie postoupí o jednotkovou vzdálenost. Za dobu $1/v_g$ se nahromadí energie ve válci jednotkové délky. V tomto válci o ploše základny je nahromaděná energie dána výrazem

$$W = \frac{1}{4}\int_S\int_0^1 \varepsilon(\vec{E}\vec{E}^*)\,dS\,dz + \frac{1}{4}\int_S\int_0^1 \mu(\vec{H}\vec{H}^*)\,dz$$

v němž $\vec{E}^*$, $\vec{H}^*$ značí komplexně sdružené veličiny.

Plochou S projde za jednotku času výkon

$$P = \frac{1}{2}\int_S \left[(\vec{E}\times\vec{H}^*).\vec{n}\right] dS$$

($\vec{n}$ je normála k ploše S). Za čas $\frac{1}{v_g}$ projde energie P/v_g, která musí být rovna energii W nahromaděné ve válečku. Takže $P/v_g = W$

$$v_g = \frac{2\int\left[(\vec{E}\times\vec{H}^*).\vec{n}\right]dS}{\int_S\int_0^1\left[\varepsilon(\vec{E}.\vec{E}^*) + \mu(\vec{H}.\vec{H}^*)\right]dS\,dz}$$

Po dosazení /viz příklad 4.15/, volíme-li za průřez celkový průřez páskovým vedením / $\vec{n} = (0, 0, 1)$/

$$v_g = \frac{k\omega\varepsilon C^2 Sd}{\varepsilon k^2 C^2 Sd + \omega^2\varepsilon^2 l^2 Sd} = \frac{\omega^2\varepsilon^{3/2}\mu^{1/2}}{\omega^2\varepsilon^2\mu + \omega^2\varepsilon^2\mu}$$

$$v_g = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = c$$

Je tedy v tomto případě rychlost přenosu energie stejná jako fázová rychlost.

4.18 Nulovost tečné složky intenzity elektrického pole $\vec{E}$ na delších stěnách a je pro daný tvar vlny evidentně splněna. Pro kratší stěny b dostáváme /bez ohledu na časový faktor/ podmínky

$$E_y e^{ik_z Z} + E'_y e^{ik'_z Z} = 0$$

$$E_y e^{i(k_z Z + k_x a)} + E'_y e^{i(k'_z Z + k'_x a)} = 0.$$

První z nich lze splnit jen pro $-E_y = E'_y$, $k'_z = k_z$. Jelikož $k^2 = k'^2 = \varepsilon\mu\omega$, musí dále být $k_x = -k'_x$. Po dosazení uvedených výsledků do druhé podmínky dostaneme $\sin(k_x a) = 0$, tedy $k_x = n\pi/a$ kde n je celé číslo.

Přípustné intenzity magnetického pole H, H' vypočteme pak z relace $\vec{H} = \left(\frac{\vec{k}}{\mu\omega}\times\vec{E}\right)$ - viz úloha 4.8.

Celkové intensity elektrického a magnetického pole $\vec{E}_c(\vec{r}, t)$, $\vec{H}_c(\vec{r}, t)$
, kde $\vec{r} = (x, y, z)$ mají složky:

$$\vec{E}_c(\vec{r}, t) = (0;\ 2E_y \sin k_x . x;\ 0)\ e^{i(\omega t - k_z Z)}$$

$$\vec{H}_c(\vec{r}, t) = \left(-\frac{k_z}{\mu\omega} 2E_y \sin k_x X;\ 0;\ \frac{k_x}{\mu\omega} 2E_y \cos k_x X\right) e^{i(\omega t - k_z Z)}$$

$$k_x = \frac{n\pi}{a}, \qquad k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2}$$

pole se tudíž šíří ve směru osy z jako postupná vlna. Mění-li se n, dostáváme různé typy /vidy/ vln označované TE_{n0} /transverzální elektrické -$\vec{E}$ má pouze příčnou složku/.

Postupné netlumené vlně odpovídají reálná k_z, tj. $k_x^2 < k^2$. Odtud vyplývá, že vlnovodem se může šířit vlna daného typu pouze tehdy, splňuje-li její frekvence ω podmínku $\omega > n\pi c/a = \Omega_n$, $(c = (\varepsilon\mu)^{-1/2})$. Vlny, které uvedené podmínce nevyhovují, se ve vlnovodu rychle utlumí. Frekvence Ω_n udává dolní mez pro frekvenci daného vidu TE_{n0}. Nejnižší mezní frekvenci má vid TE_{10} ($\Omega = \pi c/a$). Je proto v určitém oboru frekvencí /až k nejbližší vyšší mezní frekvenci/ jediným videm, který se může vlnovodem šířit. Nazývá se proto někdy dominantním videm.

