Optika

Zabývá se šířením světla a jeho interakcí s látkou.

Plato - (427 - 347 B.C.), student Sokrata, předpokládal, že světlo jsou tzv. okulární paprsky, tj. paprsky emitované z oka, které se dále šíří velkou rychlostí přímočaře

aristoteles .. student Plata (384 - 322 B.C.) odmítl koncept okulárních paprsků a předpokládal, že ke zrakovému vjemu dojde, jestliže částice vystupující z objektu vstoupí do oka.

Isaac Newton ... 2. pol. 17. století - předpokládal, že světlo má částicovou podstatu

James Clerk Maxwell - (1831 - 1879) popsal EM záření pomocí dif. rovnic, odvodil vlnovou rovnici, což vedlo k závěru, že světlo má vlnovou podstatu.

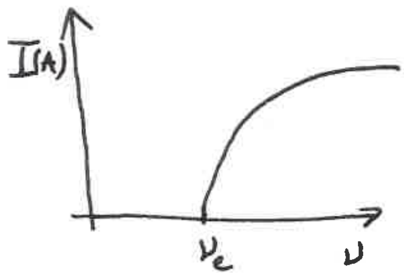
Již před tím T. Young (1800) demonstroval svým pokusem interferenci - tento jev nebylo možné vysvětlit pomocí částicové teorie.

Zdálo se, že Youngovým pokusem a Maxwellovými rovnicemi je vlnová podstata světla definitivně potvrzena a že částicová teorie je nesprávná!

Pomocí vlnové teorie se nedařilo ale vysvětlit změřené spektrum záření černého tělesa a tzv. fotoelektrický jev.

Fotoelektrický jev (vnější)

Bylo pozorováno, že při osvětlení materiálů EM zářením z nich vyletují elektrony. Měřitelný signál začínal vždy na nějaké prahové energii



Podle vlnové teorie (jak uvidíme později) závisí energie EM vlny na amplitudě vlny, nikoliv na její frekvenci (vlnové délce). Bylo by tedy možné dodat energii dostatečnou k uvolnění elektronu z látky při libovolně malé frekvenci vlny dostatečným zvýšením její amplitudy. To bylo však v rozporu s pozorovanou prahovou frekvencí při fotoelektrickém jevu. Tento rozpor vysvětlil A. Einstein tím, že předpokládal, že světlo se skládá z kvant - fotonů o energii $E = h\nu$ (1905). Pokud je tedy $\nu < \nu_c$, nestačí elementární kvantum energie $E = h\nu$ k excitaci elektronu z látky (výstupní práce $= h\nu_c$). Za tento objev mu byla v roce 1921 udělena Nobelova cena.

Při popisu světla jako elektromagnetické vlny vyjdeme z Maxwellových rovnic

(1) $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS$$

Gaussův zákon

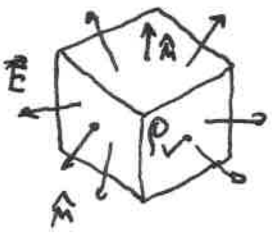
$\hat{n}$ ... jednotkový vektor $\perp$ dS

$\vec{E}$ ... intenzita el. pole

$[\vec{E}] = V/m$

Využili jsme divergenčního teorému

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$$



Fyzikální význam ... el. náboj je zdrojem elektrického pole

(2) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS = 0$$

$\vec{B}$ ... magnetická indukce

$[B] = T$

Fyz. význam ... neexistence magnetického náboje

(3) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Faradayův zákon elektromagnetické indukce

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{E} \, d\vec{S} = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \oint_c \vec{E} d\vec{l}$$

Využili jsme Stokesova teorému

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \oint_c \vec{F} d\vec{l}$$

(4)' $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ ... Ampérův zákon

V. době, kdy Maxwell pracoval na teorii EM pole byla rovnice (4) v tomto podobě

Byla však v rozporu s rovnicí kontinuity

$$\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

, protože

$$\underbrace{\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B}}_{0} = \mu_0 \operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Maxwell proto doplnil člen $\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\Rightarrow (4). \quad \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ Maxwellův posuvný proud

Doplněný člen je klíčový k pochopení toho, že světlo je EM vlnění

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \operatorname{rot}\vec{B}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E}$$

Dále budeme řešit vakuum $\Leftrightarrow \rho = 0, \vec{j} = 0$

zde $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ a platí tedy

$$-\Delta\vec{E} = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{z rovnice } 4)$$

$$\Delta\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Tato rovnice má formu tedy známé vlnové rovnice

$$\Delta\vec{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Porovnáním obou rovnic dostáváme, že

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

c ... rychlost šíření vlny ve vakuu

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \qquad c = 2{,}997 \times 10^8 \ \text{m/s}$$

Ve 2. polovině 19. století bylo z různých experimentů zřejmé, že světlo má elektromagnetickou podstatu (např. Faraday ukázal, že jej ovlivňují magnetické pole při průchodu některými látkami), rovněž byla poměrně známá jeho rychlost šíření. Tato byla spolu s odvozenou vlnovou rovnicí vedla k závěru, že světlo je EM vlnění!

