Fyzika I – přednáška I

- info: SIS
  - Klas. mech., Havránek (I, II)
  - Mechanika, Krasnica
  - Fyzikál. chemie, ... (molekulová
- zkouška: - jenom ústní
  - nutný zápočet (z testů
- prezentace: alma.karlov.mff.cuni.cz/fyzika1/ (ne předem)

• Fyzika: - základ = experiment
  - hmota = nositel všech fyz. jevů
    - látka a pole
  - fyz. zákony se neodvozují, vyplývají z pozorování
    - platí obecně

• Mechanika: - Newtonova klasická mechanika: a) $v \ll c$
  b) velké rozměry
  - prostor a čas v absolutním smyslu
    - prostor není ovlivněn přítomností těles

• Limity klas. mech.: - velké grav. pole
  - rychlosti blízké c
  - malé rozměry

• Fyzikální veličina: velikost, rozměr vel. = číslo × jednotka

- rozměrová analýza: - kyvadlo

$$\omega = \omega(\underbrace{l}_{\text{délka}}, \underbrace{m}_{\text{hmota}}, \underbrace{g}_{\text{tíh. zrychlení}})$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega = l^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot g^{\varkappa} \cdot A, \quad A \in \mathbb{R} \\ s^{-1} = m^{\alpha}\, kg^{\beta} \cdot (m \cdot s^{-2})^{\varkappa} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \beta = 0 \qquad \alpha + \varkappa = 0 \qquad -1 = -2\varkappa$$

$$\alpha = -\tfrac{1}{2} \qquad \varkappa = \tfrac{1}{2}$$

$$\omega = l^{-\frac{1}{2}} \cdot m^{0} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot A$$

$$\omega = A\sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

- A zjistíme experimentem

• Soustava jednotek SI - ne všechny potřeba
  - Coulomb $F = k\dfrac{Q_1 Q_2}{r^2}$ $\{C\} =$
  - Kilogram $F = G\dfrac{mM}{r^2}$ $\{m^3 s^{-2}\} = \{kg\}$

= soustava cgs (absolutní, Gaussova)

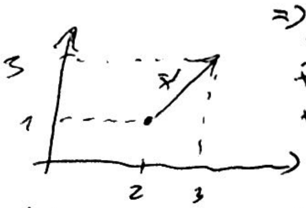
• Fyzikální veličiny – skaláry
- vektory
- tenzor – obecně 3^k složek, k řád tenzoru
  - souvisí s anizotropií mater. parametrů
  - (např.: deformace tělesa)
  - – moment setrvačnosti } tenzory 2. řádu
  - – tenzor napětí, …

• Soustavy souřadné
- Kartézská soustava: – 3 kolmé osy
  - – praktické
  - – osy číslujeme (ne x, y, z)

• Vektory

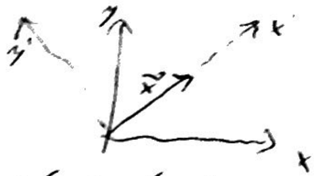
} ekvivalentní

- souřadnice: – zavedeme souř. soustavu
  - – vypočítáme souř.
  - ⇒ posunemí do počátku



$\vec{x} = (3-1, 3-1)$
$\vec{x} = (1, 2)$

• Souřadnice vektoru závisí na volbě souřadné soustavy.

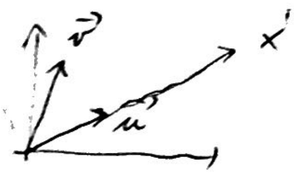


$\vec{x} = (1, 2)$
$\vec{x}' = (\sqrt{5}, 0)$

• násobení skalárem $a \cdot \vec{u} = (a u_1, a u_2, a u_3)$
• sčítání vektorů $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

• Skalární součin: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \equiv u_i v_i$

"sčítá se přes koeficienty, které tam jsou 2×"



$\vec{u} = (u, 0, 0)$
$\vec{v} = (v\cos\alpha, v\sin\alpha, 0)$

$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

– vlastnosti: a) velikost vektoru: $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

b) průmět vektoru: – vektor $\vec{v}$ do směru $\vec{u}$
- – jednotkový vektor $\vec{e}_1$ ve směru $\vec{u}$
- $\vec{v} \cdot \vec{e} = v\cos\alpha$

c) Kolmé vektory: $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$, (jeden nulový / kolmé)

Vektorový součin

$$\vec{u}\times\vec{v} = [\vec{u},\vec{v}] = (ab \sin\varphi_{ab})\,\vec{n}_{ab} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$\vec{c} = \vec{u}\times\vec{v}$

$c_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2$

$c_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3$

$c_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$

(směr: pravá ruka

- výsledek = vektor
- Př: $\vec{u} = (u,0,0)$, $\vec{v} = (v\cos\alpha,\ v\sin\alpha, 0)$; $\vec{c} = \vec{u}\times\vec{v}$, $\vec{c} = (0,0,\ uv\sin\alpha)$
- vlastnosti: 1) $\vec{c}\perp\vec{u} \wedge \vec{c}\perp\vec{v}$

  2) když $\vec{c} = 0$, tak jeden vekt. nulový nebo $\vec{u}\parallel\vec{v}$

  3)  $|\vec{u}\times\vec{v}|$ je plocha rovnoběžnostěnu

Př: $\vec{u} = (1,2,3)$ $S = ?$

$\vec{v} = (4,5,6)$ $S = |\vec{u}\times\vec{v}|$

$\vec{u}\times\vec{v} = (12-15,\ 12-6,\ 5-8) = (-3,6,-3)$

$S = |\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{9+36+9} = \sqrt{54}$

- Polohový vektor: - určuje polohu bodu
  - začátek v počátku
  - $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$

Polární souřadnice

$x_1 = r\cdot\cos\varphi$

$x_2 = r\sin\varphi$

$r \geq 0$ ... průvodič

$\varphi \in \langle 0; 2\pi)$ ... polární úhel

$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

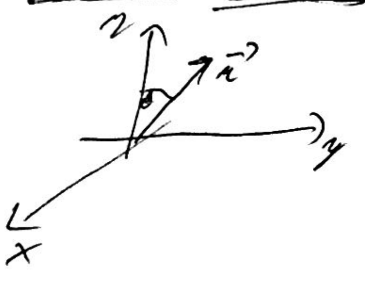
$\varphi = \arctan\frac{x_2}{x_1}$

Sférické souřadnice

$x_1 = r\cos\varphi\sin\theta$

$x_2 = r\sin\varphi\sin\theta$

$x_2 = r\cos\theta$



Kinematika

- Hmotný bod
- Počet stupňů volnosti $N=3$

  – lze odebrat pomocí vazeb

- Vztažná soustava:

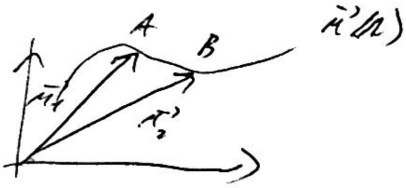
  – polohový vektor $\vec{r} = f(t)$

  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tj. $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$

