

### 3. Magnetismus

*Handwritten signature*

#### 3.1 Magnetické pole proudu ve vakuu

3.1.1 K tenkému drátěnému kruhu poloměru  $R$  je přiváděn proud  $i_0$ . Nalezněte výraz pro indukci magnetického pole  $B$  ve středu kruhu, jestliže přívody dělicí kruh na dvě části délky  $L_1$  a  $L_2$  jsou tvořeny dvěma nekonečnými vodiči umístěnými radiálně.

3.1.2 Určete magnetické pole ve válcovém otvoru /poloměr  $R_2$  / v nekonečném válcovém vodiči /poloměr  $R_1$  /, kterým protéká proud  $i_0$  rovnoměrně rozložený po průřezu s konstantní hustotou.

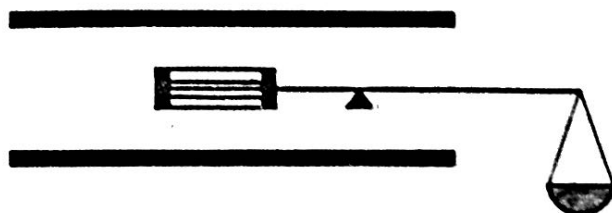
3.1.3 Dva závity, každý o poloměru  $R = 10$  cm, jsou umístěny vzájemně rovnoběžně ve vzdálenosti  $L = 20$  cm. Oběma závity protéká proud  $i_0 = 3$  A. Odvoďte vztah pro intenzitu pole na spojnici středů obou závitů, která je kolmá k jejich rovinám. Vypočítejte hodnotu pole ve středu jednoho závitu a uprostřed na ose mezi závity.

3.1.4 Dva závity jsou uspořádány podobně jako v případě 3.1.3. Nalezněte relaci mezi  $R$  a  $L$  nutnou k dosažení optimální homogenity pole uprostřed na spojnici středů závitů.

3.1.5 Jaký vztah musí platit mezi délkou  $L$  a průměrem  $D$  solenoidu, aby bylo možno počítat pole v jeho středu podle vzorce pro nekonečný solenoid s chybou nepřesahující 1 %?

3.1.6 Užitím integrální formy Ampérova zákona /tj. Maxwellovy rovnice pro stacionární proud/ určete vztah mezi hodnotami intenzity pole  $H_i$  a  $H_e$  v nejbližším okolí vinutí uvnitř a vně solenoidu. Ukažte, že  $H_e$  vně vinutí je poblíž středu velmi dlouhého solenoidu rovno nule.

3.1.7 Uvnitř dlouhé cívky, jejíž vinutí má na každém délkovém centimetru  $n$  závitů, je umístěna krátká cívka průřezu  $S$ , která má  $N$  závitů. Osa této cívky je kolmá k ose dlouhého solenoidu a má svislý směr. Vnitřní cívka je připevněna na jednom konci vahadla /obr.3.1/, které je vyváženo neprochází-li cívkou proud. Prochází-li oběma cívkami proud  $i_0$ , musíme přidat na další rameno vahadla závaží  $P$ , abychom obnovili rovnováhu. Rameno vahadla, které nese závaží, má délku  $L$ . Vypočítejte proud  $i_0$ .



Obr.3.1

3.1.8 Toroidní cívka má 100 závitů měděného drátu. Vnitřní průměr  $R_1 = 9$  cm a vnější  $R_2 = 10$  cm. Vinutím teče proud  $i = 20$  A. Určete střední hodnotu magnetické indukce  $B$  v cívice.

3.1.9 Najděte magnetický tok  $\Phi$  čtvercem o straně  $L = 3$  cm umístěným vedle dlouhého přímého drátu, jímž protéká proud  $i_0 = 15$  A. Jedna strana čtverce je rovnoběžná s drátem ve vzdálenosti 4 cm a protilehlá strana je od drátu vzdálena 5 cm.

3.1.10 Pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami  $b_0$  a  $a_0$  je umístěn v poli nekonečného přímého vodiče, kterým teče proud  $i_0$ . Magnetické pole je kolmé na rovinu trojúhelníka. Odvěsna  $b_0$  je rovnoběžná s vodičem. Nalezněte podmínku pro polohu trojúhelníka, které odpovídá  $\Phi = 0$ .

3.1.11 Odvoďte vektorový potenciál pole nekonečného přímého válcového vodiče, kterým protéká konstantní proud  $i_0$ . Poloměr válce je  $R$ . Určete složky vektoru magnetické indukce  $\vec{B}$ .

3.1.12 Při výrobě folie PVC se široký pruh hmoty pohybuje rychlostí  $v_0$  postupně přes dva navzájem rovnoběžné válečky. Během opracování se povrch pásu nabíje rovnoměrně rozloženým nábojem plošné hustoty  $\sigma$ .

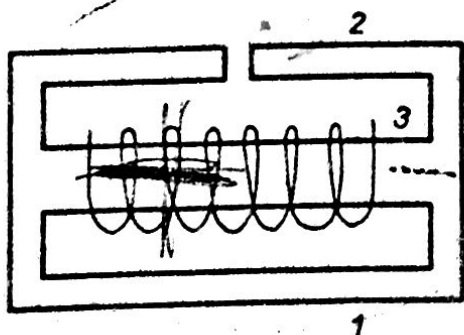
a/ Nalezněte vektorový potenciál v blízkosti povrchu pásu v bodě uprostřed mezi válečky.

b/ Jak velká je magnetická indukce  $B$  v této oblasti?

3.1.13 Užijte vektorový potenciál k určení magnetického pole v libovolném bodě na ose kruhového závitu. Závít má poloměr  $R$  a protéká jím proud  $i_0$ .

## 3.2 Magnetické pole v látkách

3.2.1 Na železném kruhu /střední průměr  $D = 40$  cm/ čtvercového průřezu /strana  $b = 4$  cm/ je navinuta jedna vrstva drátu. Počet závitů  $N = 500$ . Drátem protéká proud  $i_0 = 1$  A. Magnetická permeabilita železa  $\mu_r = 400$ . Vypočítejte indukční tok v jádře. Určete chybu, která vznikne předpokládáme-li, že pole v jádře je homogenní.

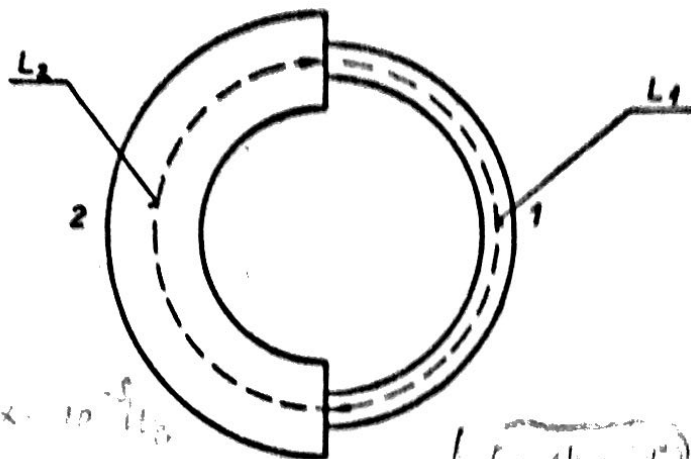


Obr.3.2



3.2.2 Najděte intenzitu magnetického pole  $H_m$  vduchové mezeře, jestliže magnetické odpory  $R_m$  na částech 1,2,3 /obr.3.2/ jsou stejné a magnetický odpor v mezeře  $R_m = 20 R_M$ . Magnetomotrická síla  $E_m = 2150$  Az. Šířka vduchové mezeře  $d = 2$  cm. Průřez magnetického toku je ve všech částech stejný.

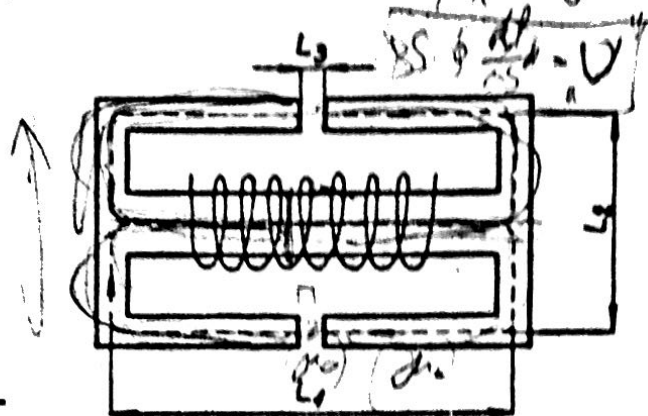
3.2.3 Ocelový kroužek se skládá ze dvou částí o průřezu  $S_1 = 6 \text{ cm}^2$ ,  $S_2 = 20 \text{ cm}^2$ . Délka střední siločáry je  $L = 2L_1 = 2L_2 = 15 \text{ cm}$  / obr.3.3/. Na kroužku je navlečnuta cívka,  $N = 400$  závitů.



a/ Jaký proud  $i_0$  musí protékat cívkou, aby magnetický tok v cívkce byl  $10^5$  maxwellů

b/ Jak se změní proud  $i_0$ , jestliže  $S_1 = 10 \text{ cm}^2$ ?

3.2.4 Železný kroužek se skládá ze dvou částí o průřezích  $S_1$  a  $S_2$ . Střední délka siločáry je  $L = 2L_1 = 2L_2$ . Cívka navinutá na kroužku má  $N$  závitů. Jaké magnetické indukce  $B_1$  a  $B_2$  jsou v jednotlivých částech kroužku, teče-li cívkou proud  $i_0$ ?



Obr.3.4

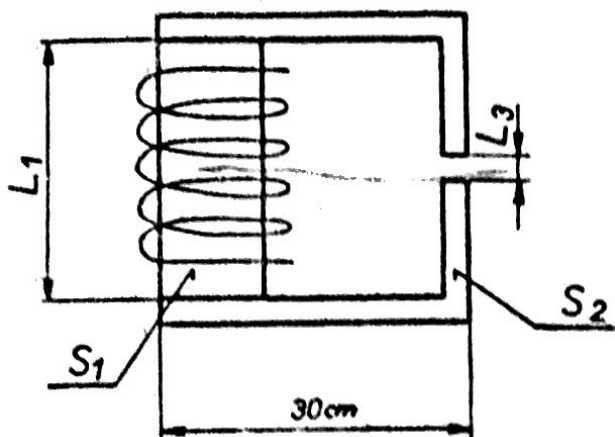
3.2.5 Kolik ampérzávitů musí mít elektromagnet na obr.3.4, aby v mezerách bylo pole  $B_0 = 0,65 \text{ T}$ . Délky jednotlivých částí magnetického obvodu:  $L_1 = 100 \text{ cm}$ ,  $L_2 = 80 \text{ cm}$ ,  $L_3 = 4 \text{ mm}$ . Průřez magnetického toku je ve všech částech obvodu stejný,  $S = 20 \text{ cm}^2$ .

