Interference

odchylky od sčítání výkonových intenzit projevující se v prostorové modulaci intenzity.

$$I(\vec{r}) \neq \sum_{n} I_n(\vec{r})$$

n .. indexace vln vstupujících do skládání

Dále budeme řešit složení 2 vln

$$\tilde{\vec{E}}_1(\vec{r},t) = \tilde{\vec{E}}_{01}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} = \vec{E}_{01}(\vec{r})\, e^{i\phi_1(\vec{r})}\, e^{-i\omega t}$$

$$\phi_1 = \vec{k}_1\cdot\vec{r} + \varphi_1$$

$$\tilde{\vec{E}}_2(\vec{r},t) = \tilde{\vec{E}}_{02}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} = \vec{E}_{02}(\vec{r})\, e^{i\phi_2(\vec{r})}\, e^{-i\omega t}$$

$$\phi_2 = \vec{k}_2\cdot\vec{r} + \varphi_2$$

$$\tilde{\vec{E}}_1 + \tilde{\vec{E}}_2 = \left(\tilde{\vec{E}}_{01}(\vec{r}) + \tilde{\vec{E}}_{02}(\vec{r})\right) e^{-i\omega t}$$

$$I_1 \sim \tilde{\vec{E}}_{01}(\vec{r})\cdot\tilde{\vec{E}}^{*}_{01}(\vec{r}) \qquad I_2 \sim \tilde{\vec{E}}_{02}(\vec{r})\cdot\tilde{\vec{E}}^{*}_{02}(\vec{r})$$

(viz Malý, optika str. 29)

$$I \sim \left(\tilde{\vec{E}}_{01} + \tilde{\vec{E}}_{02}\right)\cdot\left(\tilde{\vec{E}}^{*}_{01} + \tilde{\vec{E}}^{*}_{02}\right)$$

$$I \sim \tilde{\vec{E}}_{01}\cdot\tilde{\vec{E}}^{*}_{01} + \tilde{\vec{E}}_{01}\tilde{\vec{E}}^{*}_{02} + \tilde{\vec{E}}^{*}_{01}\cdot\tilde{\vec{E}}_{02} + \tilde{\vec{E}}_{02}\cdot\tilde{\vec{E}}^{*}_{02} =$$

$$= E_{01}^2 + E_{02}^2 + \vec{E}_{01}\cdot\vec{E}_{02}\left(e^{i(\phi_1-\phi_2)} + e^{-i(\phi_1-\phi_2)}\right) =$$

$$= E_{01}^2 + E_{02}^2 + E_{01}\cdot E_{02}\cos\alpha\cdot 2\cos(\phi_1-\phi_2)$$

α .. úhel mezi $\vec{E}_1$ a $\vec{E}_2$

Dále budeme předpokládat $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$, $\cos\alpha = 1$

$$\Rightarrow \quad I \sim E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\phi_1-\phi_2)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta \qquad \delta = \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r})$$

$\delta = 0, 2\pi, 4\pi \ldots$ maximum $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$

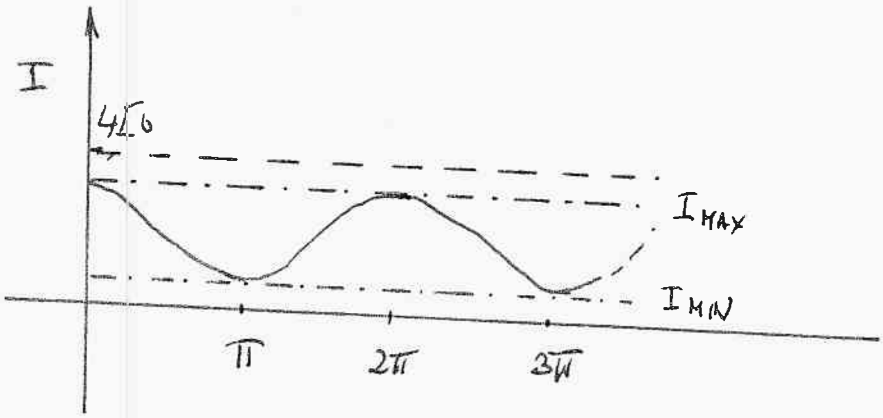
$\delta = \pi, 3\pi, 5\pi \ldots$ minimum $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$

Pokud $I_1 = I_2 = 0$ je $I_{max} = 4I_0$

$I_{min} = 0$

Pokud $I_1 \neq I_2$ je $I_{max} < 4I_0$

$I_{min} > 0$



Průběh intenzity pro případ $I_1 \neq I_2$

Při pozorování interference na stínítku – jako např. při Youngově pokusu jsou tedy viditelná maxima a minima interference. Průběh intenzity vypadá jako střídání světlejších a tmavších oblastí; ty podle typu světelného zdroje vypadají na stínítku jako proužky, resp. kroužky.

