1.3.9 Ukažte, že pole vně homogenně polarizované koule je stejné, jako pole elementárního dipólu umístěného ve středu koule, jehož dipólový moment je roven celkovému momentu koule.

1.3.10 Předpokládejme, že atom vodíku je tvořen protonem kolem nějž obíhá elektron po kruhové dráze o poloměru $r = 1$ Å a že mezi protonem a elektronem působí pouze coulombovské síly. Vycházejíce z těchto předpokladů vypočítejte v soustavě CGSE koeficient polarizovatelnosti atomu vodíku a získanou hodnotu porovnejte s hodnotou koeficientu polarizovatelnosti vodíku, určenou z naměřené relativní permitivity $\varepsilon_r = 1{,}00026$ při hustotě $\rho = 0{,}04$ kg/m^3.

1.3.11 Relativní permitivita helia je při 0°C a tlaku 760 torr rovna $\varepsilon_r = 1{,}000074$. Určete jaký dipólový moment bude připadat na jeden atom helia v poli o intenzitě $E = 100$ V/cm.

1.3.12 Jaká bude polarizovatelnost molekuly benzenu, jestliže při teplotě 25°C byla naměřena relativní permitivita $\varepsilon_r = 2{,}2773$. Benzen je nepolární, jeho molekulová váha je 78.110 g mol^{-1}, hustota 0,872 19 g/cm^3. Určete jaký dipólový moment bude mít molekula benzenu v poli o intenzitě 1 kV/m.

1.3.13 Experimentálně zjištěná závislost relativní permitivity ε_r vodních par na teplotě je uvedena v tabulce

T [°K]	393	423	453	483
tlak [N/m^2]	75 300	81 210	87 100	92 970
$(\varepsilon_r - 1).10^5$	400,2	371,7	348,8	328,7

Předpokládejte, že vodní páry se chovají jako ideální plyn a vypočítejte jak bude záviset molární polarizace na teplotě. Určete polarizovatelnost molekuly vodní páry a její dipólový moment.

$C = \frac{Q}{U}$

1.4 Ponderomotorické síly a energie elektrostatického pole

1.4.1 Otočný vzduchový kondenzátor má minimální kapacitu $C_o = 10$ pF, maximální pak $C_m = 10^3$ pF.

a/ Jakou práci vykonáme, změníme-li jeho kapacitu z maximální hodnoty C_m na hodnotu C_o, jestliže je na elektrodách udržováno konstantní napětí $U = 1$ kV.

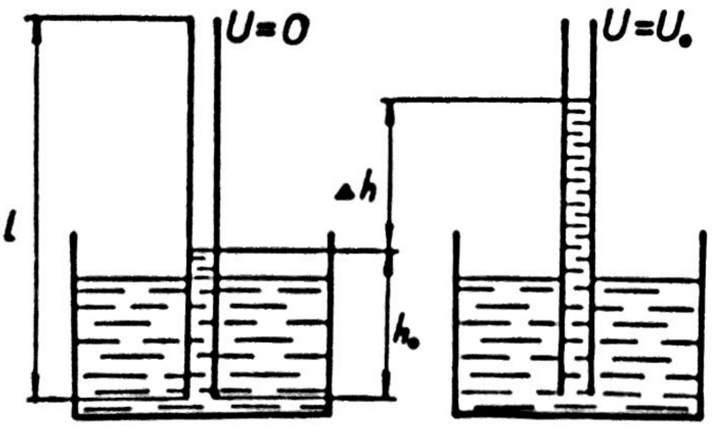
b/ Jakou práci vykonáme, jestliže kondenzátor byl nabit při kapacitě C_m na napětí $U_o = 1$ kV a během otáčení rotoru byl od zdroje odpojen. Tření v ložiscích zanedbáváme.

1.4.2 Jaká síla působí na elektrody deskového kondenzátoru nabitého na napětí U. Plocha desek je S, jejich vzdálenost x.

1.4.3 Absolutní elektrometr /Thomsonovy elektrostatické váhy/ je měřicí přístroj, který umožňuje určit napětí měřením síly působící na elektrody deskového kondensátoru nabitého na měřené napětí. Síla se obvykle určuje vážením. S jakou přesností určíme napětí U, je-li přesnost vah ΔZ. Plocha elektrod je S, jejich vzdálenost d. Určete přesnost číselně pro U = 1 kV, S = 100 cm^2, d = 2 mm, ΔZ = 1 mg.