3.2.6 Soustava pozůstává z válečku - permanentního magnetu /  $S_1 = 100 \text{ cm}^2$ ,  $L_1 = 20 \text{ cm}$  / a dvou pólových nástavců zhotovených z magneticky měkkého železa /  $S_2 = 20 \text{ cm}^2$  /. Vzduchová mezera má délku  $L_3 = 1 \text{ cm}$ , obr.3.5. Proudem ve vinutí se váleček zmagnetoval do bodu  $P_0$ , obr.3.6 / viz na následující straně /.

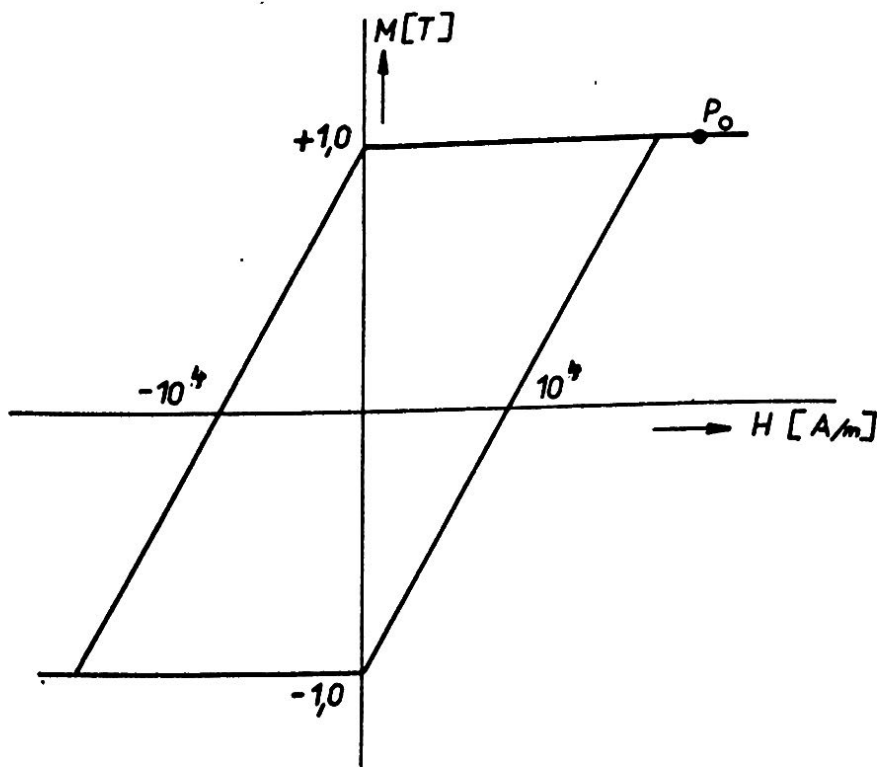
Určete intenzitu magnetického pole v mezeře po vypnutí proudu. Permeabilitu pólových nástavců považujte za nekonečnou, rozptyl magnetického toku v mezeře zanedbejte.

3.2.7 Nalezněte  $B$ ,  $H$  uvnitř homogenně zmagnetovaného kruhového disku, je-li vektor  $M$  kolmý k rovině disku /zanedbejte efekty na okrajích/.

3.2.8 K zápisu na magnetofonovou pásku se používají kruhová magnetická jádra se vzduchovou mezerou. Určete demagnetizační fak-



Obr.3.5



Obr.3.6

tor jádra, jestliže vnější a vnitřní průměry jsou 4 a 2 mm a šířka mezery  $L_m$  :  
 $= 0,02$  mm.

3.2.9 Odvoďte výraz pro pole uvnitř homogenně zmagnetované koule o poloměru  $R$

3.2.10 Vypočítejte pole ve sférické dutině v homogenně zmagnetovaném magnetiku.

### 3.3. Elektromagnetická indukce

3.3.1 Odvoďte vztah pro indukovanou elektromotorickou sílu mezi středem a obvodem disku rotujícího kolem vektoru  $B$  /homogenní pole/ s konstantní úhlovou rychlostí  $\omega$ . Poloměr disku je  $R$ .

3.3.2 Drátěný kruh o poloměru  $R$  se nachází v homogenním poli indukce  $B$ . Rovina kruhu je kolmá k poli. Střed kruhu je spojen s obvodem dvěma přímými vodiči. Jeden je pevný, druhý se otáčí kolem středu konstantní úhlovou rychlostí  $\omega$ . Následkem toho tečou vodiči periodické proudy. Odpor délkové jednotky drátu je  $\rho$ . Magnetické pole indukovaných proudů je možno zanedbat. Určete proudy v přímých vodičích /  $i_2$  / i částech kruhu /  $i_1$ ,  $i_3$  / v okamžicích, když

a/ otáčivý poloměr svírá s pevným úhel  $\varphi = 0$ ,

b/ úhel mezi pevným a otáčejícím se poloměrem je  $\varphi \neq 0$  a  $\varphi \neq 2\pi$ .

3.3.3 Na trubce z izolačního materiálu o průměru  $D$  je navinuta cívka o  $N$  závitěch. Tato cívka, která spolu s odporem  $R$  k ní připojeným tvoří uzavřený obvod, je umístěna v homogenním magnetickém poli indukce  $B$ . Osa cívky je rovná

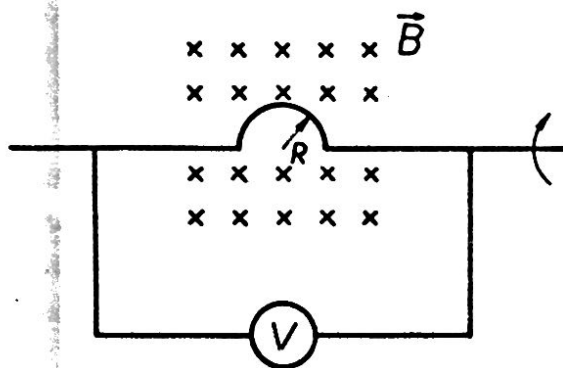
běžná s vorem magnetické indukce. Spočítejte

a/ úhlový impuls /náboj/  $\int_0^{\infty} i dt,$

'napěťový impuls  $\int_0^{\infty} u dt,$

který proteče obvodem při otočení cívky o  $180^\circ$  kolem osy kolmé k vektoru magnetické indukce.

3.3.4 Malým kroužkem poloměru  $R$  teče konstantní proud  $i_0$ . Jiný kroužek, také poloměru  $R$  je umístěn na ose prvního kroužku ve vzdálenosti  $L \gg R$ . Roviny obou kroužků jsou rovnoběžné. Druhý kroužek začne rotovat rychlostí  $\omega$  kolem některého svého průměru. Kroužek je přerušen a neprochází jím žádný proud, jaké se v něm indukuje elektromotorické napětí?



Obr.3.7

3.3.5 Pevný drát tvaru půlkruhu o poloměru  $R$  se otáčí s frekvencí  $f$  v homogenním magnetickém pole podle obr.3.7. Jaká je indukce pole  $B$ , jestliže voltmetr s vnitřním odporem  $r_i$  /zbytek obvodu má zanedbatelný odpor/ ukazuje napětí  $U$ . Jaká je amplituda indukovaného proudu? Pole vytvořené proudem je zanedbatelné.

3.3.6 Uvnitř nekonečného válce s hustotou povrchového náboje  $\sigma$ , který ro-

tuje kolem své osy, je ve směru poloměru kousek drátu sahající od osy k plášti válce, kde je upevněn.

a/ Ukažte, jak by se principiálně dala stanovit úhlová rychlost otáčení válce z náboje na konci drátu.

b/ Popište kvalitativně jak se bude celý problém fyzikálně jevit pozorovateli, který se nachází v otáčející se souřadné soustavě, v níž je nabitý válec v klidu. Může určit  $\omega$ ?

Poloměr válce je  $R$  a jeho úhlová rychlost  $\omega$ .

3.3.7 Představte si, že kolejnice železniční trati mají směr poledníku a jsou izolovány od země i mezi sebou. Po těchto kolejích jede vlak rychlostí 60 km/hod. Svislá složka intenzity magnetického pole je  $H_z = 0,5 \text{ Oe}$ . Co bude ukazovat milivoltmetr připojený v libovolném místě ke kolejnicím /vzdálenost mezi kolejemi  $L = 1,2 \text{ m}$ ;

a/ přibližuje-li se vlak k přístroji,

b/ přístroj leží právě mezi předními koly lokomotivy a druhou dvojicí kol posledního vagonu jedoucího vlaku,

c/ vzdaluje-li se vlak od přístroje?

3.3.8 V homogenním magnetickém poli  $B$  orientovaném ve směru osy  $z$  jsou v rovině  $xy$  umístěny dva rovnoběžné dráty spojené odporem  $R$ . Jejich vzdálenost je  $L$ . Podél drátů se může volně pohybovat kovová příčka.

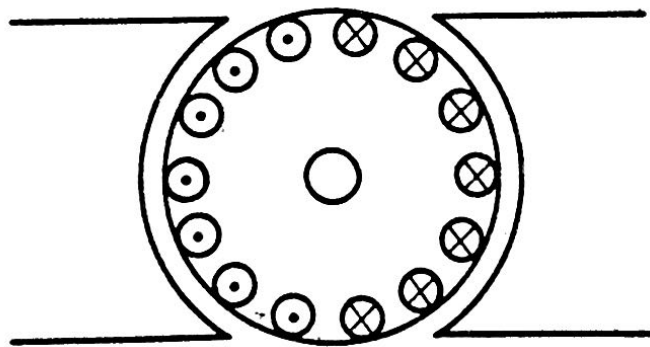
- a/ Jakou silou je třeba působit na příčku, aby se pohybovala konstantní rychlostí  $v$ .
- b/ Jaký proud poteče v soustavě v případě, že příčce je udělena pouze tečinná rychlost  $v_0$ .
- c/ Jaká bude rychlost příčky působí-li na ni konstantní síla  $F_0$ , počíná-li rychlost  $v_p = 0$ .

Odpor rovnoběžných vodičů a příčky zanedbejte. Hmotnost příčky je  $M$ .