Definujeme tzv. viditelnost IF proužků jako

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

$V = 1$ $I_{min} = 0$ (tj. pro případ $I_1 = I_2 = I_0$)

$V = 0$ pokud $I_{max} = I_{min}$

Podmínka maxima

$\cos\delta = 1$ $\qquad \delta = 2m\pi \qquad m \in Z$

Fázový rozdíl

Dráhový rozdíl

$\Delta l = m\lambda$ $\qquad k \cdot \Delta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot m\lambda = 2\pi$

$\Delta l = \frac{m \cdot \lambda_0}{n}$ $\qquad n\Delta l = m\lambda_0$

optická dráha

(rozdíl optických drah

IF svazků)

Podmínka minima

$\cos\delta = 0$ $\qquad \delta = (2m-1)\pi$

Fázový rozdíl

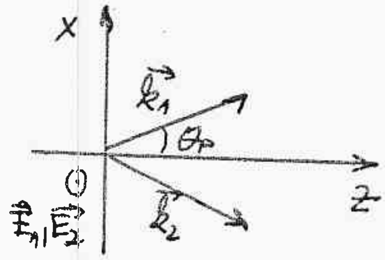
$\Delta l = (2m-1) \cdot \frac{\lambda}{2}$ $\qquad k\Delta l = \frac{2\pi}{\lambda}(2m-1) \cdot \frac{\lambda}{2} = (2m-1)\pi$

Dráhový rozdíl

$n \cdot \Delta l = (2m-1) \cdot \frac{\lambda_0}{2}$

Rozdíl optických drah

Jako konkrétní případ interference 2 rovinných vln probereme IF vln stejné frekvence, které svírají úhel $2\theta_p$



$$\vec{k}_1 = (\overset{k_{1x}}{k\sin\theta_p},\ 0,\ \overset{k_{1z}}{k\cos\theta_p})$$

$$\vec{k}_2 = (-k\sin\theta_p,\ 0,\ k\cos\theta_p)$$

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = k$$

$\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2 \parallel y$

$$\tilde{E}_{1y} = E_0\, e^{i(\vec{k}_1\cdot\vec{r} - \omega t + \frac{\varphi}{2})}$$

$$\tilde{E}_{2y} = E_0\, e^{i(\vec{k}_2\cdot\vec{r} - \omega t - \frac{\varphi}{2})}$$

2 vlny stejné amplitudy a $\parallel$ vektory $\vec{E}$

Počáteční rozdíl fáze φ jsme symetricky rozdělili mezi obě vlny.

$$\vec{k}_1\cdot\vec{r} = k_{1x}x + k_{1z}\cdot z = k\sin\theta_p\cdot x + k\cos\theta_p\cdot z$$

$$\vec{k}_2\cdot\vec{r} = k_{2x}x + k_{2z}z = -k\sin\theta_p x + k\cos\theta_p z \,..$$

$$\tilde{E}_y = \tilde{E}_{1y} + \tilde{E}_{2y} = E_0 e^{i(k_z z - \omega t)}\left[e^{i(k_x x + \frac{\varphi}{2})} + e^{-i(k_x x + \frac{\varphi}{2})}\right]$$

$$= 2E_0 \cos\left(k_x x + \frac{\varphi}{2}\right) e^{i(k_z z - \omega t)}\,]$$

E_y ... komplexní

$$Re\{E_y\} = 2E_0\cos\left(k_x x + \frac{\varphi}{2}\right)\cos(k_z z - \omega t)\,]$$

Hustota elektrické energie

↓ reálná část

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E_y^2 \qquad \varepsilon_r = n^2$$

