

Zápočtový problém č. 1

NOFY026 – Klasická elektrodynamika, LS 2019

termín odevzdání: 29. 4. 2019

Zadání:

Uvažujte skalární potenciál elektrického pole v klínu mezi dvěma vodivými uzemněnými polorovinami ohraničenými společnou osou z , svírajícími úhel α . Předpokládejte, že žádné veličiny nezávisí na souřadnici z (na souřadnici podél osy).

- Metodou separací proměnných v polárních souřadnicích R, φ nalezněte systém funkcí řešících Laplaceovu úlohu a splňujících správné okrajové podmínky na hranici oblasti. Předpokládejte přitom regulární chování skalárního potenciálu blízko osy z a libovolné chování daleko od osy.
- Napište obecný skalární potenciál ϕ splňující okrajové podmínky jako superpozici nalezených funkcí.
- Určete, který člen v superpozici bude dominantní blízko osy z . Pro tento člen nalezněte elektrickou intenzitu a hustotu náboje indukovanou na vnitřním povrchu vodivých desek. Diskutujte chování intenzity a nábojové hustoty blízko osy z . Rozlište případ konvexního a konkávního úhlu, $\alpha \lesseqgtr \pi$.

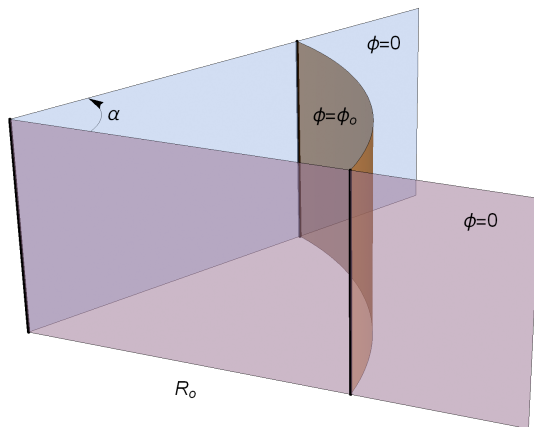
Koeficienty ve vyjádření potenciálu ϕ závisí na rozložení zdrojů daleko od osy, např. na způsobu uzavření klínu dalším okrajem a na nábojích na tomto okraji.

Uvažujte konkrétně, že klín je uzavřen částí vodivé válcové plochy s osou z a o poloměru R_0 . Tato plocha je odizolována od obou polorovin a udržována na napětí ϕ_0

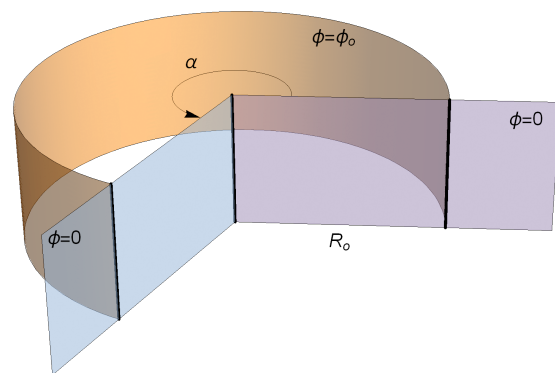
- Porovnáním obecného potenciálu ϕ na válcové ploše se zadanými okrajovými podmínkami nalezněte koeficienty ve vyjádření ϕ .
(Podobnou úlohu jsme řešili pro kvádr v kartézských souřadnicích na přednášce.)
- Nalezené koeficienty dosadte do vztahu pro potenciál ϕ a sumu sečtěte.
(K sumaci můžete použít literaturu či softwarové systémy pro algebraickou manipulaci. Pamatujte, že výsledek má vyjít reálně a softwarové systémy někdy nabízejí zbytečně složité a nevhodné vyjádření používající komplexní čísla. Na stránce přednášky je k dispozici oddíl o Fourierových sumách ze standardní knihy Gradshteyn & Ryzhik: *Table of Integrals, Series, and Products*.)

Bonusová otázka:

- Najděte nábojovou hustotu na vnitřním okraji zkoumané oblasti. Diskutujte její chování blízko osy a blízko (nevodivého) doteku válcové plochy a polorovin.



