Šíření světla v neizotropním prostředí

Isotropní média → χ, ε, μ .. skalární veličiny

stejné šíření ve všech směrech

Neisotropní látky – $\vec{P} \nparallel \vec{E}$, neboli $\vec{P} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi} \vec{E}$

$\overleftrightarrow{\chi}$ ... tenzor

$\overleftrightarrow{\varepsilon} = 1 + \overleftrightarrow{\chi}$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi} \vec{E} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon} \vec{E}$

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Dále budeme předpokládat, že prostředí je neabsorbující. Za tohoto předpokladu lze ukázat z energetických úvah, že $\overleftrightarrow{\chi}$ je reálný a symetrický! $\chi_{ij} = \chi_{ji}$ (tj. 9 komponent tenzoru se redukuje na 6)

V případě reálného symetrického tenzoru lze vždy najít takový souřadný systém, že matice je diagonální!

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{P} \nparallel \vec{E}$$

Dále budeme značit $\chi_{11} = \chi_1$, $\chi_{22} = \chi_2$, $\chi_{33} = \chi_3$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_1 E_1 \hat{x} + \varepsilon_0 \chi_2 E_2 \hat{y} + \varepsilon_0 \chi_3 E_3 \hat{z}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1+\chi_1) E_1 \hat{x} + \varepsilon_0 (1+\chi_2) E_2 \hat{y} + \varepsilon_0 (1+\chi_3) E_3 \hat{z}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 \hat{x} + \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2 \hat{y} + \varepsilon_0 \varepsilon_3 E_3 \hat{z}$$

Dále předpokládejme, že látkou se šíří elektromagnetická rovinná vlna s frekvencí ω.

Budeme předpokládat řešení ve tvaru

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad \text{.. Všechny kmitají ve fázi.}$$

$$\vec{P} = \vec{P}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Z Maxwellových rovnic pak plyne

$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \ldots \quad \vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}$.

$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \ldots \quad \vec{B} \parallel \vec{H} \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{H}$

$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = 0 \qquad \vec{E}_0$ není $\parallel$ s $\vec{P}$ (neizotropní prostředí)

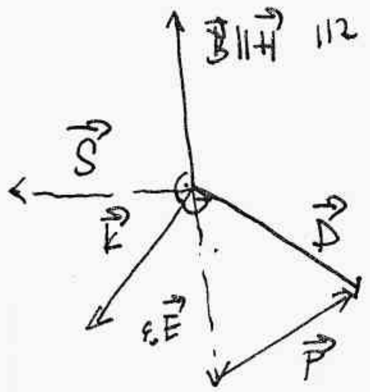
$$\Rightarrow \quad \vec{D} = (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \underbrace{(\varepsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}_0)}_{\vec{D}_0} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{D} = i \vec{k}\cdot\vec{D} \quad \ldots \quad \vec{k} \perp \vec{D}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \qquad \vec{E}\cdot(\vec{k}\times\vec{E}) = \omega \vec{B}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{E}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D}$$

$$\vec{H}\cdot(\vec{k}\times\vec{H}) = -\omega \vec{D}\cdot\vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{D} \perp \vec{H}$$



Odvození Fresnelovy rovnice

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B} \qquad \vec{B} = \mu_0\vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0\omega}(\vec{k}\times\vec{E})$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{k}\times\vec{H} = -\omega\vec{D} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0\overleftrightarrow{\varepsilon}\vec{E}$$

$$\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E}) = -\omega^2\mu_0\vec{D} = -\omega^2\mu_0\varepsilon_0\overleftrightarrow{\varepsilon}\vec{E} \qquad (\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{E}) - \vec{E}(\vec{k}\cdot\vec{k}) = -\frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\varepsilon}\vec{E}$$

$$k^2\vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\varepsilon}\vec{E} = \vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{E}) \quad /\cdot\frac{c^2}{\omega^2} \qquad \vec{k} = k\vec{s_0}$$

$$k = \frac{\omega}{c}\cdot n$$

$$n^2\vec{E} - \overleftrightarrow{\varepsilon}\vec{E} = k^2\vec{s_0}(\vec{s_0}\cdot\vec{E})\cdot\frac{c^2}{\omega^2}$$

$$n^2\vec{E} - \overleftrightarrow{\varepsilon}\vec{E} = n^2\vec{s_0}\cdot(\vec{s_0}\cdot\vec{E})$$

$$(n^2-n_1^2)E_x = n^2 s_{0x}(\vec{s_0}\cdot\vec{E}) \quad /\cdot s_{0x}$$

$$(n^2-n_2^2)E_y = n^2 s_{0y}(\vec{s_0}\cdot\vec{E}) \quad /\cdot s_{0y}$$

$$(n^2-n_3^2)E_z = n^2 s_{0z}(\vec{s_0}\cdot\vec{E}) \quad /\cdot s_{0z}$$

$$s_{0x}E_x = \frac{n^2}{n^2-n_1^2}s_{0x}^2(\vec{s_0}\cdot\vec{E})$$

$$s_{0y}E_y = \frac{n^2}{n^2-n_2^2}s_{0y}^2(\vec{s_0}\cdot\vec{E})$$

$$s_{0y}E_z = \frac{n^2}{n^2-n_3^2}s_{0z}^2(\vec{s_0}\vec{E})$$

Rovnice sečteme

$$\vec{S}_0 \cdot \vec{E} = n^2 \underbrace{\left(\frac{S_{0x}^2}{n^2 - n_1^2} + \frac{S_{0y}^2}{n^2 - n_2^2} + \frac{S_{0z}^2}{n^2 - n_3^2} \right) \vec{S}_0 \cdot \vec{E}}_{1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S_{0x}^2}{n^2 - n_1^2} + \frac{S_{0y}^2}{n^2 - n_2^2} + \frac{S_{0z}^2}{n^2 - n_3^2} = \frac{1}{n^2}$$

Fresnelova rovnice

1) Případ $\varepsilon_r = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$; tj. $n_1 = n_2 = n_3$

isotropní prostředí

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 n^2 \vec{E}$$

2) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ $\quad n_1 = n_2 \neq n_3$ (2 indexy lomu stejné)

tzv. jednoosý materiál

3) $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$; $n_1 \neq n_2 \neq n_3$

