Fyzika – cvičení I

- zápočet: – 2 pís. práce (1. v listopadu, 2. na konci)
  - 60% bodů z obou písemek (stejný typ příkladů jako na cvičení)
  - docházka důležitá
  - tabulka lze používat při testech

Pohyb v prostoru
- polohový vektor $\vec{r} = (x, y, z)$
- rychlost $\vec{v}$
- zrychlení $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$

Př: $x_1 = 3 + \cos t$ trajektorie = ?, $\vec{v}$ = ?, $\vec{a}$ = ?
$x_2 = 5 + \sin t$

- Pro určení trajektorie: – hledáme křivku
  - vyloučíme parametr t

$(x_1 - 3)^2 = \cos^2 t$
$(x_2 - 5)^2 = \sin^2 t = 1 - \cos^2 t$

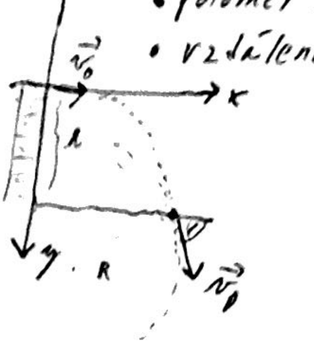
$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 = 1$ trajektorie = kružnice, střed [3, 5] poloměr 1

- Pro okl. rychlost platí $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ("derivujme po složkách")

$\vec{v} = (-\sin t, \cos t)$ $|\vec{v}| = 1$

- Zrychlení $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-\cos t, -\sin t)$ $|\vec{a}| = 1$

Př.: Z rozhledny o výšce $h = 30\,m$ byl vržen kámen ve vodorovném směru rychlostí $v_0 = 10\,m \cdot s^{-1}$. Bez tření vzduchu.
- Trajektorie?, $|\vec{v}|$ při dopadu?, úhel φ u rychlosti při dopadu
- poloměr křivosti trajektorie R při dopadu?
- vzdálenost d (od rozhledny) při dopadu



$\vec{a} = (0, g)$

$\vec{v} = (v_{x0}, gt + v_{y0})$
$\vec{v}(0) = (0, 10)$
$(v_{x0}, v_{y0}) = (0; 10)$
~~$\vec{v} = 10$~~,
$\vec{v} = (v_0, g \cdot t)$

$\vec{x} = (v_0 t, \frac{gt^2}{2})$

$x = v_0 t$ $\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = t^2$
$y = \frac{gt^2}{2}$ $\frac{2y}{g} = t^2$

$\frac{2y}{g} = \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$

$y = \frac{g x^2}{2 v_0^2}$ => <u>parabola</u>

$|\vec{v}| = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$

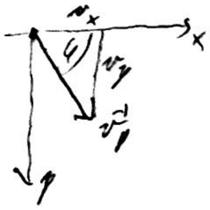
kde $y = h$
$\frac{gt^2}{2} = h$
$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$|\vec{v}|$ při dopadu $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$|\vec{v}| = \sqrt{v_0^2 + g^2 \cdot \frac{2h}{g}} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

$|\vec{v}| = \sqrt{100 + 2 \cdot 10 \cdot 30} = \sqrt{700} = \underline{10\sqrt{7}\ m \cdot s^{-1}}$

• úhel φ



$$\vec{v}\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) = \left(v_0, g\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) = \left(v_0, \sqrt{2hg}\right)$$

$$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2hg}}{v_0}\right)$$

• Poloměr křivosti R

= poloměr kružnice, když by $|\vec{v}| =$ konst.

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0} \qquad \cos^2\varphi = \frac{v_0^2}{2gh+v_0^2}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{2gh}{v_0^2}\cdot\cos^2\varphi \qquad a_n = g\cos\varphi$$

$$1 = \left(\frac{2gh}{v_0^2}+1\right)\cos^2\varphi \qquad a_n = g\frac{v_0}{\sqrt{2gh+v_0^2}}$$

− víme $a_n = \frac{v_t^2}{R}$

$$g\cdot\frac{v_0}{\sqrt{2gh+v_0^2}} = \frac{v_0^2+2gh}{R}$$

$$\cancel{R = \frac{\sqrt{v_0^2+2gh}}{v_0\cdot g}} \qquad R = \frac{1}{g v_0}\cdot\left(v_0^2+2gh\right)^{3/2} \qquad R \doteq 184{,}2\ \text{m}$$