3.3.9 Vodičová obdélníková deska o stranách  $L_1$ ,  $L_2$  a tloušťky  $D$  je umístěna v homogenním poli indukce  $B$ , rovina desky je kolmá k vektoru magnetické indukce. Ve směru  $L_1$  působí síla  $F_0$ . Jak velká musí být tato síla, aby deska pohybovala rychlostí  $v$ .

3.3.10 Drátěný rámeček tvaru čtverce s pohyblivou příčkou ze stejného materiálu se nachází v proměnném magnetickém poli, které v něm indukuje proudy, jejichž magnetická pole jsou zanedbatelná. Ve kterém případě bude výkon indukovaných proudů větší:

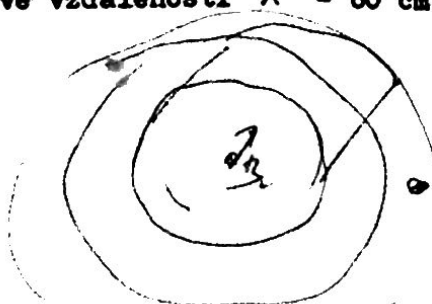
- a/ bude-li příčka uprostřed rámečku,
- b/ příčka se nachází u jedné strany čtverce.



Obr.3.8

3.3.11 Jaké je napětí zdroje, ke kterému je připojeno vinutí rotoru dvoupólového motoru na stejnosměrný proud /principiální schéma je na obr.3.8/. Uspořádání rotoru je takové, že směr proudu ve vinutí vzhledem k pólům magnetu stálý. Vinutí rotoru pozůstává z 24 vodičů. Proud 15 A přicházející do vinutí se dělí do dvou stejných paralelních sekcí vinutí. Odpor každé sekce je  $1,6 \Omega$ . Magnetický tok v rotoru je  $8 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$ , má 1500 ot/min.

3.3.12 Uvnitř dostatečně dlouhého železného kruhového válce je vytvořeno homogenní magnetické pole, které má směr podél osy a rovnoměrně vzrůstá s časem  $= kt$ , kde  $k = 0,2 \text{ T/sec}$ . Průměr válce  $D = 30 \text{ cm}$ . Najděte intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti  $R = 60 \text{ cm}$  od osy válce.





### 3.4 Indukčnost a vzájemná indukčnost

**3.4.1** Uvažujte uzavřenou smyčku  $L$  zhotovenou z velmi tenkého vodiče, kterou protéká proud  $I$ . Užitím Stokesovy věty integrálního počtu ukažte, že k určení magnetického toku vytvořeného touto smyčkou stačí uvažovat vektorový potenciál v bodech smyčky. Získaný výsledek použijte k vyjádření vlastní indukčnosti smyčky.

**3.4.2** Uvažujte dvě smyčky  $L_1, L_2$ , kterými protéká proud  $I_1, I_2$ . Dokažte, že koeficienty vzájemné indukčnosti jsou symetrické, tj. že platí vztah

$$M_{12} = M_{21}$$

Důkaz proveďte dvěma způsoby:

✗ a/ Vyjádřete magnetické pole soustavy pomocí vektorového potenciálu - viz úloha 3.4.1.

b/ Uvažujte energii magnetického pole soustavy.

**3.4.3** Dokažte, že vlastní indukčnost  $L$  smyčky protékané proudem  $I$  je kladná. Důkaz proveďte na základě úvah o energii, při zanedbání ohmického odporu smyčky.

**3.4.4** Uvažujte dvojici ideálně vodivých smyček /viz obr.3.9/ vázaných vzájemnou indukčností  $M$ . Primární smyčka vlastní indukčností  $L_1$  nechť je připojena ke zdroji elektromotorického napětí  $\mathcal{E}_1$ . Sekundární smyčka nechť má vlastní indukčnost  $L_2$ . Dokažte, že vlivem sekundárního obvodu se primární obvod chová tak, jako by jeho vlastní indukčnost měla hodnotu

$$L'_1 = L_1 \left( 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right)$$

**3.4.5** Dokažte, že vzájemná indukčnost  $M$  dvou ideálně vodivých smyček uvažovaných v úloze

3.4.4, musí splňovat nerovnost

$$M < \sqrt{L_1 L_2}$$

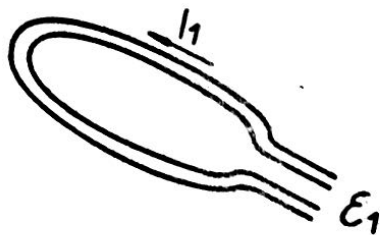
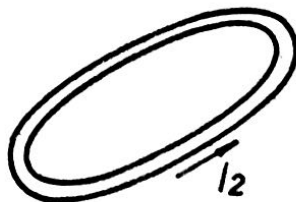
**3.4.6** Kruhová smyčka poloměru  $R$  zhotovená ze supravodivého drátu velmi malého poloměru  $r$  je umístěna v homogenním magnetickém poli indukce  $B$ . Vektor magnetické indukce je kolmý k rovině smyčky.

Vypočítejte

a/ Jak velký proud proteče vodičem smyčky po vypnutí pole.

b/ Jak velký magnetický tok tento proud vytvoří.

c/ Jak velké magnetické pole  $B'$  bude ve středu smyčky.



Obr.3.9

Indukčnost smyčky  $L$  považujte za známou. Předpokládejte, že relativní permeabilita drátu i obklopujícího prostředí je rovna jedné. Pro indukčnost smyčky platí

$$L = \mu_0 \cdot R \left( \ln \frac{8R}{r} - \frac{7}{4} \right)$$

**3.4.7** Udejte výraz pro indukčnost dlouhé válcové cívky délky  $l$ , průřezu  $S$  s počtem závitů  $n$ .

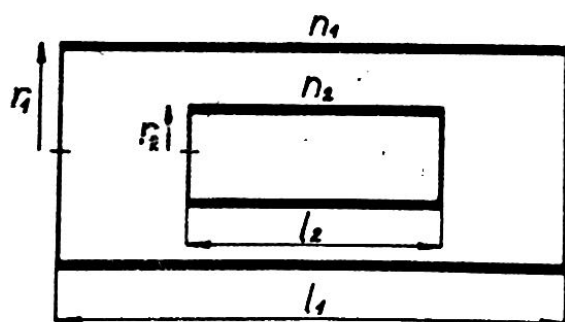
**3.4.8** Spočítejte indukčnost toroidu navinutého na železném jádře čtvercového průřezu s vnějším poloměrem  $r_1$  a vnitřním poloměrem  $r_2$ . Počet závitů toroidu je  $N$ , permeabilita jádra je  $\mu$ . Při výpočtu předpokládejte, že magnetické pole uvnitř jádra je homogenní.

**3.4.9** Řešte předchozí úlohu pro případ, kdy pole uvnitř jádra nelze považovat za homogenní.

**3.4.10** Vypočítejte indukčnost připadající na jednotku délky pro nekonečně dlouhé dvou vodičové vedení tvořené dvěma dráty kruhového průřezu s poloměrem  $r$ . Vzdálenost os obou vodičů  $a$  nechť platí  $a \gg r$ .

**3.4.11** Stanovte indukčnost na jednotku délky nekonečně dlouhého koaxiálního kabelu se středním vodičem o poloměru  $r_1$  a tenkým pláštěm o poloměru  $r_2$ . Relativní permeabilitu vodiče a izolace položte rovnou jedné.

**3.4.12** Nalezněte výraz pro vzájemnou indukčnost dvou válcových cívek do sebe vsunutých. Počet závitů vnější cívky je  $n_1$ , její poloměr  $r_1$  a délka  $l_1 \gg r_1$ .



Obr.3.10

Vnitřní cívka s parametry  $n_2$ ,  $r_2$ ,  $l_2$ , je souose uložena v cívce první viz obr.3.10.

**3.4.13** Variometr je tvořen dvěma seriálně zapojenými cívkami. Menší cívka indukčnosti  $0,1 \text{ mH}$  je umístěna uvnitř větší cívky indukčnosti  $0,4 \text{ mH}$  a otáčí se kolem osy kolmé k osám obou cívek. Vzájemná indukčnost obou cívek je  $200 \mu\text{H}$ . Určete rozsah indukčnosti variometru.

**3.4.14** Na toroidním jádře jsou těsně navinuty dvě cívky s počtem závitů  $n_1$ ,  $n_2$ . Spočítejte jejich vzájemnou indukčnost  $M$  za předpokladu, že pro relativní permeabilitu jádra  $\mu_r$  platí  $\mu_r \gg 1$ . Vzájemnou indukčnost  $M$  vyjádřte pomocí vlastních indukčností  $L_1$ ,  $L_2$  obou cívek.



### 3.5 Energie a silové účinky magnetického pole

**3.5.1** Dlouhý vodič poloměru  $r_0 = 2 \text{ mm}$  je v půlce ohnut; vzdálenost mezi navzájem rovnoběžnými polovinami  $D = 3 \text{ cm}$ . Pole uvnitř vodiče zanedbáváme. Proud v soustavě  $i_0 = 3 \text{ A}$ . Vypočítejte energii připadající na  $1 \text{ m}$  délky.

**3.5.2** Toroidní cívka /bez jádra/ sestává ze dvou vinutí, každé má  $N = 1000$  závitů. Vinutí jsou navzájem spojena, jejich magnetická pole mají stejný směr.

a/ Spočítejte magnetickou energii  $W_2$  takovéto cívky.

b/ Jak se změní energie  $W_1$ , jestliže jedno vinutí odpojíme.

c/ Nalezněte vztah mezi interakční energií obou cívek a  $W_2$ .

Proud ve vinutí  $i_0 = 5 \text{ A}$ , střední délka toroidu  $L = 25 \text{ cm}$ , příčný průřez  $S = 1 \text{ cm}^2$ .

**3.5.3** Na toroid, jehož střední poloměr je  $R$  a poloměr průřezu  $r \ll R$ , je navinuto  $N$  závitů drátu. V okamžiku  $t = 0$  začne jimi protékat proud  $I(t) = K \cdot t$ , kde  $K$  je konstanta. Vypočítejte indukci magnetického pole  $B$  a celkovou energii  $W$  v toroidu v okamžiku  $t$ .

