Zápočtová písemka č. 2

NOFY026 – Klasická elektrodynamika, LS 2019

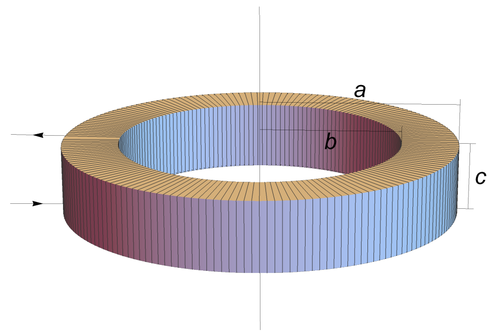
13. 5. 2019

Zadání:

Úloha 1

Nalezněte vlastní indukčnost L toroidální cívky obdélníkového průřezu o rozměrech vyznačených na obrázku. Cívka se skládá celkově z N závitů.
(Počet závitů je velmi velký, proud v závitech tak můžete aproximovat hladkým rozložením plošného proudu.)

[15 bodů]

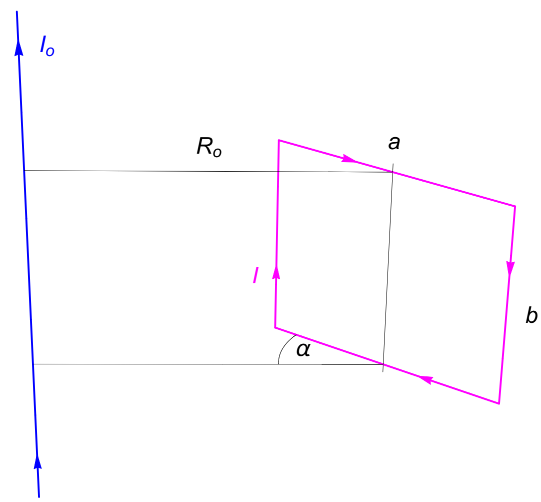


Úloha 2

Spočtěte moment síly působící na obdélníkovou smyčku v poli přímého vodiče.
Ve vodiči teče proud I_o, ve smyčce proud I. Geometrie úlohy je znázorněna v obrázku. Moment počítejte vzhledem ke středu smyčky.

[15 bodů]

Bonus: Pro malou smyčku můžete výsledek porovnat s výsledkem pro magnetický dipól.



Úloha 3

Mějme elektromagnetické pole zadané v cylindrických souřadnicích vztahy

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R}\,\vec{e}_R\,, \qquad \vec{B} = \frac{I\mu_o}{2\pi R}\,\vec{e}_\varphi\,.$$

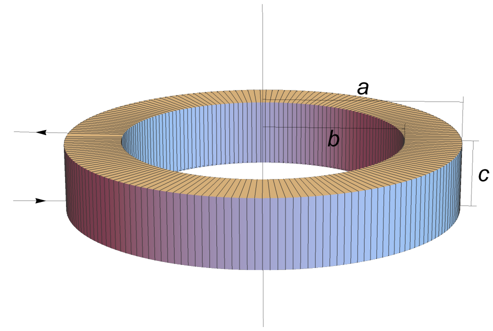
Nalezněte pole v soustavě pohybující se rychlostí $\vec{v} = v\vec{e}_z$.
Za jakých podmínek lze nalézt soustavu, ve které vymizí magnetické pole? Jakému zdroji v tomto případě odpovídá zadané pole?

[10 bodů]

Úloha 1

Nalezněte vlastní indukčnost L toroidální cívky obdélníkového průřezu o rozměrech vyznačených na obrázku. Cívka se skládá celkově z N závitů.
(Počet závitů je velmi velký, proud v závitech tak můžete aproximovat hladkým rozložením plošného proudu.)

[15 bodů]



Řešení:

Na cvičení jsme ověřovali, že pole uvnitř toroidální smyčky libovolného průřezu je dáno

$$\vec{B} = \frac{k}{R}\,\vec{e}_\varphi \, .$$

Jelikož se jedná o pole shodné s polem od proudu tekoucího na ose z, víme, že splňuje příslušné magnetostatické rovnice. Pole vně cívky je nulové. Skok v magnetické indukci na povrchu cívky odpovídá plošnému proudu tekoucímu po povrchu cívky.
Konstantu k určíme z Ampérova zákona: cirkulace pole po kružnici $R, z =$ konst. uvnitř cívky dává

$$\int\limits_{R,z=\text{konst.}} \vec{B}\cdot\vec{ds} = \int\limits_{R,z=\text{konst.}} \frac{k}{R} R\,d\varphi = 2\pi k \, .$$