  $\vec{r} =$

  = parametrický popis pohybu

- Trajektorie: křivka v prostoru
- Dráha: vzdálenost



$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

$\boxed{\cancel{\Delta\vec{r}} \geq \Delta s}$

$\boxed{|\Delta\vec{r}| \leq \Delta s}$

- Pro $\Delta\vec{r} \to 0$ nahradíme $\Delta\vec{r} \to d\vec{r}$

  $\Delta s \to ds$

- Platí $d\vec{r}$ není $\parallel \vec{r}$

  $d\vec{r} \parallel \vec{\tau}$ (tečný vektor)

  $\boxed{d\vec{r} = ds \cdot \vec{\tau}}$ tedy $|d\vec{r}| = ds$

  "elementární přírůstek"

- Průměrná rychlost $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

- Okamžitá rychlost $\cancel{\vec{v}}$ $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ $\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$ $v = \dot{s}$

  – vynásobíme $\vec{\tau}$: $v\vec{\tau} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$

  $\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$ $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ "derivace podle času

Fyzika I – doplnění ze zápisků Paula Dawkinse

- Funkce jedné proměnné $y=f(x)$ zapsaná parametricky:

  $\vec{r}(x) = x\vec{i} + f(x)\vec{j}$

- Funkce dvou proměnných $z=f(x,y)$ zapsaná parametricky

  $\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k}$

Kalkulus s vektorovými funkcemi

1) limita: $\lim\limits_{t\to a} \vec{r}(t) = \lim\limits_{t\to a} f(t)\,\vec{i} + \lim\limits_{t\to a} g(t)\,\vec{j} + \lim\limits_{t\to a} h(t)\,\vec{k}$

2) derivace: $\vec{r}\,'(t) = f'(t)\,\vec{i} + g'(t)\,\vec{j} + h'(t)\,\vec{k}$

- Pravidla pro derivování:
  a) součtu $\frac{d}{dt}(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\,' + \vec{v}\,'$
  b) násobku $\frac{d}{dt}(c\cdot\vec{u}) = c\cdot\vec{u}\,'$
  c) vek. funkci násobíme skalární funkcí: $\frac{d}{dt}\left(f(t)\cdot\vec{u}(t)\right) = f'(t)\vec{u}(t) + f(t)\vec{u}\,'(t)$
  d) skalární součin $\frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\,'\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{v}\,'$
  e) vektorový součin $\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}\,'\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{v}\,'$
  f) "složená" vek. funkce $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(f(t))\right) = f'(t)\cdot\vec{u}\,'(f(t))$

3) neurčitý integrál: $\int\vec{r}(t)\,dt = \int f(t)\,dt\,\vec{i} + \int g(t)\,dt\,\vec{j} + \int h(t)\,dt\,\vec{k} + \vec{c}$!

4) určitý integrál: $\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt\,\vec{i} + \int_a^b g(t)\,dt\,\vec{j} + \int_a^b h(t)\,dt\,\vec{k}$

Důležité vektory

1. Tečný vektor – daný $\vec{r}\,'(t)$

2. Jednotkový tečný vektor $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$

3. Jednotkový normálový vektor

- Fakt: Nechť $\vec{r}(t)$ je vektor takový, že $\|\vec{r}(t)\| = c$ pro vše $t \in R$.
  Potom $\vec{r}'(t)$ je kolmé k $\vec{r}(t)$.
- Důkaz: - velikost vek. $\vec{r}(t)$: $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = \|\vec{r}(t)\|^2 = c^2$ pro vše t
  - derivace tohoto výrazu: $\frac{d}{dt}(\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)) = \frac{d}{dt}(c^2) = 0$
  - úpravy:

$$\vec{r}'(t)\vec{r}(t) + \vec{r}(t)\vec{r}'(t) = 0$$
$$2\vec{r}(t)\vec{r}'(t) = 0$$
$$\Rightarrow \underline{\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0} \Rightarrow \vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$$

- Platí: $\boxed{\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}}$ (pozn. $\vec{T}'(t)$ je již kolmé na $\vec{T}(t)$ ale my chceme jednot. norm. vek.)

Délka křivky dané vek. funkcí

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$$

$$L = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\|\, dt$$

Funkce délky křivky

- udává délku křivky od $t=0$ do $t=~~a~~$ t

$$\cancel{s(a) = \int_0^a \|\vec{r}'(t)\| dt} \quad s(t) = \int_0^t \|\vec{r}'(t)\|\, dt$$

Reparametrizace křivky

- místo parametru t (obvykle čas) vyjádříme křivku pomocí délky křivky s
- musíme znát funkci $s(a)$ (často obtížné)

Př.: křivka $\vec{r}(t) = (2t, 3\sin(2t), 3\cos(2t))$
  - víme: $\vec{r}'(t) = (2, 6\cos(2t), -6\sin(2t))$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4 + 36\cos^2(2t) + 36\sin^2(2t)} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = \underline{2\sqrt{10}}$$

$$s(t) = \int_0^t 2\sqrt{10}\, dt = 2\sqrt{10}\, t$$

- vyjádříme t pomocí s: $t = \frac{s}{2\sqrt{10}}$
- dosadíme do $\vec{r}(t)$:

$$\underline{\vec{r}(t(s)) = \left(\frac{s}{\sqrt{10}}, 3\sin\left(\frac{s}{\sqrt{10}}\right), 3\cos\left(\frac{s}{\sqrt{10}}\right)\right)}$$

Válcová soustava souřadnic

- daná: r ... vzdálenost bodu od osy z
  θ ... úhel mezi průvodičem bodu do roviny xy a osy x
  z ... poloha na ose z

a) převod z válcové do kartézské

$x = r \cdot \cos\theta$
$y = r \cdot \sin\theta$
$z = z$

b) Kartézská → válcová

$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = z$

Sférická soustava souřadnic

- daná: ρ ... vzdálenost od počátku, $\rho \geq 0$
  θ... úhel mezi průvodičem bodu do roviny xy a osy x, $\theta \in R$
  φ... úhel mezi kladnou poloosou z a daným bodem, $0 \leq \varphi \leq \pi$

a) převod sférické → válcové

$r = \rho \cdot \sin\varphi$
$\theta = \theta$
$z = \rho \cdot \cos\varphi$

převod sférická → kartézská

$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$
$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$
$z = \rho \cdot \cos\varphi$

b) Kartézská → sférická

$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$z = \rho\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{z}{\rho}$

~~$y = \rho \sin\theta$~~
$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$
$\Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{\rho \cdot \sin\varphi}$

Jakobián transformace

- transformace: $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$
- Jakobián: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

a) pro dvojitý integrál:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f(g(u,v), h(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

b) pro trojitý integrál

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \iiint_S f(g(u,v,w), h(u,v,w), k(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

Fyzika – přednáška II

- Okamžitá rychlost je vektor, který má směr tečny ke křivočaré dráze v místě, v němž rychlost určujeme, a míří ve směru pohybu

- Pravidlo o skládání rychlostí a pohybu
  - axiom: $\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e_i}$
  - směrové kosiny $\cos\alpha_i = \frac{v_i}{v}$