**3.5.4** Cívka z  $N$  závitů tenkého drátu má tvar čtverce o straně  $L$  a může se otáčet kolem osy  $O$  kolmé k nákrešně, která prochází středem dvou protilehlých stran. Vinutím protéká proud  $i_0$ . Cívka je v homogenním magnetickém poli indukce  $\vec{B}$  (viz obr. 3.25 na str. 115).

a/ Udejte směr proudu v cívce při stabilní rovnováze.

b/ Najděte periodu  $T$  malých kmitů cívky kolem této polohy.

Poněvadž moment setrvačnosti cívky  $I$  a doba kmitu  $T$  jsou velké, můžete elektromagnetickou indukci zanedbat.

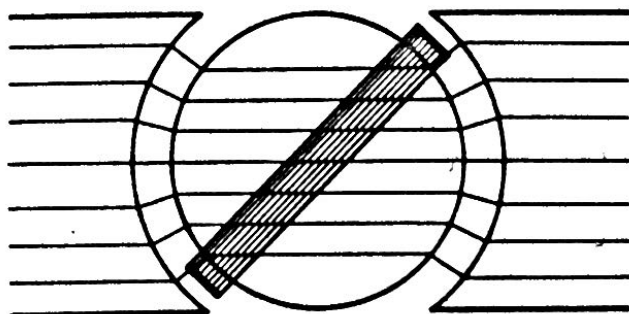
**3.5.5** Jak velký otáčivý moment  $K$  působí na kruhový závit  $/R = 6 \text{ cm}/$ , kterým protéká proud  $i_0 = 50 \text{ A}$ , jestliže se nachází v magnetickém poli  $H = 6000 \text{ Oe}$ , tak, že

a/ jeho rovina je rovnoběžná se směrem pole,

b/ normála na rovinu závitu svírá se směrem pole úhel  $\beta = 30^\circ$

**3.5.6** Diskutujte vlastnosti soustavy magnetoelektrického přístroje /systém Deprez d'Arsonvalův - viz obr. 3.11/ s direkčním momentem  $D$ . Při zanedbání tlumení dokažte, že systém má vlastní dobu kyvu  $\tau$  danou vztahem

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{I}{D}}$$

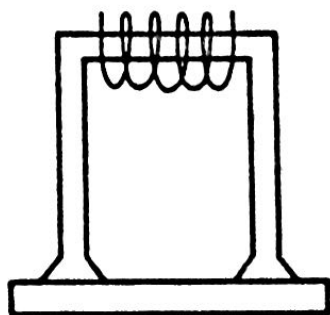


Obr. 3.11

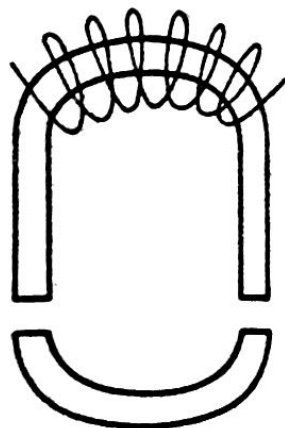
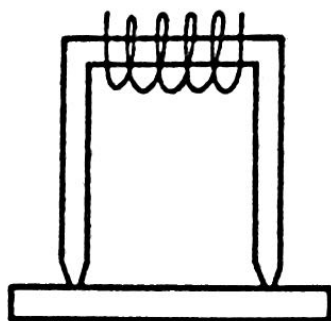
v němž  $I$  je moment setrvačnosti cívky. Dokažte dále, že jestliže cívku prohojí proudový impuls  $Q = \int_0^{\tau_1} i dt$  pro nějž platí  $\tau_1 \ll \tau$  bude amplituda kmitů úměrná náboji  $Q$ .

**3.5.7** Diskutujte vlastnosti soustavy magnetoelektrického měřicího přístroje /obr.3.11/ bez direkčního momentu. Dokažte, že hybnost, kterou cívka získá při proudu je úměrná napěťovému impulsu  $\int_0^{\infty} u dt$ .

**3.5.8** Odvoďte vztah pro nosnost elektromagnetu v případě, že průřez jádra je  $S$  a magnetická indukce ve styčné ploše  $B$ .



Obr.3.12



Obr.3.13

**3.5.9** Který ze zobrazených elektromagnetů /obr.3.12/ má větší zvedací sílu, jestliže použitý magnetický tok je v obou případech stejný.

**3.5.10** Celková délka střední silokřivky v elektromagnetu na obr.3.13 je  $L = 36$  cm a šířka každé ze dvou vzduchových mezer  $l_m = 0,2$  mm. Průřez magnetického toku je všude  $S = 2$  cm<sup>2</sup>. Vinutí elektromagnetu má  $N = 294$  závitů. Při proudu  $I_0 = 3$  A je síla magnetu  $F = 160$  N. Určete relativní permeabilitu jádra elektromagnetu.

**3.5.11** Ukažte, že jestliže intenzita elektrického pole  $\vec{E}$  je rovnoběžná s magnetickou indukcí  $\vec{B}$  a obě jsou konstantní a homogenní, pohybuje se nabitá částice po kružnici jejíž střed je urychlován.

**3.5.12** Elektron je vstříknut do homogenního pole  $\vec{B}$  pod takovým úhlem, že jeho kinetická energie spojená se složkou rychlosti, která je rovnoběžná s  $\vec{B}$  má hodnotu  $K_{||}$  a zbytek energie, který je spojen s pohybem v rovině kolmé k  $\vec{B}$  má hodnotu  $K_{\perp}$ . Najděte poloměr  $R$ , sklon  $\varphi$  a periodu  $T$  výsledného spirálovitého pohybu.

**3.5.13** Mezi duanty cyklotronu je napětí  $\pm 3 \cdot 10^4$  V. Indukce magnetického pole je  $B = 0,8$  T. Určete rozdíl poloměrů trajektorií protonu po čtvrtém a devátém oběhu.

3.5.14 Odvoďte výraz pro magnetostatickou interakční energii dvou magnetických dipólů  $\vec{m}_1, \vec{m}_2$ .

### 3.6 Magnetické vlastnosti látek

3.6.1 Jestliže je určena susceptibilita jisté paramagnetické látky při  $0^\circ\text{C}$ , jak se musí změnit teplota, aby její susceptibilita vzrostla o 10%?

3.6.2 V jednom  $\text{cm}^3$  paramagnetické soli je  $10^{22}$  atomů, každý má magnetický moment jeden Bohrov magneton  $\mu_B$ . Sól je umístěna v homogenním magnetickém poli  $B = 1 \text{ T}$ . Vyjádřete v procentech přebytek atomů, které při pokojové teplotě  $t = 27^\circ\text{C}$  mají složku magnetického momentu souhlasnou se směrem pole.

3.6.3 Dvě kuličky, hliníková a vizmutová, se nacházejí v magnetickém poli. Jejich středy leží na ose  $x$ . Obě tělesa se navzájem dotýkají. Magnetické pole se mění ve směru osy  $x$ . V jakém pořadí musí být kuličky umístěny a jaký musí platit vztah mezi jejich poloměry, aby se při působení magnetického pole nacházely v klidu.

Poznámka: předpokládejte kuličky natolik malé, že intenzitu pole a magnetizaci ve všech bodech uvnitř kuliček můžeme v prvním přiblížení uvažovat homogenní.

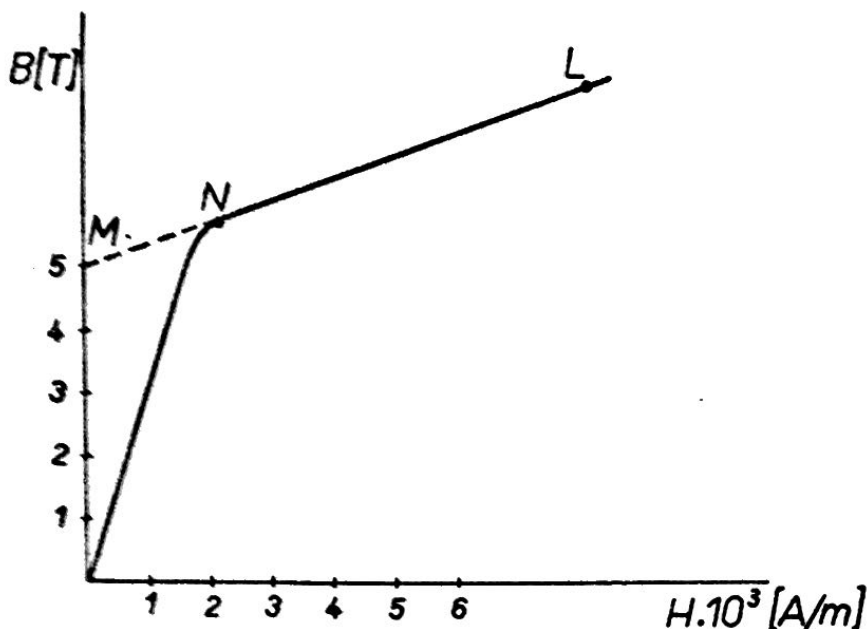
3.6.4 Gadolinium má plošně centrovanou kubickou mřížku s mřížkovou konstantou  $a_0 = 3,2 \text{ \AA}$  a nasycenou magnetizaci  $M_s = 8,99 \cdot 10^3 \text{ gauss}$ . Vypočítejte magnetický moment  $\mu_a$  na atom gadolinia v Bohrových magnetonech  $\mu_B$ .

3.6.5 Železo má kubickou objemově centrovanou krystalovou mřížku s mřížkovou konstantou  $a_0 = 2,86 \text{ \AA}$  a magnetický moment na atom železa  $2,22 \mu_B$ . Vypočítejte nasycenou magnetizaci.

3.6.6 Tyčový permanentní magnet a cívka mající stejné geometrické rozměry jsou umístěny tak, že jejich osy leží na přímce. V bodě  $A$  nacházejícím se na této přímce ve stejné vzdálenosti od magnetu i cívky vytváří permanentní magnet pole  $B_1$ . Cívkou teče proud  $I_0$  takového směru a velikosti, aby výsledné pole v bodě  $A$  bylo nulové. Potom se cívka translačním posunutím podél osy navlékne na permanentní magnet a nechá se jí protékat stejný proud  $I_0$ . Jaká bude indukce  $B$  v bodě  $A$  v tomto případě?

3.6.7 Na obr.3.14 /viz na následující straně/ je graf závislosti  $B = B(H)$  pro určitý druh železa. Určete z tohoto grafu velikost vektoru magnetizace  $M_s$  daného materiálu ve stavu nasycení.

3.6.8 Weiss navrhl hypotézu, že ve feromagnetických látkách existuje silné vnitřní pole  $H_{mol}$ , které orientuje magnetické momenty elektronů navzájem rovnoběžně. Odhadněte velikost tohoto molekulárního pole.