Ta se musí rovnat celkovému proudu $\mu_\mathrm{o} I_\mathrm{c}$ tekoucímu skrze kružnici. Pokud proud tekoucí cívkou je I, celkový proud skrze kružnici je poskládán z N závitů, tedy $I_\mathrm{c} = NI$ a dostáváme

$$k = \frac{\mu_\mathrm{o} I N}{2\pi} \, .$$

Vlastní indukčnost cívky se nejsnáze určí z energie cívky $U_\mathrm{M} = \frac{1}{2}LI^2$. Tu nalezneme jako integrál přes vnitřek cívky

$$U_\mathrm{M} = \frac{1}{2\mu_\mathrm{o}} \int\limits_{\text{cívka}} B^2 dV = \frac{1}{2\mu_\mathrm{o}} \left(\frac{\mu_\mathrm{o} I N}{2\pi}\right)^2 \int\limits_0^c \int\limits_b^a \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{R^2}\, R\, d\varphi dR dz = \frac{\mu_\mathrm{o} N^2}{4\pi} c \log\frac{a}{b}\; I^2 \, .$$

Pro indukčnost L tedy dostáváme

$$L = \frac{\mu_\mathrm{o} N^2}{2\pi} c \log\frac{a}{b} \, .$$

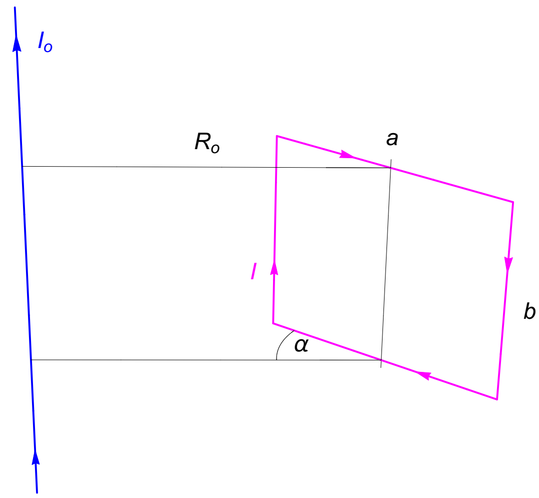
Poznámka:
V toroidální cívce tvořené N závity postupně navinutými na toroid efektivně teče i proud v tangenciálním směru (tj. kolem osy z). Tento proud je roven proudu I v jednom závitu (řez kolmý na cívku protne vždy jen jeden závit). Pokud by byla cívka tenká v porovnání se svým poloměrem ($c < a, b$, $a - b < a, b$), šlo by ji aproximovat kruhovou smyčkou kolem osy s proudem I a efektivním průřezem $c \times (a - b)$. Indukčnost takové smyčky by také měla přispět do indukčnosti cívky. Šla by odhadnout opět spočtením energie magnetického pole kruhové smyčky, což je poměrně složitý výpočet. Řádově by vyšla $L_\text{smyčka} \approx \frac{\mu_\mathrm{o}}{4}(a+b)\left(\log\frac{(a+b)^2}{(a-b)c} + \epsilon\right)$. Vidíme, že pro konečné rozměry cívky a velké N je tento člen zanedbatelný vůči členu spočtenému výše, úměrnému N^2. Naopak pro velmi malé příčné rozměry cívky začne hrát roli divergentní charakter indukčnosti tenkého vodiče.
Nepříjemným úvahám o důsledcích proudu v tangenciálním směru by se dalo vyhnout, pokud by cívka byla tvořena dvojitým vinutím, s navzájem opačným navíjením závitů v tangenciálním směru.

Úloha 2

Spočtěte moment síly působící na obdélníkovou smyčku v poli přímého vodiče.
Ve vodiči teče proud I_o, ve smyčce proud I. Geometrie úlohy je znázorněna v obrázku. Moment počítejte vzhledem ke středu smyčky.

[15 bodů]

Bonus: Pro malou smyčku můžete výsledek porovnat s výsledkem pro magnetický dipól.



