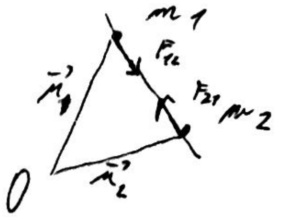
Fyzika – přednáška VII

• Hmotný střed: $\vec{r}_s = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{1}{M}\int \rho \, dV$

$\vec{v}_s = \frac{1}{n}\sum m_i \vec{v}_i \dots$

• Výsledný moment sil vnitřních sil soustavy

– je nulový (vzhledem k libovolnému bodu v prostoru)



$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{r}'$, $\vec{r}'$ je vektor spojující 1 a 2

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$

$\vec{M}_1 - \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 0$

$= \cancel{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times F}$

$|M| = r \sin\alpha \cdot F$

$|M| = d \cdot F$

kde d je kolmá vzdálenost k vektorové přímce $\vec{F}$ = rameno síly

$\boxed{\vec{M}^I = \sum \vec{M}_i = 0}$ (~~může nastat dvojice sil~~ F_1 $\vec{F}_2$?)

• platí: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{M}_i^I + \sum \vec{M}_i^E = \vec{M}^E$

$$\boxed{\vec{M}^E = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

2. věta impulsová – čas. změna $\vec{L}$ (vzhledem k lib. bodu) je rovna celkovému momentu vnějších sil

Pozn.: $M_3 = x_1 F_2 - x_2 F_1$ (v rovině)

• obě impulzové věty platí obecně

Zákon zachování celkového momentu hybnosti

– v izol. soustavě ($M^E = 0$) se $\vec{L}$ zachovává

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = konst}$$

Celková kinetická energie

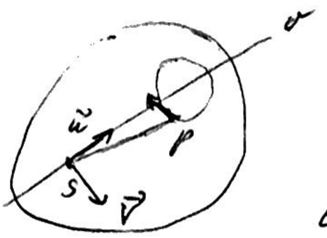
$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$, mění se konáním práce

$$W = \sum_{i=1}^{N} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W = \sum (E_k^B - E_k^A)$$

$$W = E^B_{k,celk.} - E^A_{k,celk.}$$

- Vnitřní síly mohou měnit kinetickou energii
  ⇒ W je práce vykonaná vnějšími a vnitřními silami
- Jsou-li vnitřní a vnější síly konzervativní, je součet P.E. a K.E konstantní – **zákon zachování mechanické energie**



rychlost nějakého bodu v tělese:

$$\vec{v}_i = \vec{V}_S + \vec{v}_i^{(s)}$$

(rel. rychlost vůči hmot. středu)

$$E_k = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (V_S + v_i^{(s)})^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} M V_S^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \sum m_i v_i^{2(s)}}_{E_k \text{ vůči } S} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2 \sum m_i V_S v_i^{(s)}}_{\text{rovno nule}}$$

$$\cancel{E_k = \frac{1}{2} M V_S^2}$$

$$V_S \cdot \underbrace{\sum m_i v_i^{(s)}} = 0$$

"pohyb hmotného středu vůči hmotnému středu"

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} M V_S^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2}$$

translační pohyb HS.

energie ~~rot~~ pohybu všech bodů vůči hmot. středu

= **Věta o rozkladu K.E. (Königova věta)**

Př: těleso se otáčí kolem stálé osy, bez translačního pohybu

$$\vec{V}_s = 0 \qquad \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum \omega^2 m_i r_i^2 \sin^2 \alpha_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum \underbrace{m_i R_i^2}_{\text{moment setrvačnosti}}$$

α ... úhel mezi průvodičem $\vec{r}_i$ a osou $\vec{\omega}$

$$\Rightarrow \boxed{E_k = \frac{1}{2} J_0 \omega^2} \qquad J_0 = \sum m_i R_i^2$$

R_i ... kolmé vzdálenosti bodů od osy rotace

$$J_0 = \int R^2 \, dm$$

$$\boxed{J_0 = \int R^2 \rho \, dV}$$

J_0 ... moment setrvačnosti vůči pevné ose

Př: Obecný posuvný a rotační pohyb

- předpoklad: osa rotace prochází hmot. středem

$$\vec{v}_i = \vec{V}_s + \vec{v}_i^{(s)}, \quad \text{kde } \vec{v}_i^{(s)} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i^{(s)} \text{ je rychlost vůči H.S.}$$

$$E_{k_{tr}}^{rot} = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_i^{(s)})^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i^{(s)})^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \omega^2 r_i^{(s)2} \sin^2 \alpha$$

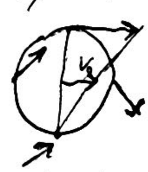
$$\boxed{E_k^{rot} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 R_i^{(s)2}}$$

$J_s = \sum m_i R_i^{(s)2}$ ... moment setrvačnosti vůči ose procházející hmot. středem

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} M V_s^2 + \frac{1}{2} J_s \omega^2}$$

- Libovolný pohyb t.t. lze rozložit na ∞ malé přímočaré translace + rotace kolem okamžité osy otáčení procházející lib. bodem v tělese.

např:



např. vůči tomuto bodu (považujeme jeho $\vec{v} = 0$)