- Zrychlení: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}$
  - složky zrychlení $a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{d^2x_i}{dt^2} \equiv \ddot{x}_i$
  - platí: $\vec{a} \parallel d\vec{v}$
  - skládání složek stejné $\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}$

$$a_t = \vec{a}\cdot\vec{\tau} = \vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right) \qquad \vec{a_n} = \vec{a} - \vec{a_t}$$

$$\vec{a_t} = \left(\vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right)\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt}}$$

Důkaz: $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2} = \frac{2v_1\frac{dv_1}{dt} + 2v_2\frac{dv_2}{dt} + 2v_3\frac{dv_3}{dt}}{2\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v} = a_t$

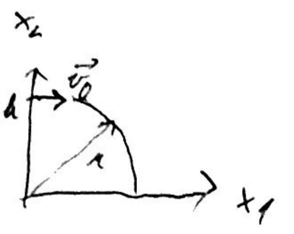
- normálové zrychlení

$$\vec{a_n} = \vec{a} - \vec{a_t}$$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$$

R… poloměr křivosti dráhy (oskulační kružnice)
 – obecně se mění s časem

Př: $x_1 = v_0 t$
$x_2 = h - \frac{1}{2}gt^2$
$x_3 = 0$



$\frac{x_1}{v} = t$

$x_2 = h - \frac{1}{2}g\frac{x_1^2}{v^2}$

$$r = \sqrt{x_1^2+x_2^2} = \sqrt{v_0^2t^2 + h^2 - hgt^2 + \frac{g^2t^4}{4}}$$

• rychlost: $v_1 = v_0$ zrychlení $a_1 = 0$

$v_2 = -gt$ $a_2 = -g$

$$\underline{v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} \qquad \underline{a = g}$$

$$a_t = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \cancel{\frac{2v_1 v_1'}{2\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}} = \frac{\cancel{1}\,2g^2t}{2\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$$

$$\vec{a}_t = a_t \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\cancel{2}g^2t}{\cancel{2}\sqrt{v_0^2+g^2t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}} \cdot \begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \end{pmatrix} = \frac{g^2t}{(v_0^2+g^2t^2)} \begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \end{pmatrix}$$

$$a_{t1} = \frac{g^2tv_0}{v_0^2+g^2t^2}$$

$$a_{t2} = \frac{g^2t\,(-gt)}{(v_0^2+g^2t^2)} = \frac{-g^3t^2}{(v_0^2+g^2t^2)}$$

$$a_{n1} = a_1 - a_{t1} = -\frac{g^2tv_0}{v_0^2+g^2t^2}$$

$$a_{n2} = a_2 - a_{t2} = -g + \frac{g^3t^2}{v_0^2+g^2t^2} = \frac{-gv_0^2 - g^3t^2 + g^3t^2}{v_0^2+g^2t^2} = \frac{-gv_0^2}{v_0^2+g^2t^2}$$

• Vektorově

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{\tau}}_{\text{tečná složka}} + \underbrace{v\frac{d\vec{\tau}}{dt}}_{\text{normálová složka}}$$

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) = \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' + \vec{\tau}' \cdot \vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\tau} \text{ a } \vec{\tau}' \text{ jsou kolmé}}$$

• Integrály pohybu

$\vec{a}$ = konst. + počáteční podmínky

$\vec{v} = \int \vec{a}\,dt$

$\vec{r} = \int \vec{v}\,dt$

• Harmonický pohyb po

• Harmonický pohyb po přímce

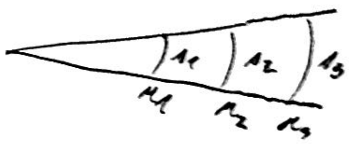
$$x = A\sin(\omega t + \alpha) + x_0$$
$$v = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$$
$$a = (-A\omega^2)\sin\underbrace{(\omega t + \alpha)}_{\text{"Fáze"}}$$

POZN $\cos(\ldots)$, $e^{(\ldots)}$, … } musí být bezrozměrné

$$\boxed{a = -\omega^2(x - x_0)}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

• Definice úhlu:



$$\boxed{\varphi = \frac{s}{r}} \quad s = \varphi r \quad \boxed{ds = r\,d\varphi}$$

• Pohyb po kružnici:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}$$
$$\boxed{v = r\omega}$$

$x_1 = R\cos(\varphi(t))$
$x_2 = R\sin(\varphi(t))$

rovnoměrný: $x_1 = R\cos(\omega t)$
$x_2 = R\sin(\omega t)$

$v_1 = \cancel{2x_2}$

$v_1 = -R\omega\sin(\omega t)$ $\quad a_1 = -R\omega^2\cos(\omega t)$
$v_2 = R\omega\cos(\omega t)$ $\quad a_2 = -R\omega^2\sin(\omega t)$

$v = \sqrt{R^2\omega^2}$ $\quad a = \sqrt{R^2\omega^4}$
$v = R\omega$ $\quad a = R\omega^2$

$$a = R\cdot\frac{v^2}{R^2} \quad a = \frac{v^2}{R}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{v} = 0$$
$\Rightarrow \vec{a}$ je normálové zrychlení

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \vec{a}_d = -\frac{v^2}{R}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

• Vektorové znázornění kruh. pohybu

- úhlové pootočení $\vec{\varphi} = \varphi\cdot\vec{o}$
- dráha a rychlost pohybu: $d\vec{s} = d\vec{\varphi}\times\vec{r}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}\times\vec{r} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$s = r\varphi \quad v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega$$

• zrychlení

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}}_{\text{tečná složka}} + \underbrace{\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\text{normálová složka}}$$

• $a_t = \frac{dv}{dt}$

• norm. zr.: $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Dynamika hmotného bodu

- příčiny pohybu
- síly – skutečné
  - setrvačné

• platí princip superpozice $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \dots$
  - velikost, směr, působiště (vektor vázaný na bod)

Newtonovy zákony

1. zákon setrvačnosti:
   - každé těleso setrvá v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu, není-li vnějšími silami nuceno tento stav změnit

2. zákon síly

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

3. zákon akce a reakce
   - vzájemné působení, 2 různá tělesa
   - stejná velikost, opačný směr $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

POZN.

2. NZ nespecifikuje vztaž. soustavu

Inerciální vztažné soustavy – v klidu / rovnoměrný přímočarý pohyb
- určen 1. NZ
- zde měříme zrychlení

• 2. NZ. určuje hmotnost těles
  → určena síla, volíme referenční hmotnost

Hybnost $\vec{p} = m\vec{v}$

Newtonovy zákony

1. Zákon setrvačnosti (definice ISS)

Nepůsobí-li na těleso vnější fyz. vlivy - tj. pravé síly, popř. výslednice prav. sil je nulová...

