Fyzika – cvičení IV

Př: V jaké výšce nad Zemí se musí pohybovat geostacionární družice?
- návod: známe T otáčení Země, poloměr Země, tíhové zrychlení

$\omega_{družice} = \omega_{země}$ (musí obíhat okolo rovníku)

- gravitační síla = dostředivá síla

$$\left(F_0 = m\frac{v^2}{r} = m\frac{\omega^2 r^2}{r} = m\omega^2 r\right)$$

$$\varkappa \frac{M_Z\, \cancel{m}}{(R_Z+h)^2} = \cancel{m}\, \omega^2 \cancel{(R_Z+h)}$$

$$\varkappa \frac{M_Z}{(R_Z+h)^3} = \omega^2 \quad , \text{platí } g = \frac{\varkappa M_Z}{R_Z^2} \quad \left(\text{pro } r = R_Z \text{ platí } a_g = g\right)$$

$$\frac{g \cdot R_Z^2}{(R_Z+h)^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\cancel{\frac{g\, T^2}{4\pi^2} = \frac{(R_Z+h)^3}{R_Z^2}}$$

$$\cancel{\frac{g\, T^2}{4\pi^2} = \frac{R_Z^3\left(1+\frac{h}{R_Z}\right)^3}{R_Z^2}}$$

$$(R_Z+h)^3 = \frac{g\, R_Z^2 \cdot T^2}{4\pi^2}$$

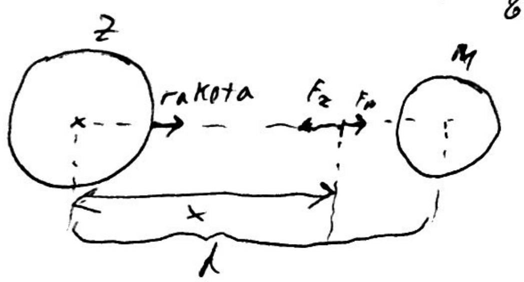
$$R_Z + h = \sqrt[3]{\frac{g\, R_Z^2 T^2}{4\pi^2}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{g \cdot R_Z^2 T^2}{4\pi^2}} - R_Z$$

$$h \doteq 35\,800 \text{ km}$$

- Zemi jsme nahradili hmotným bodem
- žádné odpor. síly neuvažujeme

Př: Určete jakou minimální rychlostí by bylo nutné vystřelit raketu z povrchu Země ve směru přímky spojnice Země – Měsíc tak, aby doletěla na Měsíc. Vzdálenost Země – Měsíc $d = 380 \cdot 10^6$ m a hmotnost Měsíce $M_M \doteq \frac{M_Z}{81}$. Odpor zanedbáme.



úvaha: musí doletět tam, kde $F_Z = F_M$

1) vypočteme x:

$$F_Z = F_M$$

$$\varkappa \frac{M_Z \cdot m}{x^2} = \varkappa \frac{M_M \cdot m}{(d-x)^2}$$

$$(d-x)^2 M_Z = x^2 M_M$$

$$\cancel{(d-x)\sqrt{M_Z} = x\sqrt{M_M}}$$

$\cancel{d - x > 0}$

$x > 0$

$$x^2 = 81\,(d-x)^2$$

$$x = 9 \cdot (d-x)$$

$$x = \frac{9}{10} d$$

2) výpočet v_0

úvaha: - v bodě x bude kin. energie nulová

=> počátek: $E_k + E_{pZ} + E_{pM}$ zákon zachování energie

bod x: $E_{pZ,2} + E_{pM,2}$

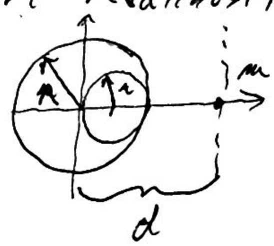
$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \varkappa \frac{m M_Z}{R_Z} - \varkappa \frac{m M_M}{(d-R_Z)} = -\varkappa \frac{m M_Z}{x} - \varkappa \frac{m M_M}{d-x}$$

