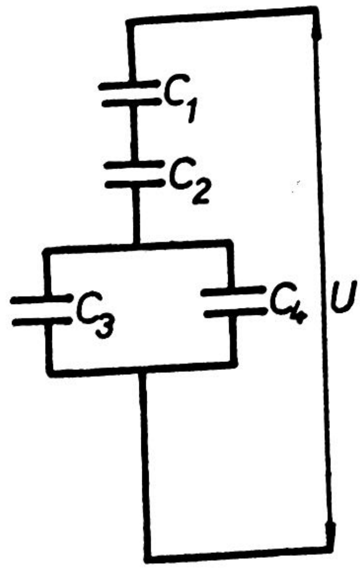
1.2.10 Kondenzátory C_1, C_2, C_3, C_4 jsou řazeny podle obrázku 1.1.

a/ Jaká je celková kapacita zapojení

b/ Jaké napětí je na jednotlivých kapacitách

c/ Jaké náboje jsou na kapacitách C_1 až C_4

d/ jaké budou číselné hodnoty celkové kapacity, napětí a nábojů, je-li $C_1 = C_3 = 1\,\mu F$, $C_2 = C_4 = 10\,\mu F$ a $U = 100$ V .

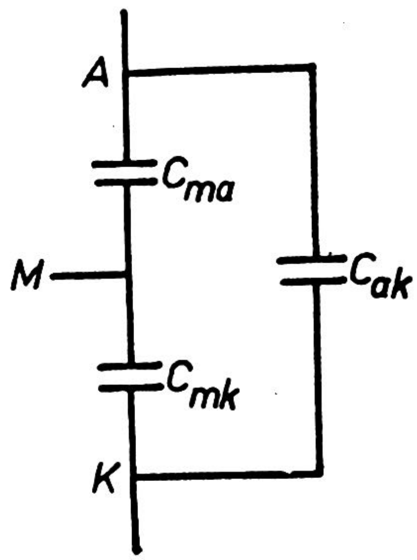


Obr.1.1

1.2.11 Deskový kondenzátor má kapacitu C = 100 pF. Jak se tato kapacita změní vložíme-li mezi desky paralelně vodivý plech, jehož tloušťka je rovna čtvrtině vzdálenosti elektrod. Má poloha plechu vliv na výslednou kapacitu?

1.2.12 Elektrody válcového kondenzátoru mají poloměry R_1, R_2 a výšku l . Mezi tyto elektrody vložíme souose vodivou válcovou plochu o poloměru R ($R_1 < R < R_2$). Jak bude záviset výsledná kapacita na poloměru R válcové plochy, je-li její tloušťka zanedbatelná.

1.2.13 Triodu tvoří soustava tří elektrod anody, mřížky a katody. Mezielektrodové kapacity lze znázornit schematem uvedeným na obrázku 1.2. Kapacita mřížka-katoda je označena C_{mk}, mřížka-anoda C_{ma}, anoda-katoda C_{ak}. Tyto kapacity lze změřit tak, že spojíme vodivě dvě z elektrod a změříme kapacitu mezi těmito elektrodami a elektrodou zbývající. Tato měření lze uskutečnit tři, při nichž naměříme kapacity C_1, C_2 a C_3. Jak z těchto kapacit určíme mezielektrodové kapacity C_{ak}, C_{ma}, C_{mk} ? Jaké kapacity bychom naměřili mezi body A-M; A-K; M-K ?



Obr.1.2

1.3 Elektrostatické pole v dielektriku

1.3.1 Deskový kondenzátor o kapacitě C_o a ploše desek S byl nabit nábojem Q. Poté byl kondenzátor vyplněn beze zbytku nevodivým dielektrikem a jeho kapacita vzrostla na hodnotu C. Je třeba spočítat

a/ Jaká bude intenzita pole v dielektriku, hustota vázaného náboje na povrchu dielektrika a napětí mezi elektrodami po vložení dielektrika, jestliže kondenzátor není připojen ke zdroji.

b/ Jaká bude intensita pole v dielektriku, hustota vázaného náboje na povrchu dielektrika a hustota volného náboje na elektrodách po vložení dielektrika, jestliže kondenzátor je připojen k baterii, která udržuje konstantní rozdíl potenciálu mezi elektrodami.