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 n^2\left[4E_0^2\cos^2\left(k_x x + \frac{\varphi}{2}\right)\cos^2(kz-\omega t)\right]$$

$$\langle w_e\rangle_T = \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2\, 4 E_0^2\cos^2\left(k_x x + \frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$\left(\langle\cos^2(kz-\omega t)\rangle_T = \frac{1}{2}\right)$$

$$= \varepsilon_0 n^2 E_0^2\cos^2\left(k_x x + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 n^2 E_0^2\left(1+\cos\left(2k_x x+\varphi\right)\right)$$

Podélný Poyntingův vektor

$$\langle S_x\rangle_T = 0 \qquad \langle S_z\rangle_T = 2\varepsilon_0 c\, n E_0^2\cos^2\left(k_x x + \frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= 4I_0\cos^2\left(k_x x + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\text{kde} \quad I_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\, n E_0^2$$

⇒ Perioda hustoty elektrické energie i výkonu elmag. pole ve směru x

$$\sim \left(1+\cos\left(2k_x x+\varphi\right)\right) = 2\cos^2\left(k_x x + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Maximum tohoto výrazu nastává pro

$$\cos(2k_x x + \varphi) = 1$$

$$\cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta_p x_m + \varphi\right) = 1$$

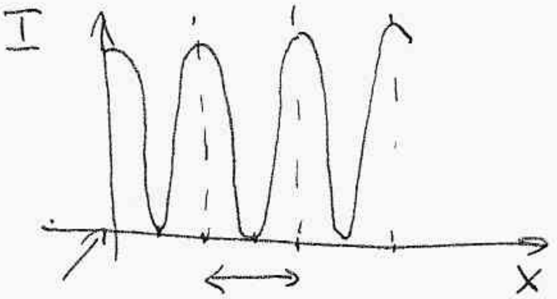
$$\Rightarrow \quad \frac{4\pi}{\lambda}\sin\theta_p x_m + \varphi = 0 \quad (2\pi m,\ m\in\mathbb{Z})$$

2 sousední maxima

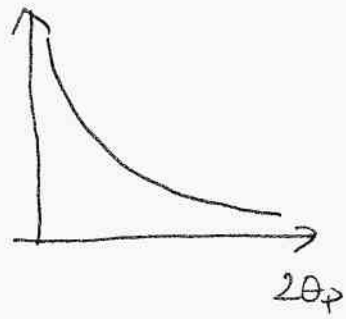
$$\frac{4\pi}{\lambda}\sin\theta_p\, x_{m1} + \varphi = 0 \qquad \frac{4\pi}{\lambda}\sin\theta_p\, x_{m2} + \varphi = 2\pi$$

$$\frac{4\pi}{\lambda}\sin\theta\,\underbrace{(x_{m2}-x_{m1})}_{\Delta X} = 2\pi$$

$$\Delta X = \frac{\lambda}{2\sin\theta_p} = \frac{\lambda_0}{2n\sin\theta_p}$$



Interferenční proužky



S klesajícím úhlem θ_p ($\theta_p < \frac{\pi}{2}$)
mezi vlnovými vektory roste
vzdálenost sousedních maxim (resp. minim)

Pokud je $\theta_p = 0$, tak se centrální proužek roztáhne do $\pm\infty$. Intenzita v centrální oblasti závisí na fázovém rozdílu δ)