$$\frac{v_0^2}{2} = \varkappa \frac{M_Z}{R_Z} + \frac{\varkappa}{d-R_Z} \cdot \frac{M_Z}{81} - \varkappa \frac{M_Z}{10d} \cdot 9 - \varkappa \cdot \frac{10}{d} \cdot \frac{M_Z}{81}$$

$$v_0 = \sqrt{2 \varkappa M_Z \cdot \left(\frac{1}{R_Z} + \frac{1}{81(d-R_Z)} - \frac{9}{10d} - \frac{10}{81d} \right)}$$

$v_0 = 11{,}09$ km/s

Př: V kovové kouli s poloměrem R a hmotností M (celé koule) je vytvořena dutina kulového tvaru s poloměrem $r = \frac{R}{2}$ (viz. obr.) Jakou silou bude působit tento útvar na kuličku hmotnosti m ve vzdálenosti d od středu původní koule?



úvaha: výslednice sil bude rovná grav. síle koule, kdyby nebyla vyříznutá, mínus grav. síla vyříznuté koule

$\vec{F}_p = \vec{F}_N + \vec{F}_{p-N}$
chceme zjistit

$$F = F_R - F_r$$

$$F = \varkappa \frac{mM}{d^2} - \varkappa \frac{m M_2}{(d-\frac{R}{2})^2}$$

- musíme vyjádřit M_2: $M_2 = \rho \cdot V_2 = \frac{M}{V} \cdot V_2 = M \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi (\frac{R}{2})^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M}{8}$

$$F = \varkappa \frac{mM}{d^2} - \varkappa \frac{mM}{8(d-\frac{R}{2})^2}$$

Ex: Vypočítejte potenciál a intenzitu grav. pole hmotné úsečky délky $\underline{l}$ a hmotnosti $\underline{m}$ v místě P ležícím na prodloužení této úsečky ve vzdálenosti $\underline{a}$ od jejího konce.

$\cancel{\varphi = -\mathrm{grad}\,\vec{E} = -\nabla\vec{E}}$ $\quad \vec{E} = -\nabla\varphi$

$\varphi = -\varkappa \frac{M}{r}$ (pro hmotný bod)

- úsečka má nekonečně mnoho bodů
  - hmotnost bodu dm
  - jejich vzdálenost od P se liší

$\Rightarrow \sum \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots \rightarrow \oint$ integrál

- příspěvek bodu: $d\varphi = -G \frac{dm}{-x+a}$ (podle polohy počátku - musíme brát -x)
  - pro hmotnost dm platí: $m = \rho . V$

lineární hustota

$dm = \rho . dV$ (pro úsečka: $dm = \rho\, dx$)

$\rho = \frac{m}{l} \Rightarrow dm = \frac{m}{l} dx$

- takže $d\varphi = -G \frac{m}{l.(x+a)} dx$

$$\varphi = \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^{l} -G \frac{m}{l} \cdot \frac{1}{x+a} dx = -G \frac{m}{l} \cdot \left[\ln|x+a| \right]_0^{l}$$

$\left| \begin{matrix} u = x+a \\ du = dx \end{matrix} \right|$ $\quad = -G \frac{m}{l} \cdot \left(\ln(l+a) - \ln(a) \right)$

$\cancel{= -G \frac{m}{l} \ln}$

$$\varphi = -G \frac{m}{l} \ln\left(\frac{l+a}{a}\right)$$

$a > 0,\ l > 0$

Ex: $\vec{E} = ?$ $\quad E = -\frac{\partial}{\partial a}\varphi = +G \frac{m}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \ln\left(\frac{l+a}{a}\right) = G \frac{m}{l} \cdot \frac{a}{l+a} \cdot \left(\frac{l+a}{a}\right)'$

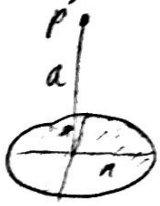
$\cancel{(l+a)\frac{1}{a}}$

$\left(\frac{l}{a} + 1\right)'$

$= G \frac{m}{l} \cdot \frac{a}{l+a} \cdot \left(\cancel{\ldots} (-1) \cdot \frac{l}{a^2} \right)$

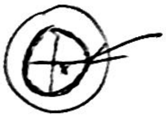
Fyzika - cvičení V

Př: Vypočítejte potenciál a intenzitu grav. pole kruhové desky o poloměru R v bodě P na ose kolmé na desku a procházející jejím středem ve vzdálenosti a od středu desky.



