

5.1.46 Člověk stojící na zemi se dotýká jednoho z vodičů vedení o napětí 600 V. Jaký proud projde lidským tělem, odhaduje-li se jeho odpor na 50 000 Ω ? Izolační odpor mezi vodičem kterého se člověk dotýká a zemí je 50 000 Ω , izolační odpor druhého vodiče je 400 000 Ω . Odpor země můžeme zanedbat.

5.1.47 Pro stanovení izolačního odporu vodičů pod napětím měří se voltmetrem s velkým vnitřním odporem r_v postupně napětí mezi prvním a druhým vodičem $/U/$, mezi prvním vodičem a zemí $/U_1/$, mezi druhým vodičem a zemí $/U_2/$. Čemu jsou rovny izolační odpory prvního a druhého vodiče vzhledem k zemi, je-li: $r_v = 20 \text{ k}\Omega$, $U = 120 \text{ V}$, $U_1 = 8 \text{ V}$, $U_2 = 10 \text{ V}$?

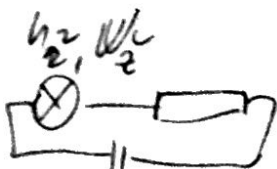
5.2 Lineární střídavé obvody

5.2.1 Žárovka 120 V, 100 W je přes impedanci Z připojena na síť 220 V, 50 Hz tak, že pracuje při jmenovitých hodnotách napětí a výkonu. Předpokládejte, že

a/ $Z = R$

b/ $Z = \omega L$

c/ $Z = 1/\omega C$



$$U_2 + Y \cdot R = 220$$

Spočítejte potřebné hodnoty odporu R , indukčnosti L , kapacity C . Určete výkon, který je v jednotlivých případech dodáván ze sítě a nakreslete fázové diagramy obvodu pro jednotlivé případy.

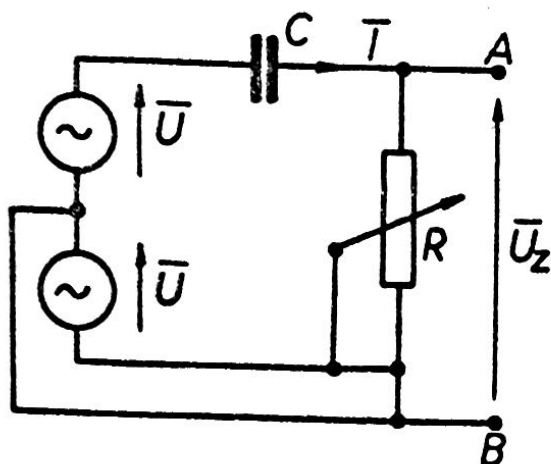
5.2.2 Zdroj elektromotorického napětí \bar{E} dodává do sítě výkon P při daném účinníku $\cos \varphi$. Dokažte že reálná složka impedance sítě je dána vztahem

$$\frac{E^2 \cos \varphi}{P}$$

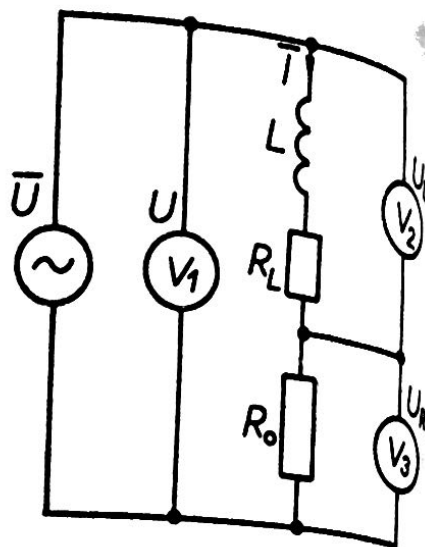
5.2.3 Třífázová akumulční kamna odebírají ze sítě výkon 10 kW, jsou-li jejich spirály propojeny do hvězdy. Vypočítejte jaký výkon budou kamna odebírat, propojí-li se topná tělesa do trojúhelníka. Při výpočtu předpokládejte, že topná tělesa reprezentují čistě ohmický odpor a zatěžují všechny fáze sítě rovnoměrně. Teplotní změny odporu zanedbejte.

5.2.4 Třífázový elektromotor o výkonu 20 kW má propojeno vinutí do trojúhelníka. Vypočítejte na jaký proud je třeba dimenzovat přívodní vedení za předpokladu, že motor má účinnost 90 %, zatěžuje jednotlivé fáze rovnoměrně, přičemž fázový posuv mezi proudem a napětím v každé fázi činí 30°. Na jaký proud by bylo třeba dimenzovat vedení, kdyby motor stejného výkonu měl spojeno vinutí do hvězdy?

5.2.5 Řešte obvod podle obr.5.29 /viz na následující straně/, v něm jsou se sebou zapojeny v souhlasné fázi dva totožné zdroje střídavého napětí a kapacita je volena tak, že pro maximální hodnotu odporu R_m platí $R_m \gg 1/\omega C$. Diskutujte velikost a fázi napětí U_x na svorkách AB v závislosti na poloze jezdeck. Sestrojte fázový diagram obvodu.



Obr.5.29

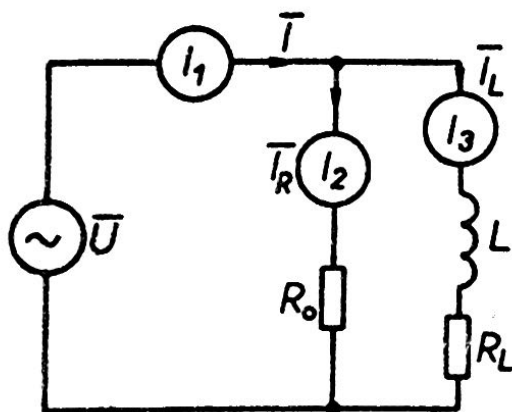


Obr.5.30

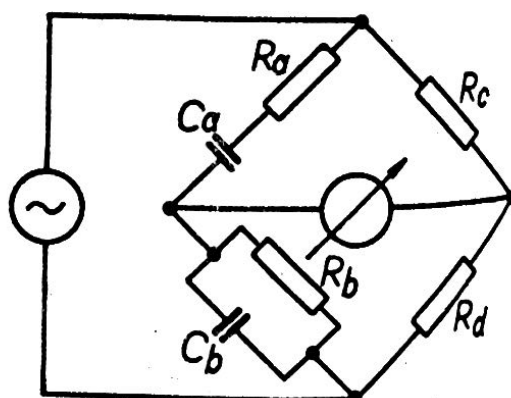
5.2.6 Pro měření indukčnosti lze použít metodu tří voltmetrů. Měřená cívka s indukčností L a odporu R_L je přes známý odpor R_0 připojena ke zdroji střídavého napětí. Pomocí tří voltmetrů se pak změří napětí na cívce U_L , na známém odporu U_{R_0} , a celkové napětí zdroje U /viz obr.5.30/. Ze známých hodnot U_L , U_{R_0} , U vypočítejte hodnotu indukčnosti L a odporu R_L s předpokladem, že vnitřní odpory voltmetrů můžeme považovat za nekonečně velké. Určete výkon dodaný zdrojem do cívky.

5.2.7 K metodě tří voltmetrů /viz úloha 5.2.6/ je duální metoda tří ampérmetrů, která používá zapojení podle obr.5.31. Z údajů ampérmetrů vypočítejte hodnotu indukčnosti L a odporu R_L . Zjistěte výkon ztracený v cívce. Vnitřní odpory ampérmetrů zanedbejte.

5.2.8 Nalezněte podmínky rovnováhy ve Wienově můstku pro měření kapacity merní kmitočtu /viz obr.5.32/.

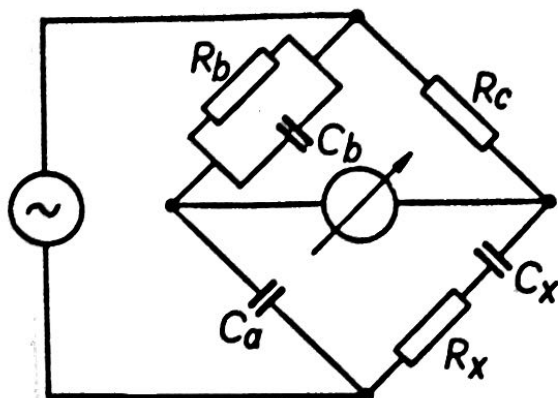


Obr.5.31

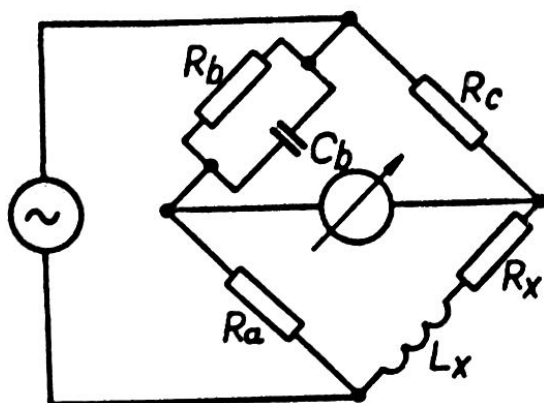


Obr.5.32

5.2.9 Nalezněte podmínky rovnováhy v Scheringově můstku /obr.5.33 viz na následující straně/ pro měření kapacity.



Obr. 5.33



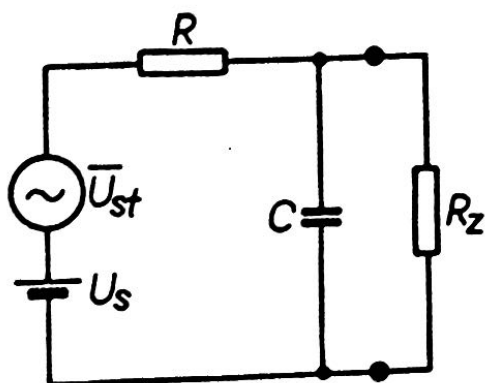
Obr. 5.34

5.2.10 Nalezněte podmínky rovnováhy v Maxwellově můstku /obr. 5.34/ pro měření indukčnosti.

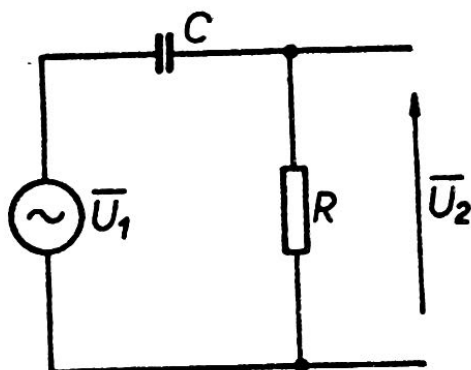
5.2.11 Stejnoseměrný zdroj elektromotorického napětí U_s seriově spojený se střídavým zdrojem o špičkovém napětí U_{st} a frekvenci $f = 100 \text{ Hz}$ napájí obvod zapojený podle obr. 5.35. Spočítejte poměr střídavého napětí U'_{st} a stejnosměrného napětí U'_s na odporu R_z . Vypočítejte přibližně hodnotu kapacity potřebnou k tomu, aby bylo $U'_{st} / U'_s = 10^{-2} U_{st} / U_s$ jestliže $R = 10^3 \Omega$, $R_z = 10^4 \Omega$.