Každé řešení vlnové rovnice se nazývá vlnou

Dokážeme, že každá funkce $f(x \pm vt)$ je řešením vlnové rovnice

$f(x) \rightarrow f(x+a)$ ... posun funkce doleva o a

$f(x) \rightarrow f(x-a)$ ... posun funkce doprava o a

V našem případě $a = vt$

$f(x-vt)$ ... vlna postupující ve směru kladné osy x

$f(x+vt)$ ... vlna postupující ve směru záporné osy x

$f(x-vt)$ ozn. $\xi = x - vt$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = (-v)\cdot(-v)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = \frac{v^2}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

Obdobně pro $f(x+vt)$

Základním modelem pro popis elektromagnetic. vlnění je model rovinné vlny

1-D ... vlna šíří se ve směru z

$$E = E_0 \cos\left(k(z-vt)\right) =$$

... argument kosinu je úhel, proto musí být faktor $z-vt$ vynásoben k s rozměrem m^{-1} (k = vlnový vektor)

$$= E_0 \cos(kz - kvt) =$$

$$= E_0 \cos\left(kz - \frac{2\pi}{\lambda}vt\right) = E_0\cos\left(kz - \frac{2\pi}{T}t\right)$$

$T = \frac{\lambda}{v}$ .. perioda

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ úhlová frekvence

$\Rightarrow \quad E = E_0\cos(kz - \omega t)$ ... nejčastější forma zápisu

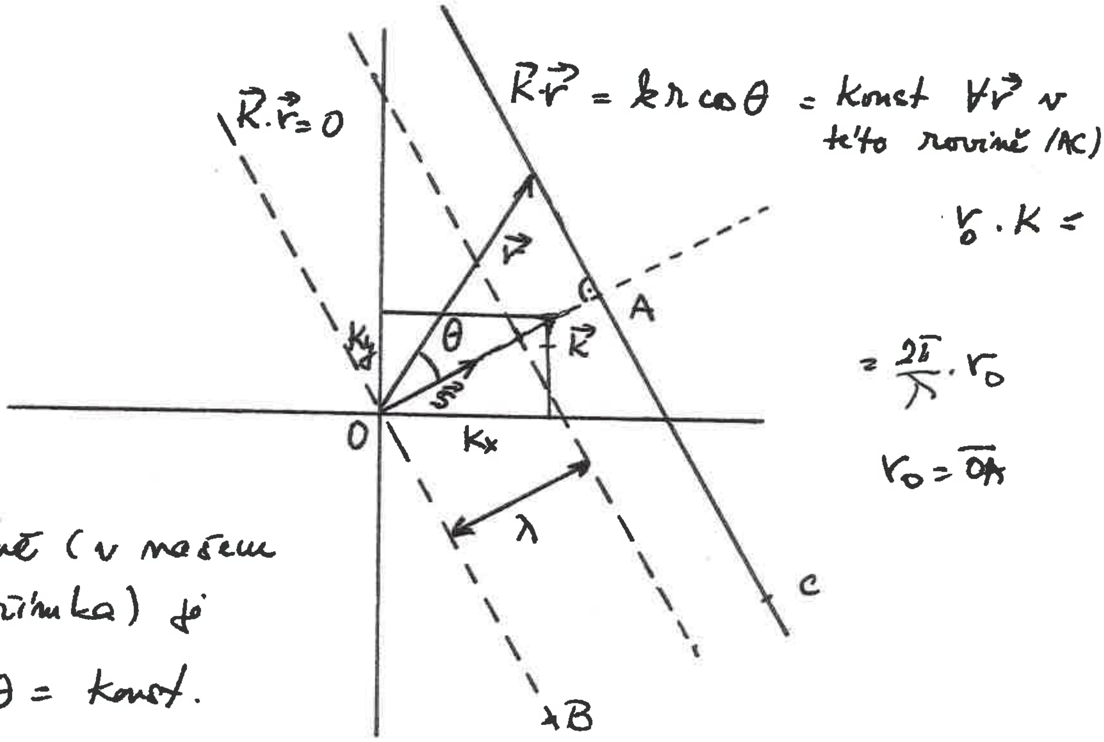
Ve 3D

$$\vec{E} = \vec{E_0}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\vec{s}$$

$\vec{s}$ ... jednotkový vektor ve směru šíření

Co znamená $\vec{k}\cdot\vec{r}$? ... Zobrazíme ve 2D



$r_0 \cdot k =$

$= \frac{2\pi}{\lambda}\cdot r_0$

$r_0 = \overline{0A}$

Na celé rovině (v našem případě přímka) je $\vec{k}\cdot\vec{r} = kr\cos\theta$ = konst.