Složku k_z vlnového vektoru můžeme vyjádřit pomocí mezní frekvence Ω_n. Platí

$$k_z = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \Omega_n^2}$$

Tak dostáváme:

Pro vlnovou délku

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi c}{\sqrt{\omega^2 - \Omega_n}}$$

pro fázovou rychlost

$$v_f = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\Omega_n^2}{\omega^2}}}$$

pro grupovou rychlost

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \frac{\Omega_n^2}{\omega^2}}$$

Časová střední hodnota energie elektrického pole W_E a magnetického pole W_M má hodnotu

$$W_E = \frac{\varepsilon}{4}\left(\vec{E}_c . \vec{E}_c^*\right) = \varepsilon E_y^2 \sin^2 k_x X$$

$$W_m = \frac{\mu}{4}\left(\vec{H}_c\cdot\vec{H}_c^*\right) = \varepsilon E_y^2\left(\frac{k_z^2}{k^2}\sin^2 k_x x + \frac{k_x^2}{k^2}\cdot\cos^2 k_x x\right)$$

/ $\vec{E}^*$, $\vec{H}^*$ značí veličiny komplexně sdružené k $\vec{E}$, $\vec{H}$ /.

Integrací přes průřez a sečtením obou složek dostaneme energii připadající na jednotku délky vlnovodu -

$$W = \varepsilon E_y^2 a b$$

Komplexní Poyntingův vektor $\vec{P}^*$ má složky

$$\vec{P}^* = \frac{1}{2}\left(\vec{E}_c \times \vec{H}_c^*\right) = \left(\frac{k_x}{\mu\omega}\, 2E_y^2 \sin k_x x.\cos k_x x\,;\; 0\,;\; \frac{k_z}{\mu\omega}\, 2E_y^2 \sin^2 k_x x\right)$$

Poslední složka udává tok energie jednotkou plochy vlnovodu. Integrací přes průřez dostaneme tok energie vlnovodem P

$$P = \frac{k_z}{\mu\omega}\, E_y^2\, a b$$

Rychlost postupu energie je pak dána jako poměr P/W.
Platí

$$P/W = \frac{k_z}{\varepsilon\mu\omega} = c\sqrt{1 - \frac{\Omega_n^2}{\omega^2}}$$

4.19 Zavedeme válcové souřadnice r, φ, z. Osa z má směr osy rotační symetrie resonátoru, rovina $z = 0$ jej půlí. Jediná nenulová složka intenzity magnetického pole H_φ nezávisí na φ. Zvolíme integrační kružnici poloměru r_1 se středem v ose resonátoru tak, aby její rovina procházela štěrbinou d /viz obr.4.2/ a byla kolmá k ose resonátoru. Vezmeme-li v úvahu předpoklad o homogenitě elektrického pole v mezeře, dostaneme z Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru

$$2\pi r_1 H = \oint_{l_1} \vec{H} dl_1 = \frac{\partial}{\partial t}\int_S \left(\varepsilon\vec{E}.d\vec{S}\right) = \pi r_1^2 \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Na druhé straně, zvolíme-li uzavřenou křivku k, která obepíná polovinu průřezu resonátoru /viz obr.4.2/, můžeme užitím integrálního tvaru Maxwellovy rovnice dostat /složka elektrického pole ve směru integrační křivky je nenulová pouze v úseku kde křivka přetíná mezeru d /

$$E_z d = \oint_k \left(\vec{E}.d\vec{l}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{S'} \left(\mu\vec{H}.d\vec{S}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{z=-\frac{a}{2}}^{z=+\frac{a}{2}}\int_{r=R}^{r=R+a} \mu H\, dr\, dz$$

Stanovíme-li z první rovnice $H_\varphi = \frac{\pi R^2 \varepsilon}{2\pi r}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial t}$

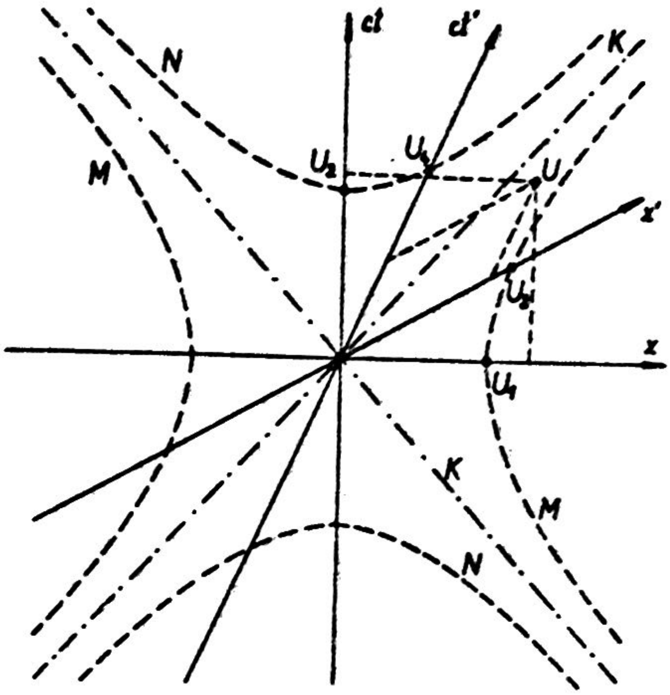
ve vzdálenosti r od osy a dosadíme do druhé, pak po integraci

