Fyzika – přednáška XIII

• interpretace důležitá!

Skládání kmitů

1) stejného směru, stejné frekvence

$u_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ $u_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$

$u = u_1 + u_2$

$\Rightarrow$ amplituda $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$

fázové posunutí $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$

$u = A \sin(\omega t + \varphi)$

• NEBO: pomocí skládání fázorů: – součet dvou vektorů

$\hat{x} = A_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)}$

$\hat{x} = A_2 e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)}$

• pokud $\omega_1 \neq \omega_2$

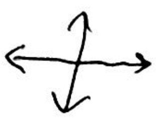
1b) Stejného směru, různé frekvence

$\varphi_1 \neq \varphi_2$, $\omega_1 \neq \omega_2$, $A_1 = A_2$

$$u = u_1 + u_2 = \underbrace{2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)}_{\text{pomalu proměnná amplituda}} \underbrace{\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}_{\text{harm. kmit. pohyb}}$$

$\Rightarrow$ rázy

2) Různého směru, 2 na sebe kolmé



$x = A_1 \sin(\omega_1 t)$

$y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0)$

• trajektorie pro $\omega_1 = \omega_2$: $y = A_2 \sin \omega t \cos \varphi_0 + A_2 \cos \omega t \sin \varphi_0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{A_1^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2} \cos \varphi_0 + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2 \varphi_0}$$ rovnice elipsy

pro $\varphi_0 = 0$ $\Rightarrow$ přímka

pro $\varphi = 90°$ $\Rightarrow$ elipsa v hlavních osách (a nebo kružnice)

• Obecně lze i zpětně: eliptické kmity ⇒ rozklad do vlastních módů

• Pro $\omega_1 \neq \omega_2$ ⇒ Lissajousovy obrazce $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_2}{n_1}$
(frekvence v poměru celých čísel)
• Pro iracionální poměr ⇒ kmity vyplní "celý obrazec" (žádný vzor?)

3) Vázané oscilátory
- mezi 2 oscilátory působí elastická vazba

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1$$
$$m\ddot{x}_2 = -kx_2$$

pokud kmitají synchroně ⇒ vazba se neprojeví
pokud $\Delta x = x_2 - x_1 \neq 0$ pak se projeví
- síla vazby: $|F_v| = k_v(x_2 - x_1)$

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k_v(x_2 - x_1)$$
$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_v(x_2 - x_1)$$

- separace proměnných: $x_2 - x_1 = \xi$
$x_2 + x_1 = X$

$$\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0 \qquad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$
$$X = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\ddot{\xi} + \left(\frac{k + 2k_v}{m}\right)\xi = 0$$
$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad \frac{k + 2k_v}{m} = \omega^2$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\xi$$
$$x_2(t) = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\xi$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{1}{2}\left(X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) - \xi_0 \cos(\omega t + \varphi)\right) \\ x_2(t) &= \tfrac{1}{2}\left(X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \xi_0 \cos(\omega t + \varphi)\right) \end{aligned}}$$

• pro konkrétní pohyb potřebujeme počáteční podmínky

$t = 0$, $x_1 = A$, $x_2 = 0$, $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$ ⇒ dosadíme (4 podmínky)

- dopočítáme $X = A$, $\xi = -A$, $\frac{dX}{dt} = \frac{d\xi}{dt} = 0$

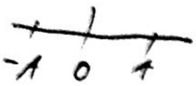
$$X(0) = X_0 \cos\varphi_0 = A \qquad \frac{dX}{dt} = -X_0\omega_0 \cos\varphi_0 = 0$$
$$\xi(0) = \xi_0 \cos\varphi = -A \qquad \frac{d\xi}{dt} = -\xi_0 \omega_0 \sin\varphi = 0$$

$\varphi = \varphi_0 = 0$
$X_0 = \xi_0 = A$ dosadíme

$$\Rightarrow x_1 = A \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right)$$
$$x_2 = A \cos\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right)$$

stejné jako rázy
- výrazy s argumentem $\frac{\omega_0 - \omega}{2}t$ se mění pomalu
⇒ zahrneme do amplitudy

• molekuly kmitají => IR spektroskopy detekují

Př: - kmitání mezi $-A, A$

- pravděpodobnost výskytu = ?

$$\Delta P = \frac{2\Delta t}{T} = \frac{2\Delta x}{v(x)T}$$

$$\rho_P(x) = \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{2}{v(x)T}$$

$\rho_P(x)$ ... hustota pravděpodobnosti
– pravděpodobnost má smysl pouze v okolí (ne v bodě)