5.2.12 Nalezněte poměr U'_{st} / U'_s na odporu R_z v obr. 5.35 pro případ, že odpor R je nahrazen cívkou o indukčnosti $L = 10 \text{ H}$ a seriovém odporu $R_L = 200 \Omega$. Odhadněte numerickou hodnotu tohoto poměru, jestliže kapacita C má hodnotu vypočtenou v předchozím příkladě.

5.2.13 Určete frekvenční závislost prosté hodnoty napětí U_2 na odporu R /obr. 5.36/. Vypočítejte hodnotu napětí U_2 pro případ kdy $R = 1/\omega C$. Napětí U_1 zdroje považujte za známé.

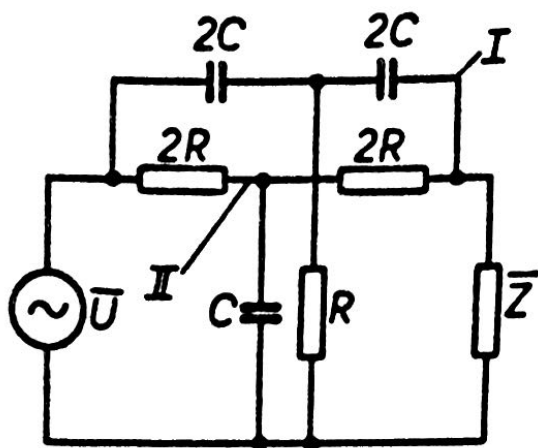


Obr. 5.35

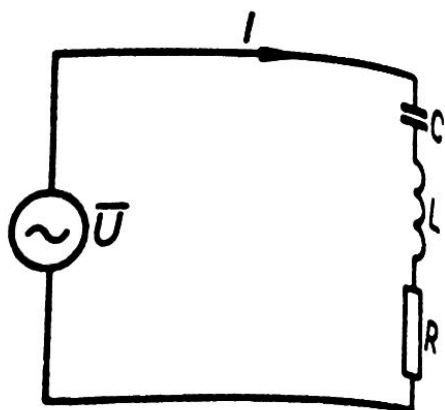


Obr. 5.36

5.2.14 Uvažujte obvod zapojený podle obr. 5.37. Zjistěte, pro jakou frekvenci ω poteče zatěžovací impedancí \bar{Z} nulový proud. Rozhodněte jak závisí uvedený stav na hodnotě impedance \bar{Z} .



Obr. 5.37



Obr. 5.38

5.2.15 Vypočtete celkovou impedanci seriového rezonančního obvodu vzhledem ke zdroji /viz obr.5.38/. Zjistěte jaké bude při resonanci $\omega L = 1/\omega C$ /maximální/ výkon na indukčnosti, jednak na kapacitě, Nakreslete fázový diagram obvodu.

5.2.16 Uvažujte seriový rezonanční obvod podle obr.5.38. Vypočtete výkon daný zdrojem do obvodu a nalezněte podmínky za kterých bude výkon maximální.

5.2.17 Vyjádřete celkovou impedanci paralelního spojení odporu, indukčnosti a kapacity podle obr.5.39. Nalezněte

- a/ kdy je impedance čistě reálná
- b/ kdy má maximální prostou hodnotu.

Srovnajte chování tohoto obvodu s obvodem podle obr.5.38 a 5.40.

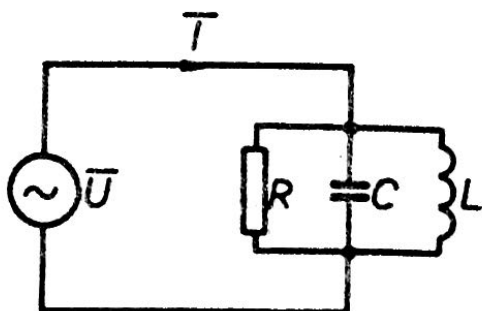
5.2.18 Vypočtete celkovou impedanci \bar{Z} paralelního rezonančního obvodu připojeného ke zdroji podle obr.5.40. Nakreslete jeho fázový diagram.

5.2.19 Pojem resonance v paralelním obvodu podle obr.5.40 lze definovat několika způsoby. Například

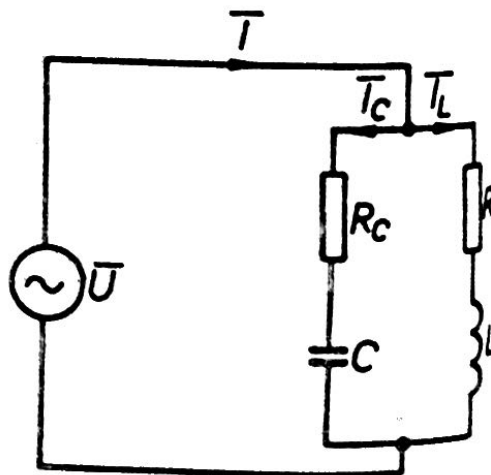
a/ jako stav při kterém $\omega L = 1/\omega C$ /seriová resonance/

b/ jako stav při němž je celková impedance čistě reálná

Nalezněte frekvenci pro kterou je při daných parametrech obvodu splněna podmínka b/ Diskutujte vztah této frekvence k seriové rezonanční frekvenci ω_0 .

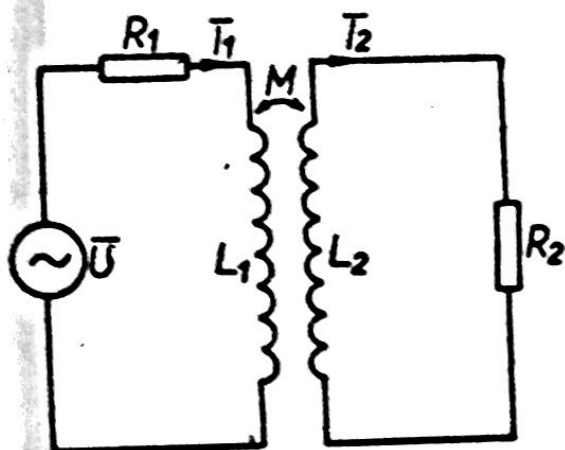


Obr. 5.39

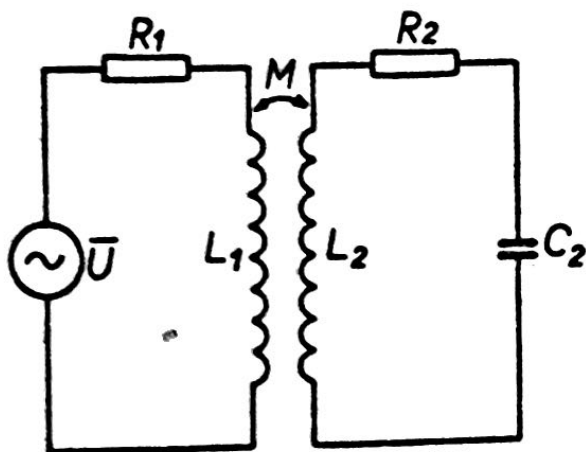


Obr. 5.40

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$



Obr. 5.41



Obr. 5.42

5.2.20 Řešte obvod zapojený podle obr. 5.41 za předpokladu, že mezi cívkami L_1 , L_2 je vzájemná indukčnost M a obvod je napájen střídavým zdrojem napětí \bar{U} o frekvenci ω . Nakreslete kvalitativně fázový diagram obvodu.

5.2.21 Diskutujte řešení předchozí úlohy. Při daných parametrech primárního obvodu a odporu R_2 sekundárního obvodu najděte podmínky za kterých poteče v sekundárním obvodu maximální proud.

5.2.22 Zobecněte obvod podle obr. 5.41 v tom smyslu, že odpory R_1 , R_2 nahraďte obecnými impedancemi $\bar{Z}_1 = R_1 + jX_1$, $\bar{Z}_2 = R_2 + jX_2$. Vypočítejte proudy v primárním a sekundárním obvodu.

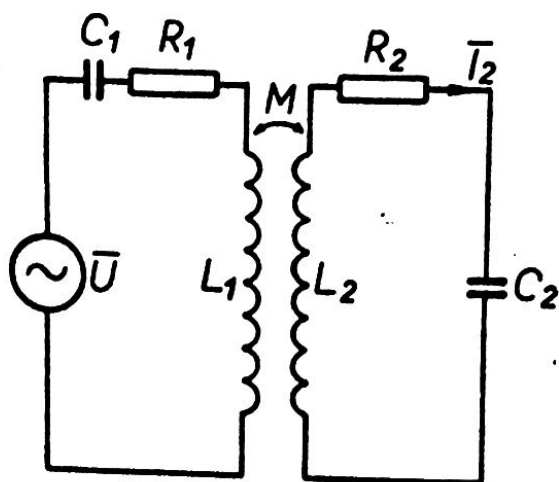
5.2.23 Uvažujte obvod zapojený podle obr. 5.42. Předpokládejte, že sekundární obvod je v /seriové/ rezonanci $\omega L_2 = 1/\omega C_2$ a že pro primární obvod platí $R_1 \gg \omega L_1$. Vypočítejte za těchto předpokladů proud \bar{I}_2 v sekundárním obvodu a najděte hodnotu vzájemné indukčnosti při které bude tento proud maximální.

5.2.24 Uvažujte dva indukčně vázané rezonanční obvody zapojené podle obr. 5.43. Za předpokladu, že oba obvody mají stejný rezonanční kmitočet $\omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ dokažte, že proud \bar{I}_2 v sekundárním obvodu je dán vztahem

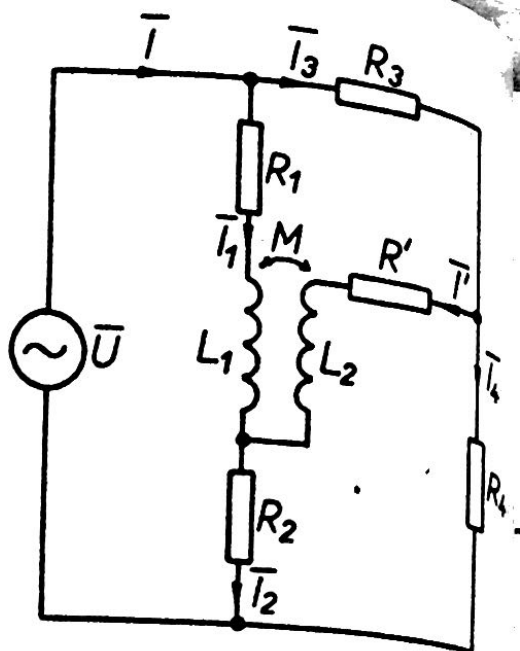
$$\bar{I}_2 = \frac{k}{\omega \sqrt{L_1 L_2}} \frac{\bar{U}}{-\left(\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2}\right)x + j\left[\frac{1}{Q_1 Q_2} - x^2 + k^2\right]}$$

ve kterém $Q_1 = \omega L_1 / R_1$, $Q_2 = \omega L_2 / R_2$ jsou činitele jakosti obvodů, $k = M / \sqrt{L_1 L_2}$ je tzv. činitel vazby a $x = (\omega^2 - \omega_0^2) / \omega^2$.