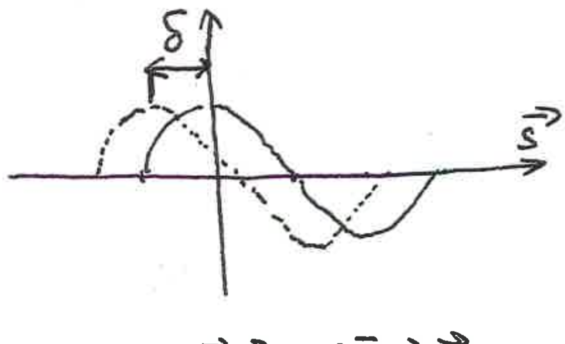
$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t}_{\text{fáze}})$$

.. v čase $t=0$ je v rovině OB procházející počátkem $\vec{k}\cdot\vec{r} = 0$, tj. $\cos(\,) = 1$, $E = E_0$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta)$$

δ ... tzv. počáteční fáze

... Max. vlny je posunuté o δ ve směru $-\vec{s}$, pokud je $\delta > 0$ a je posunuté ve směru $+\vec{s}$, pokud je $\delta < 0$.



zobrazeno pro
$t = 0$
$\delta > 0$

— $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

--- $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta)$

$\vec{k}\cdot\vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda}\,\vec{s}\cdot\vec{r}$

tj: obecná fáze $\varphi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta$

Pokud $\vec{k}\cdot\vec{r} = \text{konst.}$, pak v daném čase t je $\varphi = \text{konst}$ (protože náběh fáze $\delta = \text{konst}$)

Jelikož vztah $\vec{k}\cdot\vec{r} = \text{konst.}$ platí pro polohové vektory $\vec{r}$ v rovině $\perp$ na $\vec{k}$, představuje vlna s argumentem $\varphi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta$ rovinnou vlnu

Dále ukážeme, že v rovinné vlně platí kolmost vektorů $\vec{E}, \vec{B}$ a $\vec{s}$

$$k\cdot\vec{r} - \omega t = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{s}\cdot\vec{r} - \frac{2\pi}{T}t = \frac{2\pi}{\lambda}\Big(\vec{s}\cdot\vec{r} - \frac{\lambda v t}{\underbrace{vT}_{\lambda}}\Big) =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{s}\cdot\vec{r} - vt)$$

V případě šíření EM vlny ve vakuu $v = c$

$$\underbrace{\vec{s}\cdot\vec{r} - ct}_{\xi}$$

$\vec{s}\cdot\vec{r} = s_x x + s_y y + s_z z$

$\vec{s}$ ... jedn. vektor ve směru $\vec{k}$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

předp. $\vec{E} = f(\vec{s}\cdot\vec{r} - ct)$

$\vec{B} = f(\vec{s}\cdot\vec{r} - ct)$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c\frac{\partial}{\partial\xi} \qquad \frac{\partial}{\partial x} = s_x\frac{\partial}{\partial\xi}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = \vec{s}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial\xi}$$

$$\vec{s}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial\xi} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = c\frac{\partial\vec{B}}{\partial\xi} \quad \Big/ \int$$

$$\vec{s}\times\vec{E} = c\vec{B}$$

$$\underbrace{\vec{S}\cdot(\vec{S}\times\vec{E})}_{0} = c\,\vec{S}\cdot\vec{B} \quad\Rightarrow\quad \vec{S}\perp\vec{B}$$

$$\vec{E}\cdot\underbrace{(\vec{S}\times\vec{E})}_{0} = c\,\vec{B}\cdot\vec{E} \Rightarrow \vec{B}\perp\vec{E}$$

analogicky z rovnice

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \vec{S}\times\vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{E}$$

$$\left(\ \vec{S}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial\xi} = -c\,\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial\xi}\right.$$

$$\left.\vec{S}\times\vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{E}\ \right)$$

$$\underbrace{\vec{S}\cdot(\vec{S}\times\vec{B})}_{0} = -\frac{1}{c}\vec{S}\cdot\vec{E} \Rightarrow \vec{S}\perp\vec{E}$$

$\Rightarrow \vec{E}\perp\vec{B}\perp\vec{S}$ ... rozborem znamének vyjde, že se jedná o pravotočivý systém

Z rovnice $\vec{S}\times\vec{E} = c\vec{B}$ plyne $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$

tj. v jednotkách soustavy SI je hodnota B v postupné rovinné vlně c (tj. $3\times10^8\times$) menší než hodnota E.