• vzdálenost d

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad x\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) = v_0\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}} \doteq 24{,}7\ \text{m}$$

POZN.: tečné zrychlení $\vec{a} = (0; g)$ $\qquad \vec{v} = (v_0, gt)$

− projekce $\vec{a}$ ve směru $\vec{v}$ je $\vec{a}_T$

$$P_{\vec{v}}(\vec{a}) = \vec{a}_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\cdot\vec{v} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}\cdot\begin{pmatrix}v_0\\ gt\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T = \begin{pmatrix}0\\ g\end{pmatrix} - \frac{g^2 t}{(v_0^2+g^2t^2)}\begin{pmatrix}v_0\\ gt\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-g^2 t v_0\\ g - \frac{g^4 t}{g\cdot(v_0^2+g^2t^2)}\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_N = \begin{pmatrix}-g^2 t v_0\\ \frac{g\cdot(v_0^2+g^2t^2) - g}{v_0^2+g^2t^2}\end{pmatrix}$$

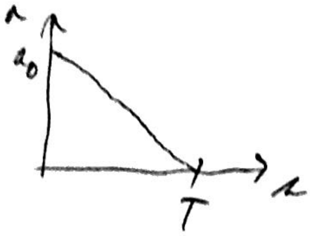
$$|\vec{a}_N| = \sqrt{(v_0 t g^2)^2}$$

$$\|\vec{a}_N\|^2 = \vec{a}_N\cdot\vec{a}_N = (\vec{a}-\vec{a}_T)\cdot(\vec{a}-\vec{a}_T) = \underbrace{\vec{a}\cdot\vec{a}}_{=g^2} - 2\vec{a}\cdot\vec{a}_T + \vec{a}_T\cdot\vec{a}_T$$

Př: Velikost zrychlení hmotného bodu při jeho přímočarém pohybu rovnoměrně klesne během $T = 20\,s$, z počáteční hodnoty $a_0 = 10\,m\cdot s^{-2}$ na 0. Bod byl v čase $t = 0\,s$ v klidu.

1) Jakou rychlost má hmotný bod v čase $T = 20\,s$?

2) Jakou vzdálenost bod urazil?



$$a = kt + q$$
$$10 = k\cdot 0 + q$$
$$q = 10$$
$$a_0 = q$$

$$0 = k\cdot 20 + 10$$
$$k = -\tfrac{1}{2}$$
$$0 = k\cdot T + a_0$$
$$k = -\frac{a_0}{T}$$

$$\Rightarrow a = -\tfrac{1}{2}t + 10$$
$$a = -\frac{a_0}{T}t + a_0$$

• rychlost $v = \int a\,dt = \frac{kt^2}{2} + qt + v_0$

$$0 = v_0 \quad \Rightarrow \quad v = -\tfrac{1}{4}t^2 + 10t \qquad v = -\frac{a_0}{2T}t^2 + a_0 t$$

$$v(20) = -\tfrac{1}{4}\cdot(20)^2 + 10\cdot 20$$
$$= -\tfrac{1}{4}\cdot 400 + 200 = 200 - 100 = 100\,m\cdot s^{-1}$$

• vzdálenost: $x = \int v\,dt = -\frac{a_0}{2T}\cdot\frac{t^3}{3} + \frac{a_0 t^2}{2} + x_0$

$$0 = x_0$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{a_0}{6T}t^3 + \frac{a_0}{2}t^2$$

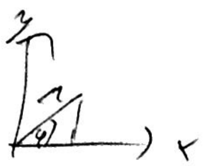
$$x(T) = -\frac{a_0}{6T}\cdot T^3 + \frac{a_0}{2}T^2 = -\frac{a_0T^2}{6} + \frac{a_0T^2}{2} = \frac{3a_0T^2 - a_0T^2}{6} = \frac{\cancel{2}a_0T^2}{\cancel{6}\,3}$$

$$x(T) = \frac{a_0T^2}{3}$$

Př.: Pohyb je popsán paramet. rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} r &= Ae^{kt} \\ \varphi &= kt \end{aligned}\right\}$$ polární souřadnice

najděte: $|\vec{v}|$, $R = R(r)$ ... poloměr křivosti, trajektorii



$$x = r\cos\varphi \qquad x = Ae^{kt}\cos(kt)$$
$$y = r\sin\varphi \qquad y = Ae^{kt}\sin(kt)$$