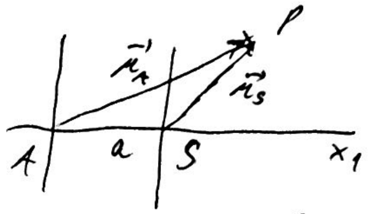
Steinerova věta

- osa rotace neprochází hmot. středem
- osa rotace je ∥ k ose původní

$$J_A = \int r_A^2\,dm = \int \left((a+x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2\right)dm = \int a^2\,dm + \int \sum_1^3 x_i^2\,dm + \int 2ax_1\,dm$$

$$= Ma^2 + \int r_S^2\,dm + \underbrace{2aMx_1^{(S)}}_{0}$$

$\boxed{J_A = J_S + Ma^2}$ (J_S je minimální pro osu jdoucí hmot. středem)



Př: J tyče, osa ~~středem~~ počátkem tyče

$$J = \int x^2\,dm = \int x^2 \varrho(x)\,dx = \varrho(x) \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2\,dx$$

$$J = \frac{1}{3}\varrho l^3 = \frac{1}{3} m l^2$$

$$\underline{\underline{J = \frac{1}{3} m l^2}}$$

Př: ~~skrz~~ střed

$$\cancel{J = \frac{1}{3} m l^2 + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{1}{3} m l^2 + \frac{m l^2}{4}$$

$$\cancel{J = \frac{1}{12}}$$

Př: válec

$$dV = 2\pi r\,dr\,l \qquad J = \int x^2 \varrho\,dx = \varrho \int_0^R x^2\, 2\pi x\, l\,dx$$

$$\underline{\underline{J = \frac{1}{2} m R^2}}$$ moment setrvačnosti válce vůči ose proch. středem

(dutý $J = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$?)

Zjednodušení soustav sil

Jak $\vec{F}$ způsobí pohyb?

→ sílu $\vec{F}$ rozložíme na část způsobující translační pohyb a část způsobující rotaci

a) volba referenčního bodu

$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{l}$ $\quad \vec{M}^E = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E$

$\vec{M}'^E = \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^E = \vec{M}^E - \vec{l} \times \vec{F}^E$

$$\boxed{\vec{M}'^E = \vec{M}^E - \vec{l} \times \vec{F}^E}$$

pokud $\vec{F}^E = 0$, potom $\vec{M}^E = \vec{M}'^E$

pokud $\vec{l} \parallel \vec{F}^E$, potom $\vec{M}^E = \vec{M}'^E$

} v těchto případech nezáleží na volbě referenčního bodu

b) přenesení působiště síly – podél přímky p

– platí $\vec{M}^E = \vec{M}'^E$

(i když působí více sil → lze posunout do průsečíku, sečíst, výslednici posunout libovolně)

c) dvojice sil – stejné, opačně orientované $-\vec{F}_A = \vec{F}_B$

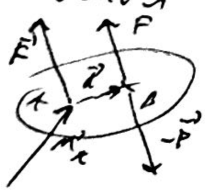
$\vec{M}^A + \vec{M}^B = \vec{r}^A \times \vec{F} + \vec{r}^B \times (-\vec{F}) = \vec{d} \times \vec{F}$ (není $=0$)!

$\vec{d} = \vec{r}^A - \vec{r}^B$

$$\boxed{\vec{M}^A + \vec{M}^B = \vec{d} \times \vec{F}}$$

– nezávisí na volbě ref. bodu

Obecně:



– $\vec{F}$ působí mimo hmot. střed

– přidáme $\vec{F}_1$, $-\vec{F}$ v bodě B (stejná velikost)

$\vec{M}^A = \vec{r}^A \times \vec{F} = \vec{r}^B \times \vec{F} + \underbrace{(\vec{r}_A - \vec{r}_B)}_{\vec{d}} \times \vec{F}$

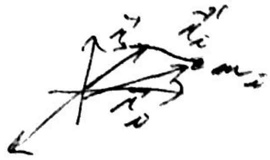
$\vec{M}^A = \vec{M}^B + \vec{d} \times \vec{F}$

může být v hmot. středu

dvojice sil způsobující rotaci

- přenesu působiště do hmot. středu

$\vec r_i = \vec r_i\,' + \vec r_s \qquad \vec v_i = \vec v_i\,' + \vec v_s$



$$\vec L = \sum m_i \vec r_i \times \vec v_i = \sum \left[m_i(\vec r_i\,' + \vec r_s) \times (\vec v_i\,' + \vec v_s) \right] = \dots$$

$$= \sum m_i \vec r_s \times \vec v_s + \sum m_i \vec r_i\,' \times \vec v_i\,' + \vec r_s \times \underbrace{\sum m_i \vec v_i\,'}_{0} + \underbrace{\sum m_i \vec r_i\,'}_{0} \times \vec v_s$$

$$\boxed{\vec L = \vec L_s + \vec L\,'}$$

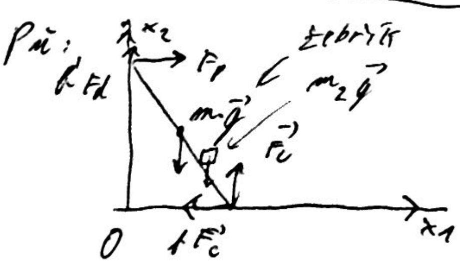
$\Rightarrow \vec L$ lze rozdělit na část pocházející od hmot. středu a na část pocházející ze zbylých bodů

$\vec L$ ... v nečárkované soustavě
$\vec L_s$ ... L hmot. středu
$\vec L\,'$ ... L vůči hmot. středu

Statika

- rovnováha, pokud $\boxed{\vec F^E = 0}$ a $\boxed{\vec M^E = 0}$ (může $\vec v$ = konst.)