Definujme ... vlnoplocha = plocha konstantní fáze

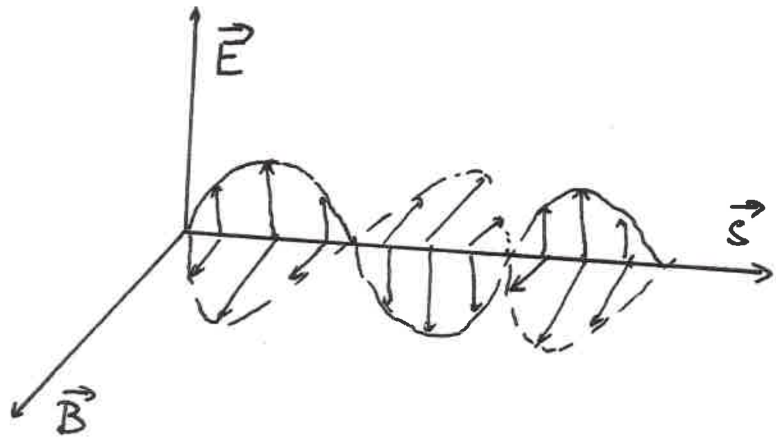
Homogenní vlna → plocha konstantní fáze je rovněž plochou konstantní amplitudy

Závěry – postupná harmonická rovinná vlna ve vakuu

1) Velikost $\vec{B}$ je c× menší než velikost $\vec{E}$ (v jednotkách SI)

2) $\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou ve fázi

3) $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{s}$



Z vlnové rovnice lze odvodit tzv. Helmholtzovu rovnici:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{E}_0(-\omega)\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{E}_0\,\omega^2 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) = -\omega^2 \vec{E}$$

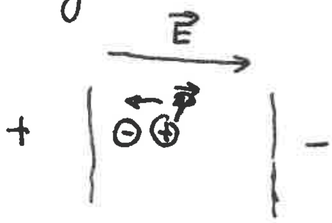
$$\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2}\omega^2 \vec{E} = -k^2 \vec{E}$$

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

Helmholtzova rovnice = vlnová rovnice pro monochromatickou rovinnou vlnu

Popis šíření EM vln v látce

Působí-li na látku vnější elektrické pole, dochází k její polarizaci - např. elektronové obaly atomů se posunou směrem k (+) vnějšího pole, jádra směrem k (−)



$\vec{P}$ ... vektor polarizace

Definujme polarizační proud

$$\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Dále rozdělme náboj ρ a proud $\vec{j}$

$$\rho = \rho_f + \rho_P \qquad \vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_P$$

ρ_f .. volný náboj

ρ_P ... náboj spojený s polarizací

$\vec{j}_f$ .. el. proud spojený s pohybem volného náboje

$\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ ... polarizační proud

Pak je

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_f + \rho_P\right)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} - \rho_P = \rho_f$$

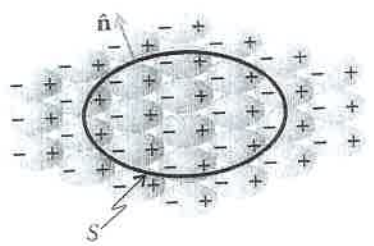
Rovnice kontinuity pro ρ_P a $\vec{j}_P$

$$\operatorname{div} \vec{j}_P = -\frac{\partial \rho_P}{\partial t}$$

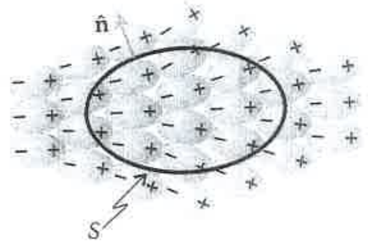
$$\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\vec{P}) = -\frac{\partial \rho_P}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_P = -\mathrm{div}\,\vec{P}$$

$$\mathrm{div}\,\varepsilon_0\vec{E} + \mathrm{div}\,\vec{P} = \rho_f$$



$\mathrm{div}\,\vec{P} = 0$



$\mathrm{div}\,\vec{P} \neq 0$

$\mathrm{div}\,\vec{P} \neq 0$
→ neizotropní prostředí
čili reaguje na změnu H s $\vec{E}$

Zavedeme novou veličinu $\vec{D}$ ... el. indukce

$$[\vec{D}] = C \cdot m^{-2}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

χ ... susceptibilita

$$\Rightarrow \quad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_f \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \underbrace{(1+\chi)}_{\varepsilon_r}\vec{E}$$

ε_r ... relativní permitivita

Podobně

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\vec{H}$ ... intenzita magn. pole

$$[\vec{H}] = \frac{A}{m} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{P} + \varepsilon_0\vec{E}) =$$

$$= \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Odvození vlnové rovnice v prostředí s náboji a proudy

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = +\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{\mathrm{grad}\,\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_p = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}_f}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} + \frac{\mathrm{grad}\,\rho_f}{\varepsilon_0} + \frac{\mathrm{grad}\,\rho_p}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}_f}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} + \frac{\mathrm{grad}\,\rho_f}{\varepsilon_0} - \frac{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

V dielektriku $\rho_f = \vec{j}_f = 0$

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} - \frac{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

Maxwelly rovnice v dielektriku

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = 0 \qquad \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r\,\mathrm{div}\,\vec{E}$$

$$\varepsilon_r \neq f(\vec{r}) \quad = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{1}{v^2} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0$$

$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0}}$ Rychlost šíření vlny v isotropním ($\varepsilon_r \neq f(\vec{r})$) dielektriku ($\rho_f = \vec{j}_f = 0$)