Dvouosý materiál

$$n^2 \left[S_{0x}^2 (n^2 - n_2^2)(n^2 - n_3^2) + S_{0y}^2 (n^2 - n_1^2)(n^2 - n_3^2) + S_{0z}^2 (n^2 - n_1^2)(n^2 - n_2^2) \right] =$$

$$= (n^2 - n_1^2)(n^2 - n_2^2)(n^2 - n_3^2)$$

Pro jednoosý materiál (zvolme $n_1 = n_2 \neq n_3$)

$$n^2 \left[S_{0x}^2 (n^2 - n_1^2)(n^2 - n_3^2) + S_{0y}^2 (n^2 - n_1^2)(n^2 - n_3^2) + S_{0z}^2 (n^2 - n_1^2)^2 \right] =$$

$$= (n^2 - n_1^2)^2 (n^2 - n_3^2)$$

Zaměníme znaménko v ( )

$$n^2\left[s_{0x}^2(n_1^2-n^2)(n_3^2-n^2)+s_{0y}^2(n_1^2-n^2)(n_3^2-n^2)+s_{0z}^2(n_1^2-n^2)^2\right]=$$
$$=-(n_1^2-n^2)^2(n_3^2-n^2)$$

$$=(n_1^2-n^2)\cdot\left[(n_1^2-n^2)\cdot(n_3^2-n^2)+s_x^2n^2(n_3^2-n^2)+s_{0y}^2n^2(n_3^2-n^2)+\right.$$
$$\left.+s_{0z}^2n^2(n_1^2-n^2)\right]=0$$

Má řešení, jestliže

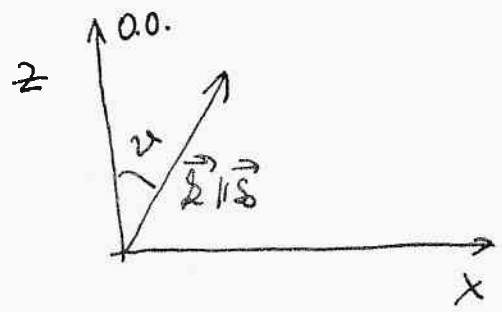
$n=n_1=n_0$ ... řádná vlna (ordinary)

nebo $[\quad]=0$ ... $n=n_e$ ... mimořádná vlna (extraordinary)

Dále definujme ... optická osa = směr šíření, při kterém se řádná a mimořádná vlna šíří stejnou rychlostí, tj. indexy lomu $n_e=n_0$

V našem případě je $n_1=n_2 \Rightarrow$ optická osa je osa z.

V jednoosém prostředí z důvodu symetrie (osové) stačí popisovat a zakreslovat vektory v rovině obsahující optickou osu. Nechť je to v našem případě ~~osa~~ rovina (x,z), $z=$ o.o.



$$\vec{s}_0\vec{E}=E_x\sin\vartheta+E_z\cos\vartheta$$
$$\vec{s}_0=(\sin\vartheta,0,\cos\vartheta)$$

Fresnelova rovnice pro mimořádnou vlnu

Označme $n = n_e$

$$(n_1^2 - n_e^2)\cdot(n_3^2 - n_e^2) + (n_1^2 - n_e^2)\cdot n_e^2 \cos^2\vartheta + (n_3^2 - n_e^2) n_e^2 \sin^2\vartheta = 0$$

$$n_1^2 n_3^2 - n_1^2 n_e^2 - n_e^2 n_3^2 + n_e^4 - n_1^2 n_e^2 \cos^2\vartheta - n_e^4 \cos^2\vartheta +$$

$$+ n_3^2 n_e^2 \sin^2\vartheta - n_e^4 \sin^2\vartheta = 0$$

$$-n_1^2 n_3^2 + n_e^2 \left[n_1^2 (\underbrace{1 - \cos^2\vartheta}_{\sin^2\vartheta}) + n_3^2 (\underbrace{1 - \sin^2\vartheta}_{\cos^2\vartheta}) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad n_e^2 = \frac{n_1^2 n_3^2}{n_1 \sin^2\vartheta + n_3 \cos^2\vartheta}$$

$$\frac{1}{n_e^2} = \frac{n_1^2 \sin^2\vartheta + n_3^2 \cos^2\vartheta}{n_1^2 n_3^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{n_1^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{n_3^2}$$

Zavedeme označení $x = n_e \sin\vartheta$

$z = n_e \cos\vartheta$

$$\frac{1}{n_e^2} = \frac{z^2}{n_e^2 n_1^2} + \frac{x^2}{n_e^2 n_3^2}$$

$$1 = \frac{x^2}{n_3^2} + \frac{z^2}{n_1^2}$$

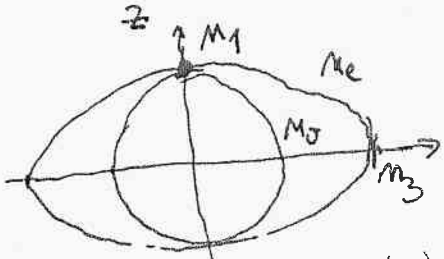
To je rovnice elipsy s poloosami

$x \ldots n_3$

$z \ldots n_1$

(při zahrnutí y

$$1 = \frac{x^2}{n_3^2} + \frac{y^2}{n_3^2} + \frac{z^2}{n_1^2}$$

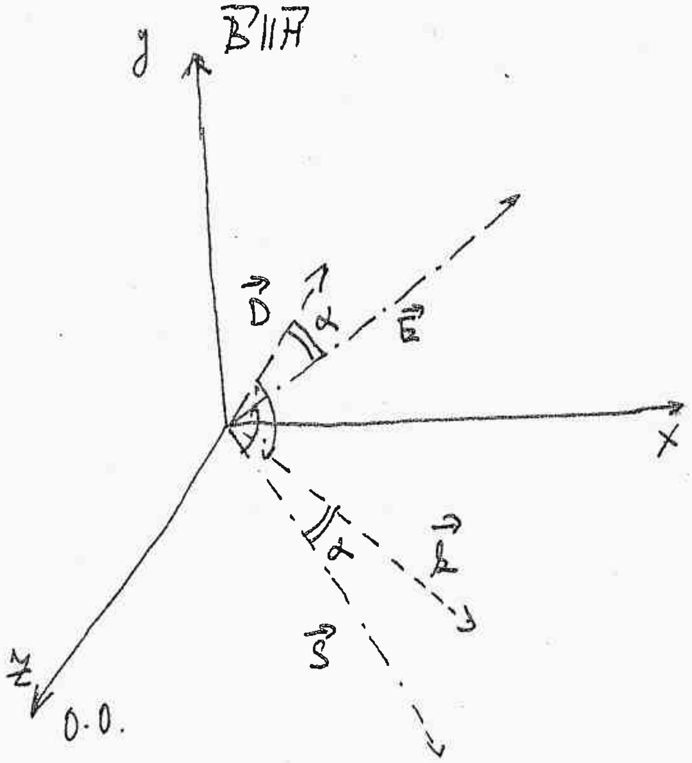


Fresnelova rovnice má další

řešení $n_o = n_1$

(řádná vlna)