$x = A\sin\omega t$

$v = A\omega\cos\omega t = A\omega\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\rho_P(x) = 2\cdot\frac{\omega}{2\pi}\cdot\frac{1}{A\omega}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}}$$

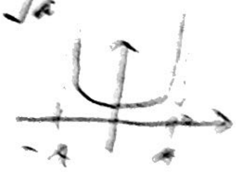
$$\rho_P(x) = \frac{1}{\pi\cdot A}\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\rho_P(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}$$

– pravděpodobnost v intervalu

$$P = \int_a^b \rho_P\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\arcsin\frac{x}{A}\right]_a^b$$

(P od $-A$ do A = 1)



Př: molekula, 2 atomy
- pot. energie: $E_p = -W_0 e^{-\alpha(r-r_0)^2}$

r ... vzdálenost dvou atomů
r_0 – rovnovážná vzdálenost

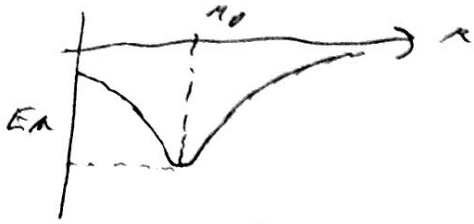
E_p graf, síly, oscilace ?

$$\frac{dE_p}{dr} = W_0 2\alpha e^{-\alpha(r-r_0)^2}\cdot(r-r_0)$$

$$\frac{d^2E_p}{dr^2} = 2W_0\alpha e^{-\alpha(r-r_0)^2} - 4W_0\alpha(r-r_0)^2 e^{-\alpha(r-r_0)^2}$$

$\frac{dE_p}{dr} = 0$
$r = r_0$ $E_p(r_0) = -W_0$

=> graf E_p



$F = -\frac{\partial E_p}{\partial r}$ síly: ↘↙ (míří k rovnovážné poloze)

=> molekula kmitá kolem rovnovážné polohy

• pro výpočet kmitů
- nahradíme $E_p(r)$ jednodušší funkcí ⇒ Taylorův rozvoj

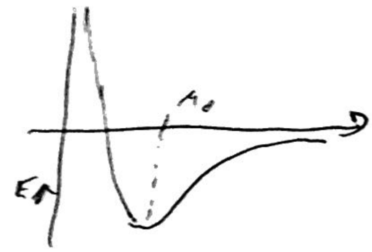
$$f(r) = f(r_0) + \sum \frac{(r-r_0)^n}{n!} f^{(n)}(r_0)$$

$$E_p W = f(r) = -W_0 + \frac{2W_0}{2} d(r-r_0)^2 + \dots$$ ← průběh v blízkosti minima

$$\Rightarrow F(r) = -2W_0 d(r-r_0)$$

$$\Rightarrow \underline{k = 2W_0 d} \quad , \quad \underline{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2W_0 d}{m}}}$$

ve skutečnosti:



Vlnění

• oscilátor vždy předává energii dál ⇒ šíří se v prostoru
⇒ "vazba" musí existovat

kinetická $E_k \sim A^2\omega^2 m$
potenciální $E_p \sim A^2\omega^2 m$
} $E \sim A^2\omega^2$

- přenáší se energie a hybnost (nepřenáší se hmota)
- šíří se konečnou rychlostí c

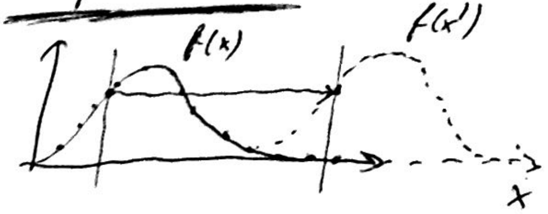
POZN: Kvantové vlnění $p = \frac{h}{\lambda}$, $\lambda = \frac{h}{mv}$

• základní vlastnost: vzájemné fázové posunutí jednotlivých bodů řady (nekmitají synchronně)

- příčné (neexistuje u plynů ~~a kapalin~~) (neexistuje uvnitř kapalin)
- podélné

• Polarizace: (pouze pro příčné)
- rovinná - kmity pouze v jedné rovině

Popis vlnění



(netlumené)

- $f(x), f(x')$ identické $\Rightarrow$ transformace $x \to x - ct$

$\Rightarrow$ vlnová funkce u, závisí na x, t, tzn $u = u(x,t)$

c … fázová rychlost

$u = f(x \mp ct)$ — $f(x-ct)$ směr kladné osy x; $f(x+ct)$ směr záporné osy x

NEBO

$u = g(t \mp \frac{x}{c})$

Shrnutí: v argumentu: časová a prostorová souřadnice se vyskytují výhradně v lin. komb. $x \mp ct$, resp. $t \mp \frac{x}{c}$