2. Obecnější formulace zákona síly

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{v}$$

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

- Harmonický pohyb: $\vec{F} = -m\omega^2 (x - x_0) = -k\Delta x$, $k = m\omega^2$
- Rovnoměrný kruh. pohyb: $\vec{F_d} = -m\omega^2 \vec{r_0} = -m\omega^2 R \frac{\vec{r_0}}{|\vec{r_0}|}$
- Nerov. kruh. pohyb: $\vec{F} = \vec{F_t} + \vec{F_d} = m\vec{a_t} + m\vec{a_n}$
- Tíhová síla: $\vec{G} = m\vec{g}$

  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{G_1}{G_2}$

  - princip ekvivalence $\boxed{m_A = m_G}$

    setrvačná hmota, tíhová hmota

- Síly tření
  - smykové $T_s = f F_n$
  - valivé: $T_v = \mu \cdot \frac{F_n}{R}$

  - odpor prostředí:

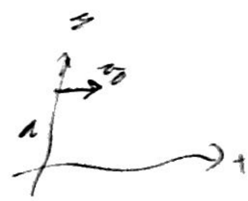
- Pohybové rovnice: $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ $F_i = m\frac{d^2 x_i}{dt^2}$
  - počáteční podmínky!
  - platí $F_i = f(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dots)$
  - určí pohyb/síly
- determinismus = jednoznačné

Fyzika - přednáška III

- 1. NZ - určuje inerciální soustavu
  - pouze zde platí rovnice 2. NZ

Př: Homogenní grav. pole ~~$\vec{F}=(0,0,-mg)$~~

- poč. podmínky: $\vec{x}_0=(0,h,0)$, $\vec{v}_0=(v_0,0,0)$ } vodorovný vrh



$\vec{F}=m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$, $\vec{F}=(0,-mg,0)$

$0=m\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{dv_1}{dt}$ $\quad v_1=C_1$ $\quad \underset{\sim}{t=0}$: $v_1=v_0$ $\quad C_1=v_0$

$-mg=m\frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{dv_2}{dt}$ $\quad v_2=-gt+C_2$ $\quad v_2=0=-gt+C_2$ $\quad C_2=0$

$0=m\frac{d^2x_3}{dt^2}=\frac{dv_3}{dt}$ $\quad v_3=C_3$ $\quad v_3=0=C_3$ $\quad C_3=0$

- integrací: $x_1=v_1t+C_4$ pro $t=0$: $0=v_1\cdot 0+C_4$ $\quad C_4=0$

$x_2=-\frac{gt^2}{2}+C_5$ $\quad h=-\frac{g0^2}{2}+C_5$ $\quad C_5=h$

$x_3=C_6$ $\quad 0=C_6$ $\quad C_6=0$

Př: šikmý vrh $\vec{v}_0=(v_{01},v_{02},0)=(v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha, 0)$

Př: Harmonický pohyb

- jednorozměrný $F=-kx$
- rovnice $kx=-m\ddot{x}=-m\dot{v}$
- řešení uhádneme $x=A\sin(\omega t)$, A,ω konstanty $\quad \ddot{x}=-A\omega^2\sin(\omega t)$

$kA\sin(\omega t)=mA\omega^2\sin(\omega t)$

$$\boxed{\omega^2=\frac{k}{m}}$$

- další řešení (nezávislé) POZN. nezávislé znamená že $\sin(\omega t)\neq C\cos(\omega t)$

$x=C_1\sin(\omega t)+C_2\cos(\omega t)$ $\quad C_1=A\cos\alpha$, $C_2=A\sin\alpha$ $\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{C_2}{C_1}$

$\Rightarrow x=A\sin(\omega t+\alpha)$ $\quad A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$

- žádné jiné řešení neexistuje

Př: odpor prostředí $\vec{F} = -k\vec{v} = -k\frac{d\vec{x}}{dt}$

$$-kv = m\ddot{x} = m\frac{dv}{dt} \qquad \int_{t_0}^{t} -\frac{k}{m}\,dt = \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\,dt$$

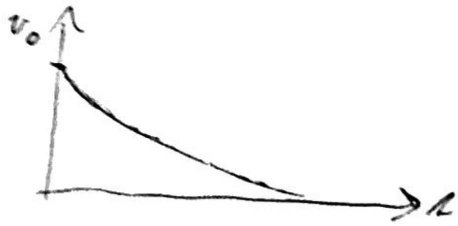
$$\ln|v| - \ln|v_0| = \left[-\frac{k}{m}t\right]_{t_0}^{t}$$

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

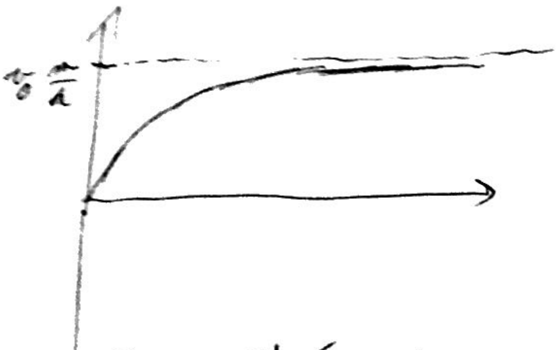
$$x = \int_0^{t_0} v_0 e^{-\frac{k}{m}t}\,dt$$

$$x = -\frac{m}{k}v_0 \cdot \left[e^{-\frac{k}{m}t} - e^{-0}\right]$$

$$x = -\frac{m}{k}v_0\left[e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right]$$



• ROZN.: $v = 0$ v $t = \infty$
– prakticky bude neměřitelné



• Dráha bude konečná

Inerciální × Neinerciální soustavy

• dvě soustavy, vůči sobě v pohybu
• bod P poloha $\vec{r}$, $\vec{r}'$
• $\vec{R}$ vzdálenost počátků $\boxed{\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}}$, kde $\vec{R} = \vec{u}t$
$\vec{u}$... unášivá rychlost
– derivace: $\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}}$ (sčítání teorém rychlostí)
$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_u}$

• nečárkovaná = inerciální, druhá: $\vec{F}' = m\vec{a}'$
($\vec{F} = m\vec{a}$)

• pokud $\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}' \Rightarrow \vec{a}_u = 0$

• Gal. transformace $\boxed{\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t}$
– platí $\vec{a} = \vec{a}'$ $\quad \vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}'$

• platí N.2.

• Pokud $\vec{a}_u \neq 0$ (zr.

- např.: rovnoměrně zrychlený, přímočarý pohyb

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_u$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_u = \vec{F}' + m\vec{a}_u$$

$$\boxed{\vec{F}' = \vec{F} - m\vec{a}_u}$$

$$\boxed{\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}^*}$$

• $\vec{F}^*$ nazýváme síla setrvačná, nemá původ v interakci těles (neplatí pro ni 3. NZ)
- všechna tělesa se pohybují se stejným $\vec{a}_u$

• Neplatí 2. NZ v základním tvaru

Př.: pohyb bodu na kole:

• Rotující soustavy
- společný počátek (nemění vešení)
- Transformační vztahy

$$\boxed{\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos \omega t + x_2 \sin \omega t \\ x_2' &= -x_1 \sin \omega t + x_2 \cos \omega t \\ x_3' &= x_3 \end{aligned}}$$