Př:

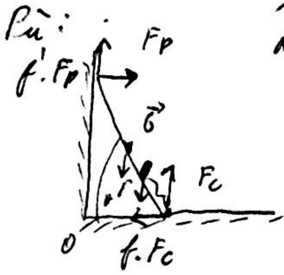


$F_1 = 0$
$F_2 = 0$
$M_3 = 0$

F_C, F_D, ℓ (nezn.)

Fyzika – přednáška VIII

Př.:



l ... délka žebříku

d ... vzdálenost člověka $m.g$ od počátku žebříku

$$F_1 = F_p - f . F_c = 0$$

$$F_2 = f' F_p + F_c - mg - m_z g$$

člověk, žebřík

(statická rovnováha → počátek lze volit kdekoliv)

⇒ zvolíme v bodě C

$$M_3 = -f' F_p . l \cos\theta - F_p . l . \sin\theta + mg\, d . \cos\theta + m_z g \frac{l}{2} . \cos\theta = 0$$

$$d = \frac{l}{mg}\left[\frac{f(m_z + m)g}{1 + f f'} (\operatorname{tg}\theta + f') - \frac{1}{2} m_z g \right]$$

Př.: Fyzické kyvadlo

– těleso zavěšené, necháme kmitat

– nalezneme hmotný střed: R ... vzdálenost od závěsu

– působí $M = mgR \sin\varphi$

$$\boxed{L = J\omega}$$

– víme $M = \frac{dL}{dt} = \frac{d(J\omega)}{dt} = J . \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

⇒ řešíme $J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgR \sin\varphi$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgR}{J} \sin\varphi = 0$$

– aproximace: $\sin\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots$

$$\sin\varphi \simeq \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgR}{J} \varphi = 0$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0$$

J_0 ... moment setrvačnosti vůči ose závěsu

$$\varphi = \varphi_m \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\varphi = \varphi_m \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{mgR}{J_0}}$$

Př: Matematické kyvadlo

- platí $J_0 = J_S + mR^2$ ($J_S = 0$ pro hmotný bod)

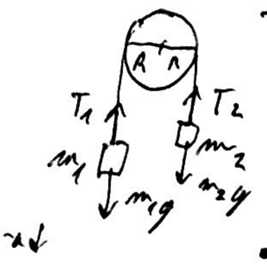
$$\boxed{J_0 = mR^2}$$

$$\omega^2 = \frac{mgR}{J_0}$$

$$\omega^2 = \frac{mgR}{mR^2}$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{g}{R}}$$ kde R je délka závěsu

Př: Těžká kladka



- hmotnost kotouče nelze zanedbat
  $\Rightarrow$ kotouč má moment setrvačnosti J

(T_1, T_2 jsou stejné, pouze pokud zanedbáváme J)

$\Rightarrow T_1, T_2$ se obecně liší

- m_1, m_2 mají stejné zrychlení

Pohybové rovnice

$$-m_1 a = -m_1 g + T_1$$
$$m_2 a = -m_2 g + T_2$$
$$M_3 = T_1 R - T_2 R = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(J\omega) = J\frac{d\omega}{dt} = \cancel{J \frac{d\omega}{dt}}$$
$$M_3 = T_1 R - T_2 R = J\varepsilon$$
$$M_3 = T_1 R - T_2 R = J\frac{a}{R}$$ (platí $\boxed{\varepsilon = \frac{a}{R}}$)

- Dosadíme:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= m_1 g - m_1 a = m_1 \cdot (g-a) \\ T_2 &= m_2 g + m_2 a = m_2 (g+a) \end{aligned}\right\} \quad a = \frac{g(m_1 - m_2)}{(m_1+m_2) + J/R^2}$$

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{g(m_1 - m_2)\, J/R^2}{m_1 + m_2 + J/R^2}$$

Př: Nakloněná rovina

a) $\frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2 = mgh \sin\theta$, $\boxed{\omega = \frac{v_S}{R}}$

$\Rightarrow$ zjistíme v_S

b) moment sil vůči bodu (bod dotyku s podložkou)

$$M = mgR\sin\theta = \frac{dL}{dt} = J_0 \cdot \varepsilon = J_0 \cdot \frac{a}{R}$$

$$\boxed{J_0 = J_S + mR^2}$$

J_0... moment setrvačnosti vůči ose procházející bodem dotyku

$$\Rightarrow mgR\sin\theta = (J_S + mR^2)\frac{a}{R}$$

$$\Rightarrow a = \frac{mg\sin\theta}{m + J_S/R^2}$$ (např. pro válec $J_S = \frac{1}{2} mR^2$)

c) NEBO: moment sil vůči H.S.