1.3.2 Osamocená vodivá koule poloměru R je nabita nábojem Q. Tato koule je obalena vrstvou dielektrika o tloušťce d, jehož permitivita je ε .

a/ Určete plošnou hustotu vázaného náboje na vnějším a vnitřním povrchu dielektrika.

b/ Určete objemovou hustotu vázaného náboje v dielektriku.

1.3.3. Prostor mezi elektrodami deskového kondenzátoru je vyplněn n vrstvami homogenních dielektrik o permitivitách ε_1, ε_2 ... ε_n. Rozhraní mezi dielektriky jsou rovnoběžná s elektrodami kondenzátoru. Tloušťky vrstev jsou d_1, d_2 ... d_n. Jaká bude kapacita kondenzátoru?

1.3.4 Prostor mezi elektrodami deskového kondenzátoru je vyplněn dvěma stejně velkými dielektriky o permitivitách ε_1 a ε_2. Jaká bude kapacita kondenzátoru, je-li rozhraní mezi dielektriky

a/ rovnoběžné s elektrodami

b/ kolmé k elektrodám.

Čemu bude roven poměr obou kapacit?

1.3.5 Permitivitu ε pevných látek měříme obvykle tak, že planparalelní destičku tloušťky d shotovenou z měřeného materiálu vložíme mezi elektrody deskového kondenzátoru. Vzhledem k nerovnostem povrchu materiálu se vytváří obvykle mezi elektrodami a vzorkem vzduchová vrstvička určité tloušťky δ . Jaká může být maximálně tloušťka δ vrstvičky, neuvažujeme-li její vliv na výsledek měření a nemá-li chyba v určení permitivity vzorku být větší než 1 %?

1.3.6 Odvoďte podmínku pro lom elektrických siločar na rozhraní dvou dielektrik o permitivitách ε_1 a ε_2 .

1.3.7 Do nekonečně velkého homogenního dielektrika o permitivitě ε_1 byla vložena dielektrická koule o poloměru R a permitivitě ε_2 . Před vložením koule bylo elektrické pole v dielektriku homogenní. Předpokládejte, že potenciál je tvaru $\varphi = -(\frac{A}{r^2} + Br) \cos \theta$, kde A, B jsou konstanty, jejichž tvar je třeba určit, r vzdálenost od středu koule a θ úhel mezi polohovým vektorem daného místa v poli a původním směru intensity pole. Určete intensitu pole vně i uvnitř koule.

1.3.8 Do homogenního elektrického pole buzeného ve vakuu byla vložena dielektrická koule o permitivitě ε a poloměru R. Vypočítejte vektor polarizace koule, její dipólový moment a hustotu vázaného náboje na povrchu koule.

1.3.9 Ukažte, že pole vně homogenně polarizované koule je stejné, jako pole elementárního dipólu umístěného ve středu koule, jehož dipólový moment je roven celkovému momentu koule.

1.3.10 Předpokládejme, že atom vodíku je tvořen protonem kolem nějž obíhá elektron po kruhové dráze o poloměru $r = 1$ Å a že mezi protonem a elektronem působí pouze coulombovské síly. Vycházejíce z těchto předpokladů vypočítejte v soustavě CGSE koeficient polarizovatelnosti atomu vodíku a získanou hodnotu porovnejte s hodnotou koeficientu polarizovatelnosti vodíku, určenou z naměřené relativní permitivity $\varepsilon_r = 1{,}00026$ při hustotě $\varrho = 0{,}04$ kg/m^3.

1.3.11 Relativní permitivita helia je při 0°C a tlaku 760 torr rovna $\varepsilon_r = 1{,}000074$. Určete jaký dipólový moment bude připadat na jeden atom helia v poli o intenzitě $E = 100$ V/cm.

1.3.12 Jaká bude polarizovatelnost molekuly benzenu, jestliže při teplotě 25°C byla naměřena relativní permitivita $\varepsilon_r = 2{,}2773$. Benzen je nepolární, jeho molekulová váha je 78.110 g mol^{-1}, hustota 0,872 19 g/cm^3. Určete jaký dipólový moment bude mít molekula benzenu v poli o intenzitě 1 kV/m.