$\vec{F}' = m\vec{a}' = m \cdot f(\vec{a}, u, v, \dots)$ chceme najít f

- derivujeme trans. vztahy

• Jinak: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$ | bod P - jiné souřadnice v soustavách
$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}$ - rotuje v 1 soustavě, klid. v 2. soustavě
kde $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ($\vec{u} \parallel \vec{\omega} \times \vec{r}$)

$$\boxed{\frac{d'\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{u}}$$

(derivace v rotující soustavě $\frac{d'\vec{a}}{dt}$ - liší se od $\frac{d\vec{a}}{dt}$)

$$\vec{a}' = \frac{d'\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}) - \vec{\omega} \times \vec{v}' = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

rychlost rotace   rychlost v inerciální $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{\varepsilon}\times\vec{r} - \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\text{odstředivé zrychlení}} - \underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}}_{\text{coriolisovo zrychlení}}$$

$$\vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_E + \vec{a}_0 + \vec{a}_C$$

$$\boxed{\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_\varepsilon^* + \vec{F}_0^* + \vec{F}_C^*}$$ 3 korekční členy

$\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{F}_\varepsilon = -m\,\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ (zrychlená rotace)

$\vec{F}_0 = -m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = -m\omega^2 r\,\vec{n}$ (odstředivá síla)

$\vec{F}_C = -2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}'$ Coriolisova síla

- neexistuje reakce
- setrvačné síly

• Odstředivá síla – v n.s.s.
dostředivá síla – v i.s.s

• POZN: $\vec{F}_C = -2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}'$, $\vec{F}_C$ kolmé na $\vec{\omega}$, $\vec{v}$
pohyb ve směru osy rotace, síla nulová
pohyb kolmo na $\vec{\omega}$ => maximální

• Země = neinerciální

Př: Kónické kyvadlo

i.s.s

Moment síly

$M = r \cdot F \cdot \sin\alpha$ $\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$

$\vec{M} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F}$

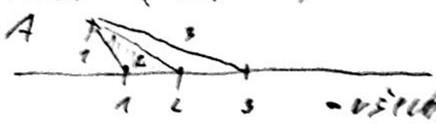
Moment hybnosti

$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$

$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$\vec{L} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times m\vec{v}$

Př: pohyb po přímce: (rovnoměrný



- všechny Δ stejná plocha

Pohybová rovnice když působí $\vec{M}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{\substack{\vec{v} \times (m\vec{v}) \\ \text{nula}}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

- Nepůsobí-li vnější $\vec{M}$ $\Rightarrow$ moment hybnosti se zachovává
-

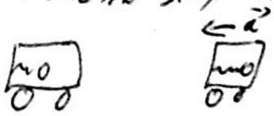
Zákon zachování hybnosti

- Nepůsobí-li $\vec{F}$ $\Rightarrow$ hybnost se zachovává

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = 0 \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const.}$$

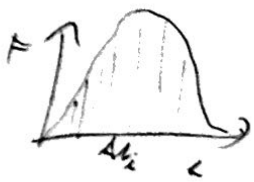
Fyzika - přednáška IV

- setrvačné síly nemají reakci



Impuls síly

$\boxed{\vec I = \vec F \Delta t}$ $\vec F$ = konst



$\to \vec I = \sum_{i=1}^{N} \vec F_i \Delta t_i \to \int \vec F \, dt = \int_1^2 \frac{d\vec p}{dt} \, dt$
$= \vec p_2 - \vec p_1 = \Delta \vec p$

- při $\vec I$ se změní hybnost

$\frac{\vec I}{\Delta t} = \langle \vec F \rangle$, kde $\langle \vec F \rangle$ je průměrná síla

Práce

$W = F \cdot s$, F = konst., s je dráha
$W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$ "tečná složka síly koná práci"

$\boxed{W = \int_l \vec F \cdot d\vec s} \to \sum_{i=1}^{N} F_i \Delta s_i \cos\alpha_i$

kde $\boxed{d\vec s = ds \cdot \vec\tau = d\vec s}$

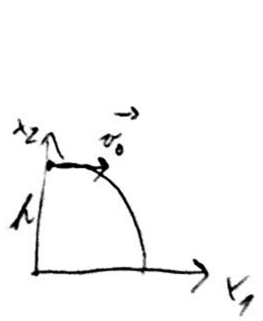
- nezávisí na tom, jakým způsobem probíhá po trajektorii
- křivkový integrál 2. druhu

$$\boxed{W = \int_l \vec F \cdot d\vec s = \int_A^B F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3}$$

- elementární práce $dW = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$

Př: $x_1 = v_0 t$, $x_2 = h - \frac{g}{2} t^2$, $x_3 = 0$; $\vec F = (0, -mg, 0)$; $\boxed{dx = \dot x \cdot dt} = \boxed{\frac{dx}{dt} \cdot dt}$

$dx_1 = v_0 dt$, $dx_2 = -gt\,dt$, $dx_3 = 0$ $\Big\}$ $W = \int_0^t 0 \cdot v_0 dt + (-mg)(-gt)\,dt + 0 \cdot 0$
$= \int_0^t mg^2 t \, dt = \frac{mg^2 t^2}{2}$



$x_2 = 0 = h - \frac{gt^2}{2}$
$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$W(t) = \frac{mg^2}{2} \cdot \frac{2h}{g} = mgh$

Pozn. Křivkový integrál 1. druhu $I = \int f\,ds$

Př: $\int ds$ je délka trajektorie $\boxed{ds = \sqrt{d\vec{r}\cdot d\vec{r}}}$

$$ds = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2}$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2}\,dt$$

Př: $x_1 = R\cos\varphi \qquad dx_1 = -R\sin\varphi\,d\varphi$
$x_2 = R\sin\varphi \qquad dx_2 = R\cos\varphi\,d\varphi$ $\Big\}$ $ds = \sqrt{(R^2\sin^2\varphi + R^2\cos^2\varphi)(d\varphi)^2} = R\,d\varphi$

$$\int ds = \int_0^{2\pi} R\,d\varphi = \underline{\underline{2\pi R}}$$

a) $W > 0$ síly urychlují pohyb

b) $W < 0$ síly zpomalují pohyb

• Platí $W_{AB} = -W_{BA}$, elementární práce: $dW = \vec{F}\,d\vec{s} = \vec{F}\,d\vec{r} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt}dt$

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_B^A \vec{F}\,d\vec{r} \qquad \boxed{dW = \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt}$$

Okamžitý výkon: $\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}}$

$$W = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}\,\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}}\,dt = \int m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\cdot dt = \frac{1}{2}m\int_{(1)}^{(2)}\frac{d(v^2)}{dt}dt = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$[\,d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = d\vec{v}\,\vec{v} + \vec{v}\,d\vec{v} = 2\vec{v}\,d\vec{v}\,]$

Věta o přírustku E_k

Kinetická energie

$\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2} \qquad E_k = \frac{p^2}{2m}$

- skalární
- závisí na volbě s.s.

a) $dE_k = dW > 0$ síly urychlují

b) $dE_k = dW < 0$ síly zpomalují

• první integrál pohybu

Konzervativní silové pole

- Práce závisí pouze na počáteční a koncové poloze tělesa
- Práce vykonaná po libovolné uzavřené křivce je nulová

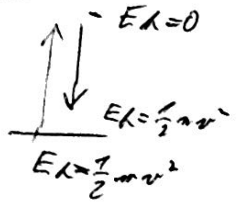
$$\boxed{W = \oint_l \vec{F}\, d\vec{r} = 0}$$

"po uzavřené křivce"

- nekonzervativní: tření, magnetické pole
- Stokesova věta: $\boxed{\nabla \times \vec{F} = \mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}}$

- Při pohybu po uzavřené křivce je $E_{k,poc} = E_{k,konc}$

Potenciální energie



- nahoru: $\Delta E_k = -\frac{1}{2} mv^2$
- dolu: $\Delta E_k = \frac{1}{2} mv^2$

- E_k se mění na potenciální energii

- znaménko opačné oproti E_k

$$\boxed{W_{12} = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{p2} - E_{p1} = \Delta E_p}$$

! Platí pouze pro konzervativní pole!