$n_e > n_o$ (kladný krystal)

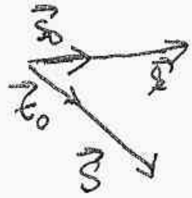


Poyntingův vektor $\vec S$

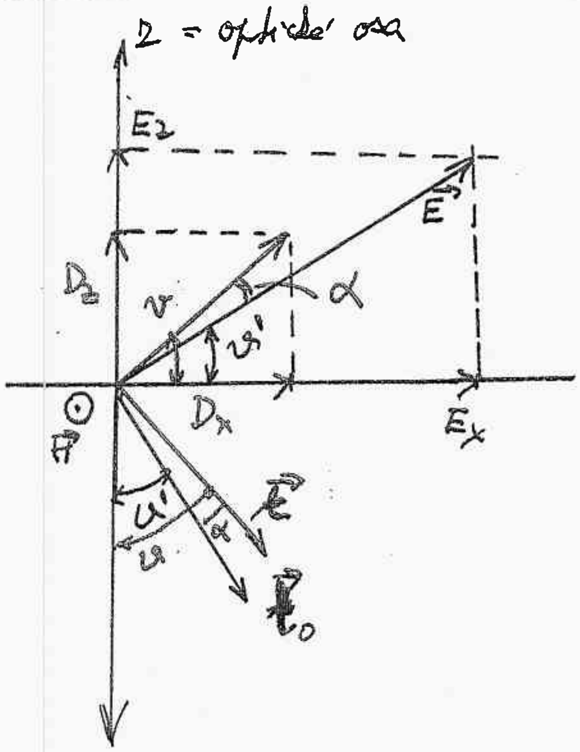
$$\vec S = \vec E \times \vec H$$

$$\vec k = \vec s_0 k$$

$$\vec S = |\vec S| \cdot \vec t_0$$



Směr šíření energie a směr šíření vlnoploch (vektor $\vec k$) svírají v mimořádné vlně úhel daný poměrem indexů lomu n_1 a n_3



$$D_x = \varepsilon_0 n_1^2 E_x$$

$$D_z = \varepsilon_0 n_3^2 E_z$$

$$\mathrm{tg}\,\vartheta' = -\frac{E_z}{E_x}$$

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = -\frac{D_z}{D_x} = -\frac{n_3^2}{n_1^2}\frac{E_z}{E_x}$$

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{n_3^2}{n_1^2}\,\mathrm{tg}\,\vartheta'$$

$n_3 > n_1$ $\quad \vartheta' < \vartheta$

(kladný krystal)

$n_3 < n_1$ $\quad \vartheta' > \vartheta$

(záporný krystal)

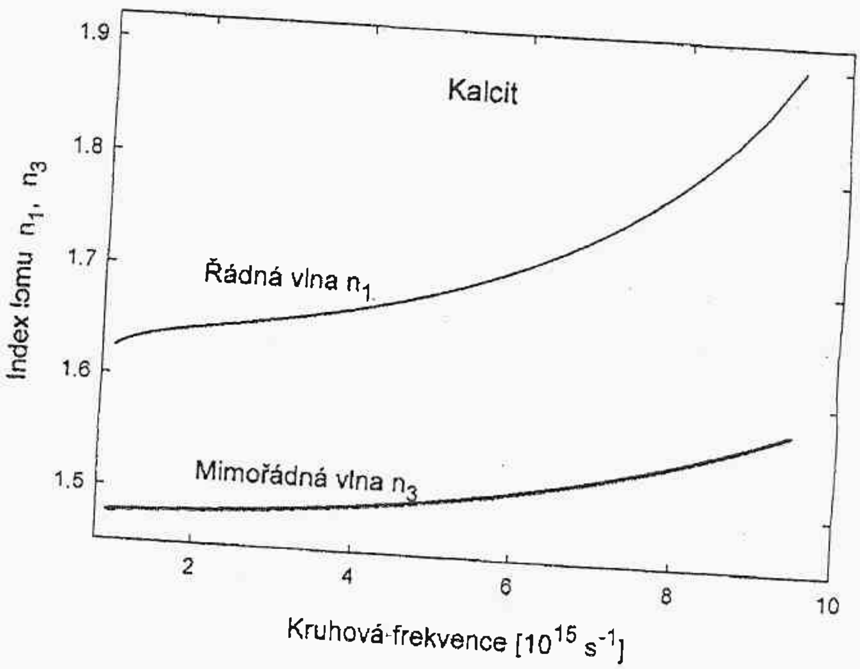
tj. dostáváme $\psi = \vartheta'$, kde ϑ' je úhel charakterizující směr šíření vektoru $\vec{S}_0$ ($\perp \vec{E}_0$) vůči optické ose.

Dokázali jsme tedy, že normála tečné roviny k normálové ploše určuje směr šíření energie.

Příklady jednoosých materiálů
Indexy lomu uvedeny pro $\lambda = 589{,}3$ nm

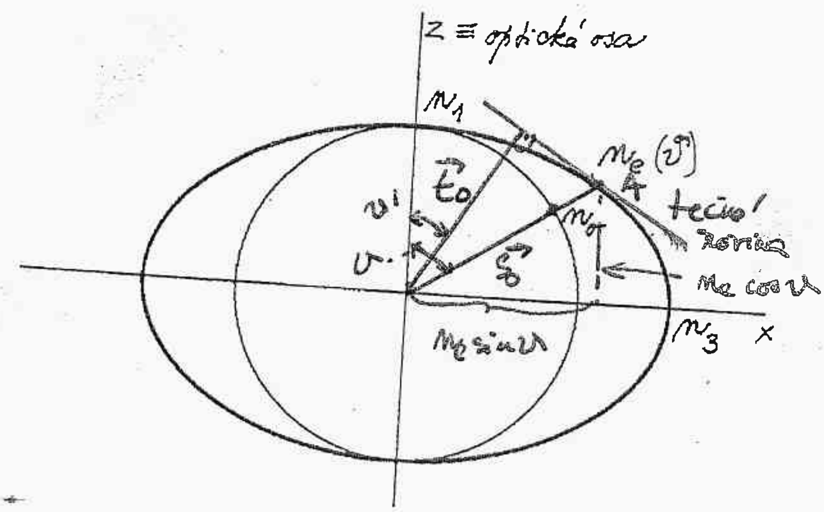
křemen (SiO_2)	$n_o = 1{,}544$	$n_e = 1{,}553$
vápenec ($CaCO_3$)	$n_o = 1{,}658$	$n_e = 1{,}486$
led (H_2O)	$n_o = 1{,}309$	$n_e = 1{,}313$