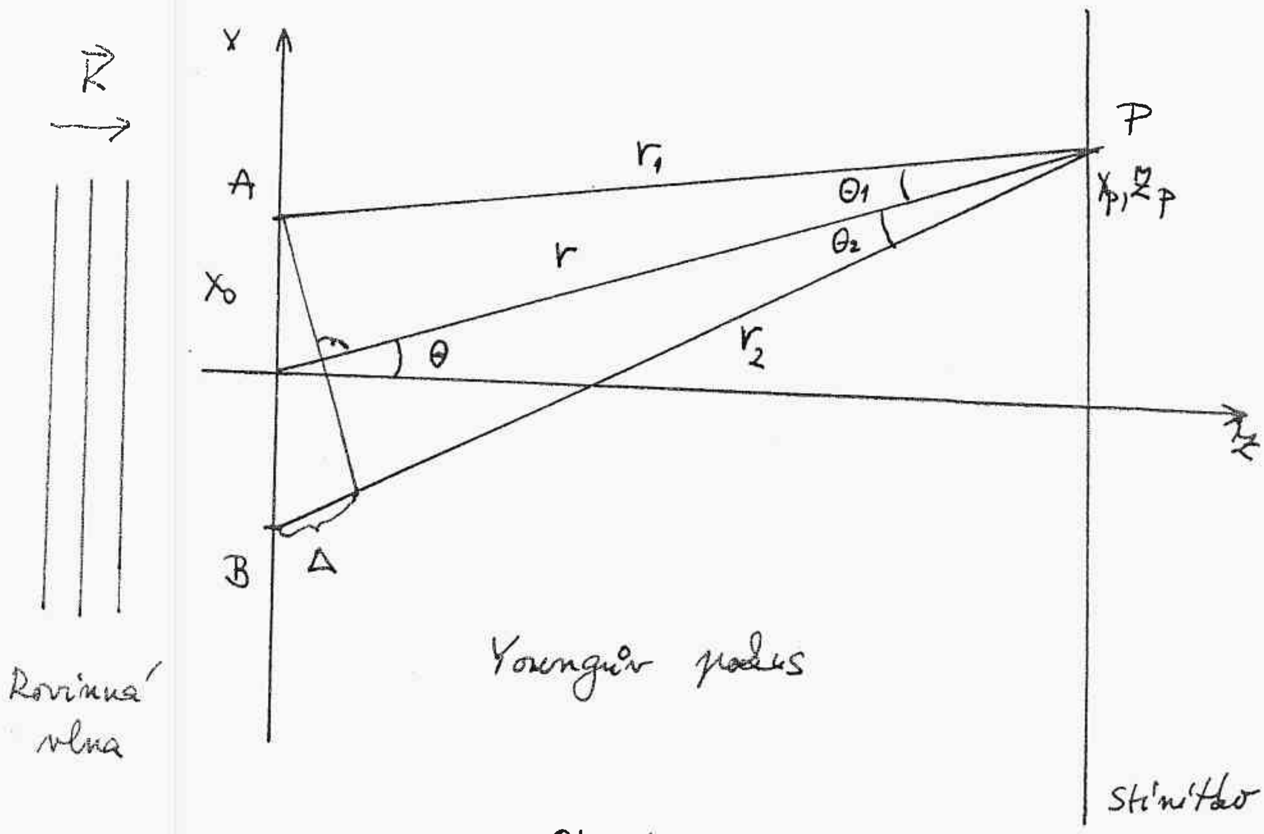
$$I = 2I_0(1+\cos\delta) = 4I_0\cos^2\frac{\delta}{2}$$

Pro studovaný případ stejných intenzit interferujících vln.

Youngův pokus

Jeden z historicky nejvýznamnějších pokusů z oboru optiky. Ve své originální podobě demonstroval vlnovou podstatu světla. Při jeho zopakování, kdy je místo zdroje světla využito elektronů jasně prokazují částicově – vlnový dualismus.

Mějme dva bodové zdroje



Obr. 1

Na stínítko se dvěma malými kruhovými otvory dopadá zleva rovinná vlna. Podle Huyghensova principu představují zdroje A, B zdroje kulových vln. Na 2. stínítku pozorujeme IF obraz.

Jsou-li vlny v bodě P ve fázi, dojde ke konstruktivní interferenci. Jsou-li fázově posunuty o π, dojde k destruktivní interferenci.

Představují-li zdroje A a B kmitající dipóly, lze jejich záření přibližně aproximovat kulovou vlnou. V souladu se zákonem zachování energie klesá intenzita záření $S \sim \frac{1}{r^2}$ (tj. amplituda vlny klesá jako $\frac{1}{r}$, kde r je vzdálenost od zdroje.

Pokud $r_2 - r_1 = m \cdot \lambda$, $m \in Z$ – konstruktivní IF

$r_2 - r_1 = (2m-1) \cdot \frac{\lambda}{2}$, $m \in Z$ – destruktivní IF

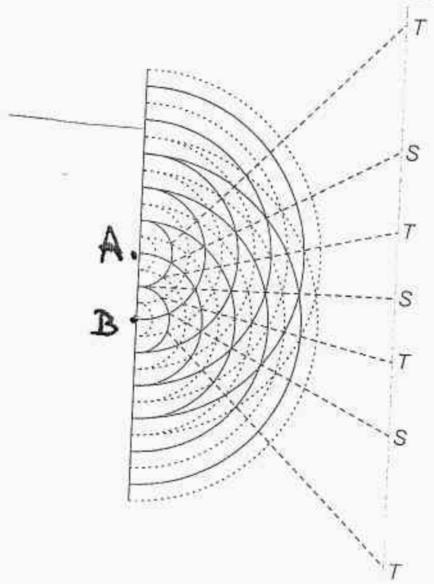
Hledáme tedy geometrické místo bodů splňujících podmínku $|r_2 - r_1| = konst.$