• trajektorie: $\cancel{x^2 + y^2 = A^2e^{2kt}[\cos^2(kt) + \sin^2(kt)]}$ $\boxed{r = Ae^{\varphi}}$ → log. spirála

$$\cancel{x^2 + y^2 = A^2e^{2kt}}$$

$r = \cancel{Ae^{kt}}$

$e^{\varphi} = \cancel{e^{kt}}$

$$v_x = Ae^{kt}\cdot k\cdot\cos(kt) - Ae^{kt}\sin(kt)\cdot k$$
$$v_y = Ae^{kt}\cdot k\cdot \overset{\sin}{\cancel{\cos}}(kt) + Ae^{kt}\cos(kt)\cdot k$$

$$v_x = Ak\cdot e^{kt}\cdot[\cos(kt) - \sin(kt)] = Ake^{kt}\cos(kt) - Ake^{kt}\sin(kt)$$

$$v_y = Ake^{kt}\cdot[\cos(kt) + \sin(kt)] = Ake^{kt}\cos(kt) + Ake^{kt}\sin(kt)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{A^2k^2e^{2kt}\cdot(\cos^2kt - 2\cos kt\sin kt + \sin^2kt) + A^2k^2e^{2kt}(\cos^2kt + 2\cos kt\sin kt + \sin^2(kt))}$$

$$= Ake^{kt}\cdot\sqrt{2\cdot(\cos^2kt + \sin^2kt)}$$

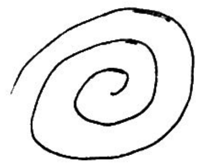
$$= \sqrt{2}Ake^{kt}$$

• poloměr křivosti:

$$v = \omega R\ ,\ \text{kde}\ \omega = \frac{d\varphi}{dt} = k$$

$$v = kR$$

$$R = \frac{v}{k} = \underline{\underline{\sqrt{2}\,Ae^{kt}}}$$



$$\varphi = \ln\frac{r}{A}$$

$$a_x = Ak^2e^{kt}\cos(kt) \mp Ak^2e^{kt}\sin(kt)$$

Derivace některých elementárních funkcí

Funkce Derivace

Polynomy

$f(x) = c$ (c je konstanta) $f'(x) = 0$

$f(x) = x^c$ (c je konstanta) $f'(x) = cx^{c-1}$

Speciálně: $f(x) = x$ $f'(x) = 1$

Mocniny, logaritmy

$f(x) = c^x$ (c je konstanta, c > 0) $f'(x) = c^x \ln c$

$f(x) = e^x$ (e je Eulerovo číslo) $f'(x) = e^x$

$f(x) = \log_a x$ (a je konstanta, a > 0, a ≠ 1) $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

$f(x) = \ln x$ $f'(x) = \frac{1}{x}$

Goniometrické funkce

$f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x$ $f'(x) = -\sin x$

$f(x) = \operatorname{tg} x$ $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$f(x) = \operatorname{cotg} x$ $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Cyklometrické funkce

$f(x) = \arcsin x$ $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \arccos x$ $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \operatorname{arctg} x$ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f(x) = \operatorname{arccotg} x$ $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Hyperbolické funkce

$f(x) = \sinh x$ $f'(x) = \cosh x$

$f(x) = \cosh x$ $f'(x) = \sinh x$

$f(x) = \operatorname{tgh} x$ $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$

$f(x) = \operatorname{cotgh} x$ (pro $x \neq 0$) $f'(x) = -\frac{1}{\sinh^2 x}$

Hyperbolometrické funkce

$f(x) = \operatorname{argsinh} x$ $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$f(x) = \operatorname{argcosh} x$ (pro x > 1) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$f(x) = \operatorname{argtgh} x$ (pro |x| < 1) $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$f(x) = \operatorname{argcotgh} x$ (pro |x| > 1) $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Pravidla derivování

Funkce	Derivace funkce	Podmínky
$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\alpha f'(x) + \beta g'(x)$	$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstanty, $f(x), g(x)$ funkce
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	$g(x) \neq 0$
$y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$	$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}$	f, f^{-1} navzájem inverzní funkce
$f(\varphi(x))$	$f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$	

Tabulkové integrály

$$\int 0\,\mathrm{d}x = c$$

$$\int a\,\mathrm{d}x = ax + c$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \text{ pro } x > 0, n \in \mathbb{R} \text{ a } n \neq -1$$

Pro <u>přirozená</u> *n* platí uvedený vztah pro všechna *x*.