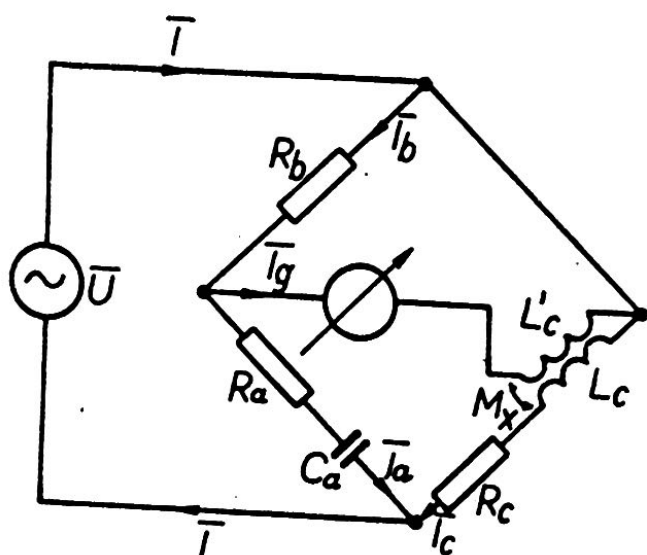
5.2.25 Využijte výsledky předchozí úlohy a vyjádřete proud \bar{I}_2 v sekundárním obvodu podle obr. 5.43 při rezonanci ($x = 0$). Najděte hodnotu činitele vazby, při které je proud maximální.



Obr. 5.43



Obr. 5.44



Obr. 5.45

5.2.26 Pomocí Kirchhoffových zákonů sestavte rovnice pro síť obr. 5.44. Nalezněte podmínky pro $I' = 0$.

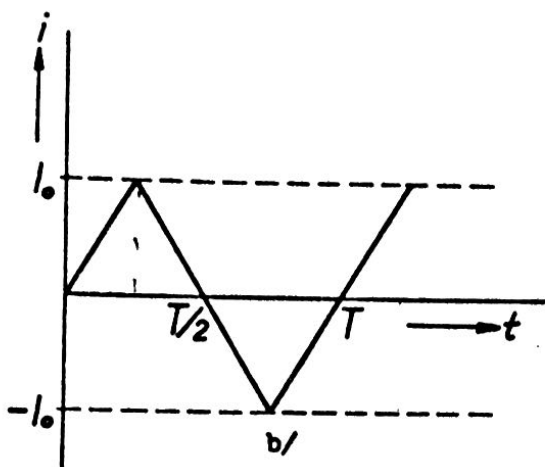
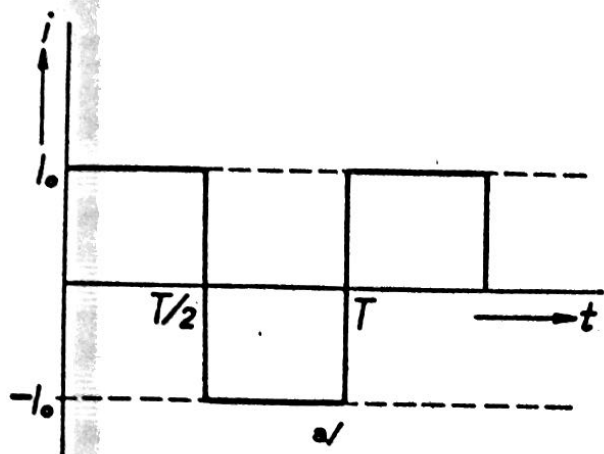
5.2.27 Najděte podmínky rovnosti v Careyho-Fosterově můstku pro rozložení vzájemných indukčností /obr. 5.45/.

5.3 Nesinusové proudy

5.3.1 Spočítejte střední hodnotu I_s a efektivní hodnotu I_{ef} jednocestně dvoucestně usměrněného proudu s amplitudou I_0 a kruhovou frekvencí ω .

✓ 5.3.2 Stanovte střední hodnotu I_s /za půl periody/, efektivní hodnotu I_{ef} a činitele tvaru $K = I_{ef} / I_s$ proudů, jejichž průběhy jsou zobrazeny na obr. 5.46. /Viz na následující straně/.

5.3.3 Nalezněte efektivní hodnotu napětí U_{ef} pilového průběhu s amplitudou a periodou T /obr. 5.47 viz na následující straně/.



Obr.5.46,

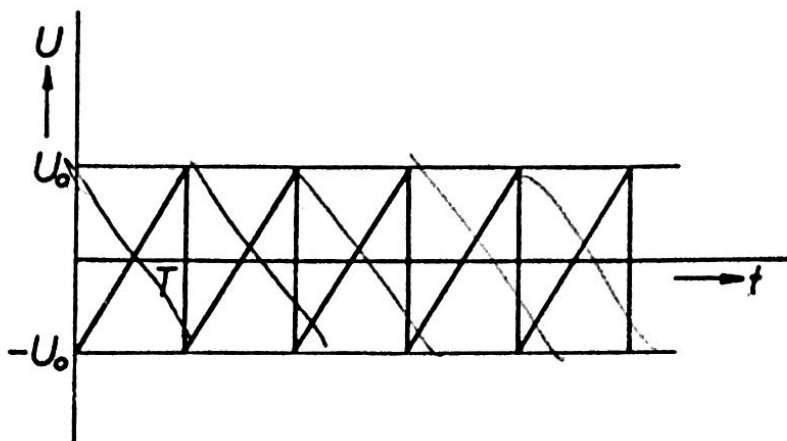
5.3.4 Udejte závislost efektivní hodnoty napětí na šířce a opakovací frekvenci obdélkových pulsů podle obr.5.48.

5.3.5 Spočítejte harmonický rozvoj napětí ve tvaru obdélkových pulsů podle obr.5.49.

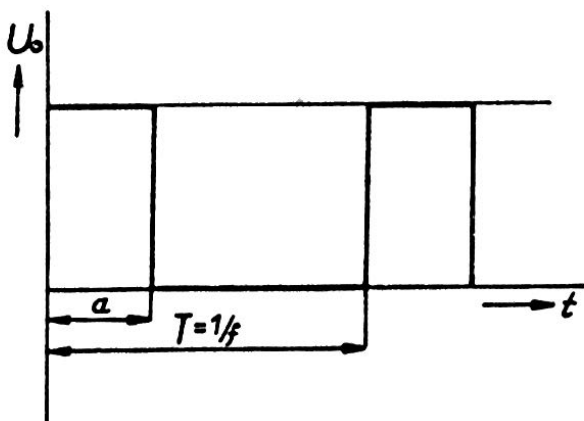
5.3.6 Spočítejte harmonický rozvoj napětí pilového průběhu podle obr.5.50.

5.3.7 Proud procházející cívkou o indukčnosti L má průběh naznačený na obr.5.51. Názorněte průběh napětí na indukčnosti.

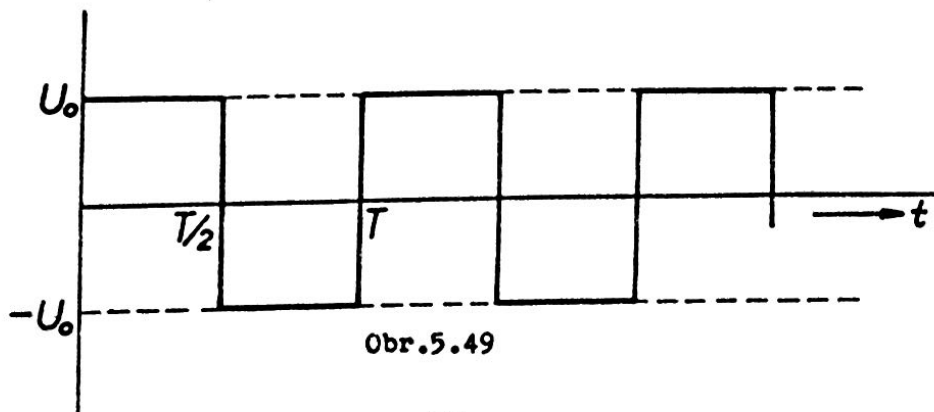
5.3.8 Odhadněte tvar napětí na ohmickém odporu, který je spolu se seriovou indukčností



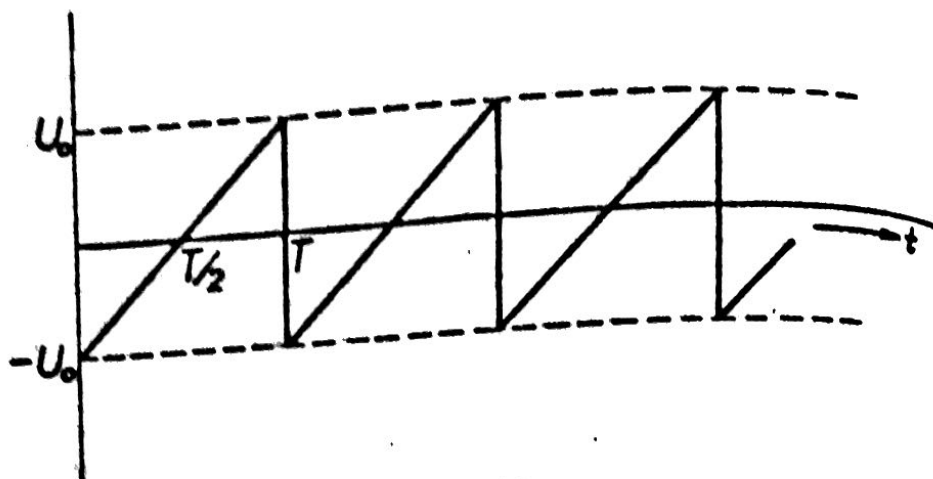
Obr.5.47



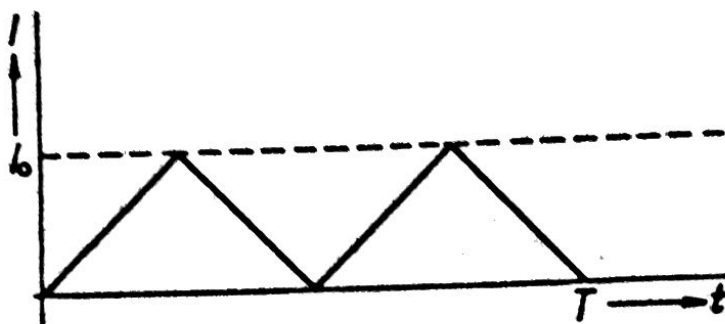
Obr.5.48 .