Geometrie úlohy pro konvexní klín, $\alpha < \pi$.



Geometrie úlohy pro konkávní klín, $\alpha > \pi$.

Poznámka: Ve všech případech nás zajímá úloha pouze uvnitř úhlu α mezi vodivými polorovinami, v případě nábojové hustoty pouze náboj na vnitřním povrchu vodičů. Neuvažujte pole vně vodivých polorovin ani za hranicí válcové plochy. Např. si můžete představit, že celá oblast vně polorovin je vyplněna vodičem.

Řešení:

Ze zadání vyplývá, že žádná z veličin nezávisí na souřadnici z . Jedná se tak efektivně o dvoudimenzionální problém. Skalární potenciál budeme hledat jako superpozici funkcí splňujících Laplaceovu úlohu a příslušné okrajové podmínky. Systém takových funkcí nalezneme metodou separace proměnných.

a)

Hledáme tedy funkci ψ v multiplikativně separovaném tvaru v polárních souřadnicích R, φ :

$$\psi(R, \varphi) = \mathcal{R}(R) \mathcal{E}(\varphi) . \quad (1)$$

Laplaceův operátor v cylindrických souřadnicích má tvar

$$\Delta\psi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial\psi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} . \quad (2)$$

Užitím (1) Laplaceova úloha vede na

$$\frac{R^2}{\psi} \Delta\psi = \frac{1}{\mathcal{R}} R \frac{d}{dR} \left(R \frac{d}{dR} \mathcal{R} \right) + \frac{1}{\mathcal{E}} \frac{d^2\mathcal{E}}{d\varphi^2} = 0 . \quad (3)$$

Členy obsahující \mathcal{R} a \mathcal{E} závisejí na různých proměnných a musejí tak být konstantní. Dostáváme tak separované rovnice

$$R \frac{d}{dR} \left(R \frac{d}{dR} \mathcal{R} \right) = k^2 \mathcal{R} , \quad \frac{d^2\mathcal{E}}{d\varphi^2} = -k^2 \mathcal{E} , \quad (4)$$

kde k^2 je separační konstanta.

Rovnice pro \mathcal{E} je rovnice harmonického oscilátoru a její řešení je kombinace sinů a cosinů. Dirichletovy okrajové podmínky pro $\varphi = 0$ a $\varphi = \alpha$ vybírají řešení v podobě

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha} \varphi\right) , \quad k = \frac{m\pi}{\alpha} , \quad m \in \mathbb{N} . \quad (5)$$

Rovnice pro \mathcal{R} má řešení $\mathcal{R} \propto R^{\pm k}$. Požadavek regularity pro malé R vybírá řešení s kladným exponentem, tedy

$$\mathcal{R} = \left(\frac{R}{R_o} \right)^{\frac{m\pi}{\alpha}} . \quad (6)$$

Zde R_o je konstanta daná nějakým charakteristickým rozměrem úlohy zajišťující bezrozměrnost umocňované veličiny a lze chápat jen jako vhodná normalizace radiální funkce.

Funkcí řešících Laplaceovu úlohu s požadovanými okrajovými podmínkami jsou tak číslovány přirozeným číslem m a mají tvar

$$\psi_m = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \left(\frac{R}{R_o} \right)^{\frac{m\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha} \varphi\right) . \quad (7)$$

Poznámka: Normalizace funkcí ψ_m byla zvolena prozatím ‘libovolně’. Samozřejmě, že použitá volba předjímá další použití. Faktor $\sqrt{2/\alpha}$ je zvolen pro normalizaci Fourierova systému a konstanta R_o nám zjednoduší výrazy při zkoumání okrajových podmínek na poloměru $R = R_o$ v dalším bodě. Nicméně mohli bychom zvolit jakoukoli jinou normalizaci, např. pouze $\psi_m = R^k \sin(k\varphi)$. Koeficienty zavedené v (7) se pak objeví při výpočtu koeficientů c_m v rozkladu skalárního potenciálu.