1.4.4 Tak zvaný multicelulární elektrostatický voltmetr používaný pro měření napětí $10 - 10^4$ V je složen z dvou systémů kovových destiček, uspořádaných obdobně jako vzduchový otočný kondensátor. Do jednoho ze systémů, který je pevný /stator/ je ponderomotorickými silami vtahován druhý systém zavěšený na torsním vlákně /rotor/. Rotor je složen z úzkých pásků zavěšených nad sebou. Každý z těchto pásků je umístěn uprostřed mezi dvěma statorovými deskami a může se otáčet v rovině rovnoběžné se statorovými deskami. Jaký musí být tvar statorových desek, aby stupnice voltmetru byla ve většině rozsahu přibližně lineární, tj. aby úhel pootočení rotoru byl úměrný měřenému napětí.

1.4.5 Deskový kondenzátor je vyplněn dvěma vrstvami dielektrika o permitivitách ε_1 a ε_2 a tloušťkách d_1 a d_2. Těmito dielektriky je kondensátor vyplněn beze zbytku a rozhraní mezi dielektriky je rovnoběžné s elektrodami. Vypočtěte elektrostatické síly působící na desky kondensátoru a na rozhraní, je-li napětí mezi elektrodami U. Plocha elektrod je S. Přesvědčte se, že platí princip akce a reakce.



Obr.1.3

1.4.6 Do kapalného dielektrika jsou ponořeny dvě paralelní vodivé desky /viz obr.1.3/. Nejsou-li desky nabity, vystoupí hladina kapaliny mezi deskami do výšky h_0 měřeno od dolního okraje desek. O jakou vzdálenost Δh se zvýší hladina kapaliny mezi deskami nabijeme-li desky na napětí U_0. Permitivita kapaliny je ε, vzdálenost desek d.

1.4.7 Určete sílu a moment sil, který působí na elementární dipól v nehomogenním elektrickém poli. Dipólový moment má složky p = /0,0,p/ intensita pole $\vec{E}$ = /E,0,0/.

1.4.8 Vypočtěte energii soustavy dvou elementárních dipólů o momentech $\vec{p}_1$ a $\vec{p}_2$. Dipóly jsou vzdáleny o $\vec{r}$. Určete zároveň síly a otáčivé momenty, které na dipóly působí.

1.4.9 Do homogenního elektrického pole o intenzitě E_0 byla vložena dielektrická koule poloměru R, jejíž permitivita je ε. Určete jaká bude energie této koule

1.4.10 Jaká síla působí na dielektrickou kuličku poloměru R v nehomogenním elektrickém poli o intenzitě $\vec{E}$. Permitivita kuličky je ε . Pro zjednodušení výpočtu předpokládáme, že kulička je tak malá, že pole uvnitř kuličky je možno považovat za homogenní.

1.4 Ponderomotorické síly a energie elektrostatického pole

1.4.1 Energie kondenzátoru rovna

$$W = \frac{1}{2} C U^2$$

Hledaná práce bude rovna

a/ $A = W(C_m) - W(C_o) = \frac{1}{2}\left(C_m - C_o\right) U^2$

$$A = \frac{1}{2}\ 9{,}9 \cdot 10^{-10} F \cdot 10^{6} V = 4{,}95.10^{-4}\ J$$

b/ V tomto případě zůstává náboj Q na deskách kondenzátoru konstantní. Energii kondenzátoru vyjádříme ve tvaru

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Práce vykonaná vnějšími silami je rovna

$$A = \Delta W = \frac{1}{2} Q^2 \left(\frac{1}{C_o} - \frac{1}{C_m}\right) = 4{,}95 \cdot 10^{-2}\ J$$

1.4.2 Síla $F = \frac{dW}{dx}_{U=\mathrm{konst.}}$, je-li W energie nabitého kondenzátoru $W = \frac{1}{2} C U^2$.
Takže

$$F = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2} U^2 \frac{\varepsilon_0 S}{x^2} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S\ ,$$

je-li $E = U/d$ intenzita pole. Vypočtenou silou se desky přitahují.