Obr.3.14

3.6.9 Uvnitř Weissových domén feromagnetických materiálů je směr spontánní magnetizace  $M_S$  určen magnetickou krystalovou anisotropií, která souvisí s geometrií krystalové mřížky. U tzv. jednoosých feromagnetů existuje význačný směr magnetizace /u kobaltu je totožný se směrem krystalografické hexagonální osy/, kterému přísluší minimum energie. To znamená, aby směr magnetizace změnil

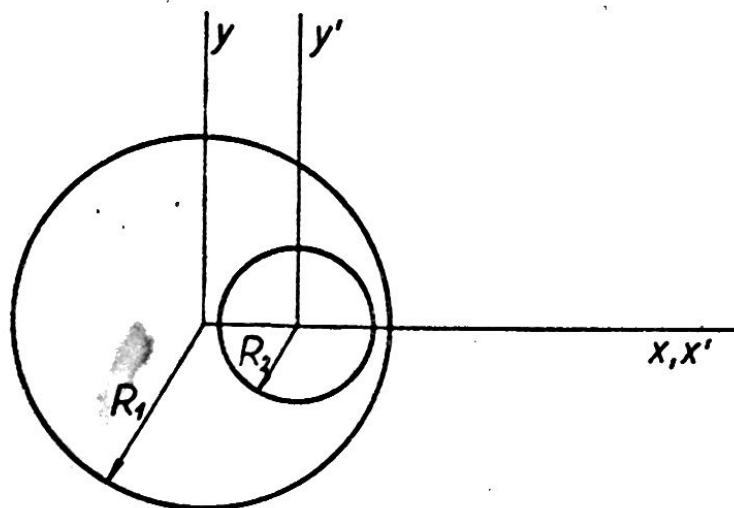
o určitý úhel  $\varphi$ , je třeba dodat tzv. anisotropní energii  $E_a = K \sin^2 \varphi$ .  
Odvoďte vztah pro permeabilitu  $\mu^*$  /v CGSM/ jednodoménového jednoosého feromagnetického krystalu ve slabém poli  $H$ , kolmém na směr osy snadné magnetizace.

### 3. Magnetismus

#### 3.1 Magnetické pole ve vakuu

##### 3.1.1 $B = 0$

3.1.2 /obr.3.15/. Kdyby otvor neexistoval, pole uvnitř válce /  $R_1$  / způsobené



Obr.3.15

proudem hustoty  $j$  by bylo  $\vec{B}'$ . Kdyby vnitřkem menšího válce /  $R_2$  / tekla proud stejné hustoty  $j$ , ale opačného směru, vytvořil by pole  $\vec{B}''$ . Výsledné pole v otvoru  $\vec{B} = \vec{B}' + \vec{B}''$  bude mít složky  $B_x = 0$ ,  $B_y = \frac{\mu_0 i_0 (x - x')}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}$ .

3.1.3 Výsledná intenzita pole prvního a druhého závitu

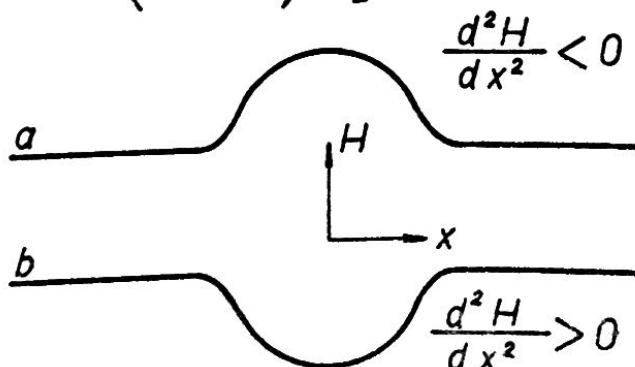
$$H_{\pm} = H_1 \pm H_2. \text{ Znaménko „+“ platí, když směr}$$

proudu je v obou závitech stejný a znaménko „-“ platí v případě, že  $i_1$  má v závitech navzájem opačný směr. Ve středu závitu  $H_+ = 16,7 \text{ A/m}$ ,  $H_- = 13,5 \text{ A/m}$ ; uprostřed spojnice středů závitů  $H_+ = 10,7 \text{ A/m}$ ,  $H_- = 0$ .

3.1.4 Podle úlohy 3.1.3  $H_+ = \frac{i_0 R^2}{2} \left[ \frac{1}{(R^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + (L-x)^2)^{3/2}} \right]$

Z důvodů symetrie  $\left(\frac{dH_+}{dx}\right)_{x=L/2} = 0$ . V případě, že

$\left(\frac{d^2H_+}{dx^2}\right)_{x=L/2} \neq 0$ , je průběh  $H_+$  podle a/ nebo b/ na obr.3.16.



Obr.3.16

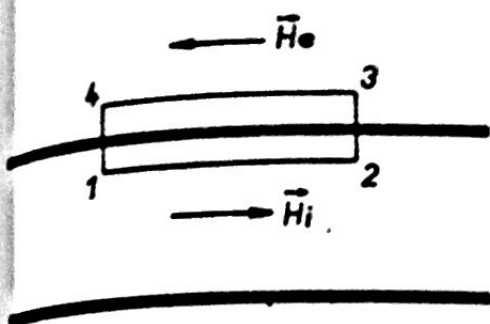
Optimální homogenita je zřejmě pro

$$\left(\frac{d^2H_+}{dx^2}\right)_{x=L/2} = 0,$$

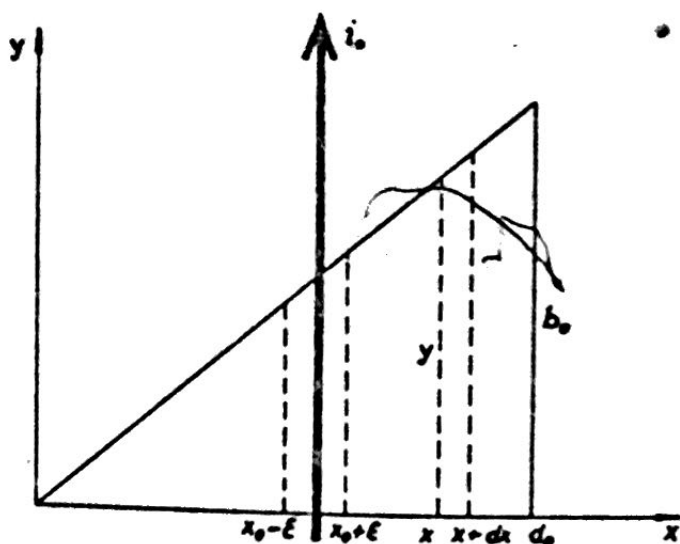
odkud plyne podmínka  $R = L$ .

3.1.5  $L > 7D$

3.1.6 Je třeba zvolit integrační křivku 1, 2, 3, 4 podle obr.3.17 /viz na následující straně/



Obr.3.17



Obr.3.18

a použít dílčích výsledků z př.3.1.5.

3.1.7 
$$i_0 = \sqrt{\frac{P \cdot L}{\mu_0 S N \pi}}$$

3.1.8 
$$\bar{B} \approx 4,21 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

3.1.9 
$$\Phi = 6,8 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$$

3.1.10 Podle obr. 3.18 spočítáme tok  $\Phi(\epsilon)$ . Ze vztahu  $\Phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi(\epsilon) = 0$  plyne podmínka  $\frac{d_0}{x_0} = \log \frac{x_0}{d_0 - x_0}$  ..

3.1.11 Protože úloha má osovou symetrii je výhodné využít formální podoby výrazů pro vektorový a elektrostatický potenciál, který se snadno určí užitím Gaussovy věty. Pro směr proudu podél osy z :  $A_x = A_y = 0$  ,  $A_z =$   
 $= - \frac{\mu_0 i_0}{2\pi} \log r$ .

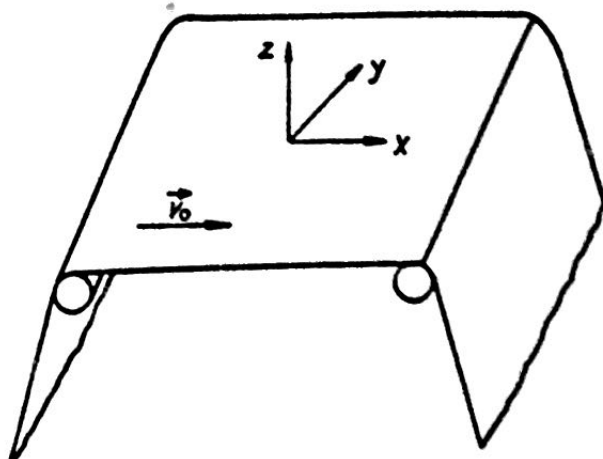
3.1.12 Postup výpočtu je obdobný jako v př.3.1.11. Pro souřadný systém podle obr.3.19:  $A_y = A_z = 0$  ,  $A_x =$   
 $= - \frac{\mu_0 \sigma v_0}{2} z$  .

3.1.13 Nechť je závit v rovině xy , střed závitů v počátku. Pro body závitů platí  $x^2 + y^2 = R^2$ .

Pro bod  $P(xyz)$  blízky

ose bude

$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0 i_0}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{r} ,$$



Obr.3.19



$$\text{kte } \frac{1}{r} \approx \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{xX + yY}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

V polárních souřadnicích  $d\vec{l} = (-R \sin \varphi d\varphi, R \cos \varphi d\varphi, 0)$ .

Protože  $\oint d\vec{l} = 0$ , stačí určit integrály  $\oint Y dl_x$ ,  $\oint X dl_x$ ,  $\oint Y dl_y$ ,  $\oint X dl_y$ . Pak  $A_x = -\frac{\mu_0 i_0}{4} \frac{R^2 y}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$ ,  $A_y = \frac{\mu_0 i_0}{4} \frac{R^2 x}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$ .