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c \text{ pro } x \neq 0$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{ln(a)} + c \text{ pro } a > 0, a \neq 1$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}\,x + c \text{ pro } x \neq n\pi$$

, kde *n* je <u>celé číslo</u>.

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\,x + c \text{ pro } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

, kde *n* je <u>celé číslo</u>.

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}x + c_1 = -\mathrm{arccotg}x + c_2$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2 \text{ pro } -1 < x < 1$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c, & \text{pro } |x| \neq 1 \\ \mathrm{arctgh}x + c, & \text{pro } |x| < 1 \\ \mathrm{arccotgh}x + c & \text{pro } |x| > 1 \end{cases}$$

$$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + c$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\mathrm{d}x = -\mathrm{cotgh}x + c \text{ pro } x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{tgh}x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c = \mathrm{arcsinh}x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c, & \text{pro } |x| > 1 \\ \mathrm{arccosh}x + c, & \text{pro } |x| < 1 \end{cases}$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int k f(x)\,\mathrm{d}x = k \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

pro libovolné <u>reálné číslo</u> *k*

Pravidla pro integrování. Nechť funkce f, g mají na intervalu $\mathcal{J}$ primitivní funkce. Potom také funkce $(f+g)$, $(f-g)$ a cf, $c \in \mathbb{R}$, mají na $\mathcal{J}$ primitivní funkce a platí

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int c f(x)\,\mathrm{d}x = c \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrační metody.

Metoda přímé integrace. Provádějí se pouze základní algebraické úpravy výrazů a používají se základní integrační vzorce a pravidla.

Metoda integrace per partes.

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = u(x) & v' = v'(x) \\ u' = u'(x) & v = v(x) \end{matrix} \right| = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Metoda integrace substitucí.

- 1. způsob

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} g(x) = t \\ g'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

- 2. způsob

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} t = g(x) \\ \mathrm{d}t = g'(x)\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x = G(x) + C = \left| \begin{matrix} g(x) = t \\ x = g^{-1}(t) \end{matrix} \right| = G(g^{-1}(t)) + C$$

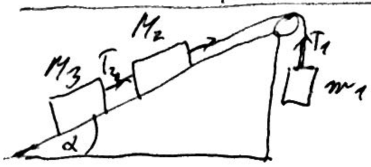
Užitečné vzorce.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{(f(x))^k}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(k-1)(f(x))^{k-1}} + C$$

Fyzika - cvičení II

Př: $\vec{a} = ?$ $T_1 = ?$, $T_2 = ?$ f



a) silový rozbor

- tíhové síly na m_1, m_2, m_3
  - pro m_2, m_3 — pohybová složka; normálová složka → třecí síly
- T_2 působí na m_3
- T_1 působí na m_1
- $(T_1 - T_2)$ působí na m_2

• Předpoklad: m_1 klesá

$$a = \frac{m_1 g - F_{p2} - F_{p3} - F_{t2} - F_{t3}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$F_p = \sin\alpha \, mg$
$F_n = \cos\alpha \cdot mg$
$F_t = f \cdot mg \cdot \cos\alpha$

$$a = \frac{m_1 g - m_2 g \sin\alpha - m_3 g \sin\alpha - f m_2 g \cos\alpha - f m_3 g \cos\alpha}{m_1 + m_2 + m_2}$$

$$a = \frac{m_1 g - g \sin\alpha \cdot (m_2 + m_3) - f g \cos\alpha \cdot (m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Pro 1. závaží: $m_1 \cdot \vec{a} = \vec{F}$
$m_1 a = m_1 g - T_1$