1.4.3 Elektrostatická síla je rovna /viz příklad 1.4.2/

$$F = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d^2} U^2$$

Tuto sílu porovnáváme s vahou závaží Z. Je-li g gravitační zrychlení pak platí

$$(Z + \Delta Z) g = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d^2} (U + \Delta U)^2$$

$$\Delta Z g = \frac{\varepsilon_0 S}{d^2} \left(U \Delta U + \frac{1}{2} \Delta U^2\right)$$

Obvykle je $U \Delta U \gg \Delta U^2$ takže

$$\Delta U = \frac{d^2 \Delta Z}{\varepsilon_0 S U} g$$

Číselně

$$\Delta U = \frac{4.10^{-6} \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}81}{8{,}85.0^{-12} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{3}} = 4{,}4.10^{-1}\ V$$

1.4.4 Požadujeme, aby platilo $U = k\alpha$, je-li U měřené napětí a α výchylka rotoru. Pro elektrostatickou sílu působící na desky platí

$$F_e = \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)_{U = konst} = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{d\alpha}$$

Proti této síle působí torsní síla F_v vlákna, která je úměrná výchylce α, tedy $F_v = K\alpha$. Při rovnovážné výchylce vlákna jsou obě síly v rovnováze $F_v = F_e$. Platí-li $U = k\alpha$ musí být

$$\frac{1}{2} k^2\alpha^2 \frac{dC}{d\alpha} = K\alpha$$

z čehož

$$\frac{dC}{d\alpha} = \frac{2K}{k^2\alpha}$$

Po integraci dostaneme následující závislost kapacity na výchylce

$$C = A + \frac{2K}{k^2} \ln \alpha$$

Kapacitu statoru vůči rotoru můžeme přibližně vyjádřit /neuvažujeme rozptylové kapacity/

$$C = 2n \frac{h(l-x)}{d}$$

je-li n počet rotorových pásků, h jejich šířka, l jejich délka, x vzdálenost okraje rotorových plechů od vlákna a d vzdálenost mezi rotorovým a statorovým plechem. Srovnáme-li poslední dvě rovnice vidíme, že přibližně lineárního průběhu stupnice lze dosáhnout zvětšuje-li se vzdálenost okraje statorového plechu od osy systému logaritmicky

$$x \sim \ln \alpha$$

1.4.5 Na elektrodu přitisklou k dielektriku o permitivitě ε_1 působí síla

$$F_1 = \frac{\varepsilon_0^2}{2\varepsilon_1} \frac{U^2}{(d_1 + d_2)^2} S = \frac{\varepsilon_0^2}{2\varepsilon_1} E_0^2 S,$$

kde E_0 je intensita pole v prázdném kondensátoru

$$E_0 = U/(d_1 + d_2)$$

Na druhou elektrodu působí síla

$$F_2 = \frac{\varepsilon_0^2}{2\varepsilon_2} E_0^2 S$$

elektrody se těmito silami přitahují.

Síly působící na rozhraní dielektrik je možno spočítat následovně. Celková energie kondensátoru je rovna

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1+V_2} (\vec{E},\vec{D})\, dV$$

je-li V_1 a V_2 objem dielektrik, $\vec{E}$, $\vec{D}$ intensita a indukce pole

v dielektriku. Platí $D_1 = D_2 = \varepsilon_0 E_0$, $E_1 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} E_0$, $E_2 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} E_0$.
Po dosazení

$$W = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2\varepsilon_1} S d_1 + \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2\varepsilon_2} S d_2$$