= jedná se o rovnici hyperboloidu

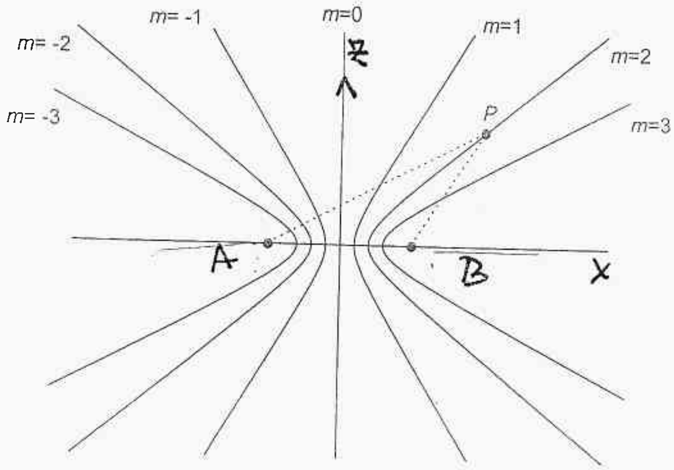
$r_2 - r_1 = \lambda, 2\lambda, 3\lambda \dots$ plochy maxim interference

$r_2 - r_1 = \frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda \dots$ plochy minim interference

Interferenci dále popíšeme přibližně pro případ velké vzdálenosti pozorovacího bodu P od zdrojů A, B



Obr. 5.4 Youngův experiment: střídání míst s velkou (S) a malou (T) intenzitou světla



$A = [x_0, 0, 0]$

$B = [-x_0, 0, 0]$

Obr 2a,b

Ze zdrojů A a B se šíří kulové vlny

$$r_1 = \overline{AP} = \sqrt{(x_p - x_0)^2 + z_p^2} \qquad r_2 = \overline{BP} = \sqrt{(x_p + x_0)^2 + z_p^2}$$

Dráhový rozdíl $\Delta = \overline{BP} - \overline{AP} = \sqrt{(x_p+x_0)^2+z_p^2} - \sqrt{(x_p-x_0)^2+z_p^2} =$

$$\doteq \sqrt{x_p^2 + z_p^2 + 2x_p x_0} - \sqrt{x_p^2 + z_p^2 - 2x_p x_0}$$

$x_0^2 \to 0$

(10)

$$\doteq \underbrace{\sqrt{x_p^2+z_p^2}}_{r \text{ - viz obr. 1}} \left[\sqrt{1+\frac{2x_p}{r^2}x_0} - \sqrt{1-\frac{2x_p}{r^2}x_0} \right] \doteq$$

$$\doteq r\left(1+\frac{x_p x_0}{r^2} - 1 + \frac{x_p x_0}{r^2}\right) = \frac{2x_p x_0}{r} = 2x_0 \sin\theta$$

$$\frac{x_p}{r} = \sin\theta$$

Použita aproximace $x_0 \to 0$, $\frac{x_p x_0}{r^2} \ll 1$

tj. $x_p x_0 \ll r^2$

(nebyla použita aproximace malých úhlů, tj. platí i pro velká θ)

Rozložení intenzity na stínítku

Vlny ze zdrojů A a B tedy mají přibližný fázový rozdíl $2k x_0 \sin\theta$

Intenzita světla na stínítku je pak úměrná

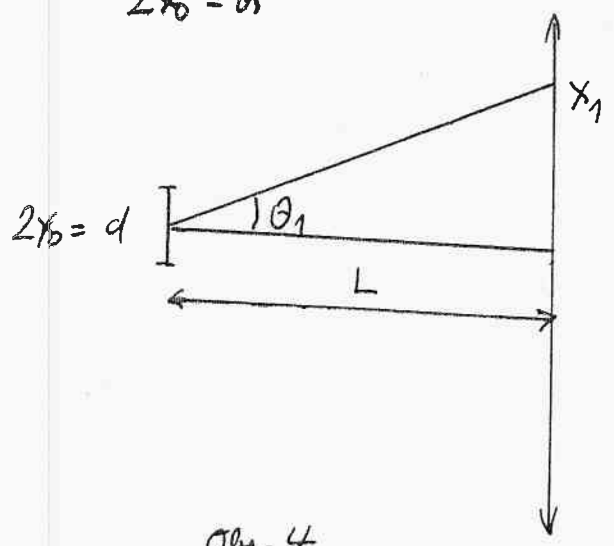
$$I \sim (E_1+E_2).(E_1+E_2)^* \qquad \text{kde} \quad E_2 \doteq E_1 e^{2ikx_0\sin\theta}$$