$\varphi = -\varkappa \frac{m}{r}$ $\quad \vec{E} = \frac{\vec{F_g}}{m}$ (pro hmotné body)

- Každý bod desky přispěje $d\varphi = -\varkappa \frac{dm}{r}$
- $d\varphi$ je stejné pro body na kružnici



body na kružnici přispívají stejnou měrou
- poloměr x
- tloušťka dx

} celá kružnice přispívá $d\varphi_k = -\varkappa \frac{dm}{\sqrt{a^2+x^2}}$

- pro dm platí: $m = \rho \cdot S$, kde ρ je plošná hustota
  $dm = \rho\, dS$
- pro dS platí: $dS = (\text{obvod kružnice}) \cdot (\text{tloušťka})$
  $dS = 2\pi x\, dx$

• Pro $d\varphi_k$ tenké kružnice:

$$d\varphi_k = -\varkappa \frac{\rho \cdot 2\pi x\, dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

• Pro celkový potenciál:

$$\varphi = \int d\varphi_k = \int_0^R -\varkappa \frac{\rho \cdot 2\pi x\, dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = -\pi\rho\varkappa \cdot \int_0^R \frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}}\, dx$$

- substituce: $t = a^2+x^2$, $dt = 2x\, dx$ } $= -\pi\rho\varkappa \int_{a^2}^{a^2+R^2} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = -\pi\rho\varkappa \left[2\sqrt{t}\right]_{a^2}^{a^2+R^2}$

$$= -\pi\rho\cdot\varkappa\cdot\left[2\cdot\sqrt{a^2+x^2}\right]_0^R = -\pi\rho\varkappa\cdot\left(2\cdot\sqrt{a^2+R^2} - 2\sqrt{a^2}\right)$$

$$\varphi = 2\pi\rho\varkappa a - 2\pi\rho\varkappa\sqrt{a^2+R^2} = 2\pi\rho\varkappa\cdot\left(a-\sqrt{a^2+R^2}\right)$$

- platí $\rho = \frac{m}{S} = \frac{m}{\pi R^2}$ } $= 2\pi\cdot\frac{m}{\pi R^2}\cdot\varkappa\left(a-\sqrt{a^2+R^2}\right)$

$$\boxed{\varphi = \frac{2m\varkappa}{R^2}\left(a-\sqrt{a^2+R^2}\right)}$$

• Platí $\vec{E} = -\nabla\varphi$

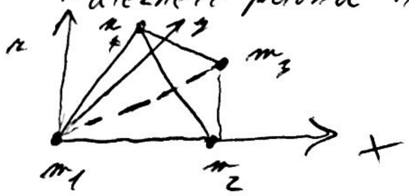
– v našem případě $\vec{E} = -\frac{d\varphi}{da}\cdot\vec{n}$, kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor mířící od bodu P směrem k desce

$$\vec{E} = -\frac{d}{da}\left(\frac{2\pi\varkappa}{R^2}\left(a-\sqrt{a^2+R^2}\right)\right)\vec{n}$$

$$E = \frac{2\pi\varkappa}{R^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot(a^2+R^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2a - 1\right)$$

$$E = \frac{2\pi\varkappa}{R^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}} - 1\right)$$

Př: V rozích pravidelného čtyřstěnu jsou umístěny hmotné body o hmotnostech $m = 2, 3, 4, 5$ kg, délka hrany čtyřstěnu $a = 2$ m. Naleznete polohu hmotného středu (těžiště).