Indexy lomu n_o a n_e jsou funkcí frekvence



Frekvenční závislost n_o a n_e pro kalcit.
Zobrazeno pro $n_o = n_1$ i $n_e(\vartheta)$ v ose $x = n_3$

Dále dokážeme, že směr šíření energie ($\vec{F}$) je určen normálou k tečné rovině normálové plochy



$A = (x_0, y_0, z_0)$ .. průsečík přímky ve směru $\vec{s}_0$ (směr $\vec{k}$ ... šíření vlnoploch) a normálové plochy mimořádného paprsku

Normála tečné roviny k ploše $F(x,y,z)=0$

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_{x_0,y_0,z_0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \quad ; \quad \frac{x^2}{n_3^2} + \frac{z^2}{n_1^2} - 1 = 0$$

(V rovině xz)

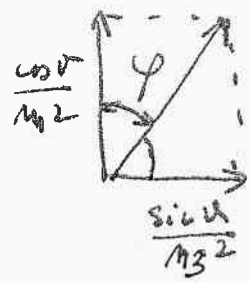
$$(x_0, y_0, z_0) = n_e(\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)$$

Normála má tedy směr určený vektorem

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \left(\frac{2x}{n_3^2}, 0, \frac{2z}{n_1^2}\right) = n_e \cdot 2\left(\frac{\sin\vartheta}{n_3^2}, 0, \frac{\cos\vartheta}{n_1^2}\right)$$

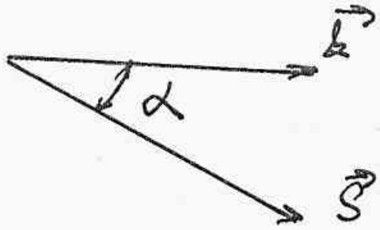
$$\sim \left(\frac{\sin\vartheta}{n_3^2}, 0, \frac{\cos\vartheta}{n_1^2}\right)$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\,\frac{n_1^2}{n_3^2} = \mathrm{tg}\,\vartheta'$$



Energie se tedy šíří ve směru vektoru $\vec{t_0}$,
vlna (vlnoplochy) ve směru vektoru $\vec{s_0}$.
Vektory $\vec{s_0}$ a $\vec{t_0}$ spolu svírají úhel α

$\alpha = \vartheta - \vartheta'$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\,\vartheta' = \frac{n_1^2}{n_3^2}\,\mathrm{tg}\,\vartheta$



$\rightarrow \vec{s_0}$ .. jednotkový vektor

$\vec{S}$ .. Poyntingův vektor

$\vec{t_0} = \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|}$ $\qquad$ $\vec{t_0}$ ... jednotkový vektor

Fázová rychlost $v_f = \frac{c}{n}$

Paprsková rychlost $\vec{v_r}$ ... rychlost šíření energie

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{v_r}\, w$ <.. $\vec{S} = w\vec{v}$ známe z kapitoly o šíření vln

w ... objemová hustota energie elmag. pole

Platí $v_r = \frac{v_f}{\cos\alpha}$

? Jak pozn. polarizovaní řádné a mimořádné vlny?

Dosadíme výsledky řešení do Fresnelových rovnic

$$(n^2-n_1^2)E_x = n^2 s_{0x} (\vec{s_0}\cdot\vec{E})$$
$$(n^2-n_1^2)E_y = n^2 s_{0y} (\vec{s_0}\cdot\vec{E})$$
$$(n^2-n_3^2)E_z = n^2 s_{0z} (\vec{s_0}\cdot\vec{E})$$

$\vec{s_0} = (\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)$

A) Nejprve řádná vlna

$$(n_1^2-n_1^2)E_x = n_1^2\sin\vartheta\,(E_x\sin\vartheta + E_z\cos\vartheta)$$
$$(n_1^2-n_1^2)E_y = n_1^2\cdot 0\cdot(E_x\sin\vartheta + E_z\cos\vartheta)$$
$$(n_1^2-n_3^2)E_z = n_1^2\cos\vartheta\,(E_x\sin\vartheta + E_z\cos\vartheta)$$

1. rovnice $\rightarrow$ $0 = n_1^2\sin\vartheta\,(E_x\sin\vartheta + E_z\cos\vartheta)$

$\Rightarrow$ $E_x\sin\vartheta + E_z\cos\vartheta = 0$

2. rovnice $0=0$

3. rovnice $(n_1^2-n_3^2)E_z = 0 \Rightarrow E_z = 0$

$\Rightarrow$ z 1. rovnice $E_x = 0$

$\Rightarrow$ $\vec{E} = (0, E_y, 0)$ … řádná vlna je polarizovaná $\parallel$ s osou y, tj. kolmo na směr šíření svazku v rovině (x,z)

B) Mimořádná vlna

$$(n_e^2-n_1^2)E_x = n_e^2\sin\vartheta\,(E_x\sin\vartheta + E_z\cos\vartheta)$$
$$(n_e^2-n_1^2)E_y = 0$$
$$(n_e^2-n_3^2)E_z = n_e^2\cos\vartheta\,(E_x\sin\vartheta + E_z\cos\vartheta)$$

Z 2. rovnice $\Rightarrow$ $n_e = n_1$ (řádná vlna)

nebo $E_y = 0$

⇒ V mimořádné vlně je elektrické pole v rovině (x,z), tj. rovině dané optickou osou a směrem šíření $\vec{S_0}$ (tzv. rovina hlavního řezu)

1) Řádná vlna je polarizovaná // s osou y, tj. vektor $\vec{E}$ je kolmý k rovině hlavního řezu

2) Mimořádná vlna je polarizovaná tak, že její vektor $\vec{E}$ leží v rovině hlavního řezu

3) Řádná a mimořádná vlna mají tedy navzájem kolmé polarizace

Dvojlomu lze tedy využít k získání polarizovaného světla.

Lom na rovinném rozhraní jednoosého krystalu

Platí obecný zákon lomu

$$n_i \cdot \sin \Theta_i = n_0 \sin \Theta_{t,o}$$ řádný paprsek

$$n_i \cdot \sin \Theta_i = n_e(\vartheta) \sin \Theta_{t,e}$$ mimořádný paprsek

Úhel lomu mimořádného paprsku je funkcí úhlu mezi směrem šíření paprsku po lomu a optickou osou. Úhly ϑ a $\Theta_{t,e}$ jsou navzájem závislé!