$$I \sim \frac{A^2}{z^2}\left(1+e^{i2kx_0\sin\theta}\right).\left(1+e^{-i2kx_0\sin\theta}\right) =$$

$$= \frac{A^2}{z^2}\left(1+1+e^{i2kx_0\sin\theta}+e^{-i2kx_0\sin\theta}\right) =$$

$$= \frac{2A^2}{z^2}\left[\left(1+\cos(2kx_0\sin\theta)\right)\right] \doteq \frac{2A^2}{z^2}\left(1+\cos\left(2kx_0\cdot\frac{x_p}{z_p}\right)\right)$$

$2x_0 = d$



Obr. 4

$$d \sin\theta_1 = \lambda \qquad 1.\ \text{maximum}$$

$$\mathrm{tg}\,\theta_1 = \frac{x_1}{L}$$

$$\theta_1 = \arcsin\frac{\lambda}{d}$$

$$x_1 = L \cdot \mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{\lambda}{d}\right)$$

$$d \sin\theta_2 = 2\lambda$$

$$\mathrm{tg}\,\theta_2 = \frac{x_2}{L}$$

$$x_2 = L \cdot \mathrm{tg}\,\arcsin\frac{2\lambda}{d}$$

V aproximaci malých úhlů $\mathrm{tg}\,\theta_i = \sin\theta_i = \theta_i$

Tedy v této aproximaci

$$x_1 = L \cdot \frac{\lambda}{d}$$

$$x_2 = \frac{L \cdot 2\lambda}{d}$$

atd.

$$x_m = \frac{L \cdot m\lambda}{d}$$

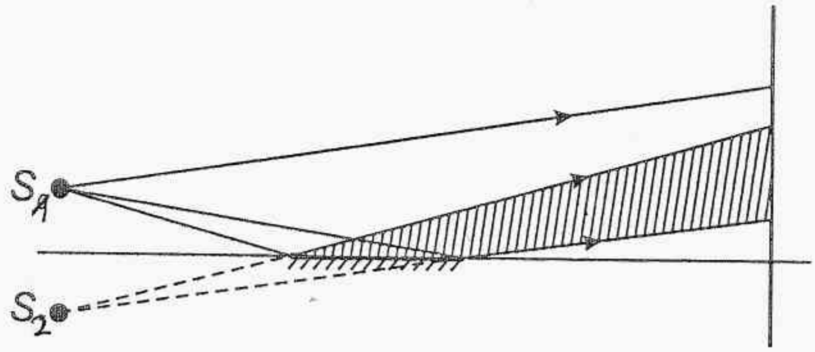
$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{L \cdot \lambda}{d}$$

Ekvidistantní vzdálenost maxim a minim. Přesně platí pouze v aproximaci malých úhlů.

K pozorování a využití IF jevů je třeba, aby v místě pozorování byly vlny koherentní, tj. měly dobře definovanou fázi a tím i fázový rozdíl. Proto se interferující paprsky připravují zpravidla z jednoho původního zdroje, a to buď dělením vlnoplochy nebo amplitudy. Youngův pokus je příkladem využití dělení vlnoplochy.