1.3.13 Experimentálně zjištěná závislost relativní permitivity ε_r vodních par na teplotě je uvedena v tabulce

T [°K]	393	423	453	483
tlak [N/m^2]	75 300	81 210	87 100	92 970
$(\varepsilon_r - 1).10^5$	400,2	371,7	348,8	328,7

Předpokládejte, že vodní páry se chovají jako ideální plyn a vypočítejte jak bude záviset molární polarizace na teplotě. Určete polarizovatelnost molekuly vodní páry a její dipólový moment.

$C = \frac{Q}{U}$

1.4 Ponderomotorické síly a energie elektrostatického pole

1.4.1 Otočný vzduchový kondenzátor má minimální kapacitu $C_0 = 10$ pF, maximální pak $C_m = 10^3$ pF.

a/ Jakou práci vykonáme, změníme-li jeho kapacitu z maximální hodnoty C_m na hodnotu C_0, jestliže je na elektrodách udržováno konstantní napětí $U = 1$ kV.

b/ Jakou práci vykonáme, jestliže kondenzátor byl nabit při kapacitě C_m na napětí $U_0 = 1$ kV a během otáčení rotoru byl od zdroje odpojen. Tření v ložiscích zanedbáváme.

1.4.2 Jaká síla působí na elektrody deskového kondenzátoru nabitého na napětí U. Plocha desek je S, jejich vzdálenost x.

Z čehož vyplývá

$$C_1 + C_2 - C_3 = 2\,C_{ak}$$
$$C_1 + C_3 - C_2 = 2\,C_{mk}$$
$$C_2 + C_3 - C_1 = 2\,C_{ma}$$

Mezi body $A - M$ je zapojena kapacita

$$C_{AM} = \frac{C_{mk}\,C_{ak}}{C_{mk} + C_{ak}} + C_{am}$$

Mezi body $A - K$

$$C_{AK} = \frac{C_{am}\,C_{ak}}{C_{mk} + C_{am}} + C_{ak}$$

Mezi body $M - K$

$$C_{MK} = \frac{C_{am}\,C_{ak}}{C_{am} + C_{ak}} + C_{mk}$$

1.3 Elektrostatické pole v dielektriku

1.3.1 Před vložením dielektrika byla hustota volného náboje $\sigma_o = \frac{Q}{S}$, intenta pole $E_o = \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o}$ a napětí mezi elektrodami $U_o = E_o d$ / d je vzdálnost elektrod $d = \frac{\varepsilon_o S}{C_o}$ /.

a/ Pokud není kondenzátor připojen ke zdroji nezmění se při vložení dielektrika volný náboj σ na elektrodách $\sigma = \sigma_o$.

Intenzita pole v dielektriku bude

$E = \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o \varepsilon_r}$ kde ε_r je relativní permitivita / $\varepsilon_r = \frac{C}{C_o}$ /

Napětí mezi elektrodami bude

$$U = E d = \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o \varepsilon_r} d = \frac{U_o}{\varepsilon_r}$$

Hustota vázaného náboje na povrchu dielektrika bude

$$\sigma_d = P = \varepsilon_o (\varepsilon_r - 1) E = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_o$$

b/ Je-li kondenzátor připojen k baterii pak napětí mezi elektrodou zůstává konstantní $U = U_o$. Intenzita pole v dielektriku zůstane stejná jako v prázdném kondenzátoru neboť $E = Ud = U_o d = E_o$

Hustota vázaného náboje bude

$$\sigma_d = P = \varepsilon_o (\varepsilon_r - 1) E_o = (\varepsilon_r - 1) \sigma_o$$

Hustota volného náboje bude

$$\sigma = \frac{Q}{S} = D = \varepsilon_r \varepsilon_o E_o = \varepsilon_r \sigma_o$$

1.3.2 Vektor elektrické indukce je v dielektriku roven

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\vec{E}$$

kde r je vzdálenost od středu koule, $\vec{E}$ intenzita pole a $\vec{P}$ vektor polarizace. Z předchozího vztahu vyplývá, že

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\,\frac{Q}{4\pi r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

a/ Plošná hustota náboje σ_p na povrchu dielektrika je rovna normálové složce vektoru polarizace

$$\sigma_p = (\vec{P}\vec{n}) = (\vec{P}\,\frac{\vec{r}}{r}) = \pm P$$

na vnitřním povrchu dielektrika bude

$$\sigma(R) = -\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\,\frac{Q}{4\pi R^2}$$

na vnějším povrchu dielektrika bude

$$\sigma_p(R+d) = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\,\frac{Q}{4\pi(R+d)^2}$$