- význam má pouze ΔE_p

- tíhové pole $\quad \Delta E_p = -\int_0^h -mg\,dx = mgh + C$
- pružina $\quad \Delta E_p = -\int -kx\,dx = \frac{1}{2} kx^2 + C$

Zákon zachování mechanické energie

$\boxed{W_{12} = \Delta E_k = -\Delta E_p}$ tedy $E_{k2} - E_{k1} = -(E_{p2} - E_{p1})$

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1}$$

$$\boxed{E_k + E_p = \text{konst.}}$$

! V konzervativním poli!

- Platí pro izolovaný systém

Potenciální energie

= "totální diferenciál"

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial E_p}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial E_p}{\partial x_3}dx_3 = \sum \frac{\partial E_p}{\partial x_i}dx_i$$

$$E_p = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} + E_{p0} \Rightarrow \text{tedy } dE_p = -\sum F_i dx_i$$

srovnáme

definice $\vec{\nabla} E_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x_1}, \frac{\partial E_p}{\partial x_2}, \frac{\partial E_p}{\partial x_3}\right) \Rightarrow \boxed{dE_p = \vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{r}}$

- platí: $\boxed{F_i = -\frac{\partial E_p}{\partial x_i}}$ vektorově $\boxed{\vec{F} = -\nabla E_p}$
- ∇ je operátor nabla $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

a) ∇ na skalární funkci → gradient
= určuje směr největšího vzrůstu skalární funkce

Intenzita pole: $\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m}}$

Potenciál: $\boxed{\varphi = \frac{E_p}{m}}$ – analogicky $E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ ~~dE_p~~

$\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi}$

Ekvipotenciální plocha: $\varphi(x,y,z) = \text{konst}$

siločáry: směr normály k ekvipotenciální ploše

$$\vec{n} = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \qquad dE_p = \nabla E_p \cdot d\vec{r}$$
$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\vec{r}$$

- $\nabla\varphi$ směr max. poklesu

- **Nekonzervativní síly** – přeměna mech. energie na teplo

$$\vec{F} = \vec{F}^{*}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$$W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}^{*}\cdot d\vec{r} = W_{12} + W_{12}^{*}$$

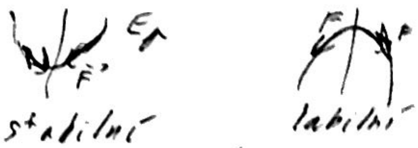
$\boxed{\Delta E_k = -\Delta E_p + W_{12}^{*}}$ $\quad (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}) = W_{12}^{*}$

- neplatí zákon zach. energie
- vazbové síly nekonají práci

Fyzika V, přednáška

Potenciální energie – rovnováha

$\vec F = -\nabla E_p$, $F_1 = -\frac{\partial E_p}{\partial x_1}$ $\quad \Delta E_p$ klesá $\Rightarrow \vec F$ kladná
ΔE_p stoupá $\Rightarrow \vec F$ záporná



+ volná poloha

$\Rightarrow$ "snaha zaujmout polohu s minimální potenciální energií"

shrnutí:
- princip superpozice pro $\vec F$
- 2. NZ
- inerciální × neinerciální s.

Gravitace

Newtonův gravitační zákon

$$\boxed{\vec F_{12} = -\varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2}\vec r_0} \boxed{= -\varkappa \frac{m_1 m_2}{|\vec r_2 - \vec r_1|^3}(\vec r_2 - \vec r_1)}$$

$\vec F_{12}$ ... síla působící na těleso 2, vyvolaná tělesem 1
$\vec r_0$ ... jednotkový vektor, směr od 1 k 2, platí $\vec r_0 = \frac{\vec r}{|\vec r|}$, $\vec r = \vec r_2 - \vec r_1$
$\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}$

- platí $\boxed{\vec F_{21} = -\vec F_{12}}$
  - je silou konzervativní $\Rightarrow$ lze charakterizovat intenzitou, potenciálem
  - první složka: $F_1 = -\varkappa \frac{m_1 m_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} x_1$
- intenzita $\boxed{\vec E = \frac{\vec F}{m_1}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\vec E = -\varkappa \frac{m}{r^3}\vec r}$
- potenciál $\boxed{\varphi = \frac{E_p}{m_1}}$

$$E_{p2} - E_{p1} = \Delta E_p = -W = -\int_{(1)}^{(2)} -\varkappa \frac{m_1 M_2}{r^2} \cdot \frac{\vec r}{r} \cdot \overset{d\vec r}{d\vec r}$$

$d\vec r = dr\,\vec\tau = d\vec u$ $\quad \boxed{\vec r \cdot d\vec r = r\,dr}$ $\quad d(\vec r \cdot \vec r) = 2\vec r \cdot d\vec r$
$d(r^2) = 2r\,dr$
$\Rightarrow 2r\,dr = 2\vec r \cdot d\vec r$

$$= \varkappa \int_{(1)}^{(2)} \frac{mM}{r^2} dr = -\varkappa m M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$\boxed{\Delta E_p = -\varkappa m M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}$$

• volíme referenční hodnotu potenciální energie

• pro potenciál: $\frac{\Delta E_p}{M} = \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\varkappa m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$

• referenční bod $r_2 \to \infty$, ~~pro~~ definujeme $E_p = 0$

$$\Rightarrow -E_{p1} = \frac{\varkappa m M}{r_1}$$

$$\boxed{E_p = -\frac{\varkappa m M}{r}} \qquad \boxed{\varphi = -\varkappa \frac{m}{r}}$$

• Pro spojité rozložení hmoty

$m \sim \rho(\vec{r})V$, platí $dm = \rho dV$; platí jiné vztahy

• Potenciální energie bude záporná (plyne z definice referenčního bodu)

Gravitační pole země

$R = 6378$ km

$m_Z = \cancel{5{,}98} \cdot 10^{24}$ kg

"vážení Země" $mg = \varkappa \frac{m M_Z}{R_Z^2}$

$$M_Z = \frac{g R_Z^2}{\varkappa}$$

• pro E_p v blízkosti země

$$\Delta E_p = E_p(R+h) - E_p(R) = mg \frac{h}{1+\frac{h}{R}}$$

$1 + \frac{h}{R} \sim 1$

$\Rightarrow \boxed{E_p \simeq mgh}$

Pozn: $\left(g = \frac{\varkappa M}{r^2} \quad dg = -\frac{2\varkappa M dr}{r^3} \right)$ ← 1m, ← $R_Z + dr$ ← malý rozdíl E_p na podlaze / na stole $\sim 10^{-6}$ m s^{-2}