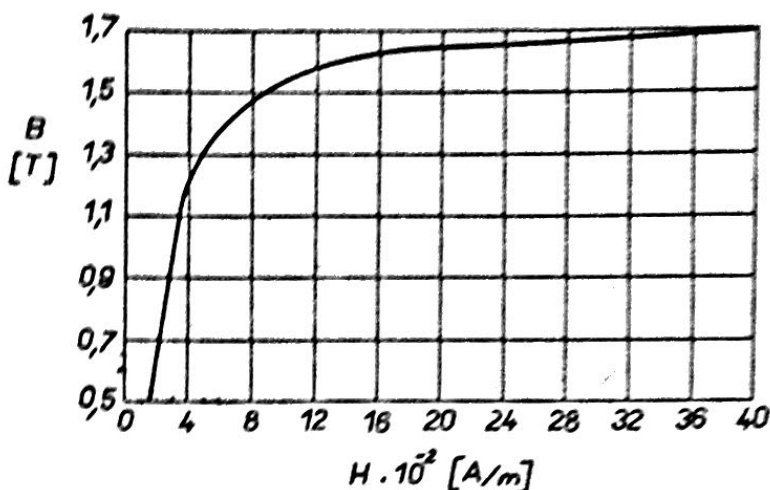
Protože ve směru osy  $Z$  žádný proud neteče,  $A_z = 0$ .

### 3.2 Magnetické pole v látkách

3.2.1  $\Phi_1 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ wb}$ ,  $\Phi_2 = \Phi_1 + \Delta$ ,  $\Delta = 3 \cdot 10^{-7} \text{ wb}$

3.2.2 Po aplikaci II Kirchhoffova zákona pro magnetické obvody 2 - 3 a 1 - 3 /obr.3.2/ vychází  $H_m =$

$$= 5 \cdot 10^4 \text{ A/m.}$$



Obr.3.20

3.2.3 Z obr.3.20 se určí z známých hodnotám indukce odpovídající intenzity pole. Z integrovaného tvaru Ampérva zákona pak plyne

a/  $i_0 = 0,55 \text{ A}$

b/  $i_0 = 0,085 \text{ A}$

3.2.4 Zvolíme  $\Phi$  a k příslušným  $B_z = \frac{\Phi}{S_z}$

se z magnetizační křivky železa stanoví odpovídající  $H_z$ , které se dosadí do vztahu  $N/I_0 = H_1 L_1 + H_2 L_2$ . Tento postup se opakuje tak dlouho až je poslední rovnice splněna.

3.2.5 Užitím II. Kirchhoffova zákona pro magnetický obvod 1 - 2 - 3 - 2 a podmínek o magnetických tocích v částech obvodu se určí vztah pro magnetomotorickou sílu. Potřebné hodnoty  $\mu_r$  částí obvodu se stanoví z magnetizační křivky na obr.3.20;  $N/I_0 \approx 8,6 \cdot 10^2 \text{ Az}$ .

3.2.6 Magnetický tok v obvodu bude všude stejný, proto  $B_m = 5 B_1$ . Vzhledem k hodnotě  $\mu_2$  bude také platit  $H_m L_m = -H_1 L_1$ . Z těchto rovnic plyne  $M_1 = -5 \mu_0 H_1$ . Při vypnutí pole se bod P na obr.3.6 posune po horní větvi hysteresní křivky. Zakreslíme do obrázku i nový vztah  $M_1 = M_1(H_1)$ . Průsečíku odpovídá  $H_1 = -0,94 \cdot 10^4 \text{ A/m}$ . Tedy  $H_m = -4,7 \cdot 10^4 \text{ A/m}$ .

3.2.7 Úloha je analogická elektrostatické úloze určit pole mezi dvěma nekonečnými paralelními rovinami nabitými opačnými náboji stejné plošné hustoty.

3.2.8 Jelikož vnější proud  $i_0 = 0$ ,  $\oint H dl = 0$ ,  $N = l_m / l_s = 0,021$ .

3.2.9 Zmagnetovanou kouli můžeme nahradit dvěma koulemi stejného poloměru  $R$ , které jsou navzájem posunuty ve směru magnetizace /osa  $z$ / o  $\Delta l$ . Obě koule jsou naplněné magnetickými náboji opačných znamének a stejné hustoty  $\rho$ . Potenciály v bodech uvnitř koule ( $r < R$ ) jsou

$$\varphi_+ = - \frac{\rho}{6\mu_0} \left[ x^2 + y^2 + \left( z - \frac{\Delta l}{2} \right)^2 \right], \quad \varphi_- = \frac{\rho}{6\mu_0} \left[ x^2 + y^2 + \left( z + \frac{\Delta l}{2} \right)^2 \right]$$

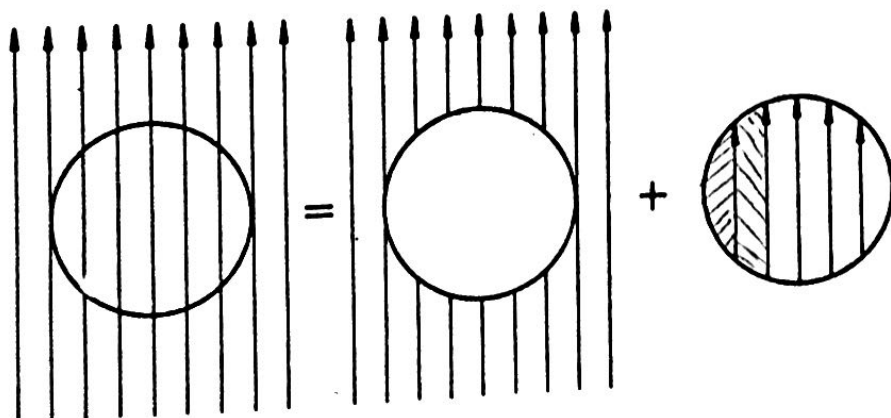
Jestliže předpokládáme, že obě koule existují současně, náboje se kompenzují všude, kde se koule překrývají a uvnitř bude potenciál  $\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{\rho \Delta l z}{3\mu_0}$ . Pro  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $\Delta l \rightarrow 0$  tak, že  $\rho \Delta l = M$  bude  $H = - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \frac{M}{3\mu_0}$ . Pole uvnitř koule je tedy homogenní;  $K = \frac{1}{3}$ .

3.2.10 Představme si, že jsme ze vzorku, jehož magnetizace byla "zamrzlá", vyřezali sféru /obr.3.21/. Označíme-li pole v homogenním materiálu  $H$ , pak platí

$$H = H_{sféry} + H_{dutiny}$$

Vyřezaná sféra je homogenně magnetovaná a pole, které je uvnitř, bylo určeno v př.3.2.9. Tedy

$$H_{dutiny} = H + \frac{M}{3\mu_0}$$



Obr.3.21

### 3.3 Elektromagnetická indukce

3.3.1  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} B \omega R^2$

3.3.2 a/  $i_1 = i_2 = \frac{1}{4\rho} B \omega R$ ;  $i_3 = 0$

$$b/ i_2 = \frac{\pi B \omega R}{\rho(4\pi + 2\pi\varphi - \varphi^2)}; i_1 = \frac{2\pi - \varphi}{2\pi} i_2; i_3 = \frac{\varphi}{2\pi} i_2$$

$$3.3.3 \quad a/ \frac{\pi N B D^2}{2} \quad b/ \frac{\pi N B D^2}{2(R + R_{\text{cívky}})}$$

3.3.4 Pro  $L \gg R$  je pole vytvořené prvním závitem

$$\vec{B}_1 = -\frac{\vec{m}_1}{L^3} + \frac{3(\vec{m}_1, \vec{L})\vec{L}}{L^5}, \text{ kde } \vec{m}_1 = \frac{\pi \mu_0 i_0 R^2 \vec{L}}{L}$$

$$\varepsilon = \frac{2\pi \mu_0 R^2 i_0 \omega}{L^3} \sin \omega t$$

$$3.3.5 \quad B = \frac{U\sqrt{2}}{\pi^2 R^2 f}, \quad I_m = \frac{\pi^2 B R^2 f}{r_i}$$

3.3.6 a/ Na elektrické náboje drátu bude v magnetickém poli působit síla  $\vec{f} = q[\vec{v}, \vec{B}]$ . Otáčející se nabitý válec vytváří uvnitř magnetické pole jako solenoid s proudem  $j = \sigma v = \sigma R \omega$ .

b/ I pozorovatel v rotující soustavě, v níž je válec v klidu, zjistí existenci náboje na koncích drátu. Otáčející se soustava souřadnic není inerciální, fyzikální zákony v ní mají jiný tvar. Rovnice elektromagnetismu v obvyklém tvaru můžeme používat jen v inerciálních soustavách.

3.3.7 Milivoltmetr bude ve všech případech ukazovat 1 mV.

$$3.3.8 \quad a/ F = \frac{B^2 L^2 v}{R} \quad b/ i_0 = \frac{B L v_0}{R} e^{-\frac{B^2 L^2}{R m} t}$$

$$c/ v = \frac{F_0 R}{B^2 L^2} \left( 1 - e^{-\frac{B^2 L^2}{R m} t} \right)$$

$$3.3.9 \quad E_0 = \frac{B^2 L_1 L_2 D v}{\rho}$$

3.3.10  $N_b$  je o 14,3% větší než  $N_a$

$$3.3.11 \quad U = 60 \text{ V}$$

3.3.12 Siločivky elektrického pole jsou soustředné kružnice se středem na ose válce.  $E = 0,375 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$ .