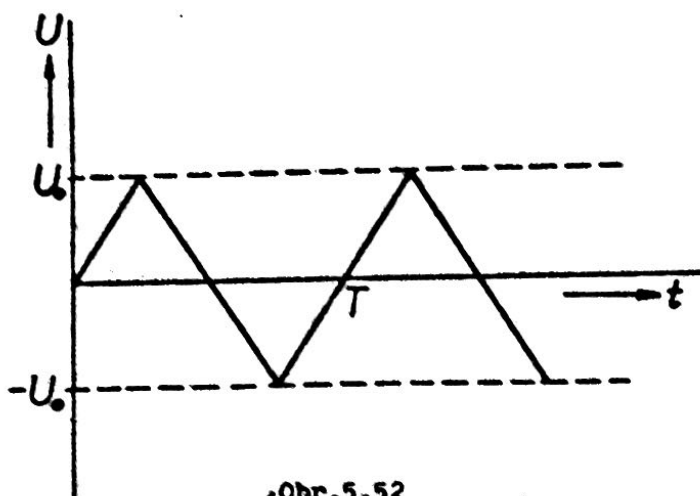
Obr.5.49



Obr.5.50



Obr.5.51



Obr.5.52

připojen ke zdroji pětiletí jehož časový průběh je vyjádřen obr.5.52.

5.3.9 Periodický proud, časový průběh je vyjádřen harmonickým rozvojem

$$i(t) = a_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^n a_k \sin k\omega t +$$

$$+ \sum_{k=1}^n b_k \cos k\omega t,$$

prochází seriovým zapojením indukčnosti a odporu. Harmonický rozvoj napětí indukčnosti a na odporu

5.3.10 Určete výkon spotřebovaný v cívkě s indukčností L a ohmickým odporem R . Cívkou prochází proud jehož harmonický rozvoj je dán vztahem

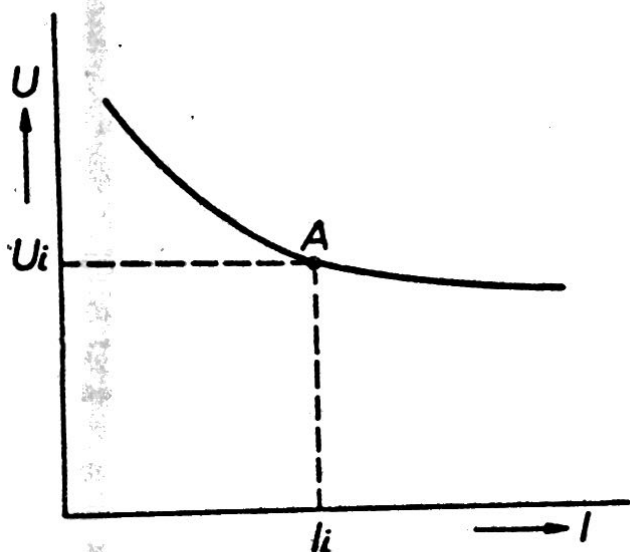
$$I(t) = \sum_{k=1}^n i_k \sin k \frac{2\pi}{T} t$$

5.3.11 Znárodněte průběh napětí U_2 na jiskřišti Ruhmkorffova induktoru primáru o indukčnosti L a ohmickém odporu R je přes přerušovač připojen ke zdroji stejnosměrného napětí U . Vzájemná indukčnost mezi primární a sekundární cívkou je M .

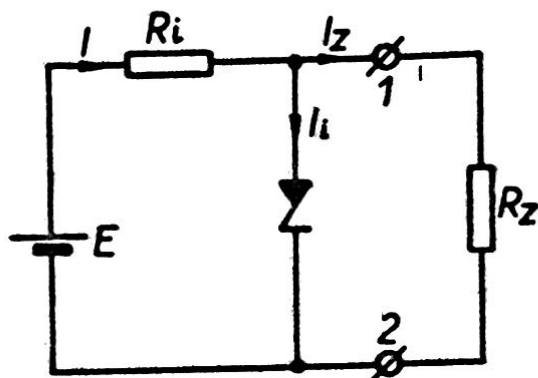
4. Obvody s nelineárními prvky

4.1 Výbojka, jejíž voltampérová charakteristika je zobrazena na obr.5.53, je připojena ke stejnosměrnému zdroji napětí U přes odpor R . Vypočtete hodnotu tohoto odporu tak, aby pracovní bod výbojky ležel v bodě A charakterizovaném hodnotou napětí U_i , hodnotou proudu I_i a hodnotou vnitřního odporu $R_i < 0$. Určete, jak se změní proud výbojkou při změně napětí zdroje ΔU . /Předpokládáme ovšem $U > U_i$ /.

4.2 Zenerova dioda je připojena ke zdroji o elektromotorickém napětí E a vnitřním odporu R_i /obr.5.54/. Veličiny E , R_i jsou voleny tak, že dioda pracuje v bodě A své voltampérové charakteristiky (Obr.5.55) charakterizovaném napětím U_Z , proudem I_i a vnitřním odporem R_{iZ} . Nalezněte



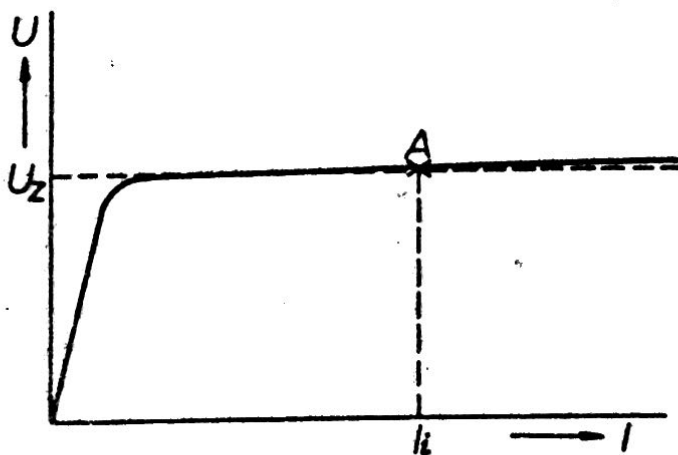
Obr.5.53



Obr.5.54

a/ Jak se změní napětí U na svorkách zatěžovacího odporu R_Z při změně napětí zdroje o ΔE . Vyšetřete speciální případ $R_Z \gg R_i$, $R_i \gg R_{iZ}$.

b/ Jaké jsou parametry /tj. elektromagnetické napětí, vnitřní odpor /efektivního zdroje, který uvažované zapojení představuje vzhledem k zátěži R_Z .



Obr.5.55

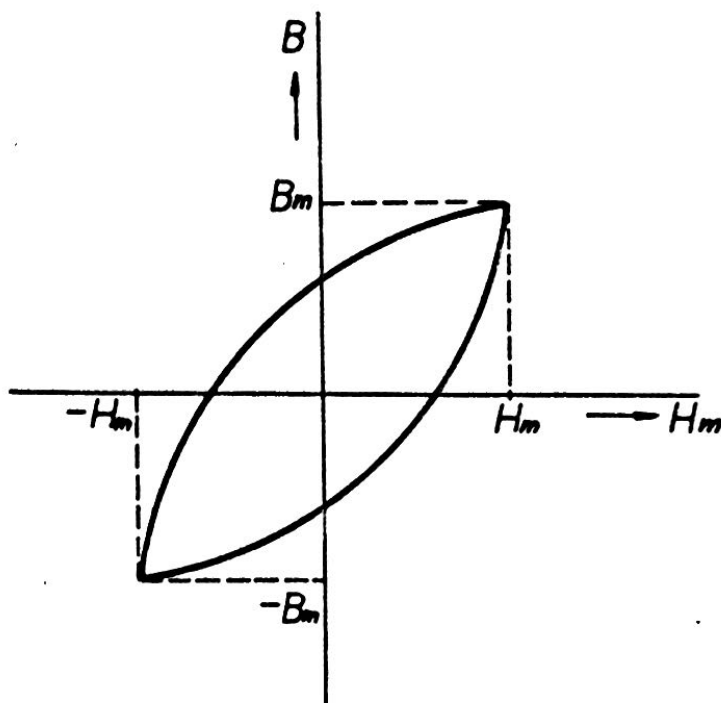
5.4.3 Odpor R je přes žárovku o odporu R_Z připojen ke zdroji elektromotorického napětí E . Vláknová žárovka působí jako stabilizační element proudu v obvodu. Vzroste-li totiž napětí zdroje o ΔE , vzroste teplota vlákna žárovky a také jeho odpor.

Odpovídající vzrůst proudu ΔI je pak menší než vzrůst $\Delta I'$ při ním odporu R_x . Spočtete poměr $\Delta I / \Delta I'$ za předpokladu, že veškerý ztracený ve vlákně se vyzáří.

5.4.4 Toroidní cívka s jádrem je přes velký odpor R připojena ke střídavému zdroji napětí $U = U_m \cos \omega t$. Určete průběh napětí na svorkách cívky za předpokladu, že ohmický odpor cívky je zanedbatelný a že pro magnetování jádra platí Rayleighův zákon, tj., že dvě větve hysteresní smyčky /obr.5.56/ jsou symetrické.

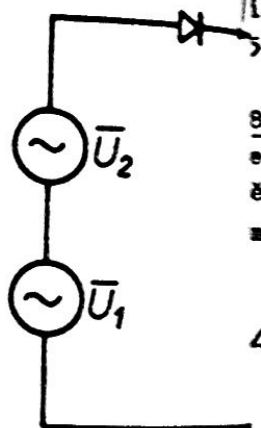
$$B = (\mu_a + b H_m) H \pm \frac{b}{2} (H^2 - H_m^2)$$

v němž B , H jsou okamžité hodnoty magnetické indukce a intenzity magnetického pole, H_m je špičková hodnota intenzity magnetického pole v jádře, μ_a je permeabilita jádra, b Rayleighova konstanta jádra.



Obr.5.56

5.4.5 Dva střídavé zdroje o frekvencích ω_1 a ω_2 s maximálními hodnotami napětí U_{1m} a U_{2m} jsou zapojeny podle obr.5.57.