Tíha

$$\boxed{\vec{G} = m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_{od}}$$

• Potenciální energie = společná vlastnost všech těles (hmotnosti m, M)

• Výsledná E_p: $\boxed{E_p = E_{p12} + E_{p13} + E_{p32}}$

lze psát $E_p = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} -\varkappa \frac{m_i m_j}{2 r_{ij}}$

• Kruhová trajektorie v gravitačním poli

⇒ musí platit $F_d = F_g$

$$m\frac{v^2}{r} = \varkappa\frac{mM}{r^2}$$

Kruhová rychlost $\boxed{v = \sqrt{\frac{\varkappa M}{r}}}$

pro $r = R_z$ → první kosmická rychlost

Druhá kosmická rychlost

- rychlost, při které těleso opustí grav. pole

$$\frac{1}{2}mv^2 - \varkappa\frac{mM}{r} = 0 + 0 \quad \} \text{ zákon zach. mech. energie}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \varkappa\frac{mM}{r}$$

$\boxed{v = \sqrt{\frac{2\varkappa M}{r}}}$ pro $r = R_Z$ je to 2. K. rychlost Země

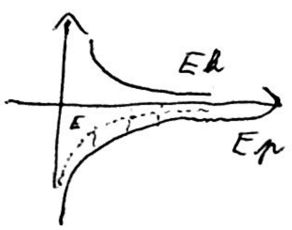
Třetí k. rychlost – opustí sluneční soustava

POZN: Kritický poloměr $c = \sqrt{\frac{2\varkappa M}{R_s}}$ c ... rychlost světla

Energie při pohybu v centrálním poli (Kruhový pohyb)

$$\varkappa\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \rightarrow \varkappa\frac{mM}{2r} = \frac{mv^2}{2}$$

$$\boxed{-\frac{E_p}{2} = E_k}$$



$E_{celk} = E_k + E_p$

a) $E_c < 0$ kruhový, eliptický pohyb

b) $E_c = 0$ parabola

c) $E_c > 0$ hyperbola

• Paradox padajícího satelitu – rychlost roste

Moment sil v centrálním poli

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times f(r)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = 0$$

=> působí nulový moment sil

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{c}, \text{ konstantní } \vec{L}$$

=> rovinný pohyb ($\vec{L}$ je vektor), platí $\vec{L} \perp \vec{r}$, $\vec{L} \perp \vec{v}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}}_{0} + \underbrace{\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}}_{} = 0+0$$

pro ~~tento~~ pohyb v centrálním poli $\vec{r} \parallel \vec{a}$

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\omega r^2 = \text{konst.}$$

=> Při pohybu v centrálním poli:

a) $E_c = \text{konst}$

b) $\vec{L} = \vec{c}$

1. Keplerův zákon elipsy

2. Keplerův zákon $v_p = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}| = \frac{L}{2m}$

3. Keplerův zákon $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$

$$\frac{d\vec{v}_p}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}}_{0 \text{ vždy}} + \underbrace{\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{r}\parallel\vec{a} \text{ musí platit}} = 0$$

=> síla je centrální

$\cancel{(v^2 = v_x^2 + v_y^2)}$

Fyzika - přednáška VI

Př: ~~$\vec{E} = \varkappa \frac{m}{r^2}$~~ $\varphi = -\varkappa \frac{m}{r}$ $\quad E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\varkappa m \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} = -\varkappa m \cdot \frac{1}{2} \frac{2x_1}{r^3}$

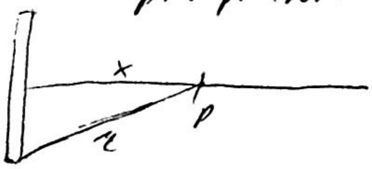
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\Rightarrow E_1 = -\varkappa m \frac{x_1}{r^{3/2}}$$

$$\vec{F} = -\varkappa \frac{mM}{r^3} \vec{r}, \quad F_1 = -\varkappa \frac{mM}{r^3} x_1$$

Př: grav. pole ~~disku~~ prstence na ose symetrie

- předpoklad: - zanedbatelná tloušťka

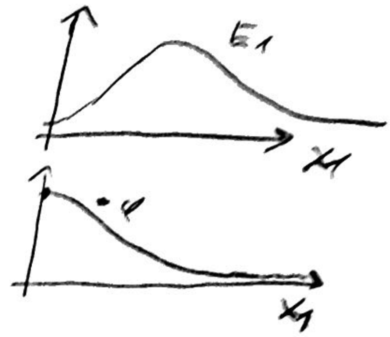


$$d\varphi = -\varkappa \frac{dm}{r}$$

$$\varphi = -\varkappa \frac{m}{r} = -\varkappa \frac{m}{\sqrt{x_1^2 + R^2}}$$

~~$E_1 = -\int \varphi \, dx_1$~~

$$E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\varkappa m \frac{x_1}{(x_1^2 + R^2)^{3/2}}$$



Př: Grav. pole koule

$$\underbrace{\oint_{S(V)}}_{\text{plošný integrál}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = -4\pi\varkappa \sum \underbrace{m_i}_{\text{hmota uvnitř plochy S}} \qquad \text{(Gaussův zákon)}$$

plošný integrál = "součet přes všechny plošky"

- pro bod. náboj uprostřed koule: $\vec{E} = \text{const.}$, $\vec{E} \perp d\vec{a}$

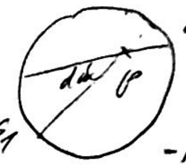
$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = E \oint da = E \, 4\pi R^2$$

$$\Rightarrow E \, 4\pi R^2 = -4\pi \varkappa m$$

$$E = -\varkappa \frac{m}{R^2}$$

- pro homogenní kouli: stejný výsledek
  - $\Rightarrow$ homogenní kouli lze nahradit hmotným bodem
- stejné pro kulovou slupku
- pokud uvnitř plochy S není žádná hmota
  - $\Rightarrow$ ~~žádné~~ grav. pole bude působit

"Faradayova grav. klec"



dS_2 $\boxed{d\omega = \frac{dS}{r^2}}$

dS_1

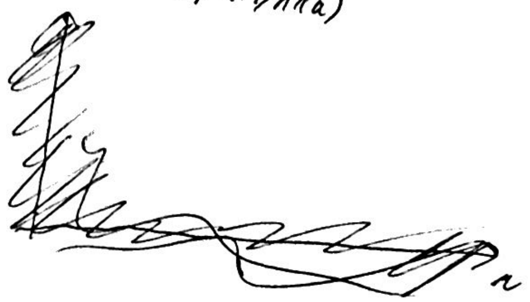
- musí platit $\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2} \;\Big|\; \sigma(S)\; \varkappa$