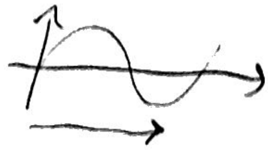
(záporné znaménko $\Rightarrow$ šíření v kladném směru x)

Fyzika – přednáška XIII

$* \quad u(x,t) = f(x \mp ct)$

$\qquad\quad = f(t \mp \frac{x}{c})$

• v bodě: $u_0(t) = A \sin \omega t$

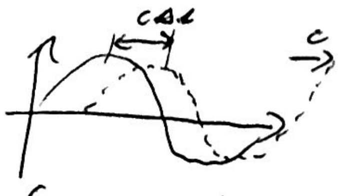


zpoždění: ct

$t = \frac{x}{c}$

$\Rightarrow u(x,t) = u_0(t - \frac{x}{c}) = A \cdot \sin(\omega(t - \frac{x}{c}))$

• postupná vlna



$u(x,t) = A \sin(k(x - ct))$ $\qquad k$... aby bylo bezrozměrné

$x \to x + \lambda \quad \to A \sin(kx + k\lambda - ct)$

$|k\lambda| = 2\pi$, $k > 0$, $\lambda > 0$

$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$ ... nazýváme vlnové číslo, vlnočet

$t \to t + T \quad \to A \sin(kx - kct - kcT)$

$kcT = 2\pi$

$cT = \lambda$

$\boxed{c = \lambda \cdot \nu}$, kde $T = \frac{1}{\nu}$ nebo $\omega = 2\pi\nu$

$\frac{2\pi}{\lambda} = k \qquad \boxed{c = \frac{\omega}{k}}$

c ... fázová rychlost

$\Rightarrow u(x,t) = A \sin(kx \mp \omega t + \varphi_0)$

$\boxed{u(x,t) = A \sin(kx \mp \omega t + \varphi_0)}$ nebo $A \sin(2\pi(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{T}) + \varphi_0)$

Komplexní zápis: $\boxed{\hat{A} e^{i(kx \mp \omega t)}}$ $\boxed{\hat{A} = A e^{i\varphi_0}}$

• složitější vlna může být dána superpozicí ~~tzv~~ harmonických vln

– např.: $A e^{-b(x-ct)^2}$ je také vlna, neharmonická

Fáze vlny $\varphi = kx - \omega t + \varphi_0$

- v prostoru : **vlnoplocha** = množina bodů se stejnou fází

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

$$k\frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = c$$

- v malé oblasti lze nahradit rovinou

⇒ **"rovinná vlna"** , paprsek je vždy kolmý na vlnoplochu

- platí $\vec{n} \cdot \vec{x} = d$, postup ve směru $\vec{n}$

$$u(\vec{x}, t) = A e^{i(k\vec{n}\cdot\vec{x} - \omega t)} = A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$, kde $\vec{k} = \vec{n} k = \vec{n}\frac{2\pi}{\lambda}$

= **vlnový vektor**

(stálá amplituda)

- Vlnu libovolného typu lze získat jako superpozici rovinných vln.

Sférická vlna

- dostatečně daleko lze nahradit rovinou
- energie klesá $\sim \frac{1}{r^2}$ ⇒ amplituda klesá $\sim \frac{1}{r}$

$$\boxed{u(r,t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}}$$

$$u = f(t \mp \tfrac{x}{c}) = f(s)$$

$$\underbrace{t \mp \tfrac{x}{c}}_{s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \left(-\frac{1}{c}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \cdot \frac{1}{c^2}$$

• porovnáme: $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$ Vlnová rovnice (1rozměrná)

- obecné řešení $u = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$

! nedává jednoznačné řešení!

• zobecnění: $u(\vec{n} \cdot \vec{x} \mp ct) \to u\left(\sum a_i x_i \mp ct\right)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= a_2^2 \dots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} &= a_3^2 \dots \end{aligned}\right\} \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \underbrace{\left(\sum a_i^2\right)}_{\text{směrové kosiny} \Rightarrow = 1} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\Delta u = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

Δ ... Laplaceův operátor

platí $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$

• popisuje netlumené vlnění

(jinak pro sférickou vlnu

Vlnová rovnice

- lineární, platí princip superpozice
- každou vlnu lze rozložit na rovinné vlny
- rychlost šíření závisí na frekvenci ω

POZN: "disperze prostředí"