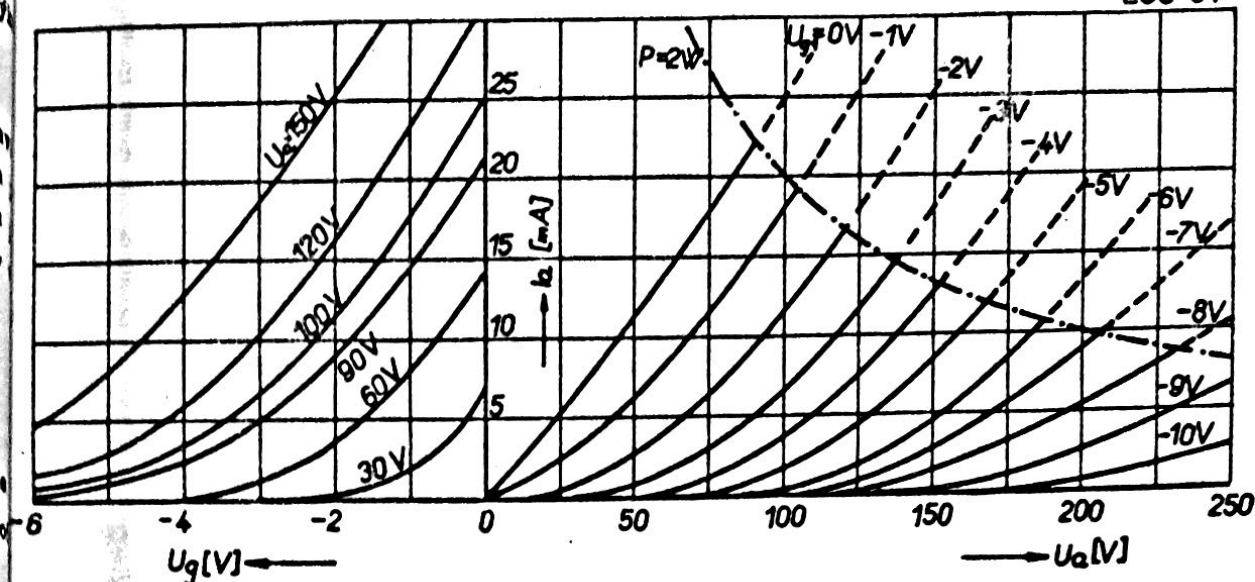


Obr.5.57

obvodu s diodou podle obr.5.57. Dokažte, že proud tekoucí obvodem má složku o frekvenci $\omega_1 - \omega_2$. Při výpočtu předpokládejte, že voltampérová charakteristika diody /tj. vztah mezi okamžitou hodnotou proudu a napětím na diodě/ je daná vztahem

$$I = \sigma_0 (e^U - 1)$$

5.4.6 Na obr.5.58 /viz na následující straně/ je zakreslena soustava anodových mřížkových charakteristik triody. Určete hodnotu odporu R_a který je třeba zařadit do anodového obvodu /viz obr.5.59 na následující straně/, aby při zdroji anodového napětí 250 V a mřížkovém napětí $U_g = -3$ V tekla elektřina proud 10 mA.



Obr.5.58

4.7 Zkonstruuje graficky dynamickou charakteristiku triody pro anodový odpor R_a a parametry pracovního bodu z úlohy 5.4.6. Použijte charakteristik podle Obr.5.58.

4.8 Uvažujte triodu zapojenou podle obr.5.59. Dokažte, že při změně mřížkového napětí o ΔU_g změní napětí na anodě ΔU_a dle vztahem

$$\Delta U_a = -\mu \frac{R_a}{R_i + R_a} \Delta U_g$$

němž μ je zesilovací činitel a R_i vnitřní odpor elektronky.

4.9 Termistor je nelineární polovodičový prvek se silnou teplotní závislostí odporu. Odpor R při teplotě T /ve $^{\circ}K$ / lze vyjádřit vztahem

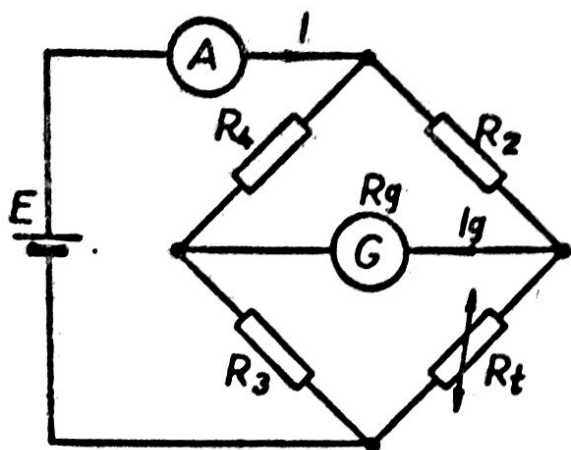
$$R = R_0 e^{B/T}$$

ve kterém R_0 , B jsou konstanty. Je-li na termistoru spotřebován výkon P , je rozdíl mezi pracovní teplotou termistoru T a teplotou okolí T_0 přibližně vyjádřit empirickým vztahem

$$T - T_0 = CP$$

němž C je konstanta termistoru.

Předpokládejte, že výkon P je dán jouleovým teplem při průchodu proudem. Sestavte diferenciální rovnici vyjadřující vztah mezi změnami odporu termistoru a změnami jím procházejícího proudu.



Obr.5.60

5.4.10 Termistor se často užívá k měření intenzity záření. Možné připojení uspořádání je na obr.5.60. Termistor je zapojen v jedné větvi Wheatstonova mostu pro nějž platí $R_2 = R_3 = R$. Proud I je volen tak, aby dopadajícího záření byl most vyrován ($R_t = R$). Dopadá-li nyní na termistor výkon ΔP , změni se jeho odpor a galvanometr ukáže výchylku ΔI_g . Počítejte citlivost daného zařízení $\Delta I_g / \Delta P$ za předpokladu, že pro termistor platí vztahy uvedené v předchozí úloze.

5.2 Lineární střídavé obvody

5.2.1 a/ $R = 120 \Omega$, výkon $P = 183 \text{ W}$

b/ $L = 0,7 \text{ H}$, $P = 100 \text{ W}$

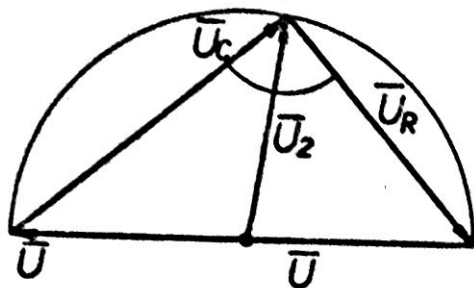
c/ $C = 14,4 \mu\text{F}$, $P = 100 \text{ W}$

5.2.2 Je-li Z prostá hodnota impedance sítě, je $\cos \varphi = R/Z$ a proud $I = E/Z$. Odtud

$$P = EI \cos \varphi = \frac{E^2 \cos^2 \varphi}{R}$$

5.2.3 30 kW

5.2.4 Potřebný proud je v obou případech přibližně 39 A.



Obr. 5.75

5.2.5 Amplituda napětí na svorkách AB je nezávislá na poloze jezce a má hodnotu U . Jeho fáze se při posunutí jezce mezi krajními polohami změní o π . Fázový diagram je vidět na obr. 5.75.

5.2.6 Z Kirchhoffových zákonů plyne soustava rovnic

$$\bar{U}_L = (R_L + j\omega L) \bar{I}$$

$$\bar{U}_R = R_0 \bar{I}$$

$$\bar{U} = (R_0 + R_L) \bar{I} + j\omega L \bar{I}$$

Vyloučíme-li z těchto rovnic proud \bar{I} a zavedeme-li prosté hodnoty napětí U_L , U_R , U měřené voltmetry, dostaneme dvě rovnice pro neznámé L , R_L .

$$R_L = \frac{U^2 - U_L^2 - U_R^2}{2 U_R^2} R_0$$

$$\omega^2 L^2 = R_0^2 \frac{U_L^2}{U_R^2} - \frac{R_0^2}{4} \frac{(U^2 - U_L^2 - U_R^2)^2}{U_R^4}$$

Pro výkon P ztracený v cívice platí

$$P = R_L I^2 = \frac{U^2 - U_L^2 - U_R^2}{2 R_0}$$

5.2.7

$$R_L = \frac{I^2 - I_R^2 - I_L^2}{2 I_L^2} R_0$$

$$\omega^2 L^2 = R_0^2 \frac{I_R^2}{I_L^2} - \frac{R_0^2}{4} \frac{(I^2 - I_R^2 - I_L^2)^2}{I_L^4}$$

$$P = \frac{R_0}{2} (I^2 - I_R^2 - I_L^2)$$

5.2.8

Označíme $\bar{Z}_a, \bar{Z}_b, \bar{Z}_c, \bar{Z}_d$ impedace jednotlivých větví můstku. Podmínka rovnováhy pak má tvar

$$\bar{Z}_a \bar{Z}_d = \bar{Z}_b \bar{Z}_c$$

Podle obr.5.32 platí

$$\bar{Z}_a = \frac{1 + j\omega R_a C_a}{j\omega C_a}, \quad \bar{Z}_b = \frac{R_b}{1 + j\omega C_b R_b}$$

$$\bar{Z}_c = R_c, \quad \bar{Z}_d = R_d$$

Po dosazení do podmínky rovnováhy dostaneme výsledek

$$\omega^2 R_a R_b C_a C_b = 1$$

$$R_b R_c - R_a R_d = \frac{C_b}{C_a} R_b R_d$$

Jak je z výsledku vidět, je Wienův můstek frekvenčně závislý.

5.2.9

Scheringův můstek je frekvenčně nezávislý. Podmínky rovnováhy mají tvar

$$C_x = C_a \frac{R_b}{R_c}$$

$$R_x = R_c \frac{C_b}{C_a}$$

$$R_x = \frac{R_a R_c}{R_b}$$

5.2.10

$$L_x = R_a R_c C_b,$$

5.2.11

$$\frac{U'_{st}}{U'_s} = \frac{U_{st}}{U_s} \frac{1}{1 + p^2}$$

kde $p = \frac{R_p}{\frac{1}{\omega C}}, \quad R_p = \frac{R R_z}{R + R_z}$

Potřebná kapacita $C \approx 1,75 \mu F$

5.2.12

$$\frac{U'_{st}}{U'_s} = \frac{U_{st}}{U_s} \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 L C)^2 + \frac{\omega^2 L^2}{R_z^2} (1 + \frac{C R_z R_c}{L})^2}}$$

Pro zadané numerické hodnoty platí

$$\frac{U'_{st}}{U'_s} \approx 4 \cdot 10^{-4} \frac{U_{st}}{U_s}$$

5.2.13

$$U_2 = U_1 \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

Pro $R = 1/\omega_0 C$ platí $U_2 = U_1/\sqrt{2}$

5.2.14 Je výhodné užít transformace hvězda - trojúhelník /obr.5.76/. Impedance mezi odpovídajícími dvojicemi sverek 1 až 3 jsou stejné, jestliže platí

$$\bar{Z}_{ik} = \frac{\bar{Z}_i \bar{Z}_k}{\bar{Z}_o}$$

kde

$$\frac{1}{\bar{Z}_o} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\bar{Z}_i}$$

Pomocí této transformace převedeme řešený obvod

/obr.5.37/ na obvod spojený podle obr.5.77, vhodnější k řešení.