Porovnáním se šířením vlny ve vakuu

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$ dostaneme

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r}$$ .. tzv. index lomu

Dříve jsme ukázali, že $E = cB$

Podobně v tomto případě dostaneme $E = vB$ =

$$= v\mu H = \frac{\mu_0 \mu_r}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \mu_r}} H = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}\, H = ZH$$

$\mu_r = 1$ .... v celé přednášce

Z ... impedance prostředí

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377\,\Omega$$ impedance vakua

Dalším důležitým řešením vlnové rovnice jsou kulové vlny. V tomto případě ale používáme pouze skalární popis, protože kulová symetrie není v celém prostoru slučitelná s vektorovým charakterem pole $\vec{E}$ a $\vec{H}$.

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$x, y, z \longrightarrow r, \theta, \varphi$$

Vlnová rovnice $\quad \Delta f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

Δf ve sférických souřadnicích

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = f'(r) \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f' \cdot \frac{x}{r}\right) = f''(r) \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^2 + f' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) =$$

$$= f'' \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{f'}{r} + f' x \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$= f''\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{f'}{r} + \left(-f'\cdot\frac{x^2}{r^3}\right) = f''\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{f'}{r}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f''\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right) + \frac{3f'}{r} - \frac{f'}{r} =$$

$$= f'' + \frac{2f'}{r}$$

Předpokládejme, že

$$g(r) = r f(r)$$

$$g'(r) = f(r) + r f'(r)$$

$$g''(r) = r f''(r) + 2f'(r)$$

$$\Delta f = \frac{g''(r)}{r} = \frac{(rf)''}{r}$$

Vlnová rovnice je pak

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (fr)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (f\ )}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 (fr)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (fr)}{\partial t^2} = 0$$

To je jednorozměrná vlnová rovnice pro $g = fr$

Ta má řešení $g = g(r \pm vt)$

$g(r-vt)$ ... kulová vlna expandující

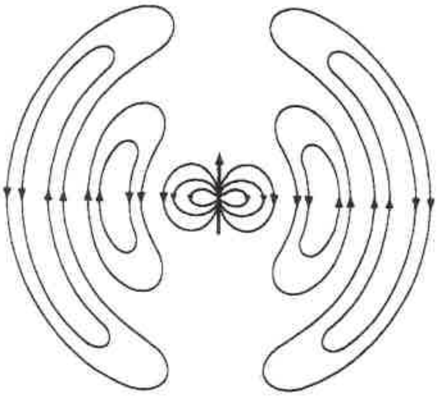
$g(r+vt)$ ... kulová vlna smršťující (kontrahující)

Jedná se pouze o skalární aproximaci! Řešení nemá vektorový charakter. Nelze jej dosadit do Maxwellových rovnic.

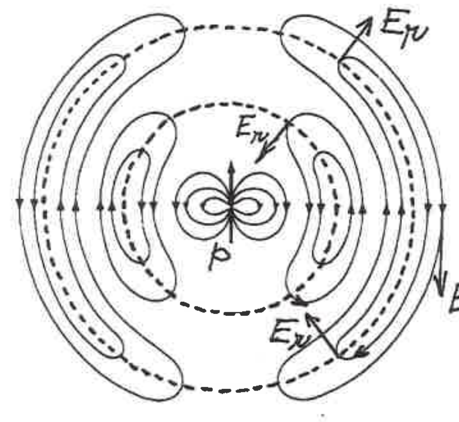
Reálně … kmitající dipól (Malý dipól = = Hertzův dipól.

Výpočet pole dipólu je komplikovaný, uvedeme jen výsledek výpočtu siločar elektrického pole.

Znázornění siločar elektrického pole Hertzova dipólu

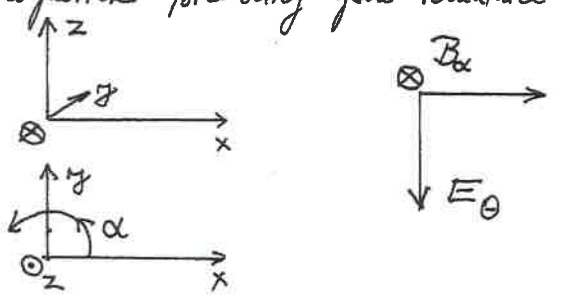


$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$
Siločáry musí být uzavřené.
Uzavření zajišťují radiální složky pole



Čárkované jsou znázorněny vlnoplochy, ve nichž je
E_Θ nulová
E_r maximální
$p_z > 0$ $\vec{p}\uparrow$ .. orientace v obrázku
statická zóna $E_\Theta > 0$ $\vec{E}\downarrow$
radiační zóna ve vzdálenosti celistvého násobku λ
$E_\Theta < 0$ $\vec{E}\uparrow$

Magnetické siločáry jsou kružnice se středy na ose dipólu.