Interference vlnění

d ... dráhový rozdíl , platí $\frac{d}{\lambda}$ ... relativní dráh. rozdíl

$\frac{d}{\lambda} \cdot 2\pi$ ... fázový rozdíl (v radiánech)

$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x}$

- inter. maxima $\Delta\varphi = 2\pi n$ $\quad \Delta x = n\lambda$
- inter. minima $\Delta\varphi = (2n+1)\pi$ $\quad \Delta x = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$

• Interference dvou vln stejné frekvence

$\Rightarrow u = A\cos(\cancel{\omega t} - kx + \varphi)$ $\qquad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$

$u = u_1 + u_2$ $\qquad \tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$

Stojaté vlnění

- 2 stejné vlny , šíří se proti sobě (vznik odrazem)

$\boxed{u = u_1 + u_2 = \underbrace{2A_0 \cos(kx)}_{\text{amplituda ... závisí na místě } x} \sin(\omega t)}$

- nepřenáší energii

- kmitny $x = n\frac{\lambda}{2}$ $\quad \cos kx = \pm 1$
- uzly $x = (2n-1)\frac{\lambda}{2}$ $\quad \cos kx = 0$

Odraz

- pevný konec - odraz s opačnou fází $\Delta\varphi = \pm\pi$
- volný konec - odraz se stejnou fází $\Delta\varphi = 0$

Vlny v ohraničené oblasti

- vlastní módy

(na koncích uzly)

Oba konce pevné $L = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L}$, základní: $f_1 = \frac{c}{2L}$

oba konce volné (na koncích kmitny)

jeden pevný, druhý volný $L = (2n-1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow f_n = \frac{c}{\lambda_n} = (2n-1)\frac{c}{4L}$, základní $f_1 = \frac{c}{4L}$

- f závisí na délce i rychlosti

f_n ... vlastní módy

- módy se mohou sčítat

Huygensův - Fresnelův princip

Lom a odraz vlnění

$\boxed{\alpha = \alpha'}$ $\boxed{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{c_2}{c_1}}$

Úplný odraz

- mezní: $\sin\alpha_m = \frac{c_1}{c_2} = n_{12}$
- nenastane lom

- rychlosti podélných c_L a příčných c_P vln se liší

Difrakce (ohyb)

- z Huygensova principu

Fyzika - přednáška XIV

- opakování:
  - vlny
  - vlnoplocha
  - vlnová rovnice
  - interference

Dopplerův jev

- frekvence přijímané vlnění závisí na vzájemném pohybu zdroje a pozorovatele

a) pohyb zdroje, pozorovatel v klidu

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda - \Delta\lambda} \qquad v_z T = \Delta\lambda$$

$$\Rightarrow f' = \frac{c}{\lambda - v_z T} = f \cdot \frac{c}{c - v_z} \qquad \boxed{f' = f \cdot \frac{c}{c - v_z}}$$

b) zdroj v klidu, pozorovatel pohyb

$$f' = \frac{c + v_p}{\lambda} = f \, \frac{c + v_p}{c}$$

c) kolineace: $\boxed{f' = f \, \frac{c + v_p}{c - v_z}}$

- pohyb šikmo: $\boxed{f' = f \, \frac{c + v_p \cos\alpha_p}{c - v_z \cos\alpha_z}}$ v_p, v_z kladné, pokud se přibližují

- pohyb prostředí frekvenci nemění
- pokud $c + v_p = c - v_z$, pak se frekvence nezmění
- Aplikace
- Optický Dopplerův jev - jiné vzorce

POZN: pokud v_z blízká c, $v_z = c$ $\Rightarrow$ zahuštění vlnoploch $\Rightarrow$ vzniká nejvyšší "lokální tlak" $\Rightarrow$ rázová vlna

Rychlost vlny na struně

- oblouk aproximujeme kružnicí
- soustava souřadnic spojená s kružnicí

- na úsek Δl působí síly $\vec{F}$ (napínání)
  - rozložíme na: tečné složky / normálové složky

- pro velikost (normálové) $F = 2 \cdot F \sin\Theta \approx 2F\Theta = \cancel{2}F \cdot \frac{\Delta l}{R}$

- odstředivá síla $F_0 = \Delta m . a = \Delta l . \rho \frac{c^2}{R}$, kde ρ je délková hustota

$\Rightarrow \Delta l \rho \frac{c^2}{R} = F \frac{\Delta l}{R}$

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{F}{\rho}}}$$

ρ... délková hustota
F... velikost síly napínání

• pro základní harm. vlnu

$f_1 = \frac{c}{2L}$

$\left(c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}\right.$, kde

Rychlost vlny v tyči

- odvodíme později, platí: $\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$, E... Youngův modul, ρ... hustota