$$\vec{r}_T = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

, pro spojité rozložení

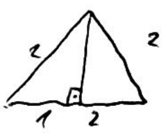
$$\vec{r}_S = \frac{\int r\,dm}{\int dm} = \frac{\int r\,\varrho\,dV}{\int \varrho\,dV}$$

$m_1 = 3$ kg $\qquad \vec{r}_1 = (0,0,0)$

$m_2 = 4$ kg $\qquad \vec{r}_2 = (2,0,0)$

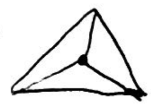
$m_3 = 5$ kg $\qquad \vec{r}_3 = (1,\sqrt{3},0)$

$m_4 = 2$ kg $\qquad \vec{r}_4 = (1,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3}\sqrt{6})$



– výška čtyřstěnu: $h = \left(\frac{a}{3}\right)\sqrt{6}$

– ze shora:



– Potom

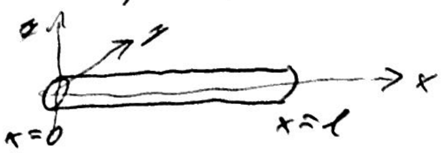
$$x_T = \frac{3.0 + 4.2 + 5.1 + 2.1}{3+4+5+2} = \frac{15}{14}$$

$$y_T = \frac{3.0 + 4.0 + 5.\sqrt{3} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{14} = \frac{5\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{3.14} = \frac{17\sqrt{3}}{42}$$

$$z_T = \frac{3.0 + 4.0 + 5.0 + 2\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}}{14} = \frac{4}{3.14}\sqrt{6} = \frac{2\sqrt{6}}{21}$$

Př: Stanovte polohu těžiště

Hustota tyče všude stejného průřezu roste rovnoměrně od jednoho konce k druhému podle vztahu $\varrho = a \cdot x$, kde $a > 0$, $a = konst.$ Najděte polohu těžiště, je-li její délka l.



- je symetrické $\Rightarrow$ $y_T = 0$, $z_T = 0$
- hledáme pouze x_T ! ϱ je funkcí x !

$$x_T = \frac{\int x\,dm}{\int dm}$$

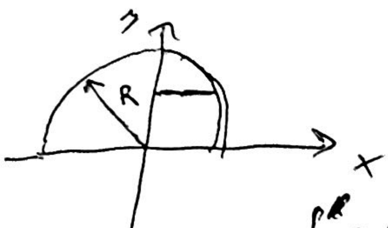
, platí ~~$dm = \varrho\,dx$, kde ϱ je "délková hustota"~~

$dm = \varrho\,dV$, kde $dV = \pi r^2\,dx$

$$x_T = \frac{\int x \cdot \varrho \cdot \pi r^2\,dx}{\int \varrho\,\pi r^2\,dx} = \frac{\pi r^2 \int x \cdot a x\,dx}{\pi r^2 \int a x\,dx} = \frac{a \cdot \int_0^l x^2\,dx}{a \cdot \int_0^l x\,dx}$$

$$x_T = \frac{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l}{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l} = \frac{\frac{l^3}{3}}{\frac{l^2}{2}} = \frac{l^3}{3} \cdot \frac{2}{l^2} = \underline{\underline{\frac{2}{3} l}}$$

Př: Určete polohu těžiště ~~..~~ půlkruhové desky o poloměru R a hustotě ϱ. (tloušťka $= 0$)



- hledáme pouze y_T ($x_T = 0$, $z_T = 0$)
- kružnice: $x^2 + y^2 = R^2$

$$x = \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$y_T = \frac{\int_0^R y\,dm}{\int dm} = \frac{\int_0^R y\,2\sqrt{R^2-y^2}\,dy}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{\int_0^R 2y\sqrt{R^2-y^2}\,dy}{\frac{\pi R^2}{2}}$$