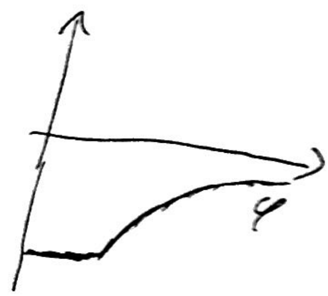
plošná hustota

$$\varkappa \frac{dm_1}{r_1^2} = \varkappa \frac{dm_2}{r_2^2}$$

⇒ vzájemně se kompenzují

⇒ uvnitř ~~koule~~ kulové plochy není grav. pole (prstýnka)

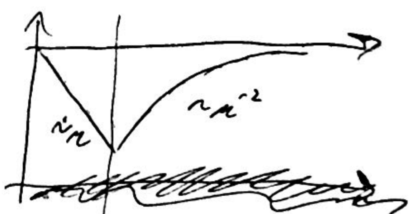




• uvnitř plné koule:

$$E = -\varkappa \frac{m'}{r} \qquad \frac{m'}{M} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\boxed{E = -\varkappa \frac{Mr}{R^3}}$$



- potenciál uvnitř koule:

$$\varphi = -\int E(r)\,dr = -\int -\varkappa \frac{Mr}{R^3}\,dr = \varkappa \frac{M}{R^3}\cdot\frac{r^2}{2} + C = \varkappa \frac{Mr^2}{2R^3} + C$$

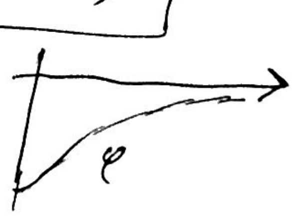
$$\varphi(R) = -\varkappa \frac{M}{R} \qquad \varkappa \frac{MR^2}{2R^3} + C = -\varkappa \frac{M}{R}$$

$$C = -\varkappa \frac{M}{R} - \varkappa \frac{M}{2R}$$

$$C = \frac{-2\varkappa M - \varkappa M}{2R} = -\frac{3\varkappa M}{R}$$

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{\varkappa M}{2R}\cdot\left(\frac{r^2}{R^2} - 3\right)}$$

$$\varphi(0) = -\frac{3\varkappa M}{2R}$$



Soustava hmotných bodů a tuhé těleso

stupeň volnosti: - každý hmotný bod max. 3
- N bodů ⇒ 3N stupňů volnosti

tuhá soustava: - neproměnné vzdálenosti
- 6 stupňů volnosti určena 3 body (neležící na přímce)
  a) 1 bod A (3 parametry)
  b) osa (2 parametry = 2 úhly)
  c) natočení kolem osy (1 parametr)

$$\rho = \lim_{V \to 0} \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV}, \quad \text{hmotnost} \quad m = \underbrace{\int \rho(\vec{r})\,dV}_{\text{trojný integrál}}$$

Hmotný střed - vážený průměr, váhy m_i
- každý bod jinou hmotnost

$$r_{x,s} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \qquad \boxed{\vec{r}_s = \frac{\sum_1^N m_i \vec{r}_i}{\sum_1^N m_i} = \frac{1}{M}\sum_1^N m_i \vec{r}_i}$$

pro spojité těleso $\boxed{\vec{r}_s = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho\,dV}$ $\quad M = \sum_1^N m_i$

⇒ **rychlost** $\vec{v}_s = \frac{1}{M}\sum_1^N m_i \vec{v}_i$

zrychlení: $\vec{a}_s = \frac{1}{M}\sum_1^N m_i \vec{a}_i$

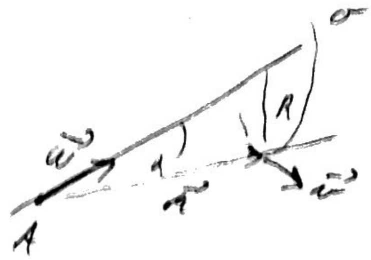
Celková hybnost

$$\vec{p} = \sum_1^N m_i \vec{v}_i = M \cdot \vec{v}_s$$

Kinematika tuhé soustavy

- parametricky: $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ $\qquad x_i^k = x_i^k(t)$ $\quad k = 1,2,3$ (souřadnice), $i = 1,\dots,N$ (počet bodů)
- 3N pohybových rovnic (nevhodné)

a) zvolíme referenční bod
b) osa procházející daným bodem
c) rotaci kolem dané osy



1) Rotace kolem pevné osy
   - body osy stálá poloha → 1 parametr $\frac{d\varphi}{dt} = \omega(t)$
   - ω stejná pro všechny body

2) Rotace kolem pevného bodu
   - bod A pevný, osa mění směr

rotace a translace zároveň

Chaslesova věta

- libovolný pohyb t.t. lze rozložit na posuvný pohyb a rotaci kolem pevného bodu. $\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}$ (bod A)
  - pro jiný ref. bod:
    $\vec{v}(t) = \vec{V}'(t) + \vec{\omega}'(t) \times \vec{r}\,'$ (bod A')
  - → potom A' vůči A: $\vec{V}'(t) = \vec{V}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{a}$ $\quad (\vec{a} \dots \vec{r}_{A'} - \vec{r}_A)$. ?
  - → dosadíme do první rov.

$$\vec{v}(t) = \vec{V}'(t) - \vec{\omega}(t) \times \vec{a} + \vec{\omega}(t) \times \vec{r} = \vec{V}'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{r} - \vec{a})$$

$$\vec{v}(t) = \vec{V}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}\,'$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}\,'$$

⇒ úhlová rychlost nezávisí na volbě ref. bodu A
(posuvná rychlost $\vec{v}$ ale závisí na A)

• problém: $\vec{n}$ – stálý v prostoru
 – pevný bod tělesa

Vnitřní (interakční) síly

$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, $\vec{F}_{ii} = 0$ (akce a reakce)

$\therefore$

$$\left.\begin{array}{l} F_{12} = -F_{21} \\ F_{13} = -F_{31} \\ F_{23} = -F_{32} \end{array}\right\}$$

sečteme všechny tyto síly
→ výslednice všech vnitřních sil je nulová

$$\vec{F}^I = \sum_{i,j}^{n} \vec{F}_{ij} = 0$$

Celková síla působící na soustavu

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i^I + \sum \vec{F}_i^E = \vec{F}^E$$ ← výslednice vnějších sil

$$\vec{F} = \sum F_i = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum \vec{p}_i = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$\vec{P}$ ... celková hybnost soustavy

$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_S$

1. věta impulsová (věta o hybnosti s.h.b., t.t.)

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^E}$$

celk. hybnost ... vnější síly

• platí všude

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}_S) = M\vec{a}_S}$$

← Věta o pohybu hmot. středu s.h.b.

hmot. střed se pohybuje jako hmot. bod o hmotnosti M, na který působí $\vec{F}^E$

POZN.: těžiště

$$\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{g} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{g}$$

$$\vec{M} = M\vec{r}_S \times \vec{g} = 0$$ → nulový moment sil v tíhovém poli (homogenním)

$$\vec{M} = \vec{r}_S \times \vec{G} = 0$$

⇒ v homogením poli těžiště a hmotný střed splývají

(neplatí pro nehomogenní pole)

Zákon zachování celkové hybnosti

– v izolované soustavě ($\vec{F}^E = 0$) se zachovává $\vec{P}$

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = const.}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_S = const.$$