Energie vlnění

- platí $E \sim A^2, \omega^2$

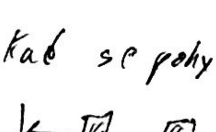
Zářivý tok = "výkon" $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$ $\boxed{\langle P \rangle = \frac{\langle E \rangle}{\Delta t}}$ ... průměrný výkon

$$\boxed{P = \frac{dE}{dt}}$$

• hustota energie: $\boxed{w = \frac{\Delta E}{\Delta V}} \rightarrow w = \frac{dE}{dV}$

• platí $\cancel{\langle E \rangle =}\ w$

• pokud se pohybuje: $\langle E \rangle = w\, c\, \Delta t . S_{\perp}$



Intenzita vlnění

$$\boxed{I = \frac{\langle E\rangle}{S_\perp \Delta t} = \langle c w\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T c w \, dt}$$

(neboť $\langle E\rangle = w S_\perp c \Delta t$)

Energie na struně

- počítáme energii pro dm

$$dE = \frac{1}{2} dm\, v^2 = \underbrace{\frac{1}{2} dm\, A^2\omega^2}_{\text{energie harmonic. oscilátoru dm}}$$

$$dE = \frac{1}{2} \rho_l \cdot dx\, A^2\omega^2$$, ρ_l ... délková hustota

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \rho_l A^2\omega^2 \frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \rho_l A^2\omega^2 \cdot c}$$

- Analogicky pro vzduchový sloupec

- hustota ρ, objem V $\quad dE = \frac{1}{2} dm\, \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho S\, dx\, \omega^2 A^2$

$$I = \frac{1}{S}\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 A^2$$

- Zavádíme hladina intenzity $\boxed{B = 10 \log \frac{I}{I_0}}$

I_0 ... referenční hladina

- práh slyšitelnosti $I_0 = 10^{-12}\, W m^{-2}$

- Energie přenášená mech. vln
  - odvodíme později

Grupová rychlost

- při 2 vlny, podobné frekvence

$u_1 = u_0 \cos[\omega_1 t - k_1 x]$ $\quad u_2 = u_0 \cos[\omega_2 t - k_2 x]$

$$u = u_1 + u_2 = 2u_0 \cos\left[\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t - \frac{k_2-k_1}{2}x\right]\cos\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{k_1+k_2}{2}x\right]$$

$$u \doteq 2u_0 \cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right]\cos[\omega t - kx] = \underbrace{2u_0\cos\left[\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta k}t - x\right)\frac{\Delta k}{2}\right]}_{\text{amplituda vlny}}\cos\left[\left(\frac{\omega}{k}t - x\right)k\right]$$

- platí $\boxed{c = \frac{\omega}{k}}$
- označíme $c_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$

$\boxed{c_g = \frac{d\omega}{dk}}$ grupová vlna, (fázová rychlost $c = \frac{\omega}{k}$)

- ~~Ener~~ $I \sim A^2 \Rightarrow$ $\boxed{\text{energie se šíří grupovou rychlostí}}$
- Pozn: "vlnový balík"

- lze získat superpozicí harm. vln

- pro $\omega_1 = \omega_2$ je $c_g = c$

  jinak pro $\omega_1 \neq \omega_2$ jsou c_g, c různé

- Grupová rychlost obecně
  - vynecháme, viz Kvasnica 387
  - pozn: pro částice $\lambda = \frac{h}{mv}$ $\left\{ \begin{array}{l} \Delta x \text{ velké}, \Delta \lambda \text{ malé} \\ \Delta x \text{ malé}, \Delta \lambda \text{ velké} \end{array} \right.$

  - platí: $\Delta\lambda \Delta k \geq h$

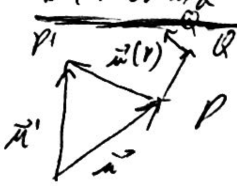
Kontinuum

- nerozlišujeme strukturu → "spojité prostředí"
- část kontinua = oblast malých rozměrů, neprojeví se struktura