Celkový vázaný náboj bude na vnějším i vnitřním povrchu stejný

$$|Q(R)| = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\,\frac{Q}{4\pi R^2}\,4\pi R^2 = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\,\frac{Q}{4\pi(R+d)^2}\,4\pi(R+d)^2 = |Q(R+d)|$$

b/ Objemová hustota vázaného náboje ρ_p je rovna

$$\rho_p = -\operatorname{div}\vec{P} = 0$$

1.3.3 Elektrická indukce ve všech vrstvách bude stejná

$$D = \frac{Q}{S} = D_1 = D_2 = \ldots = D_n$$

/ S je plocha elektrod, Q náboj/

Napětí mezi elektrodami bude rovno součtu napětí na jednotlivých vrstvách

$$U = U_1 + U_2 + \ldots U_n$$

Intenzita pole E uvnitř vrstev je homogenní takže pro i-tou vrstvu platí

$$U_i = E_i d_i = \frac{D_i}{\varepsilon_i}\,d_i \text{ , z čehož vyplývá, že}$$

$$U = D\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\varepsilon_i} = \frac{Q}{S}\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\varepsilon_i}$$

Kapacita bude rovna
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{S}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\varepsilon_i}}$$

1.3.4 V případě a/ bude kapacita /viz příklad 1.3.3/
$$C_a = \frac{S}{\frac{d}{2\varepsilon_1} + \frac{d}{2\varepsilon_2}} = \frac{2S}{d}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)^{-1}$$

je-li d vzdálenost elektrod a S jejich plocha.

V případě b/ je napětí na obou dielektrických vrstvách stejné a plat

$$U = U_1 = U_2 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} d = \frac{D_2}{\varepsilon_2} d$$

Označíme-li Q_1 resp. Q_2 volný náboj na té části elektrody, kter dotýká dielektrika s permitivitou ε_1 resp. ε_2 můžeme psát že

$$D_1 = \frac{2Q_1}{S} \; ; \qquad D_2 = \frac{2Q_2}{S}$$

z čehož
$$Q_1 = Q_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Kapacita kondenzátoru bude v tomto případě rovna
$$C_b = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U_1} = \frac{Q_1\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)}{\frac{2Q_1 d}{S\varepsilon_1}}$$
$$C_b = \frac{S}{d} \cdot \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2}$$

Bude stejná jako kdybychom řadili paralelně dva deskové kondenzátory o plochách elektrod $S/2$, vzdálenosti elektrod d, z nichž jeden j vyplněn dielektrikem o permitivitě ε_1 druhý vzorkem o permitivitě
Poměr kapacit bude
$$\frac{C_b}{C_a} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{4\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

1.3.5 Kapacita kondenzátoru po vyplnění dielektrikem bude /viz příklad 1.3.
$$C = \frac{S}{\frac{d}{\varepsilon} + \frac{2\delta}{\varepsilon_0}}$$
Kapacita prázdného kondenzátoru při vzdálenosti d elektrod by byla
$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Změřená relativní permitivita bude
$$\varepsilon_r' = \frac{C}{C_0} = \frac{d}{\frac{d}{\varepsilon_r} + 2\delta} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_r} + \frac{2\delta}{d}}$$

kde $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$. Jelikož $\delta/d \ll 1$ můžeme předchozí vztah přepsat na tvar

$$\varepsilon_r' = \varepsilon_r\left(1 - \frac{2\delta}{d}\varepsilon_r\right)$$

Aby relativní chyba v určení permitivity nebyla větší než 1 % musí platit

$$\delta \leq 5.10^{-3} d\, \varepsilon_r^{-1}$$

1.3.6 Intenzitu pole nad rozhraním v prostředí o permitivitě ε_1 označíme $\vec{E}_1$, vektor elektrické indukce $\vec{D}_1$. Pod rozhraním v prostředí o permitivitě ε_2 bude intenzita $\vec{E}_2$, indukce $\vec{D}_2$. Složky intenzity a indukce ve směru kolmém k rozhraní označíme E_{1n}, E_{2n} resp. D_{1n}, D_{2n}, tečné složky budou E_{1t}, E_{2t} resp. D_{1t}, D_{2t}. Z rovnic $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ a $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ vyplývá, že $D_{1n} = D_{2n}$ a $E_{1t} = E_{2t}$. O platnosti těchto vztahů je možno se přesvědčit například následujícím výpočtem. Spočítáme tok indukce válečkem, jehož podstavy velikosti dS jsou rovnoběžné s rozhraním, a jehož výška dl nechť se blíží nule. V limitě $dl \to 0$ bude tok vektoru $\vec{D}$ přes plášť válce nulový, takže