Pro 2. závaží: $m_2 a = T_1 - F_{p2} - F_{t2} - T_2$
$m_2 a = T_1 - T_2 - m_2 g \sin\alpha - f m_2 g \cos\alpha$

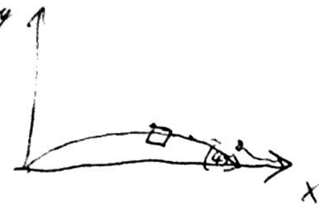
Pro 3. závaží: $m_3 a = T_2 - F_{p3} - F_{t3}$
$m_3 a = T_2 - m_3 g \sin\alpha - f m_3 g \cos\alpha$

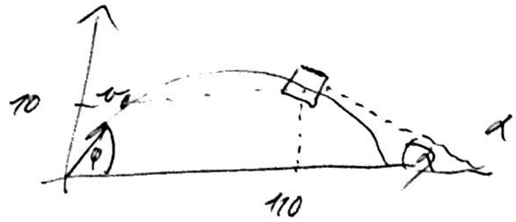
Součet: $m_1 a + m_2 a + m_3 a = m_1 g - m_2 g \sin\alpha - f m_2 g \cos\alpha - m_3 g \sin\alpha - f m_3 g \cos\alpha$

$\Rightarrow$ Tahová síla T_1: $T_1 = m_1 g - m_1 a$

Tahová síla T_2: $T_2 = m_3 a + m_3 g \sin\alpha + f m_3 g \cos\alpha$

Př:





$\alpha = 45°$

$\varphi = ?$ $\quad |\vec{v}_0| = ?$

a) trajektorie

$x = v_0 \cos\varphi \cdot t$ $\qquad v_x = v_0 \cos\varphi$ $\qquad a_x = 0$

$y = v_0 \sin\varphi \cdot t - \frac{g t^2}{2}$ $\qquad v_y = -gt + v_0 \sin\varphi$ $\qquad a_y = -g$

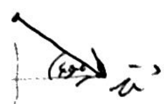
$x = v_{0x} t$ $\qquad v_x = v_{0x}$ $\qquad a_x = 0$

$y = v_{0y} t - \frac{g t^2}{2}$ $\qquad v_y = v_{0y} - gt$ $\qquad a_y = -g$

b)

$100 = v_{0x} t$

$10 = v_{0y} t - \frac{g t^2}{2}$ $\quad \wedge \quad \vec{v}(t_D) =$



$\cancel{v_x = v_y}$

$\tan\alpha = -\frac{v_x}{v_y}$ $\qquad \boxed{v_x = -v_y}$

$\tan\alpha = -\frac{v_{0x}}{(v_{0y} - gt)}$

$v_{0x} =$

$v_{0x} = gt - v_{0y}$ $\qquad t = \frac{100}{v_{0x}}$ $\qquad v_{0x} = g \cdot \frac{100}{v_{0x}} - v_{0y}$

$\cancel{\Rightarrow t = \frac{100}{v_{0x}} = \frac{100}{gt - v_{0y}}}$

$v_{0y} = g \cdot \frac{100}{v_{0x}} - v_{0x}$

$\cancel{10 = v_{0y} \cdot \frac{100}{v_{0x}} - \frac{g}{2} \cdot \frac{100^2}{v_{0x}^2}}$

$v_{0y} = \frac{100 g - v_{0x}^2}{v_{0x}}$

$10 = \frac{100 g - v_{0x}^2}{v_{0x}} \cdot \frac{100}{v_{0x}} - \frac{g}{2} \cdot \frac{100^2}{v_{0x}^2}$ $\qquad 100 = d \quad 10 = h$

$10 = \frac{200 \cdot (100 g - v_{0x}^2) - g\,100^2}{2 v_{0x}^2}$

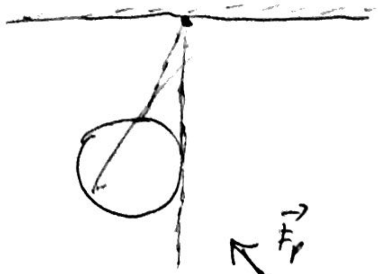
$20 v_{0x}^2 = 200 \cdot (100 g - v_{0x}^2) - g\,100^2$