1. Eulerova metoda
   - 1 pevný bod
   - sledujeme jeho vlastnosti

2. Lagrangeova metoda
   - 1 materiálový bod (částice kontinua)
   - sledujeme jeho pobyt v čase

Deformace



$\vec{u}(P)$... vektor posunutí bodu P

- obecně: $\vec{u}(P) \neq \vec{u}(Q)$

• platí $\boxed{\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}}$

$\boxed{\vec{u}(Q) = \vec{u}(P) + d\vec{u}}$

↖ deformace kontinua

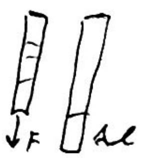
• mění se vzájemná vzdálenost

Př: deformace tyče protahováním

Př: "Koule" v kvádru ⇒ "elipsoid"
- prodloužení
- zúžení
- smyk

• když "elipsoid" vyndáme, vrátí se do "koule" (důsledek vnitřních sil)
- nepůsobí pouze normálové síly
- působí i tečné síly

• Tyč protáhneme:



$\Delta l \sim l$, $\Delta l \sim \frac{1}{S}$, $\Delta l \sim F$ (elastická deformace)

$\Rightarrow \Delta l \sim \frac{l}{S} F$, označíme $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$, $\frac{F}{S} = \sigma$

$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon}$, kde E... Youngův modul pružnosti

↑ Hookův zákon - platí pro elastickou def.

• Obdobné příčné zkrácení:

$\eta = -\frac{\Delta a}{a}$, kde $\Delta a = a' - a$; platí: $\eta = k_1 \sigma = k_1 E \varepsilon = \nu \varepsilon = \frac{\varepsilon}{m} = \frac{1}{mE}\sigma$

m... Poissonova konstanta, $\nu = \frac{1}{m}$ ... Poissonovo číslo

• Platí $\boxed{\begin{array}{l} l' = l(1+\varepsilon) \\ a' = a(1-\eta) \end{array}}$

• Objemová deformace

- na hranol působí síly ve všech směrech x, y, z

$$a' = a(1+\varepsilon - \eta - \eta) = a\cdot(1+\varepsilon-2\eta) \quad \text{pro} \ \forall \ 3 \ \text{hrany}$$

$\Rightarrow$ Objem $V' = a'b'c' = abc\,(1+\varepsilon-2\eta)^3$

- pro malé změny zanedbáme vyšší mocniny

$$\Rightarrow V' = V\cdot\left[1+3(\varepsilon-2\eta)\right]$$

označíme $\dfrac{V'-V}{V} = \dfrac{\Delta V}{V} = 3(\varepsilon-2\eta)$

• Znaménková konvence:

pro síly ven $\Rightarrow$ kladné $\sigma > 0$ (platí i pro tlak)

pro síly dovnitř $\Rightarrow$ záporné $\sigma < 0$ $(\sigma_n = -\sigma)$

$$\frac{V'-V}{V} = \underbrace{\frac{3(m-2)}{mE}}_{\varkappa}\ \underbrace{\sigma_n}_{-p}$$

$$\varkappa = -\frac{1}{p}\frac{\Delta V}{V}$$

modul objem. pružnosti:

$$\boxed{K = \frac{1}{\varkappa} = \frac{mE}{3(m-2)} = \frac{E}{3(1-2\nu)}}$$

$K > 0 \Rightarrow m > 2$

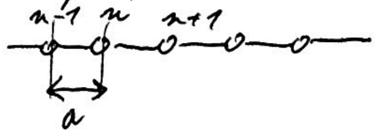
• Smyk – charakterizujeme úhlem α

$\tan\alpha \approx \alpha = \frac{u}{v} \sim \sigma_n$ $\boxed{\sigma_n = G\alpha}$ G... modul pružnosti ve smyku

- lze odvodit $\boxed{G = \frac{mE}{2(m+1)}}$

Fyzika - přednáška

- POZN: grupová rychlost

Př: 

- korálky na niti
- kmitají, pružná vazba => vlna
- polohy: x_{n-1}, x_n, x_{n+1}

=> pohybová rovnice:

$$F_n = -C(x_n - x_{n-1}) - C(x_n - x_{n+1}) \quad \text{(ostatní působení zanedbáme)}$$

$$F_n = -C(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = m\ddot{x}_n$$

=> řešení $\boxed{x = x_0 e^{i(nka - \omega t)}}$

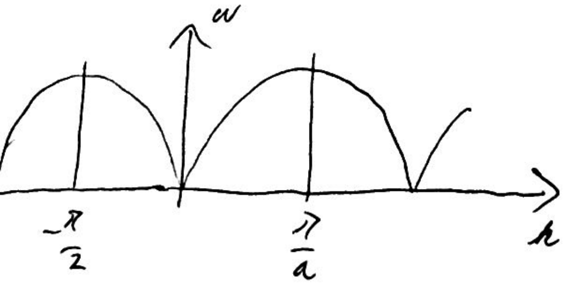
- dosadíme pro ověření

$$F_n = -Cx_0\left(2e^{i(\dots)} \underbrace{- e^{-ika} - e^{ika}}\right)e^{i(nka-\omega t)} = m \cdot i^2\omega^2 e^{i(\dots)}$$

$$C(2 - 2\cos(ka)) = m\omega^2, \text{ platí } \omega^2 = \frac{C}{m}$$

$$\omega^2 = 4\frac{C}{m}\sin^2\frac{ka}{2}$$

možné frekvence, které se mohou šířit → $\boxed{\omega = 2\sqrt{\frac{C}{m}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right|}$