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D}\, dV = \int_S \vec{D} . d\vec{S} = D_{1n}\, dS - D_{2n}\, dS = 0$$

z čehož vyplývá

$$D_{1n} = D_{2n}$$

Rovnost tečných složek vyplývá z platnosti vztahu

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{E}\, dS = \oint_l \vec{E}\, d\vec{l} = 0$$

V tomto výrazu je l uzavřená křivka obepínající plochu S. Nechť křivka l je tvořena obdélníkem o stranách dl a λ tak, že strana λ je rovnoběžná s S. Blíží-li se délka stran dl kolmých k rozhraní k nule a je-li délka λ tak malá, aby podél těchto stran bylo E_1 resp. E_2 konstantní, pak z předchozí rovnice vyplývá

$$E_{1t}\lambda - E_{2t}\lambda = 0 .$$

Pro úhly θ_1 a θ_2 mezi směrem siločar a normálou v prvém a druhém prostředí zřejmě platí

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

Vzhledem k platnosti rovnic $E_{1t} = E_{2t}$ a $D_{1n} = D_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$

zřejmě lze psát

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

1.3.7 Předpokládáme, že průběh potenciálu udává výraz uvedený v zadání. Hodnoty konstant A, B se budou lišit v prostoru vně koule / A_1, B_1 / a uvnitř koule / A_2, B_2 /, jejich velikost je třeba určit z okrajových podmínek.

1. V kulových souřadnicích, ve kterých je vhodné úlohu řešit, měl potenciál vnějšího pole před vložením koule tvar $\varphi_0 = E_0 r \cos\theta$. Vložená koule deformuje původní pole pouze ve své blízkosti. To znamená, že pro $r \to \infty$ musí $\varphi_1 \to \varphi_0$. Z této podmínky plyne $B_1 = -E_0$.

2. Ve středu koule musí být potenciál konečný, z čehož plyne

$$A_2 = 0$$

3. Potenciál na rozhraní dielektrik musí být spojitý

$$\varphi_1(R) = \varphi_2(R) \quad \text{t.j.} \quad B_2 R = \frac{A_1}{R^2} - E_0 R$$

4. Normálová složka vektoru elektrické indukce musí být spojitá

$$D_{1n}(R) = -\varepsilon_1 \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=R} = D_{2n}(R) = -\varepsilon_2 \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=R}$$

$$-\varepsilon_1\left(E_0 + \frac{2A_1}{R^3}\right) = \varepsilon_2 B_2$$

Z posledních rovnic vypočítáme hodnoty konstant B_2 a A_1

$$B_2 = -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0$$

$$A_1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} R^3 E_0$$

Po dosazení dostaneme pro potenciál vně koule

$$\varphi_1 = \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{R^3}{r^2} E_0 - E_0 r\right)\cos\theta \qquad r \geq R$$

a uvnitř koule

$$\varphi_2 = -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 r \cos\theta \qquad r \leq R$$

Intensita pole uvnitř koule je konstantní a má všude směr stejný jako původní homogenní pole. Má-li původní pole směr osy z pak $z = r\cos\theta$

$$\varphi_2 = -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 z \qquad r \leq R$$

Složky intenzity pole budou mít velikost

$$E_x = E_y = 0$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 \qquad r \leq R$$

Vně koule je vhodnější určit složky intenzity v kulových souřadnicích

$$E_r = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \left(\frac{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \;\frac{R^3}{r^3}\, E_0 + E_0 \right) \cos \theta$$

$$E_\delta = -\frac{1}{r \sin\theta}\;\frac{\partial \varphi_2}{\partial \delta} = 0$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\;\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \;\frac{R^3}{r^3}\, E_0 - E_0 \right) \sin\,\theta$$

1.3.8 Použijeme výsledku předchozího příkladu 1.3.7. V tomto případě bude

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \;, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon$$

Uvnitř koule bude potenciál

$$\varphi = -\frac{3}{\varepsilon_r + 2}\, E_0\, r \cos\theta = \frac{-3}{\varepsilon_r + 2}\, E_0 z$$

Intenzita pole

$$\vec{E} = \frac{3\,\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\, \vec{E}_0$$

Vektor polarizace

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\, \vec{E} = 3\,\frac{\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\,\varepsilon_0}\, \vec{E}_0 = 3\,\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\, \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

je-li $\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ relativní permitivita.