Z obr.5.77 je jasné, že zatěžovací impedance \bar{Z} poteče nezávisle na její hodnotě nulový proud právě tehdy, bude-li paralelní spojení $I\bar{Z}_{12}, II\bar{Z}_{12}$ mít nekonečnou hodnotu.

Použitím shora uvedených transformačních vztahů dostaneme

$$I\bar{Z}_{12} = - \frac{1}{4\omega^2 C^2} \frac{R + j\omega C}{j\omega CR}$$

$$II\bar{Z}_{12} = 4R^2 \frac{R + j\omega C}{j\omega CR}$$

Pro nulový proud zátěží máme tedy podmínku

$$\frac{j\omega CR}{4R^2(R + j\omega C)} - \frac{j\omega C}{4\omega^2 C^2(R + j\omega C)} = 0$$

Odtud plyne výsledek

$$\omega = - \frac{1}{R} -$$

5.2.15 Celková impedance

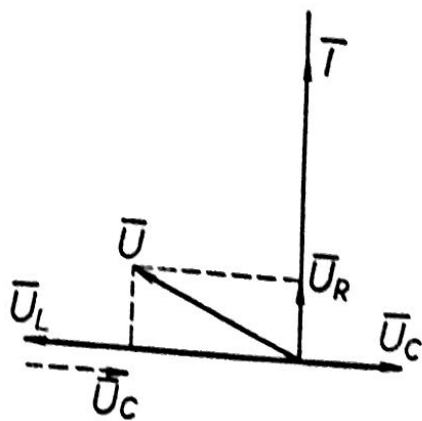
$$\bar{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

při resonanci

$$\bar{Z} = R$$

$$U_C = U_L = U \cdot Q, \text{ kde } Q = \omega L/R.$$

Fázový diagram obvodu je na obr.5.78.



Obr.5.78

5.2.16 Pro výkon P dodávaný zdrojem platí

$$P = U^2 \frac{R}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

při resonanci je výkon maximální.

$$P_{max} = U^2/R$$

5.2.17 Pro impedanci \bar{Z} obvodu na obr.5.39 platí

$$\bar{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})}$$

Je čistě reálná a má maximální prostou hodnotu při resonanci $\omega C = \frac{1}{\omega L}$.

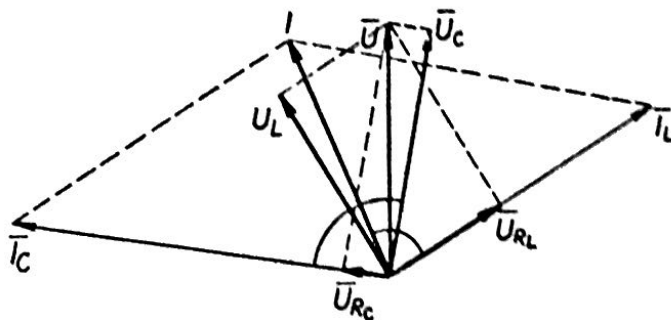
5.2.18 Označme \bar{Z}_L , \bar{Z}_C impedance induktivní a kapacitní větve obvodu /obr. 5.40/. Platí

$$\bar{Z}_L = R_L + j\omega L, \quad \bar{Z}_C = \frac{1 + j\omega C R_C}{j\omega C}$$

Pro celkovou impedanci \bar{Z} pak lze psát

$$\bar{Z} = \frac{\bar{Z}_L \cdot \bar{Z}_C}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_C} = \frac{R_L - \omega^2 L C R_C + j\omega(L + C R_C R_L)}{1 - \omega^2 L C + j\omega C(R_C + R_L)}$$

Fázový diagram je uveden na obr.5.79. Při jeho sestavení je třeba vyjít z napětí zdroje \bar{U} , které je oběma větvím společné.



Obr.5.79'

5.2.19 Impedance obvodu podle obr. 5.40 je čistě reálná při frekvenci ω_1 pro níž platí

$$\frac{\omega_1 C}{1 + \omega_1^2 C^2 R_C^2} = \frac{\omega_1 L}{R_L^2 + \omega_1^2 L^2}$$

Odtud

$$\omega_1^2 = \frac{1}{LC} \frac{L - C R_L^2}{L - C R_C^2}$$

Zavedeme-li pojem činitele jakosti induktivní větve při sériové resonanci $Q_{OL} = \omega_0 L / R_L = \sqrt{L} / R_L \sqrt{C}$ a činitele jakosti kapacitní větve $Q_{OC} = 1 / \omega_0 C R_C = \sqrt{L} / R_C \sqrt{C}$ a uvážíme-li, že $\omega_0^2 = 1 / LC$, máme

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \frac{1 - Q_{OL}^{-2}}{1 - Q_{OC}^{-2}}$$

Pro $Q_{OL}, Q_{OC} \gg 1$ je tedy $\omega_1 \approx \omega_0$

Při řešení úlohy je výhodné vyjít z admitance obvodu.

5.2.20 Proud \bar{I}_1 indukuje v sekundárním obvodu elektromotorické napětí $-j\omega M \bar{I}_1$. Naopak proud \bar{I}_2 indukuje v primárním obvodu elektromotorické napětí $-j\omega M \bar{I}_2$. Podle Kirchhoffových zákonů máme tedy rovnice

$$(R_1 + j\omega L_1) \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 = \bar{U}$$

$$j\omega M \bar{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2) \bar{I}_2 = 0$$

Jejich řešením dostaneme neznámé proudy

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2}}, \quad \bar{I}_2 = \bar{U} \frac{-j\omega M}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \omega^2 M^2}$$

Z řešení je vidět, že sekundární obvod působí na primární tak, jako by v něm byla připojena další impedance $\bar{Z}_{21} = \omega^2 M^2 / \bar{Z}_2$ do serie s impedancí \bar{Z}_1 . Pro její reálnou a imaginární složku platí

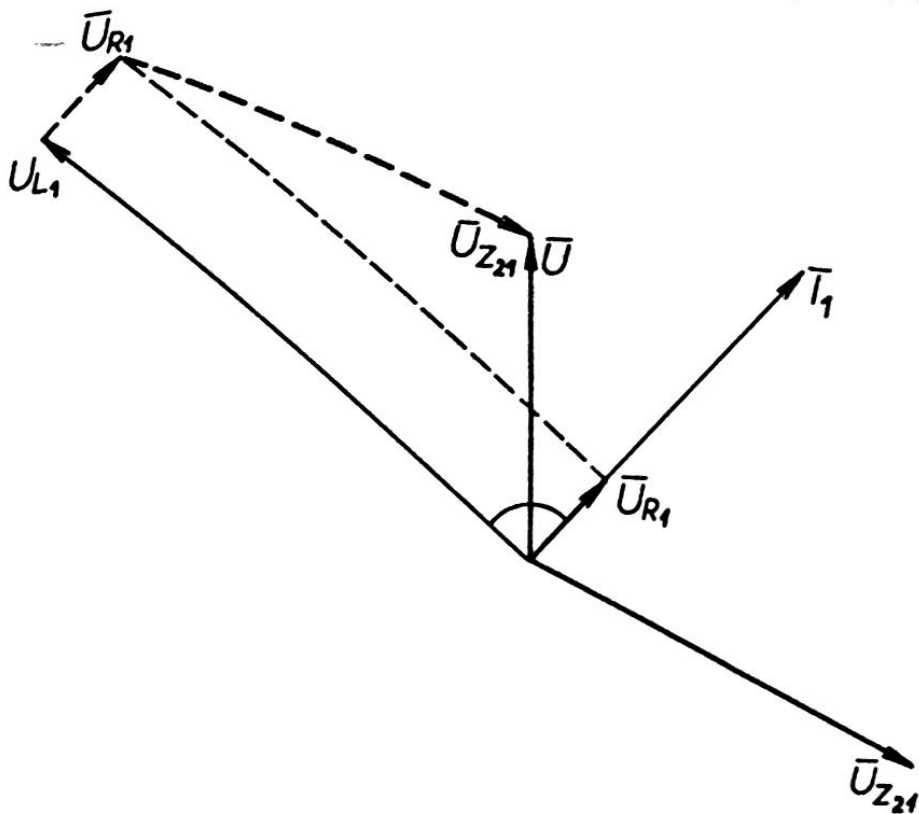
$$\operatorname{Re} \bar{Z}_{21} = \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} R_2$$

$$\operatorname{Im} \bar{Z}_{21} = \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} (-j\omega L_2)$$

Imaginární složka impedance \bar{Z}_2 se tedy transformuje do primárního obvodu se záporným znaménkem. Tuto skutečnost je třeba respektovat ve fázovém diagramu primárního obvodu /obr.5.80 viz na následující straně/.

5.2.21 Vyjádřete prostou hodnotu proudu I_2 . Z tvaru vzorce plyne ihned jed-
na podmínka

$$\omega L_1 = \omega L_2 \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2}$$



Obr.5.80.

Pro extrémní hodnotu zbylého výrazu při proměnné vzájemné indukčnosti M platí dále

$$R_1 = \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} R_2$$

Proud v sekundárním obvodu je tedy maximální jestliže:

- a/ Impedance \bar{Z}_{21} transformovaná ze sekundárního do primárního obvodu má stejnou reálnou složku jako impedance primárního obvodu.
- b/ Imaginární složka impedance \bar{Z}_{21} má stejnou hodnotu /a opačné znamení/ jako imaginární složka impedance primárního obvodu.