- omezíme se na $\frac{ka}{2} = \frac{\pi}{2}$ interval

tj $k \in \left\{-\frac{\pi}{a}; \frac{\pi}{a}\right\}$

- platí $\omega_{max} = 2\sqrt{\frac{C}{m}}$ $\quad\left(k = \frac{\pi}{a}\right)$

- pro malý argument $ka \ll 1$

=> $\lambda \gg a$ "přiblížení dlouhých vln"

=> $\omega = a\sqrt{\frac{C}{m}} \cdot ka$

$\omega = a\cdot\sqrt{\frac{C}{m}} \cdot k$ ← vztah mezi ω, k stejný jako pro vlnu na struně

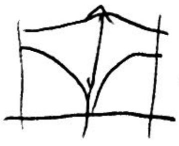
- pro $\frac{\pi}{a} = k$ odpovídá $\lambda_{min} = 2a$

- grupová rychlost

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = a\sqrt{\frac{C}{m}}\cos\frac{ka}{2}$$

- pro malý argument $ka \ll 1$ => opět "přiblížení dlouhých vln"

- "akustická větev", 1. Brillouinova zóna



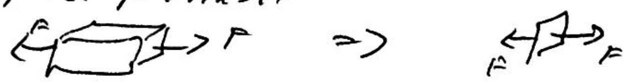
- vektor posunutí ~ liší se od místa k místu
- Síly v kontinuu: vnitřní × vnější; objemové × povrchové

~~a) objemové~~

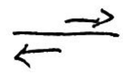
- Plošné (povrchové) síly – zodpovědné za deformaci
  - charakterizuje plošná hustota povrch. síly

$$\boxed{\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}_p}{dS}} = \text{napětí}$$

- na plošku ΔS působí síly z obou stran $\quad \sigma = \frac{\Delta F}{\Delta S}$
- síly lze přenášet



  - stejně pro tečné síly



- Platí: Saint Venantův princip
  - nezávisí na tom, jak je síla realizovaná
  - v dostatečné vzdálenosti od působiště ji můžeme nahradit
- Každou sílu rozložíme na tečnou a kolmou složku

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_n = \frac{d\vec{F}_n}{dS}} \quad \boxed{\vec{\sigma}_t = \frac{d\vec{F}_t}{dS}}$$

- znaménková konvence: a) F ven $\sigma > 0$ (tah)
  b) F dovnitř $\sigma < 0$ (tlak)
  - POZN pro tlak platí $p = -\sigma$ pro $\sigma < 0$ (p je vždy kladné)
- Napětí $\vec{\sigma}$ závisí na orientaci plošky
  - v bodě P existuje ∞ mnoho plošek
- Známe-li $\vec{\sigma}$ na 3 různých ploškách v bodě P
  $\Rightarrow$ lze vypočítat $\vec{\sigma}$ ve všech směrech

• Postup: - zvolíme 3 kolmé směry v P
- na každé plošce určíme tečné a normálové napětí

a) ploška $\perp x_1$, $\Delta S_1 = \Delta x_2 \, \Delta x_3$

$\sigma_{11} = \Delta F_1^{(1)} / \Delta S_1$

$\sigma_{12} = \Delta F_2^{(1)} / \Delta S_1$

$\sigma_{13} = \Delta F_3^{(1)} / \Delta S_1$

obdobně pro další 2 plošky
⇒ 9 výrazů

σ_{ij} ← "index síly"
↑
"index plochy"

~~$\sigma_{ij} = \Delta F_j^{(1)}$~~

$\sigma_{ij} = \dfrac{\Delta F_j^{(i)}}{\Delta S_i}$

⇒ tenzor napětí

$$\boxed{\sigma_{ij} = \frac{\partial F_j^{(i)}}{\partial S_i}}$$

• $\sigma_{ij} = f(\vec{r})$ ⇒ tenzorové pole

• Fyzikální význam: σ_{ii} tah ($\sigma_{ii} > 0$), tlak ($\sigma_{ii} < 0$)
σ_{ij}, $i \neq j$ smyk