$$M = T.R = J_s \cdot \frac{a}{R}$$
$$m.a = F'' - T = mg \sin\theta - T$$
} vypočítáme a, T

pro T: $\cancel{T = \frac{J_s}{(R}}$ $\quad T = \frac{J_s}{R^2} \cdot a$

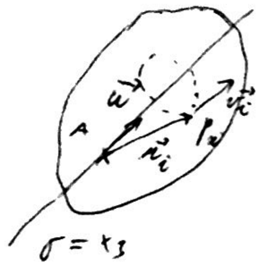
• Aby nenastalo klouzání
$\Rightarrow$ $\boxed{T \cdot R \geq J_s \frac{a}{R}}$

(pro válec $T = \frac{J_s}{R^2} a \to \frac{1}{3} \sin\theta$)

$$TR = f \cdot F_N R = f s mg \cos\theta R \geq J \frac{a}{R}$$

POZN.: jedná se o smykové tření, ne valivý odpor
valivý odpor – je nulový, pokud jsou tělesa dokonale tuhá
– jiná fyzikální podstata

Otáčení tuhého tělesa



- stálá osa $\to$ 1 stupeň volnosti $\varphi = \varphi(t)$

$\vec{M}^E = \frac{d\vec{L}}{dt}$, kde $\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$

• platí $\vec{L}$ kolmý na $\vec{r}_i, \vec{v}_i$, má jiný směr než $\vec{\omega}$
– $\vec{L}$ koná rotační pohyb kolem osy
($\vec{L}_i \nparallel \vec{\omega}$, $\vec{L}_i \perp$ rovina $(\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$)

• rozložíme $\vec{L}$ na rovnoběžnou a kolmou složku k vektoru $\vec{\omega}$
$$\vec{L} = \vec{L}_i^{\parallel} + \vec{L}_i^{\perp} = \vec{L}_{ixy} + \vec{L}_{iz}$$

• lze totéž udělat pro celkový $\vec{L}$
$$\vec{L} = \vec{L}^{\perp} + \vec{L}^{\parallel}$$

• totéž pro moment sil
$$\vec{M} = \vec{M}^{\perp} + \vec{M}_{\parallel}$$

$$\frac{d\vec{L}^{\parallel}}{dt} = \vec{M}^{\parallel}$$ (podobně pro kolmou složku $\frac{d\vec{L}^{\perp}}{dt} = \vec{M}^{\perp}$)

$L_i^{\parallel} = L_i \sin\alpha = r_i m v_i \sin\alpha =$ ($r_i \sin\alpha$ ... je kolmá vzdálenost k ose)

$L_i^{\parallel} = m_i v_i R_i = m_i \omega R_i^2$
(rovnoběžné složky se obyčejně sečtou, kolmé sčítáme vektorově)

$$L^{\parallel} = \sum L_i^{\parallel} = \omega \sum m_i R_i^2 = \omega J_\sigma$$

$\boxed{L^{\parallel} = J_\sigma \omega}$ $\quad J_\sigma$ ... vzhledem k dané ose

$\boxed{M^{\parallel} = \frac{dL^{\parallel}}{dt} = \frac{d(J_\sigma \omega)}{dt}}$ ← pohybová rovnice t.t. pro otáčení kolem pevné osy
J_σ = konst. pro t.t.

• Kam míří $\vec{L}$? ($\vec{L} = \vec{L}_{\parallel} + \vec{L}_{\perp}$)

a) (u symetrického tělesa $\vec{L}_{\perp} = 0$, podle osy rotace
$\rightarrow \vec{L}$ má směr osy)

b) $\vec{L}$ má obecný směr
- pro pevnou osu $\vec{L}$ rotuje kolem osy rotace

$$\frac{dL_1}{dt} = M_1, \quad \frac{dL_2}{dt} = M_2$$ ale $L_{1,2}$ jsou nějaké funkce sin, cos

indukované momenty sil → působí na osu, snaha osu vyklonit
("deviační momenty")

Př:

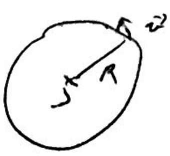
- pevná osa – dev. momenty kompenzovány
- volná osa – mění polohu, rotuje kolem $\vec{L}$

• Pokud osu uvolníme
$\Rightarrow \vec{M}^E = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = konst.$
- vektor $\vec{L}$ zaujme polohu a tu se snaží držet
- osa rotace začne rotovat

• Platí zákony zachování
$$\frac{d}{dt}(L^{\parallel}) = \frac{d}{dt}(J^o\omega) = M_y^E$$
$\rightarrow$ pokud $M_y = 0$, $L_{\parallel} = konst \Rightarrow J^o\omega = konst = \boxed{J_1^o\omega_1 = J_2^o\omega_2}$

• Kin. energie $E_k = \frac{1}{2} J^o \omega^2 = \frac{L_{\parallel}^2}{2J^o}$

(Př: Planety : $J = mR^2$)



Př: atomy L je kvantován, $L = n \cdot \hbar$
- ω pro molekulu kyslíku = ?