b)

Skalární potenciál ϕ splňující Laplaceovu úlohu s uvažovanými okrajovými podmínkami lze zapsat pomocí nalezeného systému funkcí jako

$$\phi(R, \varphi) = \sum_{m \in \mathbb{N}} c_m \psi_m(R, \varphi) . \quad (8)$$

Koeficienty c_m závisí na rozložení zdrojů daleko od námi zkoumané oblasti v okolí počátku. Níže, v bodě d), je nalezneme pro zadané okrajové podmínky na $R = R_o$.

c)

Dominantní člen v blízkosti počátku $R = 0$ bude člen s nejpomalejším klesáním radiální závislosti, tedy člen $m = 1$,

$$\phi \approx c_1 \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \left(\frac{R}{R_o} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha} . \quad (9)$$

Pro něj dostáváme

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial R} \vec{e}_R - \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = -\frac{c_1}{R_o} \frac{\pi}{\alpha} \left(\frac{R}{R_o} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \left(\sin \frac{\pi \varphi}{\alpha} \vec{e}_R + \cos \frac{\pi \varphi}{\alpha} \vec{e}_\varphi \right) . \quad (10)$$

Plošná nábojová hustota na vnitřním povrchu vodivých polorovin je dána normálovou složkou elektrické intenzity blízko povrchu. Pro $\varphi = 0$ je normála $\vec{n} = \vec{e}_\varphi$ a pro $\varphi = \alpha$ máme $\vec{n} = -\vec{e}_\varphi$. Nábojová hustota v závislosti na vzdálenosti R od osy z je tak na obou polorovinách dána

$$\sigma = -\frac{c_1}{R_o} \frac{\pi}{\alpha} \left(\frac{R}{R_o} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \propto R^{\frac{\pi}{\alpha}-1} . \quad (11)$$

Vidíme, že chování jak intenzity \vec{E} , tak nábojové hustoty σ se výrazně liší pro konvexní úhel $\alpha < \pi$ a konkávní úhel $\alpha > \pi$. Pro konvexní úhel intenzita i nábojová hustota blízko osy z vymizí. Náboj je vytlačen od osy, kde se poloroviny dotýkají. Pro konkávní úhel je exponent v mocnině R záporný a intenzita \vec{E} v blízkosti osy z diverguje. Podobně náboj je na vodivých polorovinách koncentrován v místě jejich spojení.

V blízkosti ‘ostrého’ vodivého hřbetu tak vzdálené zdroje způsobí akumulaci náboje a silné elektrické pole – což je skutečnost využívaná při ochraně proti bleskům instalováním ‘špičatých’ nebo v našem případě ‘ostrých’ bleskosvodů.

Pro úhel $\alpha = \pi$ dostáváme přirozeně, že potenciál nezávisí na vzdálenosti od osy. Osa totiž není v tomto případě výjimečná a nemůže tak v dominantním členu hrát roli.

Poznámka: Tato diskuze je platná pro generické rozložení nábojů daleko od osy. Ve speciálních případech se může stát, že $c_1 = 0$ a člen $m = 1$ není přítomný. Dominantní člen pak je $m = 2$ (nebo vyšší). V takovém případě máme $E \propto R^{\frac{2\pi}{\alpha}-1}$ a intenzita i nábojová hustota v blízkosti osy z vždy vymizí.

d)

Nyní předpokládáme, že oblast kolem osy z je uzavřená válcovou vodivou plochou na poloměru $R = R_o$. Tento poloměr přirozeně zvolíme jako charakteristický rozměr v R_o v definici funkcí (7). Válcová plocha je udržována na potenciálu ϕ_o . K tomu je potřeba na plochu umístit náboje – válcová plocha tak hraje roli vzdálených zdrojů zmiňovaných výše.