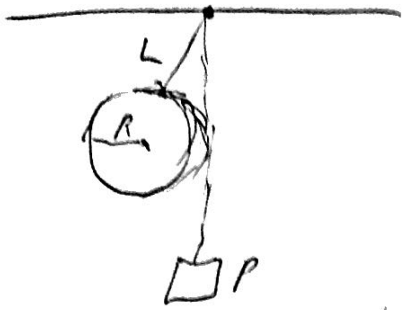
$2h v_{0x}^2 = 2d^2 g - 2d\, v_{0x}^2 - g d^2$

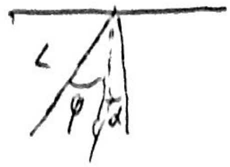
$v_{0x}^2 \cdot (2h + 2d) = 2d^2 g - g d^2$

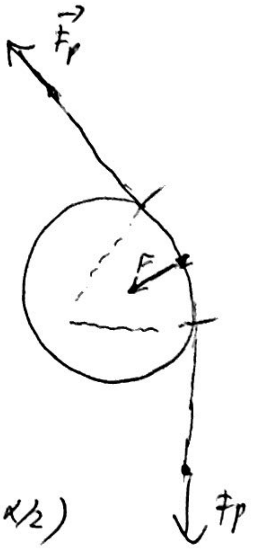
$v_{0x} = \sqrt{\frac{g \cdot (}{2 \cdot (h + d}}$ $\quad \ldots \; a^{+d}$

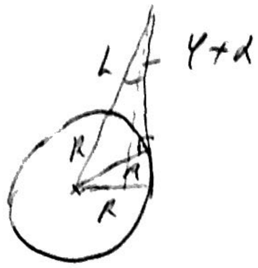
Př:





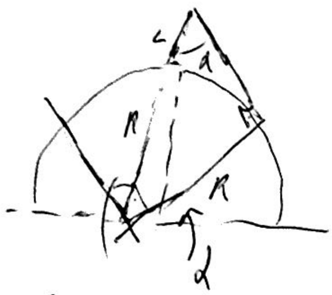




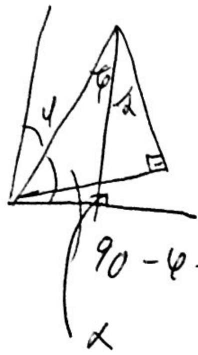


$$\sin(\varphi+\alpha) = \frac{R}{R+L}$$

$$F = 2F_p \sin(\alpha/2)$$



$90-(\alpha+\varphi)$



$90-\varphi-\alpha$

α

• Line Integrals of Vector Fields

- vec. f.: $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

- curve: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

or $$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds \quad ; \quad \vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$

• another way: $$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k})\cdot(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})\,dt$$
$$= \int_a^b Px' + Qy' + Rz'\,dt$$
$$= \int_a^b Px'\,dt + \int_a^b Qy'\,dt + \int_a^b Rz'\,dt$$
$$= \int_C P\,dx + \int_C Q\,dy + \int_C R\,dz$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

• Switching orientation:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{-C} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

• Fundamental Theorem for Line Integrals

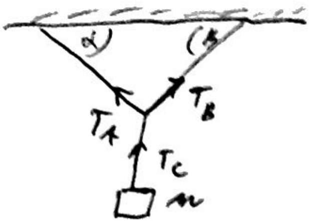
- smooth curve C, $\vec{r}(t)$, $a \le t \le b$

- function f whose ∇f is continuous on C

$$\int_C \nabla f\cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

Fyzika - cvičení III

Př: Kostka o hmotnosti m je zavěšena na 2 vláknech (viz. obr.) Jakými silami jsou vlákna napínána?



$T_C = G \qquad \vec{T_A} + \vec{T_B} = \vec{G}$

$T_C = m\cdot g$

x-ová: $T_A \cos\alpha = T_B \cos\beta$

y-ová: $T_A \sin\alpha + T_B \sin\beta = mg$

$$T_B = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} T_A$$

$$\Rightarrow T_A \sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta\, T_A = mg$$

$$T_A = \frac{mg}{\sin\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

$$T_A = \frac{mg}{\cos\alpha(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)}$$

$$T_B = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\frac{m\cdot g}{\cos\alpha\cdot(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)}$$

$$T_B = \frac{m\cdot g}{\cos\beta(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)}$$

Př: Jakou rychlostí dopadne na zem ocelová koule o hmotnosti $m = 1\,kg$ z výšky $h_1 = 100\,m$, $h_2 = 1\,km$, $h_3 = 10\,km$. Odpor vzduchu je úměrný kvadrátu rychlosti a $v_0 = 0$.