$J(O_2) = 2mR^2$
$J(O_2) = 2{,}03 \cdot 10^{-46}$ kg m^{-2}

$\omega = \frac{L}{J(O_2)}$, pro $n=1$: $\omega = \frac{\hbar}{J(O_2)} = \frac{1{,}054 \cdot 10^{-34}}{2{,}03 \cdot 10^{-46}}$

$\omega = 5{,}2 \cdot 10^{11}$ s^{-1}

$f = 10^{11}$ Hz

Fyzika – přednáška IX

- Kdy deviační momenty = 0? → rotace kolem osy sym.
- Uvolníme osu rotace ⇒ $\vec{L}$ = konst
  ~~m~~ nemění směr s časem

POZN: - otázky s vykřičníkem, ke zkoušce
- cvičení s činkami: $J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$ ($\Leftarrow L$ = konst)
  - E_k se nezachovává
  - posouváním činek konáme práci (proti odstředivým silám)
  - Coriolisovy síly způsobily zrychlování, zpomalování
    ($F_C \sim \vec{v}_r \times \vec{\omega}$)

• ~~Příklady~~,
• rotační kolo na stoličce, 1) $\vec{L}, \vec{\omega}$, stejný směr, vodorovně
  2) otočení ⇒ složky v jiných směrech
  - musí platit $\vec{L}$ = konst
  ⇒ židle se začala točit na danou stranu
  (ztrátová složka $\vec{L}$ přešla do země)

Obecné řešení (viz. prezentace)

- $\vec{L}$ není $\parallel \vec{\omega}$
- platí
$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \omega_1 J_{11} + \omega_2 J_{12} + \omega_3 J_{13} \\ L_2 &= \omega_1 J_{21} + \omega_2 J_{22} + \omega_3 J_{23} \\ L_3 &= \omega_1 J_{31} + \omega_2 J_{32} + \omega_3 J_{33} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{L_i = \sum_{j=1}^{3} L_{ij}\,\omega_j}$$
$L_i = L_{ij}\,\omega_j$ (Einsteinova notace)

J ... tenzor 2. řádu
- je symetrický ($J_{ij} = J_{ji}$) ⇒ 6 nezávislých složek

- deviační momenty = momenty mimo diagonálu
- stále platí:
$$M_i = \frac{dL_i}{dt}$$
• problém - polohy bodů se v iner. soustavě mění → $J_{ij} = f(t)$
⇒ neinerciální s.s.

Kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2}\sum m_i \left(\vec{\omega}\times\vec{r_i}\right)^2 .$$

$$(\omega_{i2} x_{i3} - \omega_{i3} x_{i2})^2 + (\omega_{i3} x_1 - \omega_{i1} x_3)^2 + (\omega_1 x_2 - \omega_2 x_{i1})^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}\sum m_i \left(\omega_1^2 (x_3^2 + x_2^2) + \omega_2^2(\cancel{x_1}^2 \ldots) + \omega_3^2(\ldots) + 2\omega_1\omega_2 x_1 x_2 + \ldots\right)$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}\sum_{i,j} J_{ij}\,\omega_i\omega_j}$$

- Kdy platí $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$?
  - pokud dokážeme vynulovat členy mimo diagonálu

    $L_1 = J_1\omega_1 \quad \Rightarrow \vec{\omega} \parallel \vec{L}$

    $L_2 = J_2\omega_2$

    $L_3 = J_3\omega_3$
  - diagonalizace matice
  - elipsoid: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ (osy ve směru souřadnic)
  - z rovnice kin. energie $\Rightarrow$ elipsoid

  $\Rightarrow$ V každém tělese lze nalézt 3 hlavní osy

  $E_k = \frac{1}{2} J_{ij}\omega_i\omega_j \qquad J = a_i a_j J_{ij}$ (a_i, a_j ... směrové kosiny)
  - pro symetrická tělesa
    - hlavní osa = osa symetrie + kolmé osy
    - válec: $\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$ – koule $\begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}$

- ~~Přechod~~ do

Přechod do neinerciální vz. s. (pevně spjaté s tělesem)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d'\vec{v}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$\frac{d'\vec{v}}{dt}$ ... derivace v čárkované soustavě (rotující soustava)

- platí pro libovolný vektor

- chceme $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$ transformovat do rotující soustavy

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}\Big|_s + \vec{\omega} \times \vec{L}_s = \vec{M}^E$$

- v hlavních osách : **Eulerovy rovnice**

$$J_{11} \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 \omega_3 (J_{33} - J_{22}) = M_1^E$$

...

- platí $\frac{d(\vec{L}\cdot\vec{L})}{dt} = 0$

Př: Rotace kolem pevné osy pomocí Eulerových rovnic

$\vec{\omega} = (0, 0, \omega_3)$

$$J_{13} \frac{d\omega_3}{dt} - \omega_3^2 J_{23} = M_1$$
$$J_{23} \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_3^2 J_{13} = M_2$$
$$J_{23} \frac{d\omega_3}{dt} = M_3$$

(otáčení není shodné s hl. osou ⇒ obecná rov.)

M_1, M_2 ... indukovaný deviační moment – způsobený nesymetričností tělesa

Př: otáčení setrvačníku

- pootočíme rotující setrvačník ⇒ začnou působit síly
- pootočíme setrvačník v klidu (⇒ začne se točit?)