Dipólový moment koule v objemu V bude

$$\vec{p} = \vec{P} V = 4\pi R^3\, \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\, \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

Hustota vázaného náboje je rovna normálové složce vektoru polarizace

$$\sigma = P_n = P \cos\Theta = 4\pi R^3\, \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\, E \cos\theta$$

1.3.9 Postup řešení je obdobný jako u příkladu 1.3.7. Předpokládáme, že potenciál je tvaru $\varphi = \left(\frac{A}{r^2} + Br\right)\cos\theta$. Hledáme hodnoty konstant A_1, B_1 vně koule a $A_2\, B_2$ uvnitř koule. V tomto případě však musí pro $r \to \infty$ $\varphi \to 0$ takže $B_1 = 0$, ve středu koule musí být φ konečné, takže $A_2 = 0$. Potenciál musí být spojitý i pro $r = R$, tedy

$$B_2 R = \frac{A_1}{R^2}$$

Rozdíl normálových složek intenzity musí být roven $1/\varepsilon_0$ násobku hustoty vázaného náboje

$$-\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\bigg|_{r=R} - \left(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\bigg|_{r=R} \right) = \left(\frac{2A_1}{R^3} + B_2 \right) \cos\theta = \frac{\sigma_r}{\varepsilon_0} = \frac{P_n}{\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0} \cos\theta$$

Z těchto rovnic vyplývá

$$B_2 = \frac{P}{3\varepsilon_0} ; \qquad A_1 = \frac{PR^3}{3\varepsilon_0}$$

takže potenciál pole vně koule bude

$$\varphi_1 = \frac{PR^3}{3\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{4}{3}\pi R^3 P\,\frac{\cos\theta}{r^2} \qquad r \geq R$$

Jelikož $\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$ je úhrnný dipólový moment koule můžeme poten[ciál] vyjádřit ve tvaru

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(\vec{p}\,\vec{r})}{r^3} \qquad r \geq R$$

což je výraz pro potenciál dipólu.

1.3.10 Před přiložením pole je přitažlivá coulombovská síla v rovnováze se sil[ou] odstředivou. V soustavě CGSE proto platí

$$\frac{e^2}{r^2} = m r \omega^2$$

kde m je hmota elektronu a ω jeho úhlová rychlost. Přiložíme-li elektrické pole jehož směr je kolmý na dráhu elektronu posune se stř[e]d dráhy elektronu vůči protonu o vzdálenost l proti směru elektrického pole. Výslednice síly eE a síly odstředivé musí mít směr spojnice ele[k]tronu a jádra. Pokud pole bude slabé a $l \ll r$ nezmění se prakticky an[i] poloměr dráhy r, ani úhlová rychlost ω a bude platit

$$\frac{eE}{mr\omega^2} = \frac{l}{r}$$

z čehož

$$el = \frac{e^2}{m\omega^2}E$$

Protože dipólový moment atomu $p = el$ a jelikož z první rovnice vyplývá $e^2/m\omega^2 = r^3$ bude platit

$$p = r^3 E$$

Koeficient polarizovatelnosti atomu vodíku by měl být roven $r^3 = 1.10^{-24}\,cm^3 = 1.\,Å^3$.

Z relativní permitivity můžeme koeficient polarizovatelnosti vypočítat pomocí Clausiovy-Mosottiovy rovnice

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\,\frac{M}{\rho} = \frac{4\pi}{3} N a$$

z čehož

$$a = \frac{3}{4\pi}\,\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\,\frac{M}{\rho N} = \frac{3 \,.\, 2{,}6 \,.\, 10^{-4} \,.\, 1\, g\, mol^{-1}}{4\pi \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 10^{-5} g/cm^3 \,.\, 6 \,.\, 10^{23} mol^{-1}} = 0{,}86 \,.\, 10^{-24} cm^3 = 0{,}86\, Å^3$$