Vyčíslením našeho potenciálu (8) na poloměru R_o dostaneme podmínku

$$\phi_o = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} \varphi\right). \quad (12)$$

Koeficienty c_m určíme využitím ortonormality Fourierova systému funkcí na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ s Dirichletovými podmínkami

$$\int_0^\alpha \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha} \varphi\right) \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} \varphi\right) d\varphi = \delta_{mn}. \quad (13)$$

(Funkcionální) skalární součin rovnice (12) s funkcí $\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha} \varphi\right)$ tak povede na δ_{mn} , které ‘zruší’ sumu přes n a dostaneme

$$c_m = \int_0^\alpha \phi_o \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha} \varphi\right) d\varphi = \phi_o \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \left[-\frac{\alpha}{m\pi} \cos\left(\frac{m\pi}{\alpha} \varphi\right) \right]_0^\alpha = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2\alpha}}{m\pi} \phi_o & m \text{ liché,} \\ 0 & m \text{ sudé.} \end{cases} \quad (14)$$

e)

Užitím tohoto výsledku pro potenciál dostáváme

$$\phi = \frac{4}{\pi} \phi_o \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{R}{R_o} \right)^{\frac{(2n-1)\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{\alpha} \varphi\right), \quad (15)$$

kde jsme položili $m = 2n - 1$, protože sudé členy nepřispívají.

Pro přehlednost zavedeme bezrozměrné přeškálované veličiny

$$\bar{R} = \left(\frac{R}{R_o} \right)^\frac{\pi}{\alpha} \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \bar{\varphi} = \frac{\pi}{\alpha} \varphi \in \langle 0, \pi \rangle. \quad (16)$$

Pomocí nich lze skalární potenciál zapsat

$$\phi = \frac{4}{\pi} \phi_o \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2n-1} \bar{R}^{2n-1} \sin((2n-1)\bar{\varphi}). \quad (17)$$

Užitím vztahu 1.448.3 z tabulek Gradshteyn & Ryzhik zmíněných v zadání dostaneme

$$\phi = \phi_o \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{2\bar{R}}{1-\bar{R}^2} \sin \bar{\varphi}\right) = \phi_o \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{2(RR_o)^\frac{\pi}{\alpha}}{(R_o^2)^\frac{\pi}{\alpha} - (R^2)^\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi\varphi}{\alpha}\right). \quad (18)$$

Jelikož $\sin \frac{\pi\varphi}{\alpha} > 0$ pro relevantní úhly, limita $R \rightarrow R_o$ dává $\phi \rightarrow \phi_o \frac{2}{\pi} \arctan(+\infty) = \phi_o$ jak požadujeme. Pro $\varphi = 0, \alpha$ je zřejmě $\phi = 0$.

f)

Elektrická intenzita pro potenciál (18) je

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{d\bar{R}}{dR}\frac{\partial\phi}{\partial\bar{R}}\vec{e}_R - \frac{1}{R}\frac{d\bar{\varphi}}{d\varphi}\frac{\partial\phi}{\partial\bar{\varphi}}\vec{e}_{\varphi}. \quad (19)$$

Po přímočarých úpravách dostaneme

$$\vec{E} = -\frac{4\phi_o}{\alpha R} \frac{(1 + \bar{R}^2)\bar{R} \sin \bar{\varphi} \vec{e}_R + (1 - \bar{R}^2)\bar{R} \cos \bar{\varphi} \vec{e}_{\varphi}}{1 - 2\bar{R}^2 \cos(2\bar{\varphi}) + \bar{R}^4}. \quad (20)$$

Plošná nábojová hustota na vnitřním povrchu vodivých okrajů je dána normálovou složkou intenzity blízko povrchu. Pro $\varphi = 0$, tj. $\bar{\varphi} = 0$, je normála $\vec{n} = \vec{e}_{\varphi}$. Pro $\varphi = \alpha$, tj. $\bar{\varphi} = \pi$, máme $\vec{n} = -\vec{e}_{\varphi}$. Pro $R = R_o$, tj. $\bar{R} = 1$, je $\vec{n} = -\vec{e}_R$. Na jednotlivých okrajích tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \sigma|_{\varphi=0,\alpha} &= -\frac{4\phi_o}{\alpha R} \frac{\bar{R}}{1 - \bar{R}^2} = -\frac{4\phi_o}{\alpha R} \frac{(RR_o)^{\frac{\pi}{\alpha}}}{(R_o^2)^{\frac{\pi}{\alpha}} - (R^2)^{\frac{\pi}{\alpha}}}, \\ \sigma|_{R=R_o} &= \frac{2\phi_o}{\alpha R_o} \frac{1}{\sin \bar{\varphi}} = \frac{2\phi_o}{\alpha R_o} \frac{1}{\sin \frac{\pi\varphi}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (21)$$