Fyzika – přednáška X

- Příklady zákona zachování $\vec{L}$: – satelit: orientace pomocí setrvačníků
  - magnetofon Voyager 2
  - sluneční soustava
  - atomy, ...
- Tenzory jsou ve fyzice běžné (index lomu, charakteristika látek, ...)
- Každou rotaci tělesa lze rozložit do rotací kolem hlavních os (souvisí s diagonalizací matic)
- POZN: Na zkoušce – znát předpoklady a umět interpretovat výsledky.

Př: volný setrvačník

$L_1 = J_1 \omega_1$ $\quad \vec{\omega} = \vec{\omega_1} + \vec{\omega_2}$ ← skládáme dvě rotace dohromady

$L_2 = J_2 \omega_2$

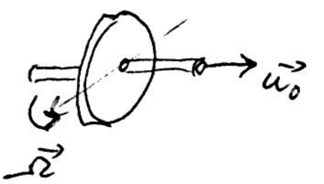
$L = L_1 + L_2 = J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2 \quad (\neq k \cdot \vec{\omega})$

$\Rightarrow \underline{\vec{L} \nparallel \vec{\omega}}$

Př: precese setrvačníku

předpoklad

! $\omega_0 >> \Omega$!



$\vec{\omega_0}$ velké, pomalu nakloníme

$\Delta L = L_0 \Delta\theta \qquad \Omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

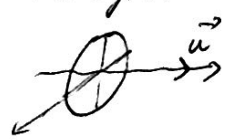
$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = L_0 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \Omega L_0$

$\vec{M} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{\Omega} \times \vec{L_0} = \vec{r} \times \vec{F}$

Precese: $\Omega = \frac{rF}{L_0} = \frac{rF}{J\omega} \xrightarrow[\text{těžký setrvačník}]{} \frac{rmg}{J\omega}$

Př: rotující kolo nakloníme

– Když nakloním ⇒ zatočí se

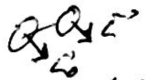


Př: Kola u automobilu

Kolo má tendenci se zvedat

Př: Kolo

– platí $\vec{P}, \vec{L} = \text{konst}$, $E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{L^2}{2J}$

– původně 

– po naklonění cyklisty ⇒ zatočí

Př: těžký setrvačník
- působí moment sil (způsoben tíhovým polem)

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \approx J\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

- osa setrvačníku opisuje kužel = precese

$$\vec{M} = \frac{d\varphi}{dt} \times J\vec{\omega} = \vec{\Omega} \times J\vec{\omega}$$

pro $M = mgl \sin\alpha \Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{mgl}{J\omega}}$ (precese)

(předpokládáme rychlou rotaci $\vec{\omega}$)

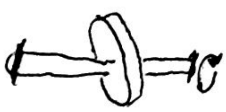
Př: skutečný pohyb konce osy

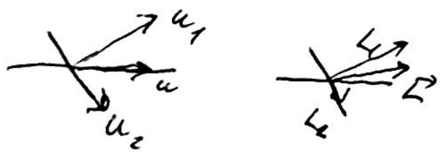
Př: Země koule
- osa rotace se otáčí kolem precesní osy
- perioda precese 26 000 let

Př: vývoj galaxií
- smršťují se
- zvětšuje se rotace
- odstředivé síly

POZN. "temná hmota"
- neviditelná hmota
- $F = h(a) \cdot ma$
- nedostatek experimentů (pouze některé galaxie)

POZN.: "temná energie"
- zrychlené rozpínání vesmíru

Př: 
- dynamicky nevyvážený
- staticky vyvážený



$J_1 \neq J_2$ $\quad L_1 = J_1\omega_1$, $L_2 = J_2\omega_2$ $\Big\}$ $L_1 \neq L_2$

$J_1 = \frac{mR^2}{2}$ $\quad \Rightarrow \vec{L}$ není $\parallel \vec{\omega}$

$J_2 = \frac{mR^2}{4}$

- $\vec{L}$ rotuje kolem osy
- můžeme zmenšit L_1 tím že zmenšíme ω_1

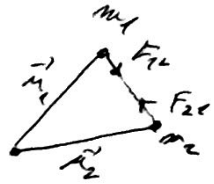
$\Rightarrow$ roztočíme kotouč

$\Rightarrow \vec{L} \parallel \vec{\omega}$ "metoda dynamického vyvážení systému"

Př: směrový gyroskop, umělý horizont, gyrokompas ($\vec{\omega} \parallel \vec{\omega_z}$)

Problém dvou těles

- pohybové rovnice: $(\vec F^E = 0)$ $\quad m_1 \ddot{\vec r}_1 = \vec F_{12}$



$$\ddot{\vec r} = \ddot{\vec r}_1 - \ddot{\vec r}_2 = \frac{F_{12}}{m_1} - \frac{F_{21}}{m_2} = \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} F_{12} = \frac{1}{\mu} F_{12}$$