Orientace v radiační zóně podobná jako u rovinné vlny

Energie vlny

$$u_E = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \quad , \text{ ve vakuu } \quad u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$[u_E] = J/m^3$ energie elektrické složky

$$u_B = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mu_0}\frac{E^2}{c^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$u_E = u_B$ ve vakuu a v neabsorbujícím dielektriku

Po celou dobu přednášky pracujeme s nemagnetickými látkami; tj. $\mu_r = 1$

$$u_{tot} = u_E + u_B = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 E B c$$

V optickém oboru mají praktický význam časové střední hodnoty $\langle u \rangle_T$, a to vzhledem k velmi rychlé frekvenci vlnění $\approx 10^{15}\,s^{-1}$, kdy žádný detektor není tak rychlý, aby tyto změny mohl sledovat. Detektor (včetně lidského oka) tedy registruje časové střední hodnoty energie dopadající na detektor.

V případě monochromatické rovinné vlny je

$$\langle u_E \rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz-\omega t) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2$$

$$\langle u_B \rangle_T = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \qquad \langle u_{tot} \rangle_T = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$$

Středování $\cos^2(\ )$

$$\langle \cos^2\omega t\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\omega t\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\right] dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\, dt + \frac{1}{2T}\int_0^T \cos 2\omega t\, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2T}\cdot\frac{1}{2\omega}\left[\sin 2\omega t\right]_0^T =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega T}\left[\sin\frac{4\pi T}{T} - \sin 0\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega T}\left[\sin 4\pi - \sin 0\right] =$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\langle \cos^2(kz-\omega t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(kz-\omega t)\, dt = \qquad \begin{array}{l} kz-\omega t = \xi \\ -\omega\, dt = d\xi \end{array}$$

$$= -\frac{1}{\omega T}\int_{kz}^{kz-\omega T} \cos^2\xi\, d\xi = -\frac{1}{\omega T}\int_{kz}^{kz-\omega T} \frac{1}{2}(1+\cos 2\xi)\, d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2\omega T}\left[\xi\right]_{kz}^{kz-\omega T} - \frac{1}{2\omega T}\left[\frac{1}{2}\sin 2\xi\right]_{kz}^{kz-\omega T} =$$

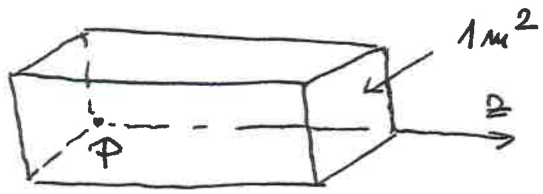
$$= -\frac{1}{2\omega T}\cdot(-\omega T) - \frac{1}{4\omega T}\left[\sin 2(kz-\omega T) - \sin kz\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\omega T}\left[\sin 2kz \cos 2\omega T - \cos 2kz \sin 2\omega T\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8\pi}\left[\sin 2kz \underbrace{\cos 4\pi}_{=1} - \cos 2kz \underbrace{\sin 4\pi}_{=0} - \sin 2kz\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8\pi}\left[\sin 2kz - \sin 2kz\right] = \frac{1}{2}$$

Vedle hustoty energie má význam v případě postupných vln i výkon dopadající na jednotku plochy.



$ct = c$ (pro $t = 1\,s$)

? kolik energie proteče kolem pozorovatele v místě P za 1 s přes plochu $1\,m^2$?
Předpokládáme, že rovinná vlna se šíří ve směru z ve vakuu rychlostí c.

- Proteče energie, která je obsažena v kvádru o objemu $V = \underset{\text{plocha}}{1} \cdot c \cdot \underset{\text{čas}}{1} = c\ [m^3]$

$$\underset{\substack{\text{hustota}\\ \text{energie}}}{\langle u_{tot}} \cdot \overset{\text{č } V = c\ (m^3)}{c} \rangle_T = \langle \varepsilon_0 E^2 c \rangle_T = \langle \frac{B^2}{\mu_0} \cdot c \rangle_T = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 c = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0} \cdot c$$

(energie / m^3)

Zkusme vyjádřit Poyntingův vektor $\vec{S}$

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ ($\vec{E} \perp \vec{H}$ ve vakuu a v izotropním prostředí!)

$$\Rightarrow \quad S = EH = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{c\mu_0} = \frac{B^2 c}{\mu_0}$$

$$\langle S \rangle_T = \frac{1}{2} B_0^2 \frac{c}{\mu_0}$$

$$\Rightarrow \langle u_{tot}\, c \rangle_T = \langle S \rangle_T \qquad [S] = \frac{W}{m^2}$$

tj. Poyntingův vektor má fyzikální význam výkonu, který v postupné rovinné vlně protéká $1\,m^2$, tj. je to energie která proteče $1\,m^2$ za $1\,s$.

Díky středování přes časový interval (v našem případě perioda T) nezávisí hustota energie a výkon dopadající na jednotku plochy (velikost Poyntingova vektoru) na frekvenci vlny, ale pouze na její amplitudě!