Geometrický postup k určení n_e a $\Theta_{t,e}$

1) Provedeme řez normálovou (k) plochou v rovině dopadu

2) V rovině řezu nakreslíme průsečík roviny rozhraní s rovinou dopadu

3) Nakreslíme vektor dopadajícího paprsku $\vec{k_i}$

4) Z podmínky spojitosti tečných složek na rozhraní stanovíme průmět $\vec{k_i}$ do roviny rozhraní $\vec{k_i} \cdot \vec{r}$. $\vec{r}$ je polohový vektor v rovině ~~dopad~~ rozhraní

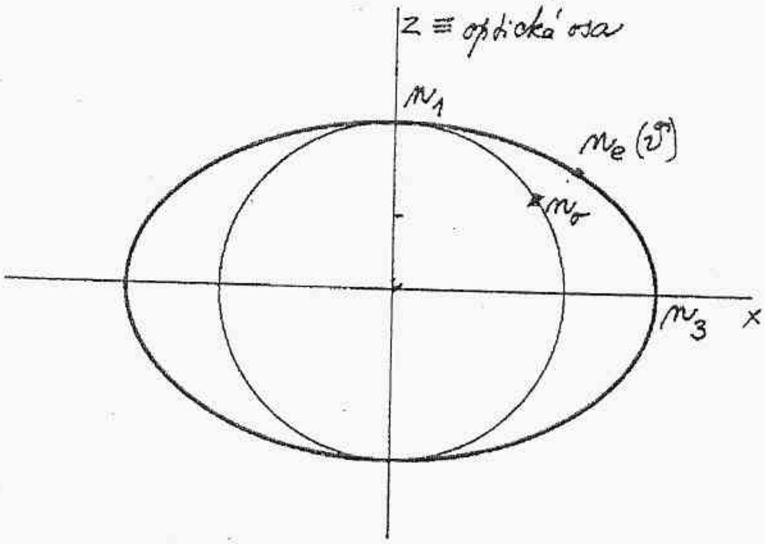
$$\vec{k_i} \cdot \vec{r} = \vec{k_t} \cdot \vec{r}$$ (viz kapitola o lomu)

$$(\vec{k_{t,o}} \cdot \vec{r} = \vec{k_{te}} \cdot \vec{r})$$

$\Rightarrow$

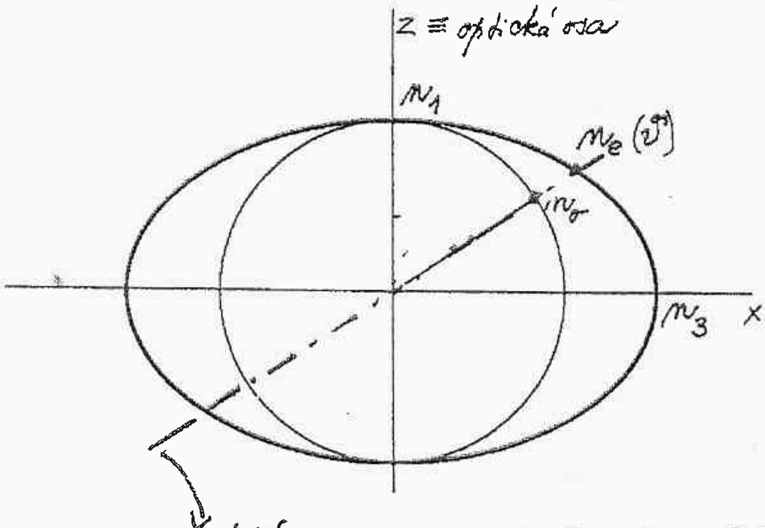
5) Vedeme z této podmínky určíme v_0 a v_e a $\vec{k_0}$ a $\vec{k_e}$