1.3.11 Vektor polarizace určuje dipólový moment objemové jednotky a platí pro něj vztah

$$P = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E$$

V jednotce objemu je $n_0 = N_A \frac{\rho}{M}$ atomů, je-li ρ hustota plynu, M molekulová váha, N_A Avogadrovo číslo. Dipólový moment jednoho atomu bude

$$p = \frac{P}{n_0} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)}{N_A \rho} ME = 2,4.10^{-37} C.m$$

1.3.12 Molární polarizace

$$P_0 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \frac{M}{\rho} = 26,743 \ cm^3/mol = 2,6743.10^{-5} m^3/mol$$

Polarizovatelnost molekuly

$$\alpha = \frac{3\varepsilon_0}{N_A} P_0 \doteq 1,178 \ 10^{-39}$$

Dipólový moment molekuly benzenu bude

$$p = \alpha E = 1,178 \ . \ 10^{-36}$$

1.3.13 Molární polarizovatelnost udává výraz

$$P = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \frac{M}{\rho}$$

/M molekulová váha, ρ hustota/.

Jelikož pro plyny je $\varepsilon \doteq 1$ bude $\varepsilon_r + 2 \doteq 3$ a výraz se zjednoduší na tvar

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{3\rho} M = P$$

Je-li N Avogadrovo číslo a n_0 počet molekul v jednotce objemu pak platí

$$n_0 = \frac{\rho}{M} N_A$$

Počet částic v jednotce objemu je s tlakem svázán vztahem

$$p = n_0 kT$$

Z předchozích rovnic vyplývá, že molární polarizaci můžeme vyjádřit ve tvaru

$$P = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{3p} kTN_A$$

Po číselném dosazení dostaneme

T [°K]	393	423	453	483
$10^3\ 1/T$ [$°K^{-1}$]	2,545	2,364	2,208	2,070
$10^5\ P$ [$\frac{m^3}{mol}$]	5,78	5,363	5,023	4,727

Molární polarizaci můžeme vyjádřit pomocí polarizovatelnosti molekuly a jejího dipólového momentu p . Platí

$$P = \frac{N_A}{3\,\varepsilon_0}\alpha + \frac{N_A}{3\,\varepsilon_0}\ \frac{p^2}{3\,kT}$$

Závislost molární polarizace na $1/T$ je lineární a lze ji vyjádřit vztahem

$$P = a_0 + a_1 \lambda \qquad \lambda = \frac{1}{T}$$

Očekáváme, že výsledky měření odpovídají této závislosti a ze zjištěných hodnot je třeba určit koeficienty $a_0 = \frac{N_A}{3\,\varepsilon_0}\alpha$ a $a_1 = \frac{N_A}{3\,\varepsilon_0}\ \frac{p^2}{3k}$.

Při spracování výsledků použijeme skupinové metody.

$$5{,}78 \,.\, 10^{-5} = a_0 + 2{,}545 \,.\, 10^{-3}\ a_1$$
$$5{,}363 \,.\, 10^{-5} = a_0 + 2{,}364 \,.\, 10^{-3}\ a_1$$
$$5{,}023 \,.\, 10^{-5} = a_0 + 2{,}208 \,.\, 10^{-3}\ a_1$$
$$4{,}727 \,.\, 10^{-5} = a_0 + 2{,}070 \,.\, 10^{-3}\ a_1$$

První dvě a poslední dvě rovnice sečteme

$$11{,}143 \,.\, 10^{-5} = 2a_0 + 4{,}909 \,.\, 10^{-3}\ a_1$$
$$9{,}750 \,.\, 10^{-5} = 2a_0 + 4{,}278 \,.\, 10^{-3}\ a_1$$

z těchto rovnic vypočteme číselné hodnoty konstant a_0 , a_1 .

Dostaneme, že

$$a_0 \doteq 2{,}0 \,.\, 10^{-6}$$
$$a_1 \doteq 2{,}2 \,.\, 10^{-2}$$

Platí

$$p = \sqrt{9\,k\,\varepsilon_0\,a_1/N_A} = 6{,}3 \,.\, 10^{-30}\ C.m$$
$$\alpha = 3\,\varepsilon_0\,a_0/N_A = 8{,}8 \,.\, 10^{-41}\ C/kg$$

Dipólový moment se obvykle udává v jednotkách nazývaných debye [D] . Platí, že $1\,D = 1.10^{-18}$ CGSE jednotek dipólového momentu. V těchto jednotkách bude $p = 1{,}89\ D$.