- pro hmotnost dm 1 "plátku" platí

$$dm = \varrho\,dS = \varrho \cdot 2\sqrt{R^2-y^2}\,dy$$

- substituce

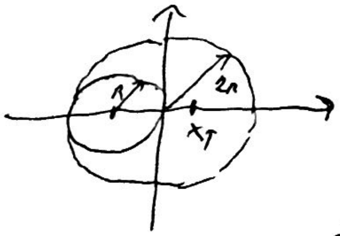
$$t = R^2 - y^2$$
$$dt = -2y\,dy$$

$$y_T = \frac{-\int \sqrt{t}\,dt}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{-\left[\frac{2 t^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{t_1}^{t_2}}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{-\left[\frac{2}{3} \cdot (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{y=0}^{y=R}}{\frac{\pi R^2}{2}}$$

$$y_T = -\frac{2}{\pi R^2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{2}{3} \cdot (R^2)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{2}{3} R^3 = \underline{\underline{\frac{4}{3\pi} R}}$$

Fyzika - cvičení VI

Př: Určete těžiště kruhové desky o poloměru $2R$, z níž byl vyříznut kotouč o poloměru R
- Deska má tloušťku d, hustotu ρ.



$$M \cdot x_0 = \cancel{M x_T}\ m_1 x_T + m_2 x_2$$

$$x_0 = \frac{m_1 x_T + m_2 x_2}{M}$$

$x_0 = 0$

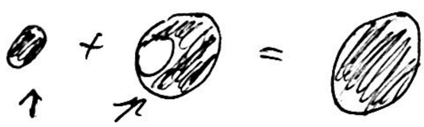
$$\Rightarrow m_1 x_T = -m_2 x_2$$

$$x_T = -\frac{m_2}{m_1} x_2 ,$$ kde m_2 je hmot. velké desky, m_1 je hmot. malé desky

$$x_T = -\cancel{\frac{\rho d (4\pi^2 R^2 - \pi^2 R^2)}{\rho d (\pi^2 R^2)}(-R)} = -\frac{\rho . d . (\pi^2 R^2)}{\rho . d (4\pi^2 R^2 - \pi^2 R^2)} (-R)$$

$$\cancel{x_T = \frac{3\pi^2 R^2}{\pi^2 R^2}}$$

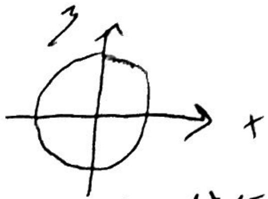
$$x_T = \frac{R}{3} \qquad y_T = 0$$

POZN: 

nahradíme hmotnými body ∧ těžiště celé desky

$$\Rightarrow x_{celk} = \frac{x_{malé} \cdot m_{malé} + x_{velké} \cdot m_{velké}}{m_{malé} + m_{velké}}$$

Př: Určete moment setrvačnosti disku (homogenního) o hmotnosti m a poloměru R.



$J = \sum_i m_i \Delta r_i^2$ $\qquad J = \int_M |\vec{r}|^2 \, dm$ ← integrál přes celou hmotnost

• rozdělíme na malé prstence s hmotností dm

- jejich plocha $dS = 2\pi x \, dx$
- pro hmotnost $dm = \varrho \cdot dS$, kde $\varrho = \frac{M}{S}$ (ϱ je "plošná hustota")

$$\cancel{dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi x \, dx}$$

$$dm = \frac{M}{S} \cdot 2\pi x \, dx$$

$$dm = \frac{M}{R^2 \pi} \cdot 2\pi x \, dx$$

$$dm = \frac{2M}{R^2} x \, dx$$

• dostaneme:

$$J = \int_0^R x^2 \cdot \frac{2M}{R^2} x \, dx = \frac{2M}{R^2} \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^R = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2} M R^2}}$$

POZN: J vzhledem k ose procházející středem

POZN: pro elementární plochu:

$$S = S_2 - S_1 = \pi \cdot (R + dr)^2 - \pi R^2 = \cancel{\pi R^2} + 2\pi R \, dr + (dr)^2 - \cancel{\pi R^2}$$