Lom na rovinném rozhraní, optická osa v rovině dopadu, $n_e > n_o$



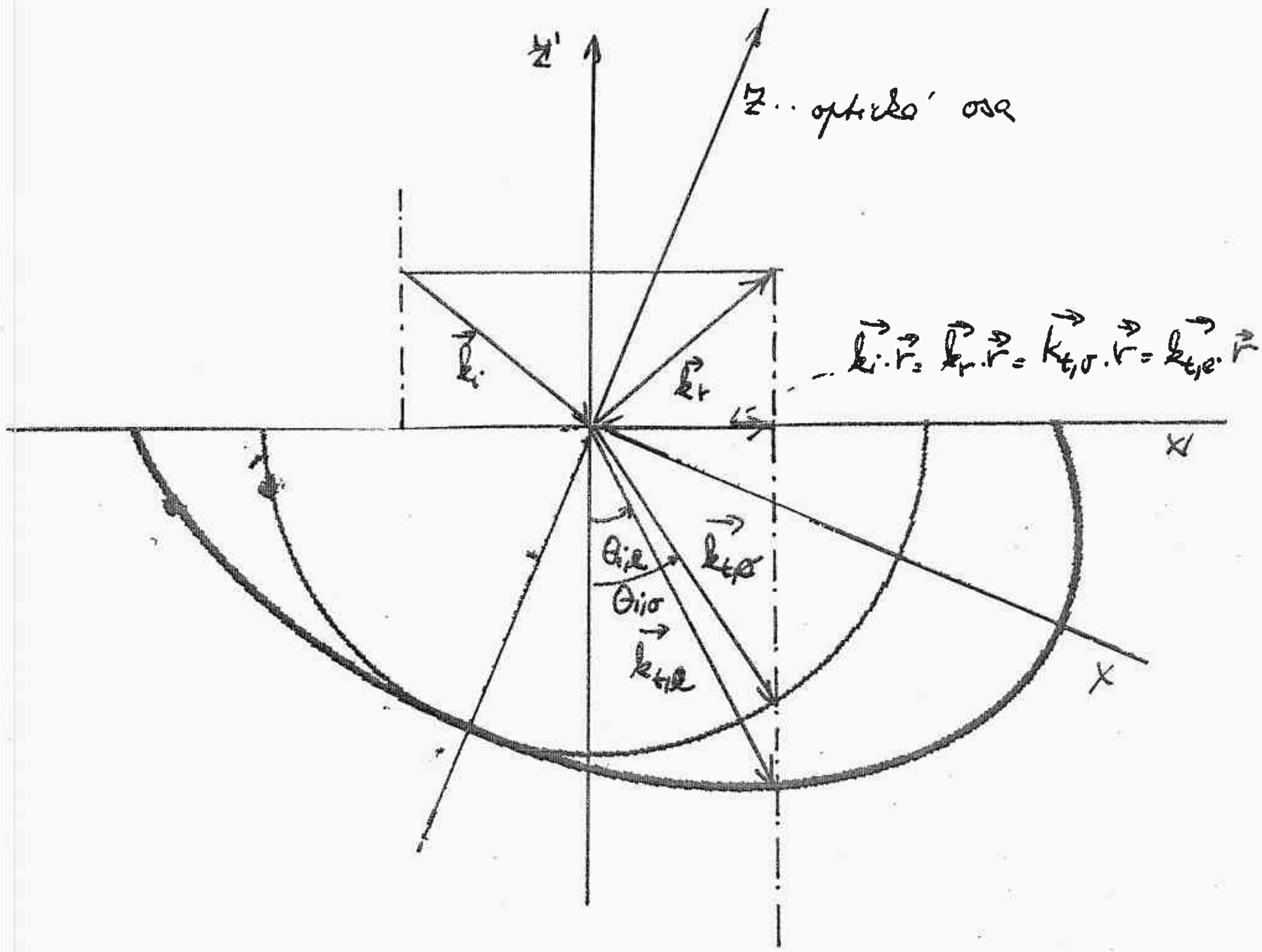
Rovina dopadu xz

Řez normálovou plochou v rovině xz

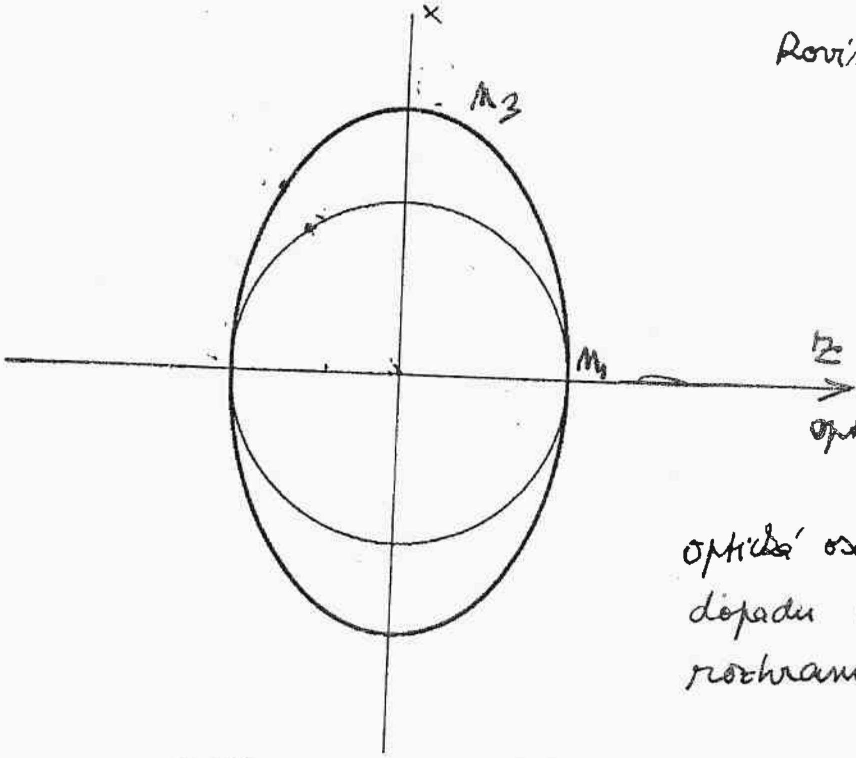


Nějaká zvolená rovina rozhraní (⊥ na rovinu dopadu

Optická osa v rovině dopadu



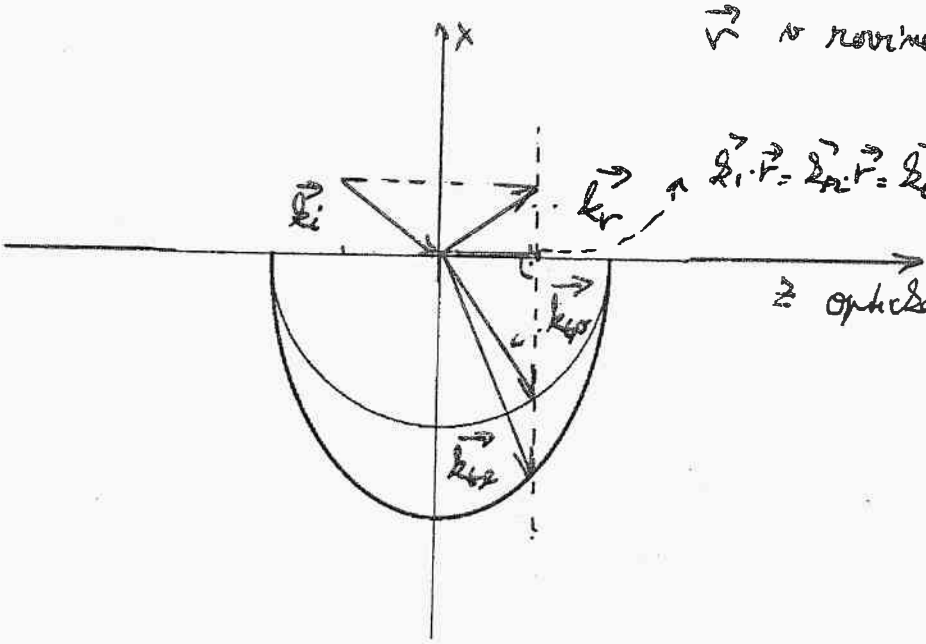
Lom na rovinném rozhraní, optická osa v rovině dopadu a v rovině rozhraní



optická osa

Rovina dopadu xz

optická osa v rovině dopadu i v rovině rozhraní



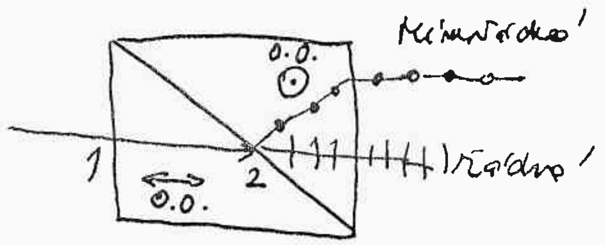
$\vec r$ v rovině yz

$\vec{k_i}\cdot\vec r = \vec{k_r}\cdot\vec r = \vec{k_{eo}}\cdot\vec r = \vec{k_{ee}}\cdot\vec r$

z optická osa

Dvojlomné materiály – založeny na skutečnosti, že se řádný a mimořádný paprsek v dvojlomném materiálu šíří různými směry.