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2}}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{-j\omega M}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \omega^2 M^2}$$

Impedance \bar{Z}_{21} transformovaná do primárního obvodu má složky

$$Re \bar{Z}_{21} = \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + (\chi_2 + \omega L_2)^2} R_2$$

$$Im \bar{Z}_{21} = \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + (\chi_2 + \omega L_2)^2} \left[-(\chi_2 + \omega L_2) \right]$$

$$I_2 = \frac{\omega M}{R_1 R_2 + \omega^2 M^2} U$$

Proud I_2 je maximální, je-li splněna podmínka

$$\omega M = \sqrt{R_1 R_2}$$

5.2.24 Použijte výsledků úlohy 5.2.22

5.2.25

$$I_2 = \frac{k}{\omega_0 \sqrt{L_1 L_2}} \frac{U}{\frac{1}{Q_1 Q_2} + k^2}$$

Vyšetříte-li derivaci $\frac{\partial I_2}{\partial k}$, dostanete podmínku pro maximální hodnotu proudu I_2

$$k^2 = \frac{1}{Q_1 Q_2}$$

kterou lze přepsat do tvaru

$$\omega M = \sqrt{R_1 R_2}$$

5.2.27 Podle Kirchhoffových zákonů platí pro nevyrovnaný můstek soustava rovnic

$$R_a \bar{I}_a + \frac{1}{j\omega C_a} \bar{I}_a + R_b \bar{I}_b = \bar{U}$$

$$R_c \bar{I}_c + j\omega L_c \bar{I}_c + j\omega M_x \bar{I}_g = \bar{U}$$

$$R_a \bar{I}_a + \frac{1}{j\omega C_a} \bar{I}_a - R_c \bar{I}_c - j\omega (L_c - M_x) \bar{I}_c = 0$$

$$\bar{I}_b = \bar{I}_g + \bar{I}_a$$

$$\bar{I} = \bar{I}_a + \bar{I}_c$$

Pro $\bar{I}_g = 0$ se rovnice redukuje a podmínky rovnováhy z nich určené mají tvar

$$M_x = C_a R_b R_c$$

$$M_x = L_c \frac{R_b}{R_a + R_b}$$

5.2.26 Soustava rovnic má tvar

$$R_3 \bar{I}_3 + R_4 \bar{I}_4 = \bar{U}$$

$$(R_1 + j\omega L_1) \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}' + R_2 \bar{I}_2 = \bar{U}$$

$$j\omega M \bar{I}_1 + R_2 \bar{I}_2 + j\omega L_2 \bar{I}' - R_4 \bar{I}_4 = 0$$

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_3 = \bar{I}$$

$$\bar{I}_2 - \bar{I}' = \bar{I}_1$$

$$\bar{I}' + \bar{I}_4 = \bar{I}_3$$

pro $\bar{F}' = 0$ z nich plynou podmínky

$$M = L_1 \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$(R_1 + R_2) R_4 = (R_3 + R_4) R_2$$

Nesinusové proudy

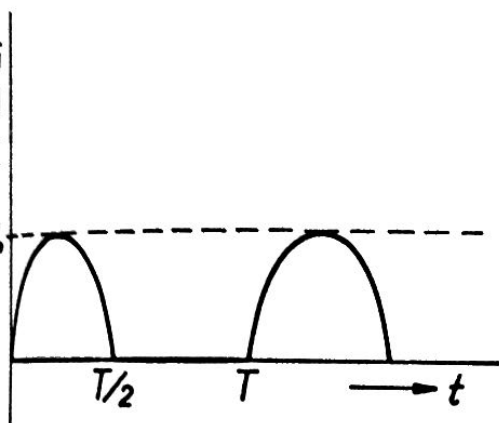
a/ Jednocestně usměrněný proud má průběh /viz obr.5.81a/

$$i = I_0 \sin \omega t \quad \text{pro } t \in (0, T/2), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

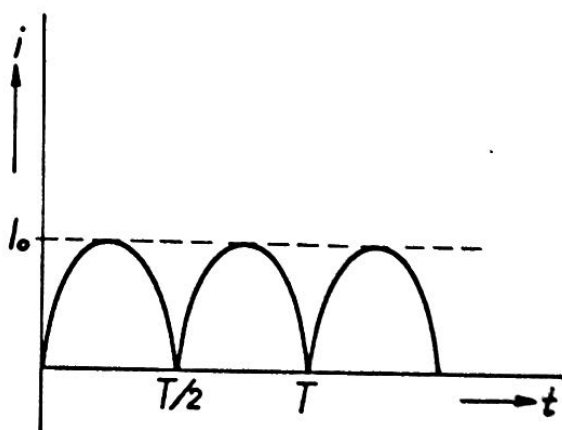
$$i = 0 \quad \text{pro } t \in (T/2, T)$$

Střední hodnota proudu

$$I_S = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = \frac{I_0}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = \frac{I_0}{\pi}$$



a/



b/

Obr.5.81

Efektivní hodnota proudu

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{I_0^2}{T} \int_0^{T/2} \sin^2 \omega t dt = \frac{I_0^2}{4}$$

$$I_{ef} = \frac{I_0}{2}$$

b/ Dvojecestně usměrněný proud má průběh /viz obr.5.81b/

$$i = I_0 \sin \omega t \quad \text{pro } t \in (0, T/2)$$

$$i = -I_0 \sin \omega t \quad \text{pro } t \in (T/2, T)$$

Střední hodnota proudu

$$I_S = \frac{2}{\pi} I_0$$

Efektivní hodnota proudu

$$I_{ef}^2 = \frac{2 I_0^2}{4}$$

$$I_{ef} = \frac{\sqrt{2}}{2} I_0$$

5.3.2 a/ $I_S = I_0, I_{ef} = I_0, K = \frac{I_{ef}}{I_0} = 1$

b/ $I_S = \frac{I_0}{2}, I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{3}}, K = \frac{I_{ef}}{I_0} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

5.3.3 $U_{ef} = \frac{U_0}{\sqrt{3}} \quad (u = \frac{2U_0}{T} \cdot t - U_0)$

5.3.4 $U_{ef} = \sqrt{a \cdot f} U_0$

5.3.5 Harmonický rozvoj je dán ve tvaru

$$U(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^n b_k \cos k\omega t$$

s koeficienty

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T U(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T U(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt.$$

Časový průběh napětí v tomto příkladu je lichou funkcí času

$$U(-t) = -U(t)$$

proto

$$b_k = 0 \quad \text{pro všechna } k$$

$$U(t) = U_0 \quad \text{pro } t \in (0, T/2)$$

$$U(t) = -U_0 \quad \text{pro } t \in (T/2, T)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^{T/2} U_0 dt + \int_{T/2}^T (-U_0) dt \right\} = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{T/2} U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt - \int_{T/2}^T U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt \right\} = \frac{2U_0}{\pi k} \left[1 - (-1)^k \right]$$

$$a_{2p} = 0 \quad \text{sudé členy}$$

$$a_{2p+1} = \frac{4U_0}{(2p+1)\pi} \quad \text{liché členy}$$

Dostáváme tedy rozvoj

$$U(t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{p=0}^N \frac{\sin(2p+1) \frac{2\pi}{T} t}{2p+1} =$$

$$= \frac{4U_0}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$$

$$U(t) = -\frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{\sin \frac{2\pi}{T} kt}{k} = -\frac{2U_0}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \dots \right)$$

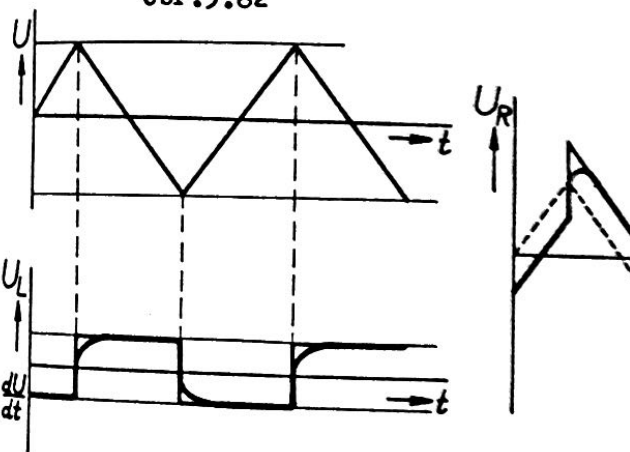
5.3.7 Průběh napětí na cívce je dán vztahem

$$U = -L(di/dt)$$

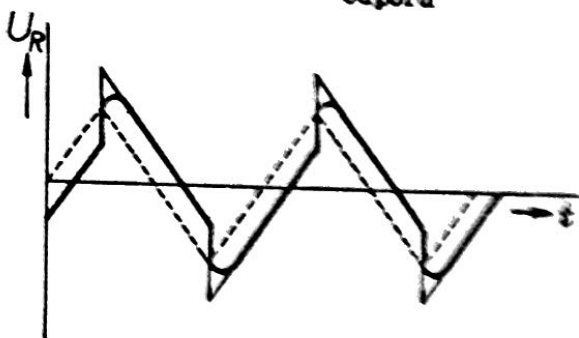
viz obr.5.82

5.3.8 Napětí zdroje a napětí generované na indukčnosti se skládají - viz obr.5.83.

Obr.5.82



5.3.9 Napětí na ohmickém odporu



Obr.5.83

$$U_R(t) = R i(t) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^n d_k \cos k\omega t$$

kde $c_0 = Ra_0$

$c_k = Ra_k$

$d_k = Rb_k$

platí Ohmův zákon

Napětí na indukčnosti

$$U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L\omega \left\{ \sum_{k=1}^n ka_k \sin \left(\omega kt + \frac{\pi}{2} \right) + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \cos(\omega k t + \frac{\pi}{2}) \}$$

Dojde k změně spektra, stejnosměrná složka vymizí a zesílí se harmonické členy tak, že platí

$$a_k \longrightarrow k a_k$$

$$b_k \longrightarrow k b_k$$

5.3.10 Výkon spotřebovaný na cívce s ohmickým odporem je podle principu nezávislosti zdrojů

$$N = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^n i_k \sin(\omega k t) \cdot \sum_{k=1}^n u_k \sin(\omega k t + \varphi_k) dt =$$

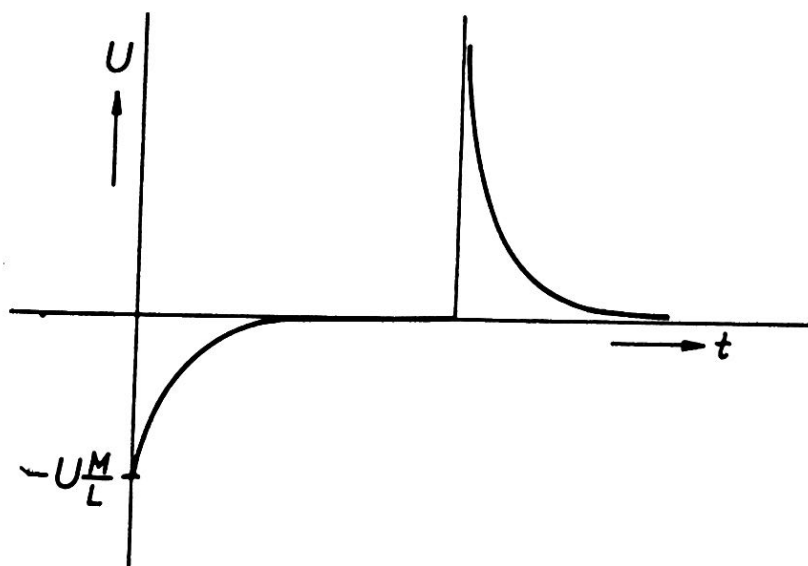
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n u_k i_k \cos \varphi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Z_k i_k^2 \cos \varphi_k$$

kde Z_k je impedance pro k -tou harmonickou a φ_k je fázový posuv pro k -tou harmonickou. Z výrazů pro střídavý proud a podle výsledku příkladu 5.3.9 je

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{k \omega L}{R}, \quad \text{pro } k \rightarrow \infty \text{ platí } \cos \varphi_k \rightarrow 0$$

$$\text{a } |Z_k| = \sqrt{R^2 + k^2 \omega^2 L^2} \quad \text{pro } k \rightarrow \infty \text{ platí } |Z_k| \rightarrow k \omega L$$

Směrem k vyšším harmonickým převládá induktivní charakter cívky a podíl vyšších harmonických na spotřebovaném výkonu klesá.