- dr je velmi malé ⇒ $(dr)^2$ zanedbáme

⇒ $dS = 2\pi R \, dr$

Př: Válec:

$$dJ = r^2 dm$$

• pro dm platí = "hmotnost trubky" 

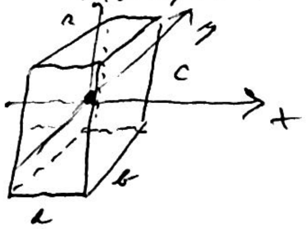
$$dm = \varrho \, dV = \varrho \cdot h \cdot dS = \varrho h \cdot 2\pi r \, dr, \quad \text{kde } \varrho = \frac{M}{V} = \frac{M}{S \cdot h}$$

• dostaneme:

$$J = \int r^2 \frac{M}{S h} \cdot h \cdot 2\pi r \, dr = \frac{M \, 2\pi}{\pi R^2} \int r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2} M R^2}}$$

POZN: Kruhová deska a válec mají stejný J

Př: Vypočítejte hlavní momenty setrvačnosti vůči osám procházejícím hmotným středem homogenního kvádru:



- hledáme J_x, J_y, J_z

$$J_z = \int r^2\,dm \quad , \text{ kde } dm = \rho\,dV, \ \rho = \frac{M}{V}$$

$$J_z = \rho \iiint (x^2+y^2)\,dV$$

$$J_z = \rho \iint \left[(x^2+y^2)z\right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dx\,dy$$

$$J_z = \rho \iint (x^2+y^2)\cdot c \cdot dx\,dy = \rho \cdot c \cdot \int \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy$$

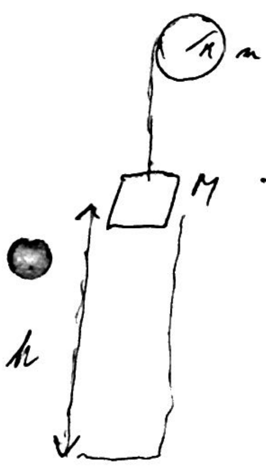
$$= \rho c \cdot \int \left(\frac{a^3}{4\cdot 3} + y^2\cdot a\right) dy = \rho \cdot c \cdot \left[\frac{a^3}{4\cdot 3}\cdot y + a\cdot\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$= \rho \cdot c \cdot \left(\frac{a^3 b}{12} + \frac{a b^3}{12}\right) = \frac{M}{abc}\cdot c \cdot \left(\frac{a^3 b}{12} + \frac{a b^3}{12}\right)$$

$$\underline{\underline{J_z = M\cdot\left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12}\right)}}$$

analogicky J_y, J_x

Př: Jak dlouho bude padat vědro o hmotnosti M do studny hloubky h, pustíme-li rumpál o poloměru R a hmotnosti m.



$t = ?$, rumpál = válec, $J = \frac{1}{2} mR^2$

- pohybová rov. pro M: $Ma = Mg - T$

- 2. impulsová věta: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = T\cdot R$$

$$J\cdot\varepsilon = TR \quad , \text{ kde } \omega = \frac{v}{R}, \ \varepsilon = \frac{a}{R}$$

$$J\cdot\frac{a}{R} = TR$$

$$\frac{J\cdot a}{R^2} = T$$

$$\Rightarrow Ma = Mg - \frac{J\cdot a}{R^2}$$

$$a = \frac{Mg}{M + \frac{J}{R^2}} = \frac{Mg}{M + \frac{1}{2}m} \ , \Rightarrow v = \frac{M}{M+\frac{1}{2}m} g\cdot t + 0$$

$$x = \frac{M}{M+\frac{1}{2}m} g \frac{t^2}{2} = \frac{Mgt^2}{2M+m}$$

$x = h$

$t = ?$

$$t^2 = \frac{(2M+m)\cdot h}{Mg} \Rightarrow \underline{\underline{t = \sqrt{\frac{(2M+m)h}{M\cdot g}}}}$$