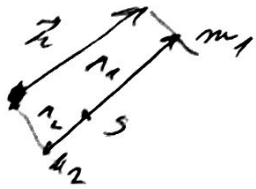
μ ... redukovaná hmotnost

⇒ stejná rovnice jako pro pohyb 1 tělesa kolem těžiště tělesa
- pouze zde je redukovaná hmotnost

$$\boxed{\vec F_{12} = \mu \ddot{\vec r}}$$

- hmotný střed

$$M \vec r_S = m_1 \vec r_1 + m_2 \vec r_2$$
$$M \vec v_S = m_1 \vec v_1 + m_2 \vec v_2$$



- volíme počátek v hmot. středu ⇒ $\vec r_S = 0$, $\vec v_S = 0$

$$\vec r_1 = -\vec r_2$$

- označíme

$$\left.\begin{aligned} \vec r &= \vec r_1 - \vec r_2 \\ \vec v &= \vec v_1 - \vec v_2 \end{aligned}\right\} \text{ platí } \quad \vec r_1 = \frac{m_2}{M}\vec r \qquad \vec v_1 = \frac{m_2}{M}\vec v$$
$$\vec r_2 = -\frac{m_1}{M}\vec r \qquad \vec v_2 = -\frac{m_1}{M}\vec v$$

- celková energie

$$E_0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \varkappa \frac{m_1 m_2}{r} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 + E_p$$

$$\boxed{E_0 = \frac{1}{2}\mu v^2 + E_p}$$ kde $\mu = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ je redukovaná hmotnost

(Pokud $m_2 \gg m_1$, tak E_k je dána m_1)

- celkový moment hybnosti

$$\vec L_0 = \vec r_1 \times m_1 \vec v_1 + \vec r_2 \times m_2 \vec v_2 = \vec r \times \frac{m_1 m_2^2}{M^2}\vec v + \vec r \times \frac{m_1^2 m_2}{M^2}\vec v$$

$$\boxed{\vec L_0 = \vec r \times \mu \vec v}$$

⇒ Pohyb dvou těles je možné převést na problém 1 tělesa, kde počítáme s relativní vzdáleností $\vec r$, rel. rychlostí $\vec v$ a redukovanou hmotností μ.

⇒ Planety se pohybují po podobných elipsách kolem společného hmot. středu

Kmity a vlnění

Kmity – periodický pohyb kolem rovnovážné polohy

Harmonický oscilátor

$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k x^2}$ $\boxed{F_i = -\frac{\partial E_p}{\partial x_i} = -kx}$ $\quad a^2 = \frac{k}{m}$

- řešení: $m\ddot{x} + kx = 0$ "homogenní diferenciální rovnice 2. řádu"
  - hledáme $x = Ce^{\lambda t}$

$$m C\lambda^2 e^{\lambda t} + k . Ce^{\lambda t} = 0$$
$$Ce^{\lambda t} . (m\lambda^2 + k) = 0$$
$$\lambda^2 = -\frac{k}{m}$$
$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

charakteristická rovnice

- obecné řešení

$$x = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}} t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}} t}$$

platí $\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$

$\Rightarrow x = (C_1 + C_2) \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + i (C_1 - C_2) \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$

- x musí být reálné

$\Rightarrow C_1, C_2$ musí být komplexně sdružené

- ~~volíme~~ označíme: $C_1 + C_2 = A \sin \alpha$

$i(C_1 - C_2) = A \cos \alpha$

- Potom výchylka: $\boxed{x = A \sin(at + \alpha)}$, kde $a = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Fyzika – přednáška XI

$F = -kx$

$F = F(0) + x\frac{F'(0)}{1!} + x^2\frac{F''(0)}{2!} + \dots$ } řada fyz. jevů lze popsat $F = -kx$

• výchylka $x = A\cdot\sin(\omega t + \alpha)$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

• kinetická energie $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

• potenciální energie $E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

→ celková $\boxed{E_c = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2}$ (nezávisí na čase)

• jiný zápis: $x(t) = Ce^{i\omega t} + C^* e^{-i\omega t}$, $C = \frac{A}{2}e^{i\varphi}$

⇒ $x(t) = De^{i\omega t} = De^{-i\omega t}$ .... pouze fyzikální část má smysl

$\hat{x} = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)}$ ... fázor

Tlumené kmity

- amplituda se zmenšuje
- proč kmitá?
- tlumící síla: $F \sim v$, $F = -bv$

⇒ pohyb. rov: $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$ $\quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad 2\delta = \frac{b}{m}$

$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

- hledáme řešení: $x = e^{\alpha t}$

$(\alpha^2 + 2\delta + \omega_0)e^{\alpha t} = 0$

$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

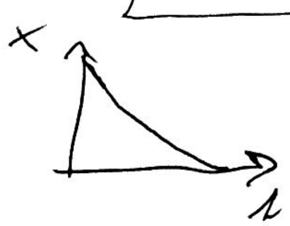
$\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\omega$, kde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

ω... úhlová frekvence tlumených kmitů ($\omega < \omega_0$)

a) $\delta > \omega_0$ .. nadkritický útlum
- aperiodický

$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0$, reálné

⇒ $\boxed{x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}}$ $\alpha < 0$ ⇒ exponenciální útlum



b) $\delta = \omega_0$ <u>Kritický útlum</u>

- mezní, aperiodický pohyb

$\lambda_{1,2} = \delta < 0$

$$\boxed{x(t) = (A + Bt)\, e^{-\delta t}}$$ - jde ještě rychleji k nule

c) $\omega_0 > \delta$ ... <u>slabé tlumení</u>

$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega$

$x_1 = e^{-\delta t + i\omega t}$ $\quad x_2 = e^{-\delta t - i\omega t}$ $\quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$\boxed{x(t) = \underbrace{A e^{-\delta t}}\cdot \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

amplituda se exponenciálně zmenšuje

- perioda $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$

- když δ roste, T roste, až ∞ → mezní aperiod.