Zmenší-li se působením ponderomotorických sil tloušťka jednoho dielektrika /např. dielektrika o permitivitě ε_1/ o dl, zvětší se zároveň o stejnou vzdálenost tloušťka dielektrika druhého a energie kondenzátoru se přitom změní o

$$dW = \frac{1}{2} S \left\{ \frac{\varepsilon_0^2 E_0^2}{\varepsilon_1}(d_1 - dl) + \frac{\varepsilon_0^2 E_0^2}{\varepsilon_2}(d_2 + dl) \right\} -$$

$$- \frac{1}{2} S \left\{ \frac{\varepsilon_0^2 E_0^2}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{\varepsilon_0^2 E_0^2}{\varepsilon_2}(d_2) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 E_0^2 S \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) dl$$

Ponderomotorické síly přitom vykonají práci

$$(\vec{F}_{12} d\vec{l}) = dW = \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 E_0^2 S \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) dl$$

z čehož plyne

$$F_{12} = \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) E_0^2 S$$

1.4.6 Předpokládáme situaci, že desky vytvářejí deskový kondenzátor a pole mezi deskami je homogenní o intenzitě $E = U_0/D$. Energie nabitého kondenzátoru vyplněného do výšky h dielektrikem o permitivitě ε bude

$$W = \frac{\varepsilon E^2}{2} S h + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} S(l - h)$$

je-li S průřez sloupce dielektrika mezi deskami. Je známo, že sílu působící na dielektrikum lze vyjádřit vztahem

$$F = \frac{dW}{dh} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2} S E^2$$

platným za předpokladu, že E = konst. Působením této síly se zvětšuje výška hladiny dielektrika. Hladina kapaliny se ustálí v takové výši, aby síla F byla v rovnováze se silou gravitační F_g působící na zvyšující se sloupec kapaliny

CQ

$$F_g = S \Delta h \rho g = F_d = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2} S E^2$$

$-\frac{Q}{4}$

takže hladina kapaliny se zvýší o

$\frac{1}{2} C U^2$

$$\Delta h = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2 \rho g} E^2$$

1.4.7 Elementární dipól nejprve nahradíme dvojicí nábojů $-q$ a $+q$ vzdálených o l. Síla, která na tuto dvojici působí bude rovna

$$\vec{F} = q(\vec{E}(r+l) - \vec{E}(r))$$

/r je polohový vektor náboje $-q$/. Rovnici můžeme pro $l \to 0$, $\vec{l}q \to \vec{p}$ přepsat na tvar

$$\vec{F} = (q\vec{l}, \vec{\nabla})\vec{E}(r) = (\vec{p}\,\vec{\nabla})\vec{E}(r)$$

kde $\vec{\nabla}$ je operátor rovný $\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$

/ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru os x, y, z /.

Pro vektory $\vec{p}$ a $\vec{E}$ ve tvaru uvedeném v zadání bude

$$F_x = p\frac{\partial E}{\partial z}, \qquad F_y = 0, \qquad F_z = 0$$

Síla působí ve směru vzrůstu intenzity pole. Otáčivý moment $\vec{M}$ vzhledem k bodu v němž je umístěn např. náboj $-q$ je dán momentem síly působící na náboj $+q$, tj. vektorovým součinem

$$\vec{M} = [\vec{l}, q\vec{E}] = [q\vec{l}, E(\vec{r}+\vec{l})]$$

pro $l \to 0$ a $q\vec{l} \to \vec{p}$ bude

$$M = [\vec{p}, \vec{E}(r)]$$

V našem případě

$$M_x = 0, \qquad M_y = pE(r), \qquad M_z = 0$$

1.4.8 Jeden z dipólů /např. $\vec{p}_1$ / umístíme do počátku souřadné soustavy. Polohový vektor druhého dipólu $\vec{p}_2$ bude $\vec{r}$.