Řešení:

Magnetické pole přímého vodiče je dáno

$$\vec{B} = \frac{\mu_\mathrm{o} I_\mathrm{o}}{2\pi R} \vec{e}_\varphi \ .$$

Síla a moment síly vzhledem ke středu smyčky působící na element smyčky $\vec{ds}$ s proudem I je

$$d\vec{F} = I\vec{ds} \times \vec{B} \ , \qquad d\vec{M} = \vec{d} \times d\vec{F} \ ,$$

kde $\vec{d}$ je průvodič od středu smyčky.
Je zřejmé, že momenty sil od částí smyčky kolmých na osu z se navzájem vyruší (momenty směřují kolmo na smyčku a u horní a dolní hrany smyčky mají opačnou orientaci).
Je potřeba tedy spočíst momenty na hrany smyčky ve směru osy z. Síly působící na tyto hrany mají směr $\vec{e}_R$, momenty sil jsou pak ve směru osy z a to stejným směrem. Můžeme nejdříve spočíst celkovou sílu na obě hrany, které označíme znaménkem + a − podle směru orientace proudu ve směru osy z

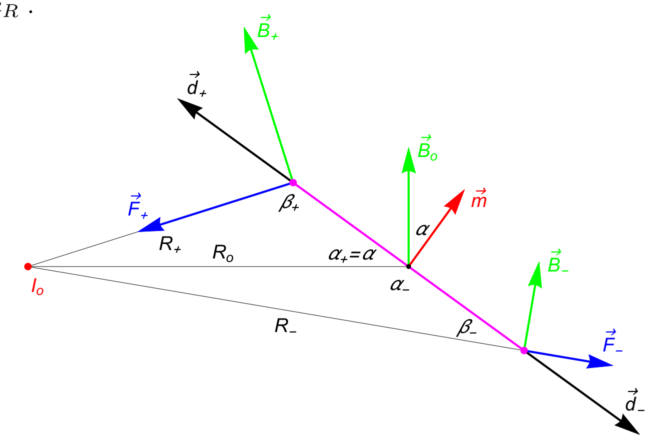
$$\vec{F}_\pm = \int\limits_{\text{hrana } \pm} (\pm I) \frac{\mu_\mathrm{o} I_\mathrm{o}}{2\pi R_\pm} \vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi = \mp \frac{\mu_\mathrm{o} I I_\mathrm{o}}{2\pi} \frac{b}{R_\pm} \vec{e}_R \ .$$

Momenty sil odpovídající těmto silám jsou

$$\vec{M}_\pm = \vec{d}_\pm \times \vec{F}_\pm = \frac{a}{2} F_\pm \sin\beta_\pm \, \vec{e}_z \ ,$$

kde $\beta_\pm$ jsou úhly mezi průvodiči $\vec{d}_\pm$ a radiálním směrem $\vec{e}_R$, měřeno v rovině kolmé na osu z – viz obrázek. Ty jsou ze sinovy věty spojeny s úhly $\alpha_+ = \alpha$ a $\alpha_- = \pi - \alpha$ vztahem

$$\frac{\sin\beta_\pm}{R_\mathrm{o}} = \frac{\sin\alpha_\pm}{R_\pm} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta_\pm = \frac{R_\mathrm{o}}{R_\pm} \sin\alpha \ .$$



Pohled podél osy z.

Vzdálenosti $R_\pm$ hran od osy se určí z cosinovy věty

$$R_\pm^2 = R_\mathrm{o}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - R_\mathrm{o} a \cos\alpha_\pm = R_\mathrm{o}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp R_\mathrm{o} a \cos\alpha \ .$$

Dosazením dostáváme

$$\vec{M} = \vec{M}_+ + \vec{M}_- = \frac{\mu_\mathrm{o} I_\mathrm{o}}{2\pi R_\mathrm{o}} I ab \sin\alpha \ \frac{1}{2} \left(\frac{R_\mathrm{o}^2}{R_+^2} + \frac{R_\mathrm{o}^2}{R_-^2} \right) \vec{e}_z \ .$$

Bonus:
Pro $a \ll R_\mathrm{o}$ lze závorka v posledním výrazu aproximovat

$$\frac{1}{2} \left(\frac{R_\mathrm{o}^2}{R_+^2} + \frac{R_\mathrm{o}^2}{R_-^2} \right) = \frac{R_\mathrm{o}^2 \left(R_\mathrm{o}^2 + \frac{a^2}{4} \right)}{\left(R_\mathrm{o}^2 + \frac{a^2}{4} \right)^2 - \left(R_\mathrm{o} a \cos\alpha \right)^2} \approx 1 + \mathcal{O}\left(\frac{a}{R_\mathrm{o}} \right)$$

Dále můžeme identifikovat dipólový moment smyčky $m = Iab$ a magnetické pole ve středu smyčky $B_\mathrm{o} = \frac{\mu_\mathrm{o} I_\mathrm{o}}{2\pi R_\mathrm{o}}$.
Úhel α je navíc úhel mezi normálou smyčky (směrem dipólového momentu $\vec{m}$) a magnetickým polem $\vec{B}_\mathrm{o}$. Dostáváme tedy

$$\vec{M} \approx \vec{m} \times \vec{B}_\mathrm{o} \ ,$$

což je výraz pro moment síly působící na dipól.