$k = 9\cdot 10^{-4}\,N s^2 m^{-2}$

$\cancel{F = mg - kv^2}$

$m\cdot\vec{a} = mg - kv^2 \Big\} \; F = G - F_o$

$m\cdot\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$

$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$

$\cancel{\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g}$

$$\frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = dt$$

$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = \int dt$$

dráha $s = v\cdot t$

$ds = v\,dt$

$dt = \frac{ds}{v}$

$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = \frac{ds}{v}$$

$$\int_0^{v} \frac{v\,dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = \int_0^h ds$$

$$\int_0^{v_0} \frac{v\,dv}{g-\frac{k}{m}v^2} = \int_0^h ds$$

$$\left.\begin{aligned} u &= g-\frac{k}{m}v^2 \\ du &= -\frac{k}{m}\cdot 2v\,dv \end{aligned}\right\} \quad \frac{-\frac{2k}{m}}{-\frac{2k}{m}} \int \frac{v\,dv}{g-\frac{k}{m}v^2} = \int_0^h ds$$

$$-\frac{m}{2k}\int \frac{1}{u}\,du = \int_0^h ds$$

$$-\frac{m}{2k}\left[\ln\left|g-\frac{k}{m}v^2\right|\right]_0^{v_0} = \left[s\right]_0^h$$

$$\left[\ln\left(g-\frac{k}{m}v^2\right)\right]_0^{v_0} = h\cdot\frac{(-2k)}{m}$$

$$\ln\left(g-\frac{k}{m}v_0^2\right)-\ln(g) = -\frac{2kh}{m} \qquad \left(\text{předpoklad: } g-\frac{k}{m}v_0^2 > 0\right)$$

$$g-\frac{k}{m}v_0^2 = e^{-\frac{2kh}{m}+\ln(g)}$$

$$g-\frac{k}{m}v_0^2 = g\cdot e^{-\frac{2kh}{m}}$$

$$\frac{k}{m}v_0^2 = g-g e^{-\frac{2kh}{m}}$$

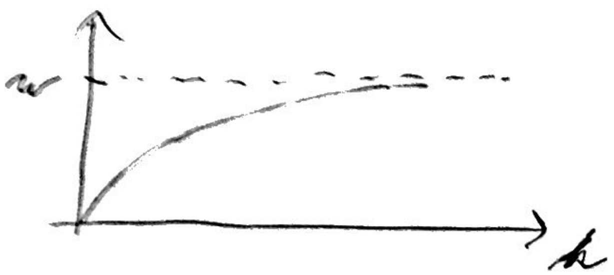
$$v_0^2 = \frac{m}{k}g\left(1-e^{-\frac{2kh}{m}}\right)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{mg}{k}\underbrace{\left(1-e^{-\frac{2kh}{m}}\right)}_{\max.=1}}$$

• graficky:

$\Rightarrow$ asymptotická rychlost $= w$

$$v_0 = \sqrt{w\left(1-e^{-\frac{2kh}{m}}\right)} \qquad w = \frac{mg}{k}$$



$k = 9\cdot10^{-4}\ \mathrm{N\,s^2\,m^{-2}}$

$w = 105\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$v_{100} = 43\ \mathrm{m/s}$

$v_{1000} = 96\ \mathrm{m/s}$

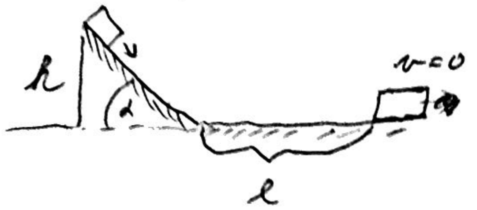
$v_{10\,000} = 105\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

• bez odporu: $v_{100} = 45\ \mathrm{m/s}$

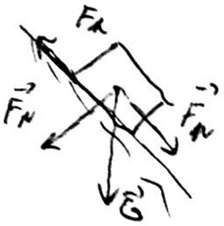
$v_{1000} = 141\ \mathrm{m/s}$

$v_{10\,000} = 447\ \mathrm{m/s}$

Př: Sáňky jedoucí ze zasněženého kopce se sklonem 15°
se po zdolání výškového rozdílu $h = 15\,m$ zastaví
na stejně zasněžené rovině ve vzdálenosti $l = 100\,m$ od úpatí kopce.
Vypočítejte koeficient smyk. tření f sáněk na sněhu.