Energie dipólu $\vec{p}_2$ v poli dipólu $\vec{p}_1$ bude

$$W = -(\vec{p}_2, \vec{E}_1(r))$$

Intenzita pole buzeného dipólem $\vec{p}_1$ v místě dipólu $\vec{p}_2$ je /viz příklad 1.1.10/

$$E_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left\{3\frac{(\vec{p}_1\vec{r})}{r^2}\vec{r} - \vec{p}_1\right\}$$

Po dosazení

$$W = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left\{3\frac{(\vec{p}_1\vec{r})(\vec{p}_2\vec{r})}{r^2} - (\vec{p}_1\vec{p}_2)\right\}$$

Síla působící na dipól $\vec{p}_2$ je /viz příklad 1.4.7/

$$F = -\operatorname{grad} W = (p_2, \nabla)E_1(r)$$

Po provedení derivace a úpravě dostaneme

$$\vec{F}_2(r) = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left\{-5\frac{(\vec{p}_1,\vec{r})(\vec{p}_2,\vec{r})}{r^2}\vec{r} + (\vec{p}_1\vec{p}_2)\vec{r} + \right.$$

$$+(\vec{p}_1,\vec{r})\,\vec{p}_2+(\vec{p}_2\vec{r})\,\vec{p}_1\Big\}$$

Sílu $\vec{F}_1$ působící na dipól $\vec{p}_1$ dostaneme záměnou dipólů $\vec{p}_2\to\vec{p}_1$, přitom $\vec{r}\to-\vec{r}$. Síla $\vec{F}_1$ bude stejně velká ale opačného směru. Na dipól $\vec{p}_2$ bude vzhledem k počátku působit otáčivý moment

$$\vec{O}_2=[\vec{r},\vec{F}_2]+[\vec{p}_2,\vec{E}_1(r)]=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\Big\{3\,\frac{(\vec{p}_1,\vec{r})[\vec{r},\vec{p}_2]}{r^2}+3\,\frac{(\vec{p}_2,\vec{r})[\vec{r},\vec{p}_1]}{r^2}+$$

$$+3\,\frac{(\vec{p}_1,\vec{r})[\vec{p}_2,\vec{r}]}{r^2}-[\vec{p}_2,\vec{p}_1]\Big\}=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\Big\{3\,\frac{(\vec{p}_2,\vec{r})[\vec{r},\vec{p}_1]}{r^2}-[\vec{p}_2,\vec{p}_1]\Big\}$$

Otáčivý moment působící na dipól $\vec{p}_1$ je stejně velký, ale opačného směru.

1.4.9 Energie bude rovna

$$U=-\frac{1}{2}\int_V P\,E_0\,dV$$

kde $\vec{P}$ je vektor polarizace koule. Použijeme-li výsledku příkladu 1.3.8 podle kterého

$$P=\frac{3(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\,\varepsilon_0E_0$$

dostaneme po dosazení

$$U=-2\pi R^3\,\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\,\varepsilon_0E_0^2$$

1.4.10 Použijeme výsledku příkladu 1.4.9 podle kterého je energie homogenně polarizované koule rovna

$$U=-2\pi R^3\,\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\,\varepsilon_0E_0^2$$

Posune-li se kulička o δl vykoná síla $\vec{F}$ působící na ni práci

$$(\vec{F},\delta\vec{l})=-\delta U=2\pi R^3\,\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\,\varepsilon_0(\delta\vec{l},\vec{\nabla}E^2)$$

takže

$$\vec{F}=2\pi R^3\,\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\,\varepsilon_0\,\vec{\nabla}E^2$$

Působící sílu $\vec{F}$ můžeme též vypočíst ze silového působení pole na elementární dipól. Víme /viz příklad 1.3.8 a 1.3.9/, že homogenně polarizovanou kouli je možno nahradit elementárním dipólem umístěným ve středu koule, který má dipólový moment

$$\vec{p} = 4\pi R^3 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \varepsilon_0 \vec{E}$$

Podle výsledku příkladu 1.4.7 bude síla působící na dipól rovna

$$\vec{F} = (\vec{p}, \vec{\nabla})\vec{E} = 4\pi R^3 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} (\vec{E}, \vec{\nabla})\vec{E}$$

Platí identita

$$\left[\vec{E}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]\right] = \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2 - (\vec{E}\,\vec{\nabla})\vec{E}$$

V elektrostatickém poli je

$$[\vec{\nabla}, \vec{E}] = rot\, E = 0, \text{ takže}$$
$$(\vec{E}, \vec{\nabla})\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2$$

Po dosazení do výrazu pro sílu dostaneme opět

$$\vec{F} = 2\pi R^3 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \vec{\nabla} E^2$$