Úloha 3

Mějme elektromagnetické pole zadané v cylindrických souřadnicích vztahy

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R}\,\vec{e}_R\;, \qquad \vec{B} = \frac{I\mu_o}{2\pi R}\,\vec{e}_\varphi\;.$$

Nalezněte pole v soustavě pohybující se rychlostí $\vec{v} = v\vec{e}_z$.
Za jakých podmínek lze nalézt soustavu, ve které vymizí magnetické pole? Jakému zdroji v tomto případě odpovídá zadané pole?

[10 bodů]

Řešení:

Transformační vztahy pro elektrickou intenzitu $\vec{E}$ a magnetickou indukci $\vec{B}$ jsou

$$\begin{aligned} E'_\parallel &= E_\parallel\;, & \vec{E}'_\perp &= \gamma\big(\vec{E}_\perp + \vec{v}\times\vec{B}_\perp\big)\;,\\ B'_\parallel &= B_\parallel\;, & \vec{B}'_\perp &= \gamma\big(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}_\perp\big)\;. \end{aligned}$$

Zadané pole má pouze příčné složky ($\vec{e}_\parallel = \vec{e}_z$), dostáváme tak $E'_\parallel = 0$, $B'_\parallel = 0$ a

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma\Big(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R}\,\vec{e}_R + v\frac{I\mu_o}{2\pi R}\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi\Big) &= \frac{\gamma\Big(\lambda - \frac{v}{c^2}I\Big)}{2\pi\varepsilon_o R'}\,\vec{e}'_R\;,\\ \vec{B}' &= \gamma\Big(\frac{I\mu_o}{2\pi R}\,\vec{e}_\varphi - v\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o c^2 R}\,\vec{e}_z\times\vec{e}_R\Big) &= \frac{\gamma\big(I - v\lambda\big)\mu_o}{2\pi R'}\,\vec{e}'_\varphi\;. \end{aligned}$$

Zde jsme využili, že příčné rozměry a směry (R, $\vec{e}_R$ a $\vec{e}_\varphi$) se při transformaci nemění.
Vidíme, že magnetické pole vymizí pokud $I = v\lambda$. Jelikož rychlost musí být menší než rychlost světla, $v < c$, k vynulování magnetického pole musí konstanty λ a I splňovat

$$I < \lambda c\;.$$

V takovém případě dostáváme v soustavě s rychlostí $v_o = \frac{I}{\lambda}$ čistě elektrické pole

$$\vec{E}_o = \frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o R}\,\vec{e}_R\;, \qquad \lambda_o = \frac{1}{\gamma}\lambda\;.$$

To je pole nabité přímky s klidovou lineární hustotou náboje λ_o. Zadané pole tak odpovídá nabité přímce pohybující se rychlostí $-v_o$ ve směru přímky.

Úloha lze též řešit transformací zdrojů. Zadané pole lze identifikovat jako pole odpovídající lineární nábojové hustotě λ a proudu I na ose z. Ty se transformují stejně jako hustota náboje a proudu,

$$\begin{aligned} \lambda' &= \gamma\big(\lambda - \frac{v}{c^2}I\big)\;,\\ I' &= \gamma\big(I - v\lambda\big)\;. \end{aligned}$$

Opět se jedná o stacionární rozložení náboje a proudu podél osy a jejich pole je dáno

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_o R'}\,\vec{e}'_R = \frac{\gamma\Big(\lambda - \frac{v}{c^2}I\Big)}{2\pi\varepsilon_o R'}\,\vec{e}'_R\;,\\ \vec{B}' &= \frac{I'\mu_o}{2\pi R'}\,\vec{e}'_\varphi = \frac{\gamma\big(I - v\lambda\big)\mu_o}{2\pi R'}\,\vec{e}'_\varphi\;, \end{aligned}$$

což je stejný výsledek jako výše.