Výpočet $\langle u \rangle_T$ a $\langle S \rangle_T$ v dielektriku vede ke vztahům

$$\langle u \rangle_T = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r E_0^2 \qquad \langle S \rangle_T = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{Z} \qquad Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}$$

$(\mu_r = 1)$

$\langle S \rangle_T$ se často nazývá intenzitou vlny

$$I = \langle S \rangle_T$$

$\langle u \rangle_T$ a $\langle S \rangle_T$ se často vyjadřují pomocí komplexního zápisu.

$$\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \qquad \tilde{\vec{H}} = \tilde{\vec{H}}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

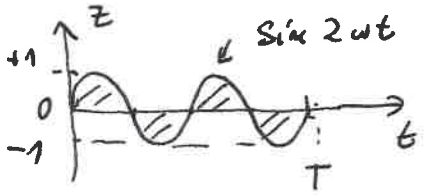
$$\vec{S} = \mathrm{Re}\{\tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}\} = \mathrm{Re}\{\tilde{\vec{E}}\} \times \mathrm{Re}\{\tilde{\vec{H}}\} =$$

$$= \left(\frac{\tilde{\vec{E}} + \tilde{\vec{E}}^*}{2}\right) \times \left(\frac{\tilde{\vec{H}} + \tilde{\vec{H}}^*}{2}\right) = \frac{1}{4}\left\{\tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^* + \tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}} + \tilde{\vec{E}}^* \times \tilde{\vec{H}} + \tilde{\vec{E}}^* \times \tilde{\vec{H}}^*\right\}$$

$$I = \langle S \rangle_T \qquad \langle \tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}} \rangle_T \sim \langle e^{-2i\omega t} \rangle_T = \langle \cos 2\omega t \rangle_T + i \langle \sin 2\omega t \rangle_T$$

$$\langle \cos 2\omega t \rangle_T = \langle \sin 2\omega t \rangle_T = 0$$

To lze ukázat výpočtem, ale vyplývá to i jednoduše z obrázku



∴ Plochy pod i nad osou $z=0$ jsou stejné a mají opačné znaménko

Podobně $\langle \tilde{\vec{E}}^{*} \times \tilde{\vec{H}}^{*} \rangle_T \sim \langle e^{2i\omega t} \rangle_T = 0$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4} \left\{ \langle \tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^{*} \rangle_T + \langle \tilde{\vec{E}}^{*} \times \tilde{\vec{H}} \rangle_T \right\} = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left\{ \langle \tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^{*} \rangle_T \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left\{ \langle \tilde{\vec{E}}^{*} \times \tilde{\vec{H}} \rangle_T \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{E}_0| |\vec{H}_0| \underbrace{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \cdot e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}_{1} =$$

→ Není nutné časové středování, členy s ωt se vyrušily.

$$= \frac{1}{2} |\vec{E}_0| \cdot \frac{|\vec{B}_0|}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{c \mu_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$$

Poyntingův teorém

- vyjadřuje zákon zachování energie

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad /\cdot\vec{H} \qquad \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad /\cdot\vec{E}$$

(1) (2)

(2) − (1) $$\vec{E}\,\mathrm{rot}\vec{H} - \vec{H}\,\mathrm{rot}\vec{E} = \vec{j}\cdot\vec{E} + \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\,\mathrm{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\mathrm{rot}\vec{H}$$

$$-\mathrm{div}\,\vec{S} = \vec{j}\cdot\vec{E} + \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}\cdot\vec{E}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\varepsilon_r E^2) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(u_E)$$

analogicky $$\vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(u_B)$$

$$\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(u_E + u_B) = \frac{\partial}{\partial t}(u)$$

Elektrický proud můžeme rozdělit na

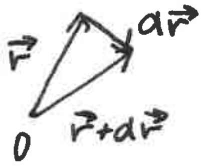
$$\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_v \qquad \vec{j}_e = \sigma\vec{E} \text{ ohmický proud}$$

$\vec{j}_v$ .. konvekční proud

konvekční proud vzniká při pohybu nábojů (např. ve vakuu)

Lorentzova síla $$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v}\times\vec{B})$$

V důsledku působení Lorentzovy síly se náboj s polohovým vektorem $\vec{r}$ posune do $\vec{r} + d\vec{r}$



Na to je potřeba práce

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = q\vec{E}\cdot d\vec{r} + q(\vec{v}_e\times\vec{B})\,d\vec{r}$$

$$d\vec{r} = \vec{v}_e\,dt$$

$$\Rightarrow \quad dA = q\vec{E}\cdot d\vec{r} + q\underbrace{(\vec{v}_e\times\vec{B})\cdot\vec{v}_e}_{0}\,dt = q\vec{E}\cdot d\vec{r} = q\vec{E}\cdot\vec{v}_e\,dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \underbrace{q\vec{v}_e}_{\vec{j}_v}\cdot\vec{E}$$