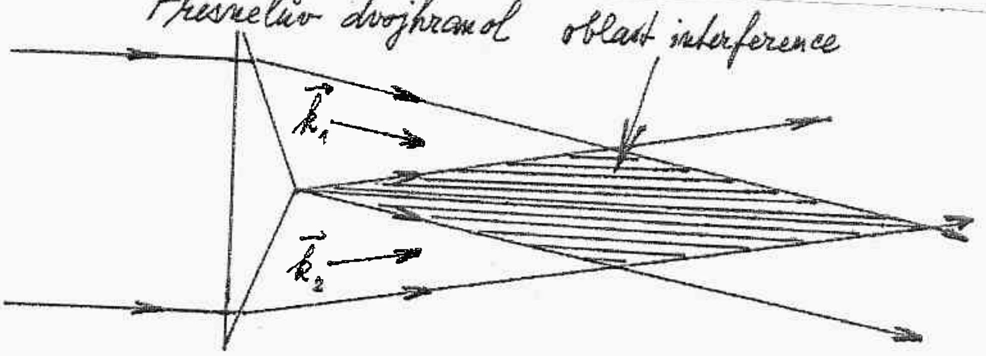
Další příklady dělení vlnoplochy

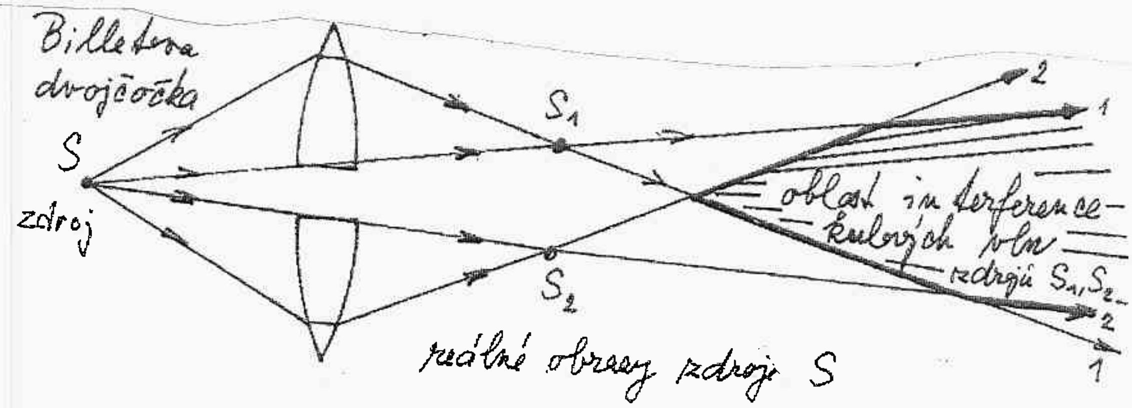
Loydovo zrcadlo



Interferuje vlna od S_1 a odražená (virtuální zdroj S_2)

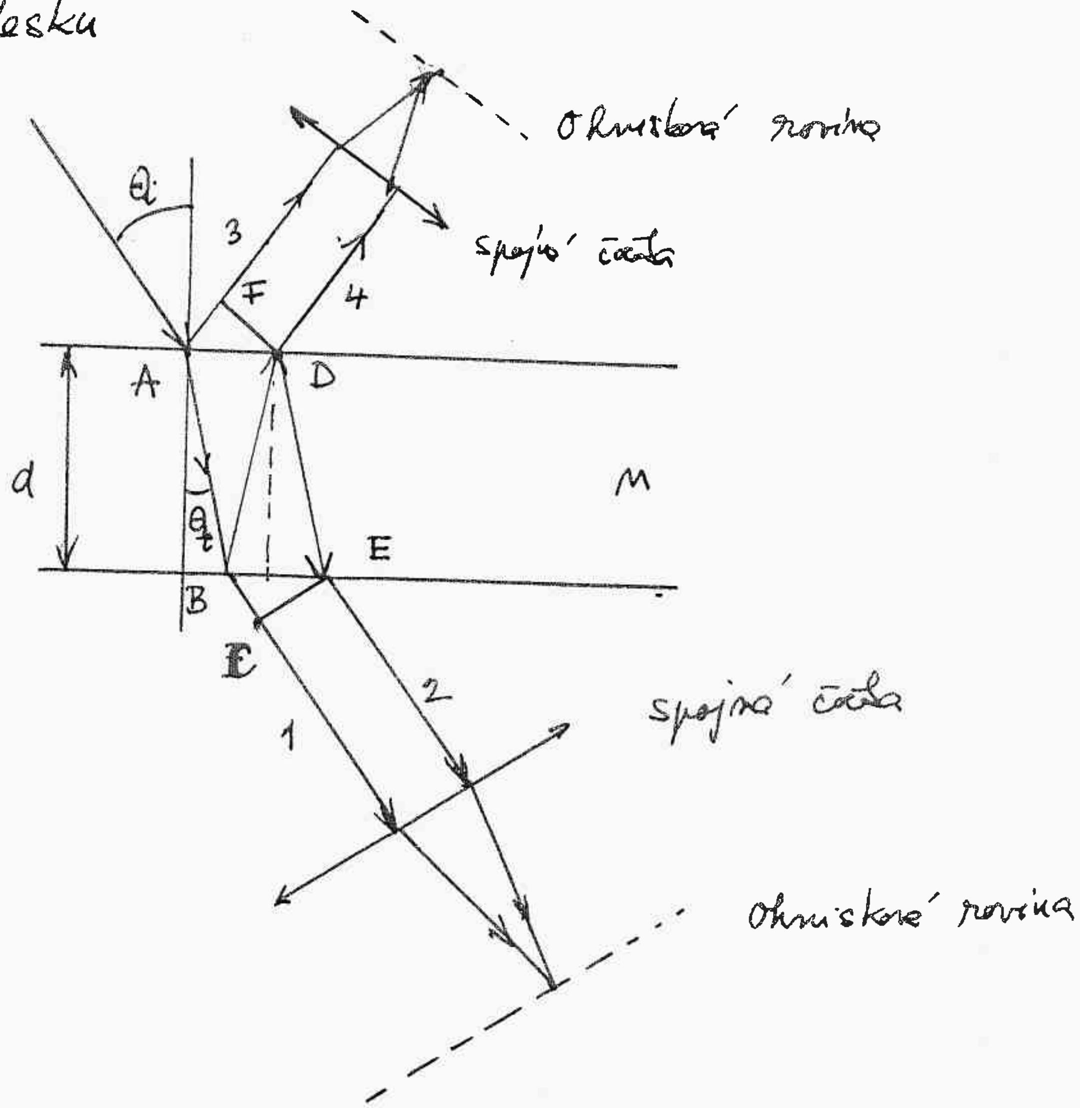
Koherentními zdroji jsou reálný bodový zdroj S_1 a jeho virtuální obraz za zrcadlem S_2