### 3.4 Indukčnost a vzájemná indukčnost

3.4.1 Nechť  $S$  je plocha, kterou smyčka  $L$  ohraničuje. Magnetický tok  $\Phi$  protékající smyčkou je pak dán vztahem

$$\Phi = \int_S (\vec{B} \cdot d\vec{S})$$

v němž  $\vec{B}$  je magnetická indukce na ploše  $S$ . Lze ji vyjádřit pomocí vektorového potenciálu  $\vec{A}$ ;  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ . Podle Stokesovy věty pak platí

$$\Phi = \int_S (\text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}) = \int_L (\vec{A} \cdot d\vec{l})$$

Pro indukčnost  $L$  platí podle definice

$$L = \frac{1}{I} \int_L (\vec{A} \cdot d\vec{l})$$

3.4.2 a/ Označme  $\vec{A}_{21}$  vektorový potenciál vytvořený smyčkou  $L_1$  v bodech  $L_2$  viz obr. 3.22. Tok  $\Phi_{21}$  je pak dán vztahem

$$\Phi_{21} = \int_{L_2} (\vec{A}_{21} \cdot d\vec{l}_2)$$

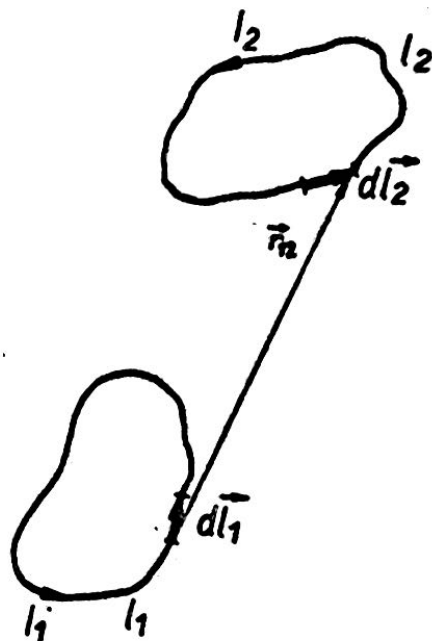
Avšak platí

$$\vec{A}_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{L_1} \frac{d\vec{l}_1}{r_{12}}$$

Po dosazení máme

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{L_1, L_2} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}}$$

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_1, L_2} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}}$$



Obr.3.22

Stejný vztah lze získat pro  $M_{12}$

b/ Energie magnetického pole soustavy  $W_m$  je

$$W_m = \frac{1}{2} I_1 \Phi_1 + \frac{1}{2} I_2 \Phi_2$$

kde  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  jsou celkové magnetické toky tekoucí první a druhou smyčkou. Platí tedy

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$

$$\Phi_2 = L_2 I_2 + M_{21} I_1$$

a

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{M_{12} + M_{21}}{2} I_1 I_2$$

Tuto energii je však možno vyjádřit také v jiném tvaru, předpokládáme-li zcela určitý způsob vzniku soustavy. Například vznikl-li nejprve proud v první smyčce a proud ve druhé smyčce zůstal nulový, mělo magnetické pole energii  $\frac{1}{2} L_1 I_1^2$

Vznikal-li potom proud ve druhé smyčce vzrostla zřejmě energie o hodnotu

$$M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Srovnáním dostaneme

$$\frac{M_{12} + M_{21}}{2} = M_{12}$$

3.4.3 Předpokládejme, že proud  $I$  ve smyčce je buzen vnějším zdrojem o konstantním elektromotorickém napětí  $E$ . Platí

$$E = L \frac{dI}{dt}$$

$$I = \frac{E}{L} \int_0^t dt = \frac{E}{L} t$$

Práce  $W$  dodává zdrojem do smyčky za časový interval  $(0, t)$

$$W = \int_0^t EI dt = \frac{1}{2} \frac{E^2}{L} t^2$$

Práce  $W$  musí být kladná. V opačném případě by totiž smyčka trvale dodávala energii.

3.4.4 Podle Kirchhoffových zákonů platí pro smyčky rovnice

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ 0 &= L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\mathcal{E}_1 = L_1 \left( 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) \frac{dI_1}{dt}$$

3.4.5 Postupem stejným jako v případě úlohy 3.4.3 dokážeme

$$L'_1 = L_1 \left( 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) > 0.$$

3.4.6 a/ Působí-li ve smyčce elektromotorické napětí  $\mathcal{E}$ , platí podle Kirchhoffova zákona

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = 0$$

Elektromotorické napětí  $\mathcal{E}$  vznikne indukcí při změně magnetického toku  $\Phi$  smyčkou.

Tedy

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Odtud

$$-d\Phi = L dI$$

Avšak

$$-\int_{-\phi}^0 d\phi = \pi R^2 B$$

Pro hledaný proud  $I$  pak máme

$$I = \frac{\pi R^2}{L} B$$

b/ Proud  $I$  vytvoří magnetický tok  $\phi'$  rovný původnímu toku způsobenému vnějším polem

$$\phi' = \pi R^2 B$$

c/ Pro magnetickou indukci  $B'$  ve středu smyčky bude platit

$$B' = \frac{\pi}{2 \left( \ln \frac{dR}{r} - \frac{7}{4} \right)} B$$

3.4.7

Vypočítejte magnetický tok cívky a použijte definiční vztah pro indukčnost. Předpokládejte, že magnetické pole je homogenní v celém průřezu cívky. Označíme-li  $\mu$  permeabilitu prostředí a  $S = \pi r^2$  platí

$$L = \mu \pi r^2 \frac{n^2}{l}$$

3.4.8

$$L = \frac{\mu}{\pi} \frac{(r_1 - r_2)^2}{(r_1 + r_2)} N^2$$

3.4.9

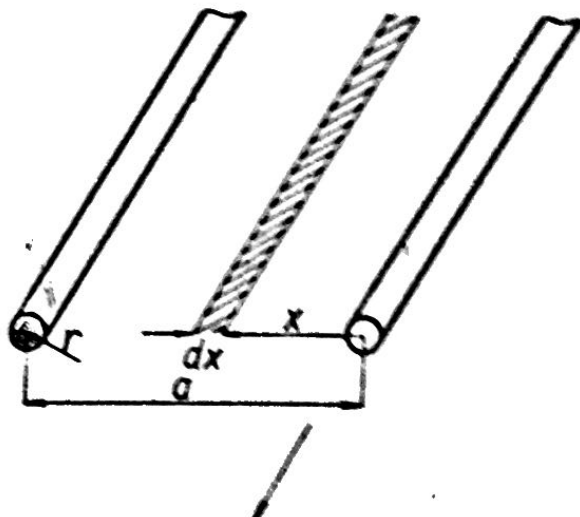
$$L = \frac{\mu}{2\pi} (r_1 - r_2) \left( \ln \frac{r_1}{r_2} \right) N^2$$

3.4.10

Uvažujeme-li vodiče konečného průměru, je nutno uvažovat jednak magnetický tok vně vodičů, jednak magnetický tok uvnitř nich. Vnější magnetický tok působený jedním vodičem v prostoru mezi vodiči délky  $l$  je dán vztahem /viz obr.3.23/.

$$\phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a}{r}$$

pro  $a \gg r$



Obr.3.23

Vzhledem k tomu, že druhým vodičem teče proud v opačném směru, je výsledný tok v prostoru mezi vodiči dvojnásobný a indukčnost  $L_l$  odpovídající vnějšímu toku vztahená na jednotku délky má hodnotu

$$L_l = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{a}{r}$$



Indukčnost  $L_i$  odpovídající toku uvnitř vodičů lze nejjednodušší spočítat z energie magnetického pole. Na objem  $V$  jednotkové délky vodiče připadá energie

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V (\vec{B} \cdot \vec{H}) dV = \frac{1}{2} L I^2$$

Spočteme-li z rozložení pole energii  $W_m$ , můžeme určit indukčnost. Pro náš případ vychází

$$L_i = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

Celková indukčnost připadající na jednotku délky vodičů má pak hodnotu pro  $a \gg r$

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( 1 + 4 \ln \frac{a}{r} \right)$$

3.4.11 Vyjádřete energii magnetického pole připadající na jednotku délky vodičů /viz řešení úlohy 3.4.10/.

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{1}{2} + 2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right)$$

3.4.12 Vzájemná indukčnost  $L_{12}$  má hodnotu

$$L_{12} = \frac{\mu_0 \pi r_2^2}{l_1} n_1 n_2$$

3.4.13

$$L = L_1 + L_2 \pm L_{12}$$

$$L = (0,25 \div 1,0) \text{ mH}$$

3.4.14  $M = \sqrt{L_1 L_2}$

### 3.5 Energie a silové účinky magnetického pole

3.5.1 Uvažujeme-li velmi dlouhý vodič, můžeme zanedbat ohnutou část a přivody.

Energie připadající na jednotku délky  $\frac{W}{l} = \frac{1}{2} \frac{\Phi I}{l}$ ,

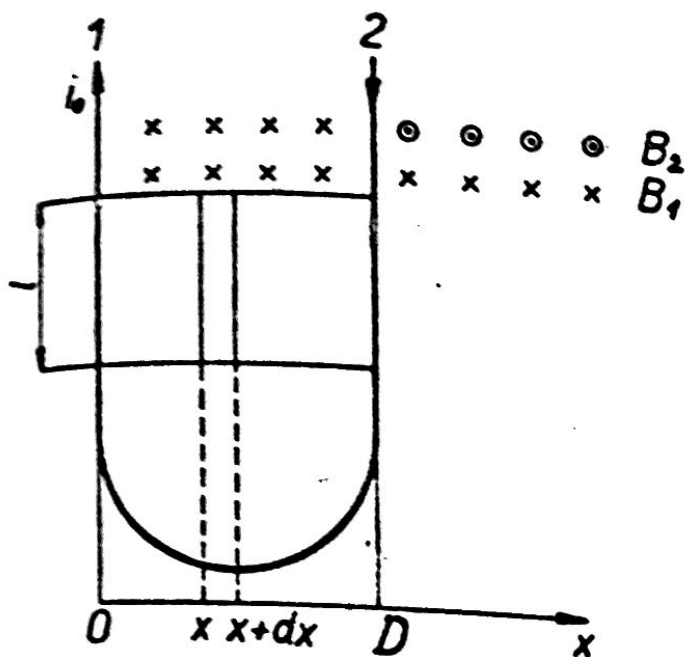
$$\Phi = l \int [B_1(x) + B_2(x)] dx,$$

kde  $B_1$  a  $B_2$  jsou indukce vodičů 1 a 2 na obr.3.24 /viz na následující straně/

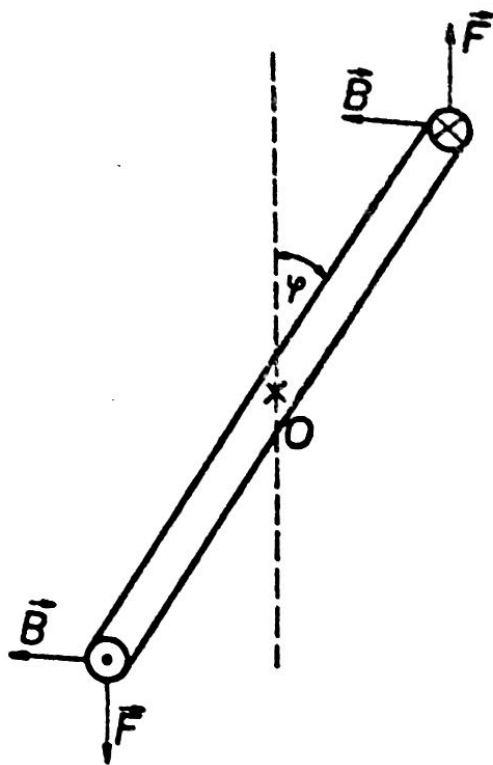
$$\frac{W}{l} \approx 4,7 \cdot 10^{-6} \text{ Joule m}^{-1}$$