~~f~~ $\doteq 0{,}096$



$F = F_p - F_t$

$F = mg \cdot \sin\alpha - fmg\cos\alpha$

celková práce vykonaná silami při pohybu po nakl. rov.:

~~$W = E_k$~~ $W = F \cdot d$

$\sin\alpha = \frac{h}{d}$

$d = \frac{h}{\sin\alpha}$

$$W = \frac{h}{\sin\alpha}(mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha)$$

$$W = hmg - fmg\frac{h\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Tato práce se přemění na kinetickou energii. $W = \Delta E_k$
Po uražení dráhy l po rovině klesne kinetická energie na 0.

$\Delta E_k = W_t$
práce vykonaná třecími silami na rovině ($W_t = F_t \cdot l$)

$\Delta E_k = mg \cdot f\, l$

$$h\cancel{mg} - hf\cancel{mg}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cancel{mg} f l$$

$$f \cdot \left(l + h\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = h$$

$$f = \frac{h}{l + h\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$f \doteq 0{,}096$

Př: Mějme silové pole, ve kterém platí

$$\vec{F} = 2xz\,\vec{i} + 3z^2\,\vec{j} + y^2\,\vec{k}$$

Kde x, y, z jsou souřadnice polohového vektoru $\vec{r}$.
Zvolme jako dráhu bodu Z přímku danou rovnicí: $x = 2y = 4z$
Najděte velikost práce A_{21} spojenou s posunem bodu Z z polohy $M_1 = (0,0,0)$ do $M_2 = (4,2,1)$.

a) trajektorie $x = 2y = 4z = t, \; t \in R$

$x = t$

$2y = t$

$y = \frac{t}{2}$

$4z = t$

$z = \frac{t}{4}$

parametr z M_1 do M_2: $t \in \langle 0, 4 \rangle$

$\Rightarrow \vec{r}(t) = \left(t, \frac{t}{2}, \frac{t}{4}\right)$ pro $t \in \langle 0, 4 \rangle$

b) rychlost $\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

c) vyjádřit sil. pole pomocí parametru:

$$\vec{F} = (2xz, 3z^2, y^2) = \left(2 \cdot t \cdot \frac{t}{4}, 3 \cdot \frac{t^2}{16}, \frac{t^2}{4}\right) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{3t^2}{16}, \frac{t^2}{4}\right)$$

d) práce daná vztahem:

$$W = \int_0^4 \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \int_0^4 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{3t^2}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{t^2}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) dt$$

$$W = \left[\frac{t^3}{6} + \frac{t^3}{2 \cdot 16} + \frac{t^3}{3 \cdot 16}\right]_0^4 = \frac{4^3}{6} + \frac{4^3}{2 \cdot 16} + \frac{4^3}{3 \cdot 16} = \underline{\underline{14\ \mathrm{J}}}$$

NEBO pomocí vzorce:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^4 F_x\, dx + \int_0^2 F_y\, dy + \int_0^1 F_z\, dz \qquad \vec{F} = (2xz, 3z^2, y^2)$$

$$\vec{F} = \left(2x \cdot \frac{x}{4}, \frac{3 \cdot y^2}{2}, \ldots\right)$$

$$\vec{F} = \left(\frac{x^2}{2}, \frac{3}{2} y^2, 4z^2\right)$$

$$\vec{F} = \left(\frac{x^2}{2}, \frac{3}{2} y^2, 4z^2\right)$$

$$W = \int F_x\, dx + \int F_y\, dy + F_z\, dz = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^4 + \left[\frac{y^3}{4}\right]_0^2 + \left[\frac{4z^3}{3}\right]_0^1 = \underline{\underline{14\ \mathrm{J}}}$$