Např. Rochonův polarizační hranol



O.O = optická osa

V bodě 1 dopadá vlna na dvojlomný materiál (jednoosý). Při šíření podél optické osy se obě vlny lineární polarizace šíří stejnou rychlostí → nedochází k lomu a vlna dospěje nezměněná k bodu 2. Zde je optická osa v rovině rozhraní, kolmá na rovinu dopadu. Jelikož se jedná o rozhraní dvou stejných materiálů, řádná vlna se neláme a šíří se s indexem n_o (je polarizovaná ⊥ na optickou osu). (tj. na rovinu hlavního řezu danou $\vec{s}_0$ a O.O)

Mimořádná vlna (polarizovaná ∥ s optickou osou) se šíří za rozhraním s indexem lomu n_e. Jelikož jsou indexy lomu před rozhraním ($n_e = n_o$ .. šíření podél O.O.) a za rozhraním ($n_e \neq n_o$ ... šíření ⊥ na O.O.) různé, dochází k lomu.

$$n_o \sin\alpha = n_e \sin\beta$$

⇒ Oba svazky jsou prostorově odděleny (pokud jsou vstupní svazek prost. omezený)

Kompenzátor

Destička s vyleštěnými vstupními a výstupními plochami, která je vyříznuta tak, že optická osa materiálu je rovnoběžná se vstupní plochou.

V tomto případě, dopadne-li světlo na destičku kolmo, šíří se krystalem řádná a mimořádná vlna. Každá se šíří s jinou fázovou rychlostí!

Má-li jejich dráha v dvojlomném krystalu délku d, dojde k fázovému posunu

$$(k_e - k_o).d = \frac{\omega}{c}(n_e - n_o).d = \Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_o$$

Často používané případy jsou

$$\Delta\varphi = \pi \qquad (\Delta\varphi = \pi \Leftrightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{2})$$

Půlvlnná destička

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad (\Leftrightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{4})$$

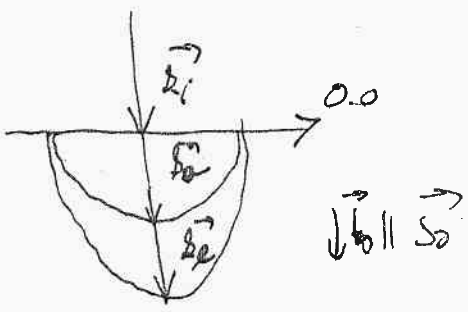
Čtvrtvlnná destička

Vliv těchto optických prvků na polarizační stav světla jsme probírali v části o polarizaci.

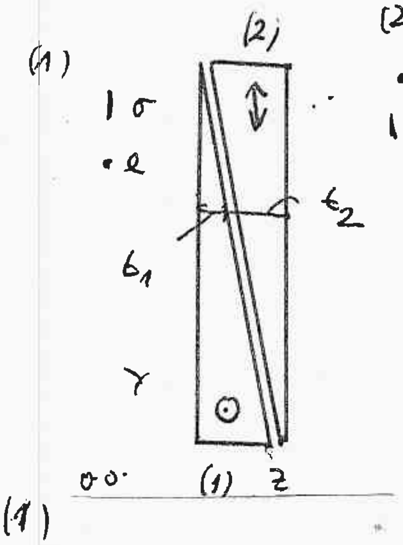
Obecný fázový posun ... buď destičky různé tloušťky nebo tzv. kompenzátor.

$\vec{s_0}$ ... směr šíření $\vec{k}$

$\vec{t_0}$ ... směr šíření energie v mimořádné vlně (Poyntingův vektor)



Čtvrtvlnná a půlvlnná fázová destička jsou speciálním případem obecnějšího prvku, kterým lze nastavit libovolné fázové zpoždění mezi řádnou a mimořádnou vlnou



(2) Babinetův kompenzátor

$\odot$ .. optická osa $\perp$ k rovině

$\updownarrow$ .... optická osa v rovině

tloušťky klínů 1 $\rightarrow t_1$

2 $\rightarrow t_2$

Babinetův kompenzátor je tvořen dvěma klíny s navzájem kolmými orientacemi optických os.

Z předchozího výkladu víme, že řádný paprsek je polarizován $\parallel$ s optickou osou, mimořádný paprsek je polarizován kolmo na optickou osu. V obou klínech jsou tedy paprsky přehozené!

Náběh fáze paprsku 1

$$\varphi_1 = (n_o t_1 + n_e t_2)\cdot\frac{2\pi}{\lambda_0}$$

Náběh fáze paprsku 2

$$\varphi_2 = (n_e t_1 + n_o t_2)\cdot\frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)\cdot(t_2 - t_1)$$

$\Delta\varphi$ lze měnit vzájemným posunem klínů.

Dodatek 1

Symetrie tenzoru susceptibility

Ukážeme, že v neabsorbujícím prostředí je tenzor susceptibility symetrický.

Předpokládejme, že vektor polarizace $\vec{P} = N\vec{\mu}$

N ... koncentrace dipólů, $\mu = q_e r_e$

q_e ... náboj elektronu

r_e ... výchylka elektronu

$\vec{F} = q_e \vec{E}$ ... síla působící na elektron

$$\vec{P} = N\vec{p} = N q_e \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon_0}{q_e} \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix}$$

kde

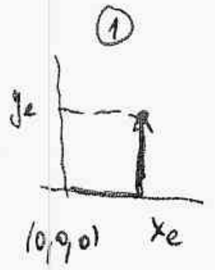
$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} = \frac{N q_e^2}{\varepsilon_0} \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix}^{-1}$$

k_{ij} ... konstanty pružin (tuhosti)

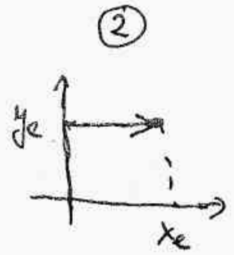
Celková práce vykonaná na posun elektronu je

$$W = \int_{\text{dráha}} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r}$$

Práce vykonaná po různých drahách musí být stejná do libovolného místa $\vec{r} = x_e \hat{x} + y_e \hat{y}$



cesta 1



cesta 2

(1) $$W = \int_0^{x_e} F_x(x', y'=0, z'=0)\,dx' + \int_0^{y_e} F_y(x'=x_e, y', z'=0)\,dy' =$$

$$= \int_0^{x_e} k_{xx} x'\,dx' + \int_0^{y_e} (k_{yx} x_e + k_{yy} y')\,dy' =$$

$$= k_{xx}\frac{x_e^2}{2} + k_{yx} x_e y_e + k_{yy}\cdot\frac{y_e^2}{2}$$

(2) $$W = \int_0^{y_e} F_y(x'=0, y', z'=0)\,dy' + \int_0^{x_e} F_x(x', y'=y_e, z'=0)\,dx' =$$

$$= \int_0^{y_e} k_{yy} y'\,dy' + \int_0^{x_e} (k_{xx} x' + k_{xy} y_e)\,dx' =$$

$$= k_{yy}\cdot\frac{y_e^2}{2} + k_{xy} x_e y_e + k_{xx}\cdot\frac{x_e^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad k_{xy} = k_{yx}$$

Podobně pro ostatní off-diagonální prvky

$\Rightarrow$ matice $\overleftrightarrow{k}$ je symetrická!