Obr.5.84

5.3.11 Při zapnutí $U_2 =$
 $= -U \frac{M}{L} e^{-\frac{R}{L} t}$

Při vypnutí $U_2 =$
 $= U \frac{M}{L} \frac{R'}{R} e^{-\frac{R'}{L} t}$

kde R' je odpor oblouku mezi rozeprutými kontakty přerušovače $R' \gg R$

Předpokládá se, že frekvence přerušovače $f \ll \frac{R}{L}$. Pak obr. 5.84 znázorňuje průběh napětí U_2 .

Uk. 1 Ujistěte 2. Kirchhoffova zákona.

$$R = \frac{U - U_i}{I_i}$$

$$\Delta I_i = \frac{\Delta U}{R + R_i}, \quad R + R_i > 0.$$

Uk. 2 a/ z Kirchhoffových zákonů plynou rovnice

$$I = I_i + I_z$$

$$E = R_i I + R_z I_z$$

$$U_z = R_z I_z$$

Uvážíme-li, že $R_{iz} = \Delta U_z / \Delta I_i$, dostaneme z nich po diferencování výsledek

$$\Delta U_z = \Delta E \frac{R_z R_{iz}}{R_{iz}(R_i + R_z) + R_i R_z}$$

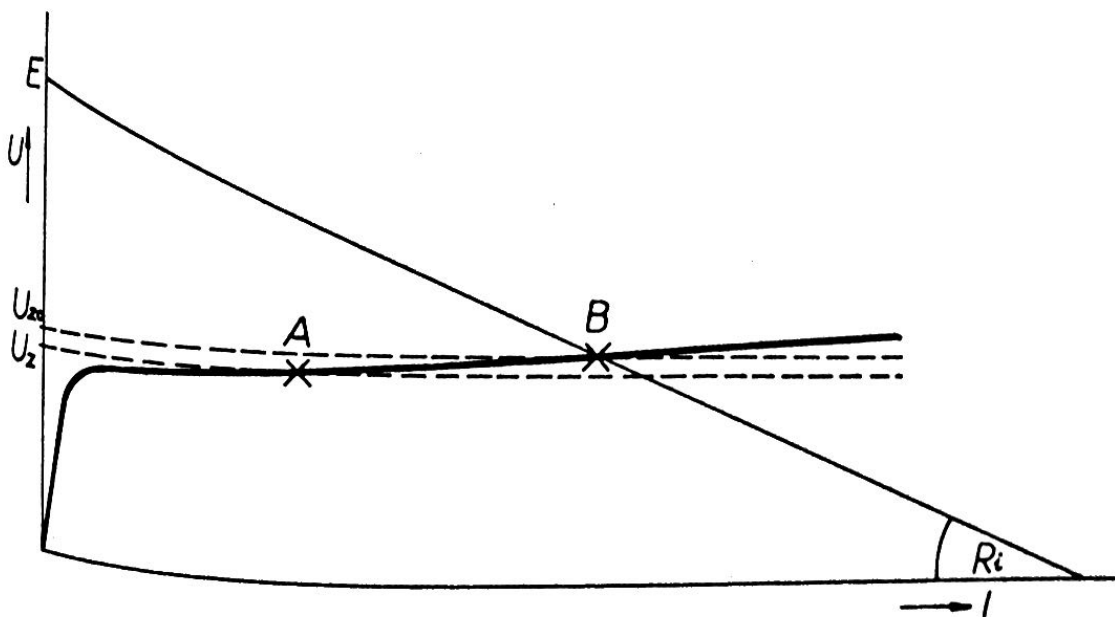
Speciálně pro $R_z \gg R_i$ platí

$$\Delta U_z \doteq \Delta E \frac{R_{iz}}{R_{iz} + R_i}.$$

Je-li dále $R_{iz} \ll R_i$ platí

$$\Delta U_z \doteq \Delta E \frac{R_{iz}}{R_i}$$

b/ Elektromotorické napětí efektivního zdroje reprezentovaného Zenerovou diodou je napětí U_{z0} na svorkách 1,2 /obr.5.54/ při odpojení zátěže R_z . Lze ho určit graficky, zakreslíme-li do charakteristiky zatěžovací přímku vnitřního odporu R_i - viz obr.5.85.



Obr.5.85

Předpokládáme, že charakteristika Zenerovy diody je v celé pracovní oblasti přímková. Pak lze v zapojení na obr. 5.54 Zenerovu diodu reprezentovat odporem R_{iz} . Pro vnitřní odpor R_{ief} efektivního zdroje dostaneme z Theveninovy věty

$$R_{ief} = \frac{R_i R_{iz}}{R_i + R_{iz}}$$

Speciálně je-li $R_i \gg R_{iz}$ je

$$R_{ief} \doteq R_{iz}$$

5.4.3 Diferencováním rovnice plynoucí pro daný obvod z 2. Kirchhoffova zákona dostaneme podmínky

$$\Delta E = (R_z + R) \Delta I + I \Delta R_z$$

$$\Delta E = (R_z + R) \Delta I'$$

Je-li α teplotní součinitel odporu žárovky, platí pro změnu jejího odporu ΔR_z při změně teploty o ΔT

$$\Delta R_z = \alpha R_z \Delta T$$

Výkon P vyzářený tělesem teploty T je podle Stefanova-Boltzmannova zákona dán vztahem

$$P = \sigma S (T^4 - T_0^4)$$

kde S je povrch tělesa, σ konstanta záření, T_0 teplota okolních těles. Předpokládáme-li $T^4 \gg T_0^4$ dostaneme

$$\frac{\Delta P}{P} = 4 \frac{\Delta T}{T}$$

Po dosazení $P = R_z I^2$, $\Delta P = I^2 \Delta R_z + 2 I R_z \Delta I$ do hořejších vztahů máme výsledek

$$\frac{\Delta I}{\Delta I'} = \frac{4 - \alpha T}{4 + \alpha T \frac{R_z - R}{R_z + R}}$$

5.4.4 Proud I v obvodu je podle předpokladu určen ohmickým odporem R .

$$I = \frac{U_m}{R} \cos \omega t$$

Okamžitá hodnota intenzity pole H v jádře je pak dána vztahem

$$H = \frac{n U_m}{2 \pi a R} \cos \omega t$$

v němž n je počet závitů víčky, a střední poloměr jádra. Tedy

$$H_m = n U_m / 2 \pi a R.$$

Průběh indukce B předpokládáme ve tvaru řady

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B'_n \cos n \omega t + B_n \sin n \omega t \right].$$

Použitím Rayleighova zákona dostaneme

$$B = (\mu_a + b H_m) H_m \cos \omega t + \frac{4}{3\pi} b H_m^2 \sin \omega t - \\ - \frac{4}{\pi} b H_m^2 \left[\frac{1}{3 \cdot 5} \sin 3 \omega t + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \sin 5 \omega t + \dots \right]$$

Je-li S průřez jádra cívky, platí pro okamžitou hodnotu napětí na jejích svorkách

$$U = -nS \frac{\partial B}{\partial t}$$

Po dosazení

$$U = -nS \left[\frac{4\omega}{\pi} b \frac{\pi^2 U_m^2}{4\pi^2 a^2 R^2} \left(\frac{1}{3} \cos \omega t + \frac{1}{5} \cos 3\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 5\omega t \right) - \right. \\ \left. - \omega \left(\mu_a + b \frac{\pi U_m}{2\pi a R} \right) \frac{\pi U_m}{2\pi a R} \sin \omega t \right]$$

Rozviňte exponenciálu v řadu. Kvadratický člen rozvoje obsahuje komponentu

$$U_{1m} U_{2m} \cos (\omega_1 - \omega_2) t$$

$$R_a \approx 1,35 \cdot 10^4 \Omega.$$

Do anodových charakteristik zakreslete zatěžovací přímku anodového odporu R_a . Průsečíky přeneste do mřížkových charakteristik.

Anodový proud I_a je funkcí mřížkového a anodového napětí U_g, U_a ; $I_a = I_a(U_a, U_g)$.

Diferencováním dostaneme

$$\Delta I_a = \left(\frac{\partial I_a}{\partial U_g} \right)_{U_a} \Delta U_g + \left(\frac{\partial I_a}{\partial U_a} \right)_{U_g} \Delta U_a$$

Dosadíme definiční vztahy pro strmost S a vnitřní odpor R_i .

Uvažíme-li dále, že $\Delta U_s = -R_a \Delta I_a$

a $\mu = S R_i$, získáme hledaný výraz.

$$\frac{dR}{dI} = - \frac{2 B C R^2 I}{(T_0 + C R I^2)^2 + B C R I^2}$$

$$\frac{\Delta I_g}{\Delta P} = E \frac{-B C R}{(R + R_g)(4 R T_0 + C E^2)}$$

Literatura

- [1] Hajko V.: Fyzika v příkladech, III. vydání, SNTL, Praha /1969/
- [2] Strelkov S.P., Elcin I.A., Jakovlev I.A.: Sběrka příkladů z fyziky I, NČSAV, Praha /1953/
- [3] Petržílka V., Šafrata S.: Elektřina a magnetismus, Přírodovědecké vydavatelství, Praha /1953/
- [4] Votruba V., Muzikář Č.: Teorie elektromagnetického pole NČSAV, Praha /1955/
- [5] The Feynman Lectures on Physics, Exercises, Addison-Wesley Publishing Comp. /1964 - 1965/ /ruský překlad Moskva 1969/
- [6] Stratton J.A.: Teorie elektromagnetického pole, SNTL, Praha /1961/
- [7] Kvasil B.: Teoretické základy centimetrových vln, SNTL, Praha /1957/
- [8] Starr A.T.: Radiotechnika velmi krátkých vln, SNTL, Praha /1962/
- [9] Smirenin B.A.: Radiotechnická příručka, SNTL, Praha /1955/
- [10] Joos G.: Lehrbuch der theoretische Physik, Akad. Verlagsges. Leipzig /1946/
- [11] Ostwald W.: Grundriss der allgemeine Chemie, T. Steinkopff, Dresden, Leipzig /1920/
- [12] Kučera B.: Vedení elektřiny v hustých plynech, Čas. pro pěstování matematiky a fyziky XLI /1912/ 37
- [13] Scott W.T.: The Physics of Electricity and Magnetism, J. Wiley New York /1966/
- [14] Ilkovič D.: Fyzika, SVTL/SNTL Bratislava - Praha /1959/
- [15] Sacharov A.I.: Sborník zadač po fizike, Moskva /1967/
- [16] Gurjev L.G. et al.: Sborník zadač po obščemu kursu fiziki, Moskva /1966/
- [17] Volkenštejn V.S.: Sborník zadač po obščemu kursu fiziki, Moskva /1969/