Ve šrafovaných oblastech vznikají interferenční obrazce. Tyto proužky (kroužky) jsou reálné, nelokalizované! Je možné je pozorovat bez použití dodatečné optiky. Jsou charakterizovány dráhovým a jemu odpovídajícím fázovým rozdílem $k(S_2 - S_1)$

Rovinná vlna dopadající na planparalelní desku



$$\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{DE} = \frac{d}{\cos\theta_t}$$

$$\overline{BC} = \overline{BE}\sin\theta_i$$

$$\overline{AD} = \overline{BE} = 2d\,\mathrm{tg}\,\theta_t$$

Interference na průchod

Optické dráhy 2 interferujících paprsků 1 a 2 se rozdělí odrazem a lomem v bodě B. Oba se opět spojí na úsečce CE, odtud dále postupují společně.

Optická dráha paprsku 1 - $\overline{BC}$
(od dělícího bodu B)

Paprsek 2

Geometrická dráha $\overline{BE} = \dfrac{2d}{\cos\theta_t} \Rightarrow \overline{BC} = 2d\,\mathrm{tg}\,\theta_t \sin\theta_i$

optická dráha $OD_{\overline{BE}} = \dfrac{2nd}{\cos\theta_t}$

Rozdíl optických drah na $\overline{CE}$

$$\Delta OD = OD_{\overline{BE}} - OD_{\overline{BC}} = \frac{2nd}{\cos\theta_t}$$

$$\Delta OD = \frac{2nd}{\cos\theta_t} - 2d\,\mathrm{tg}\,\theta_t \sin\theta_i$$

$$\Delta OD = \frac{2nd}{\cos\theta_t}\left(1 - \frac{\sin\theta_t}{n}\cdot\sin\theta_i\right)$$

Zákon lomu $\quad \sin\theta_i = n\cdot\sin\theta_t$

$$\Rightarrow \quad \Delta OD = \frac{2nd}{\cos\theta_t}\left(1-\sin^2\theta_t\right) = 2nd\cos\theta_t$$

Tomu odpovídající rozdíl fází

$$\Delta\phi = k_0\cdot 2nd\cos\theta_t = \frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot 2nd\cos\theta_t =$$

$$= \frac{4\pi}{\lambda_0}\,nd\cos\theta_t = \frac{4\pi}{\lambda}\,d\cos\theta_t$$