$\vec{j}_v$ .. hustota elektrického proudu

Celkově $\quad -\operatorname{div}\vec{S} = \underbrace{(\vec{j}_e+\vec{j}_v)}_{\vec{j}}\vec{E} + \dfrac{\partial(u_{pole})}{\partial t} \qquad u_{pole} = u_E + u_B$

$$\vec{j}\cdot\vec{E} = \frac{\partial(u_{látka})}{\partial t}$$ ... Výkon na jednotku objemu dodaný látce z EM pole

$$-\operatorname{div}\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{pole} + u_{látka}\right)$$

$$\operatorname{div}\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}(u_{pole} + u_{látka}) = 0$$

$$\int_V \operatorname{div}\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V (u_{pole} + u_{látka})\,dV = 0$$

$$\oint \vec{S}\cdot\hat{n}\,dS = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V (u_{pole} + u_{látka})\,dV$$

Pokud energie z objemu vytéká, je $\oint \vec{S}\cdot\hat{n}\,dS$ záporný. To odpovídá úbytku energie uložené v EM poli a látce.

Silové účinky elektrické a magnetické složky pole

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) \qquad \vec{v}_e \times \vec{B} = |\vec{v}_e||\vec{B}| \sin\varphi$$

Největší, když $\vec{v}_e \perp \vec{B}$

$|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$ ve vakuu

$$|\vec{F}| = \underset{①}{|q\vec{E}|} + \underset{②}{\frac{q\,|v_e|\,.\,|\vec{E}|}{c}} \qquad v_e << c$$

$\Rightarrow$ ② $<<$ ①

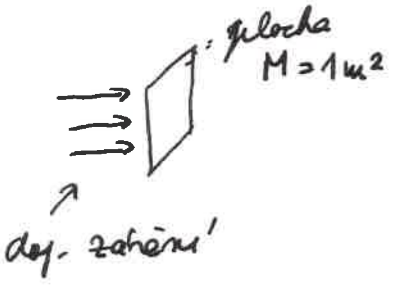
Silové účinky elektrické složky jsou mnohem větší než silové účinky magnetické složky.

Tlak EM záření

Jednoduchý popis je pomocí představy světla jako souboru kvant energie (fotonů)

Tato kvanta mají energii $\mathcal{E} = h\nu$

a hybnost $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{\mathcal{E}}{c}$



$$S = |\vec{S}| = \frac{\mathcal{E}}{M \cdot t} \qquad \left[\frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}\right]$$

$$\frac{S}{c} = \frac{\mathcal{E}}{c \cdot M t} = \frac{p}{t} \cdot \frac{1}{M} = \frac{F}{M} = P$$

tlak

F = síla

Radiační tlak - příklad

? Jaký je tlak slunečního záření na povrchu Země?

Vzdálenost Země od slunce $1{,}5\times 10^{11}\,m = R$

$$I = \langle S\rangle_T = \frac{L}{4\pi R^2}$$

L .. výkon slunce $4\times 10^{26}\,W$

$$I = \frac{4\times 10^{26}}{4\times 3{,}14\times(1{,}5\times 10^{11})^2} = 1{,}42\times 10^{3}\,\frac{W}{m^2}$$

tlak $p = \dfrac{I}{c} = \dfrac{1{,}42\times 10^3}{3\times 10^8} = 4{,}72\times 10^{-6}\,Pa$

Tlak slunečního záření a komety

Tlak slunečního záření je zodpovědný za vznik jednoho ze 2 chvostů komety

Na částice vylétávající z komety působí gravitační síla slunce a zároveň tlak slunečního záření.

gravitační síla $F_g = \dfrac{g\cdot m M_\odot}{R^2}$

$M_\odot$ .. hmotnost slunce

m .. hmotnost částice

R .. vzdálenost částice a slunce

$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

r ... poloměr částice

ρ .. hustota částice

$$\underbrace{\frac{L}{4\pi R^2}}_{\text{výkon na } 1\,m^2}\cdot\frac{\pi r^2}{c} > \frac{4}{3}\,\frac{\pi r^3 \rho M_\odot}{R^2}$$

(odpuzování částice od slunce tlakem světla)

$$r < \frac{3L}{16\pi\rho M_{\odot} c}$$

$\rho = 2.5 \times 10^{3}$
$g = 6,67 \times 10^{-11}$
$M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ kg

Po dosazení $r < 2 \times 10^{-7}$ m

Částice o ∅ menším než 4×10^{-7} m jsou vlivem tlaku slunečního záření odpuzovány od slunce, vzniká 1 ze 2 chvostů komety.

Snímek komety. Bílý chvost komety je způsoben radiačním tlakem slunečního záření působícím na prachové částice. Sluneční záření je částicemi plně absorbováno. Méně výrazný modrý chvost je výsledkem interakce komety se slunečním větrem (emise protonů a elektronů sluncem) . Tyto nabité částice excitují molekuly CO_2, při jejich deexcitaci dochází k emisi modrého záření.