- <u>útlum</u> = podíl dvou max. výchylek, lišících se o T

$$\boxed{\beta = \frac{x(t)}{x(t+T)} = e^{\delta T}}$$

- logaritmický dekrement útlumu $\theta = \ln(\beta) = \delta T$, relaxační čas ..

(• úbytek energie : $\frac{dW}{dt} \sim \vec{v}^{\,2}$)

Harmonické kmity – vynucené

- vnější síla $F = F_0 \cdot \cos \Omega t$

Ω … úhl. frek. budící síly
ω_0 … vlastní frek. oscilátoru

⇒ pohyb. rovnice:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \Omega t \quad , \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \frac{b}{m} = 2\delta \quad \frac{F_0}{m} = S$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = S \cdot \cos \Omega t$$

⇒ Komplexní symbolika: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = S \cdot e^{i\omega t}$

→ obecné řešení = (řešení homogenní rov.) + (partikulární řešení)

- hledáme: $x = x_0 e^{i\Omega t}$

$$x_0 e^{i\Omega t} \cdot (-\Omega^2 + 2\delta i \Omega + \omega_0^2) = S e^{i\Omega t}$$

$$\boxed{x_0 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\, 2\delta\Omega}}$$

$$x_0 = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2 - i 2\delta \Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} = |x_0| e^{i\varphi} \quad , \quad \varphi \text{ … fáze}$$

$$\boxed{\tan \varphi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}$$ … fázový posun výchylky vůči působící síle

$$\boxed{|x_0| = \frac{F_0/m}{\left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right)^{\frac{1}{2}}}}$$ amplituda ustálených kmitů

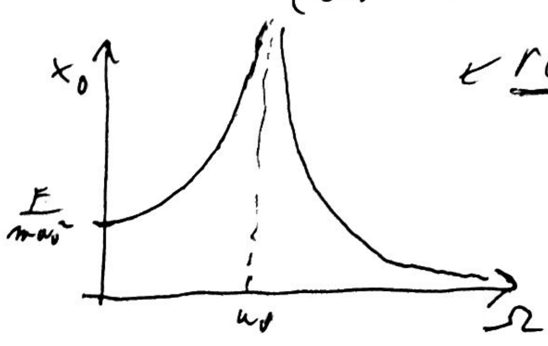
- Obecné řešení:

$$\boxed{x = \underbrace{A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)}_{\text{přechodové řešení}} + \underbrace{x_0 \cos(\Omega t + \varphi)}_{\text{stacionární řešení}}}$$

přechodové řešení – po čase zanikne

stacionární řešení

- platí $|x_0| = \frac{F_0/m}{\left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ Když $\omega_0 = \Omega$ ⇒ amplituda jde do nekonečna

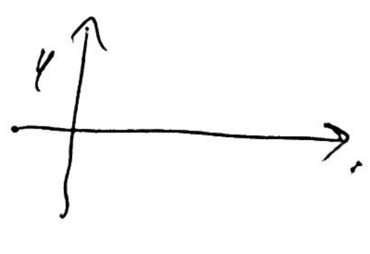


← rezonanční křivka

- Rezonance – jev když $\Omega = \omega_0$
  - i malá síla způsobí obrovské výchylky
  - rezonanční křivka klesá s rostoucím tlumením

Fázový posun při rezonanci

$$\boxed{\tan \varphi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}$$



Př: hřídel

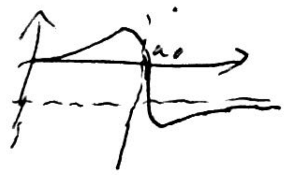
- působí odstředivé síly $F_{od} = m\omega^2(d+x)$
- elastická síla $F_{el.} = kx$

$$kx = m\omega^2(d+x)$$

$$x = \frac{d}{\frac{k}{\omega^2 m}-1} = \frac{d}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2}-1}$$

(nezahrnujeme tlumení)

(+tlumení)



- při velkém ω → narovná se

$\boxed{\text{• Každý mechanický systém má rezonanční frekvenci}}$

Parametrická rezonance

- může se rozkmitat sám systém.?

  $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2(1+\varepsilon\cdot f(t))x = 0$, $0<\varepsilon\ll 1$
- můžeme měnit velikost ω_0, $\sim k = m\omega^2 = \frac{m^2 g l}{J} \to \frac{mg}{l}$
- můžeme snížit/zvýšit vzdálenost od těžiště

• Lineární systémy

• **Princip superpozice** ....

- Každý pohyb lze vyjádřit jako superpozici čistě harmonických pohybů (Fourierova analýza) (součty přes frekvence)

= každou harm. funkci lze rozložit na součet sin, cosinů
- těm frekvencím se říká spektrum