$$E_z d = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2} R^2 \varepsilon\mu b\cdot \ln\frac{R+a}{R}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial t}\right]$$

z toho integrací dostaneme harmonický průběh s frekvencí

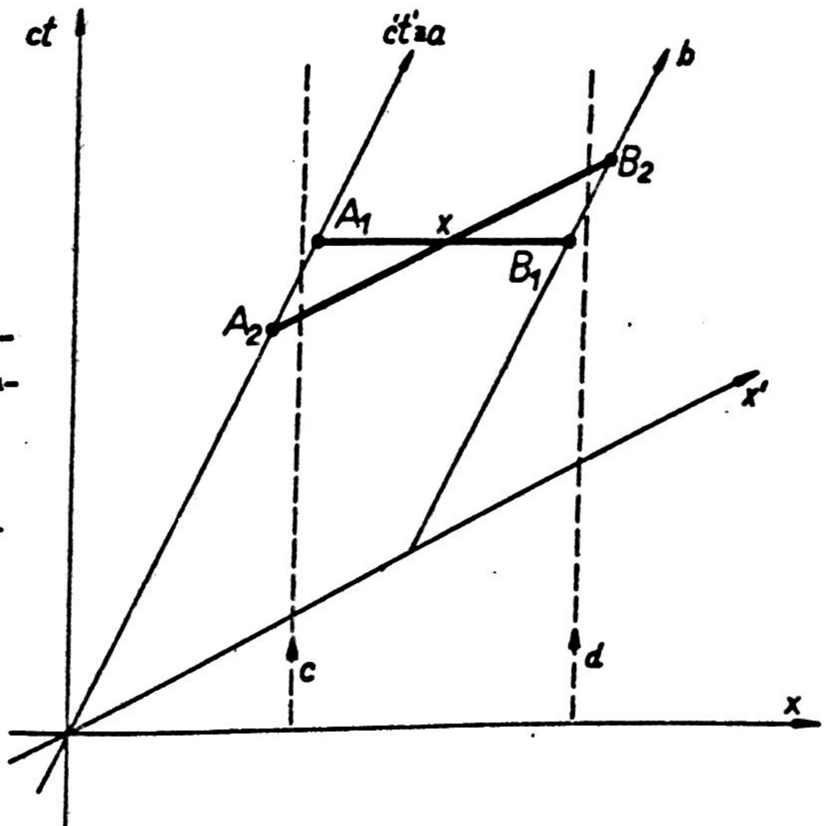
$$\omega = \sqrt{\frac{2d}{\varepsilon_0 \mu R^2 b \ln \frac{R+a}{R}}}$$

a/ Obr.4.3 představuje řešení úlohy. Množiny M, N, tvoří rovnoosé hyperboly, jejichž asymptoty představují světelný kužel.



Obr.4.3

b/ K vysvětlení paradoxu slouží obr.4.4. Jsou na něm zakresleny světočáry konců tyče a, b a konců otvoru c, d. Výchylku ve směru y si lze představit vynesenou kolmo k rovině nákresny. Ze stanoviska stojícího pozorovatele P představuje poloha tyče v určitém okamžiku úsečku A_1B_1. Je zřejmé, že v tomto okamžiku je celá tyč mezi okraji otvoru a může jím procházet. Předpokládejme, že právě leží v rovině desky. Z hlediska pozorovatele P' představuje pak tyč v jediném okamžiku úsečka A_2B_2 - je zřejmé, že tyč přečnívá otvor na obou koncích. Událost A_2 je však prostorově umístěna nad deskou, událost B_2 pod deskou. Jediný bod tyče v rovině desky je nyní



Obr.4.4

dán událostí X . Tyč tedy projde díky tomu, že z hlediska P' není rovnoběžná s deskou. Paradox tedy spočívá v mylném předpokladu, že rovnoběžnost navzájem se pohybujících přímek nezávisí na volbě vztažné soustavy.

4.21 V souřadné soustavě / x', ct'/ spojené s prostředím je rychlost světla rovna c/n. Tedy $x' = \frac{c}{n} t'$ je dráha světla. Užitím Lorentzovy transformace /viz úloha 4.20/ dostaneme vztah

$$x - vt = \frac{c}{n}\left(t - \frac{v}{c^2} x\right)$$

platný pro dráhu světla x v klidové soustavě. Rychlost světla v této soustavě má tedy hodnotu

$$u = \frac{x}{t} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{v}{c}}\, c$$

Pro $\frac{v}{c} \ll 1$ je rychlost $u = \left(\frac{1}{n} + \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\frac{v}{c}\right)c = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v$.
K rychlosti světla se tedy přidává člen $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v$. Číslo v závorce je tzv. Fresnelův strhovací koeficient.