3.5.2  $W_2 = 6,28 \cdot 10^{-3} \text{ Joule}, \quad W_1 = \frac{W_2}{4}, \quad W_{int} = 2W_1.$

3.5.3  $W = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}) dV = \frac{\mu_0 N^2 K^2 r^2}{4R} \left( \frac{\epsilon_0 \mu_0 r^2}{4} + l^2 \right)$



Obr.3.24



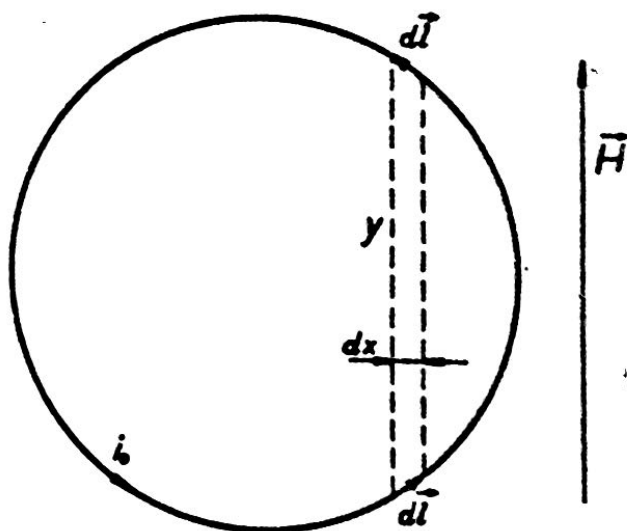
Obr.3.25

3.5.4 a/ Při pohledu ve směru pole teče proud ve směru pohybu hodinových ručiček.

b/ Obr.3.25  $T = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{I}{i_0 \mu_0 N H}}$

3.5.5 Jestliže zavedeme souřadné osy podle obr.3.26, působí na elementární plošku  $dS$  moment  $dD = i_0 \mu_0 H_y dx$ . Pole kolmé k rovině závitu  $H \perp$  nepůsobí otáčivý moment

a/  $D \approx 0,34 \text{ Nm}$  b/  $D \approx 0,17 \text{ Nm}$ .



Obr.3.26

3.5.6 V mezeře systému podle obr.3.11 je radiální konstantní pole  $B$ . Na cívku o  $N$  závitech, výšce  $l$  a šířce  $b$  působí při průchodu proudem  $i_0$  moment silové dvojice

$$D_s = B l b N i_0 = K_s i_0$$

Opačným směrem působí direkční moment závěsného systému cívky

$$D_d = -D \alpha$$

Dále působí tlumení indukovanými proudy

$$D_b = - \frac{K_s^2}{R} \frac{d\alpha}{dt},$$

kde  $R$  je součet vnitřního odporu přístroje  $R_i$  a odporu vnějšího obvodu  $R_e$ . Pohybová rovnice systému má tvar

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = D_d + D_b + D_s \quad (*)$$

Obecné řešení má tvar  $\alpha = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \alpha_0$

kde  $\lambda_i$  jsou kořeny charakteristické rovnice a  $C_i$  integrační konstanty. Podle hodnot  $\lambda_i$  rozeznáváme pohyb periodický, aperiodický a hyperaperiodický.

Zanedbáme-li tlumení přejde rovnice (\*) na tvar

$$\ddot{\alpha} + \frac{D}{I} \alpha = \frac{K_s}{I} i_0$$

Odtud plyne pro vlastní dobu kyvu systému

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{I}{D}}$$

Je-li moment setrvačnosti systému  $I$  velký a tlumení malé (ballistický galvanometr/, rovnice (\*) přejde po integraci na tvar

$$I \dot{\alpha}(\tau) = K_s \int_0^{\tau} i_0 dt = K_s Q$$

Je známo z mechaniky, že maximální výchylka  $\alpha_{max}$  systému, který může vykonávat harmonický pohyb, je úměrná rychlosti s jakou prochází nulovou polohou

$$\alpha_{max} = C \dot{\alpha}(\tau) = \frac{CK_s}{I} Q$$

### 3.5.7

Uvažujeme-li přístroj se zanedbatelným direkčním momentem, kterým prochází proud  $i_0(t) = \frac{u(t)}{R_i + R_e}$ , dostáváme z rovnice (\*) v př. 3.5.6 vztah

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{K_s^2}{R_i + R_e} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{K_s}{R_i + R_e} u(t).$$

Po integraci rovnice z počátečního stavu  $t = 0$ ,  $\alpha(0) = 0$ ,  $\dot{\alpha}(0) = 0$  do stavu  $t = \tau$ ,  $\alpha(\tau) = \alpha_{max}$ ,  $\dot{\alpha}(\tau) = 0$ , dostaneme

$$K_s \alpha_{max} = \int_0^{\tau} u(t) dt$$

Je-li také tlumení zanedbatelné, rovnice (\*) se redukuje na tvar

$$I \ddot{\alpha} = \frac{K_s}{R_i + R_e} u(t)$$

a její řešení

$$I \dot{\alpha}(\tau) = \frac{K_s}{R_i + R_e} \int_0^{\tau} u(t) dt.$$

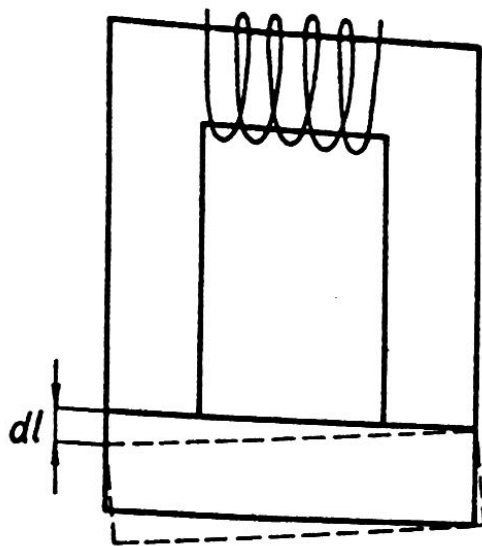
3.5.8 Pro změnu energie odpovídající změně délky střední siločáry podle obr.3.27 platí  $dW = -f dl$  ;  $f = \frac{B^2 S}{2\mu_0}$ .

3.5.9 Jestliže je magnetický tok stejný, síla elektromagnetů je nepřímo úměrná průřezu magnetického toku v mezeře  $F \sim \frac{1}{S}$ .

3.5.10  $\mu_r \approx 900$

3.5.11 Rozložíme rychlost částice na dvě složky  $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$  kde  $\vec{v}_{\parallel} \parallel \vec{B}, \vec{E}$  ,  $\vec{v}_{\perp} \perp \vec{B}, \vec{E}$

Obr.3.27.



3.5.12  $\varphi = \arctg \sqrt{\frac{K_{\parallel}}{K_{\perp}}}$  ,  $R = \frac{\sqrt{2m K_{\perp}}}{q B}$  ,  $T = \frac{2\pi m}{q B}$  .

3.5.13  $\Delta R \approx 4,3 \cdot 10^{-2} m$

3.5.14  $N_{12} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left[ \frac{(\vec{m}_1, \vec{m}_2)}{R^3} - \frac{3(\vec{m}_1, \vec{R})(\vec{m}_2, \vec{R})}{R^5} \right]$

### 3.6 Magnetické vlastnosti látek

3.6.1  $\Delta t = -24,8^{\circ}C$

3.6.2  $\frac{\Delta N}{N} = 0,07 \%$

3.6.3 V magnetickém poli se kulička zmagnetuje a získá magnetický moment  $M = \frac{4\pi}{3} R^3 \chi H$  podél pole. V nehomogenním poli působí síla  $F = M \frac{\partial H}{\partial x}$  ; na paramagnetickou kuličku působí síla ve směru rostoucího pole, na diamagnetickou v opačném směru - tím je určeno pořadí kuliček. Aby nastala rovnováha je třeba, aby byla splněna rovnice

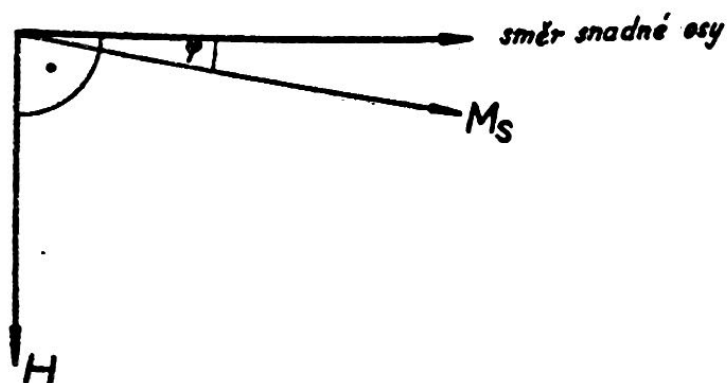
$$\frac{R_{Al}}{R_{Bi}} \sim \sqrt[3]{\frac{\chi_{Bi}}{\chi_{Al}}}$$

3.6.4 Magnetický moment elementární buňky krystalu  $M = n\mu_a\mu_B = M_S a_0^3$  , kde  $n$  je počet atomů v elementární buňce;  $\mu_a = 6,3$ .

3.6.5 Podobně jako v př. 3.6.4;  $M_S = 2,2 T$ .

3.6.6 Jsou možné tři alternativy podle toho jaká je velikost koeritivní síly  $H_C$  magnetu ve srovnání s polem  $H_i$  uvnitř cívky: a/  $H_C = H_i$  , b/  $H_C > H_i$  , c/  $H_C < H_i$  .

3.6.7 V bodě  $N$  na obr.3.14 dochází ke stavu nasycení  $M = M_S$ , dále závisí  $B$  na  $H$  podle vzorce  $B_S = \mu_0 H + M_S$ , Vzdálenost  $\overline{OM}$  se zřejmě rovná  $M_S = 5 T$ .



Obr.3.28.

3.6.8 Při Curieově teplotě  $T_C \approx 10^3 K$  bude tepelná energie řádově srovnatelná s energií magnetického momentu elektronu  $\mu_B$  v magnetickém poli  $H_{mol} \approx 10^7 Oe$ .

3.6.9 Celková energie  $E(\varphi) = E_A + E_H = K \sin^2 \varphi -$

$-(\vec{M}_S, \vec{H})$  musí být minimální. Pro slabé pole (obr.3.28)  $\sin \varphi \approx \varphi$

$$\frac{dE}{d\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{M_S}{2K}.$$

$$\mu^* = 1 + 4\pi\chi_H = 1 + \frac{2\pi M_S^2}{K}.$$

o