• Rovnováha deformovaného tělesa
- rovnováha sil $\sigma_{11} = -\sigma_{11}'$ atd, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}'$
rovnováha momentů sil: $M_3 = \frac{1}{2}(a\,\sigma_{12} - a\,\sigma_{21})\,a^2 = 0$
- tzn. $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ atd

⇒ $\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$ tenzor druhého řádu

- tenzor je symetrický
⇒ lze interpretovat pomocí elipsoidu → 3 hlavní osy

• tento tenzor závisí na způsobu aplikace sil
(ostatní tenzory jiné)

Vektor napětí

• známe tenzor, chceme napětí
→ rovnováha sil na čtyřstěnu

$F_1^{(n)} = \sigma_{11}\Delta S_1 + \sigma_{21}\Delta S_2 + \sigma_{31}\Delta S_3$

⇒ $\dfrac{F_1^{(n)}}{\Delta S} = \sigma_1^{(n)} = \sum \sigma_{i1} n_i$

• maticový zápis $\vec{\sigma}^{(\vec{n})} = \hat{\sigma}\,\vec{n}$

• příklady tenzorů napětí ; $\boxed{\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij}}$, $p > 0$

Deformace:

- protažení $\frac{\Delta l}{l} = \frac{u_1}{x_1} = \varepsilon_{11}$ } protažení ve směru x
  (posunutí)

$\Rightarrow \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ .. relativní změna délky

- smyk

{ smyk v ose x α
smyk v ose y β } buď rotace / deformace

- smyková deformace: $\tan\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} = \frac{u_1}{x_2} = \varepsilon_{12}$ $\quad \frac{\alpha}{2} = \frac{u_2}{x_1} = \varepsilon_{21}$
- lokální deformace v bodě P: $\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ $\quad \varepsilon_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ atd...
  - obecně $\boxed{e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$ normála ke směru posunutí

    směr posunutí
- pokud $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} \Rightarrow$ homogenní rotace
- platí $e_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}}{2}$

$\Rightarrow$ tenzor malých deformací $\boxed{e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}$

→ tenzor je symetrický, 6 nezávislých složek

[složky na diagonále = změna rel. délky
složky mimo = souvisí s úhly při smykové deformaci

Tenzor rychlosti deformace

$\boxed{D_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} e_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$

- rychlost v okolí bodu x_j

$v_i(x_j + dx_j, t) = v_i(x_j, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \underbrace{+ \dots}_{\text{zanedbáme}}$ (Taylorův rozvoj)

$= \underbrace{v_i(x_j, t)}_{\text{rychlost translace}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\qquad)}_{\text{rychlost rotace}} + \underbrace{\qquad}_{\text{rychlost deformace}}$

Helmholtzova věta

- operátor rotace: $\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{v} = \nabla \times \vec{v}}$

$$(\nabla \times \vec{v})_1 = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) \text{ atd...}$$

Pohybová rovnice kontinua

- rovnováha: - objemové síly kompenzovány plošnými silami

$$\vec{F_V} + \vec{F_S} = 0$$

pohyb: $\vec{F_V} + \vec{F_S} = m\vec{a}$

$$\boxed{\int_V \rho \vec{E}\, dV + \oint_{S(V)} \vec{\sigma}\, dS = \int_V \rho \frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\, dV}$$

$$\int_V d\vec{F_V} = \int_V \vec{E}\, dm = \int_V \rho \vec{E}\, dV$$

$$\int_{S(V)} d\vec{F_S} = \int_{S(V)} \vec{\sigma}\, dS$$

$$\int dm\, a = \int \frac{d^2 u}{dt^2} \rho\, dV$$

Rovnice rovnováhy kontinua:

- rovnováha sil na kvádr konečného objemu

$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{V}$ ... objemová síla

$$(\vec{\sigma}^{(1)} - \vec{\sigma}'^{(1)}) a_2 a_3 + \ldots + \ldots + \vec{G} a_1 a_2 a_3 = 0$$

- rozepsáno do složek

$$(\sigma_{11} - \sigma_{11}') a_2 a_3 + (\sigma_{21} - \sigma_{21}') a_1 a_3 + (\sigma_{31} - \sigma_{31}') a_2 a_3 + G_1 a_1 a_2 a_3 = 0 \;/ : a_1 a_2 a_3$$

- věta o střední hodnotě

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{11} - \sigma_{11}'}{a_1} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + G_{1} = 0$$

(analogicky pro ostatní ~~n~~ složky)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + G_j = 0} \qquad \boxed{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + G_j = \rho \frac{d^2 u_j}{dt^2}}$$