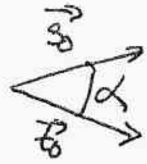
Z lineární algebry víme, že inverzní matice k symetrické matici je rovněž symetrická!

$\Rightarrow$ matice $\overleftrightarrow{\chi}$ je symetrická!

Dodatek

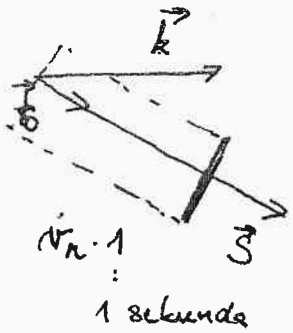
Odvození vztahu pro rychlost šíření energie

$$v_r = \frac{v_f}{\cos\alpha}$$



$\vec{v}_r$ .. paprsková rychlost

Za jednotku času vyteče jednotkovým průřezem energie obsažená v délce v_r a jednotkovém průřezu



$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ Poyntingův vektor

$\vec{S} = w \cdot \vec{v}_r$

w ... objemová hustota energie

$$w = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$$ ... v tomto zápisu všechny veličiny reálné

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$
$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = -(-\omega)\vec{B} = \omega\vec{B}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega\vec{D}$$

$$\vec{D} = -\frac{1}{\mu_0\omega^2}(\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}))$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0\omega}(\vec{k} \times \vec{E})$$

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\omega}\vec{E}\cdot(\vec{k}\times\vec{H})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\omega}\vec{E}\cdot(\vec{H}\times\vec{k}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\omega}\underbrace{(\vec{E}\times\vec{H})}_{\vec{S}}\cdot\vec{k} = \frac{\vec{k}}{2\omega}(\vec{E}\times\vec{H})$$

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2\omega}\vec{H}\cdot(\vec{k}\times\vec{E}) = -\frac{1}{2\omega}\vec{H}\cdot(\vec{E}\times\vec{k}) =$$

$$= -\frac{1}{2\omega}(\vec{H}\times\vec{E})\cdot\vec{k} = \frac{1}{2\omega}(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\vec{k} = \frac{\vec{k}}{2\omega}(\vec{E}\times\vec{H}) = w_e$$

$$w = w_e + w_m = \frac{\vec{k}}{\omega}(\vec{E}\times\vec{H}) = \frac{1}{\omega}\vec{k}\cdot\vec{S} = \frac{1}{\omega}|\vec{k}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos\alpha$$

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}\cdot n \qquad =$$

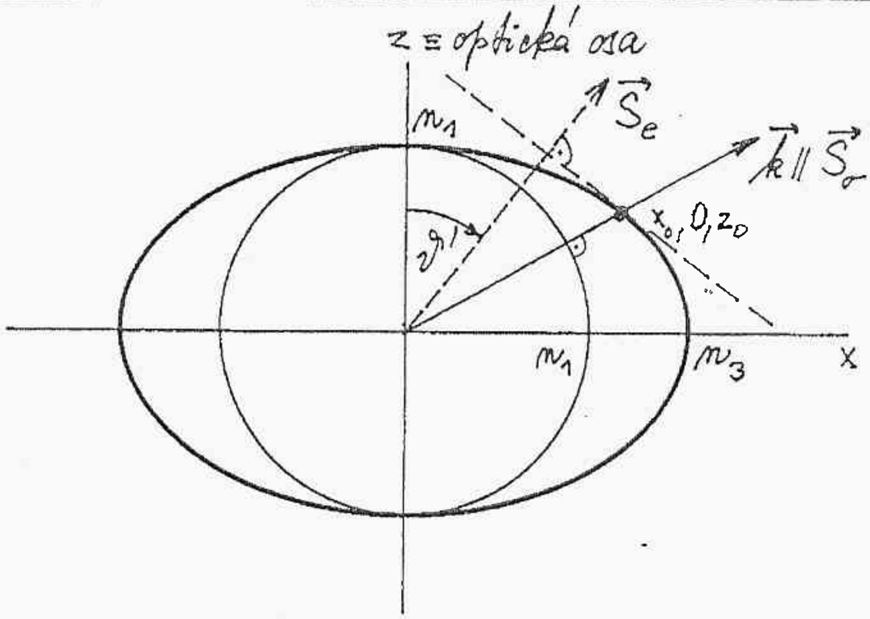
Paprsková rychlost $\vec{v_r} = \frac{\vec{S}}{w}$ $\quad |\vec{v_r}| = \frac{|\vec{S}|}{w}$

$$|\vec{v_r}| = v_r = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{\omega}{c}\cdot\frac{n\cdot|\vec{S}|}{|\vec{S}|\cos\alpha} = \frac{n}{c}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{v_f}{\cos\alpha}$$

$$v_r = \frac{v_f}{\cos\alpha} \quad ; \quad v_r > v_f$$

Dodatek – indexový elipsoid a porovnání s normálovou plochou (indexová plocha, k plocha)

Normálová plocha – vyjádření závislosti indexu lomu na směru $\vec{k}$



$$1 = \frac{x}{n_3^2} + \frac{y}{n_3^2} + \frac{z}{n_1^2}$$

Indexový elipsoid (optická indikatrix) – vyjádření indexu lomu na směru $\vec{D}$ ($\vec{D} \perp \vec{k}$)

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}\left(E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z\right) =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{D_x^2}{\varepsilon_1} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_2} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_3}\right)$$

$D_x = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_x$

$D_y = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_y$

$D_z = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_z$

$\varepsilon_1 = n_1^2$

$\varepsilon_2 = n_2^2$

$\varepsilon_3 = n_3^2$

$$\frac{D_x^2}{n_1^2} + \frac{D_y^2}{n_1^2} + \frac{D_z^2}{n_3^2} = 2\varepsilon_0 w_e$$

Normalizace $\quad 2\varepsilon_0 w_e = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{D_x^2}{n_1^2} + \frac{D_y^2}{n_1^2} + \frac{D_z^2}{n_3^2} = 1$$