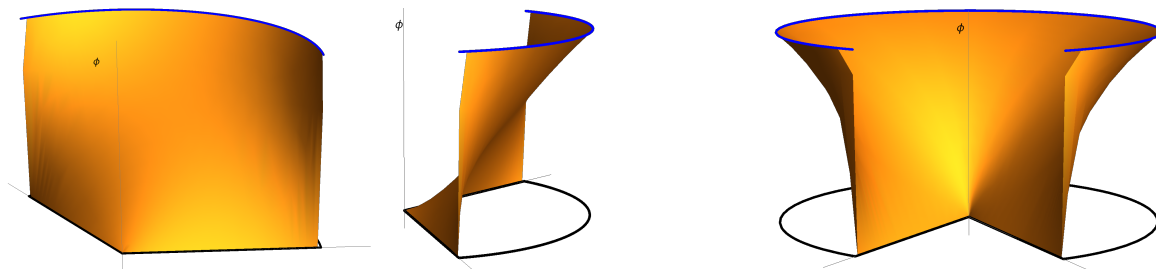
Nábojová hustota na polorovinách v blízkosti osy potvrzuje výsledek nalezený v bodě c) – pro konvexní úhel je nábo vytěsněn z okolí osy, pro konkávní náboj se zde naopak hromadí.

V blízkosti (nevodivého) doteku polorovin s válcovou plochou nábojová hustota vždy diverguje, ale na sousedních vodičích s opačným znaménkem – na polorovinách je záporná a na válcové ploše kladná (pro $\phi_o > 0$).

Skalární potenciál, elektrická intenzita a nábojová hustota jsou zobrazeny v následujících grafech.

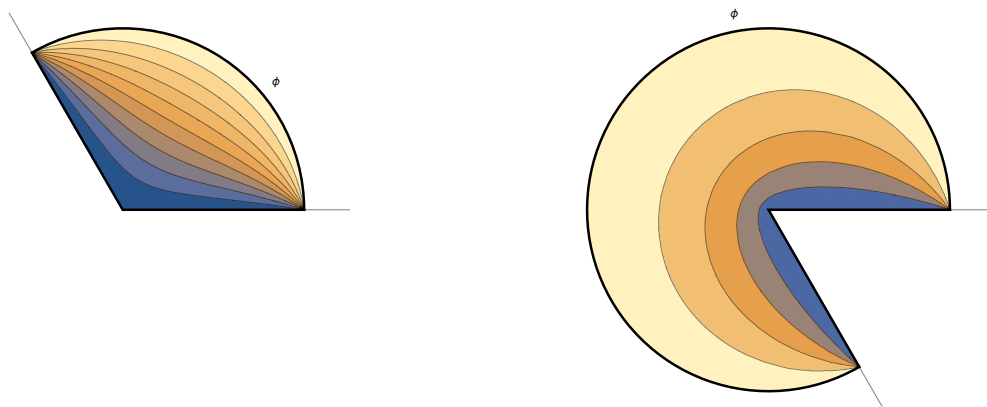
Grafy

Ve všech grafech níže je ignorovaná souřadnice z . 2D grafy odpovídají rovině $z = \text{konst.}$ Ve 3D grafech horizontální rovina odpovídá rovině $z = \text{konst.}$ a na vertikální osu se vynáší zobrazovaná veličina. Všechny veličiny jsou zobrazeny pro konvexní úhel $\alpha < \pi$ (vlevo) a pro konkávní úhel $\alpha > \pi$ (vpravo). Ve všech diagramech jsou vyznačeny černě okraje zkoumané oblasti.

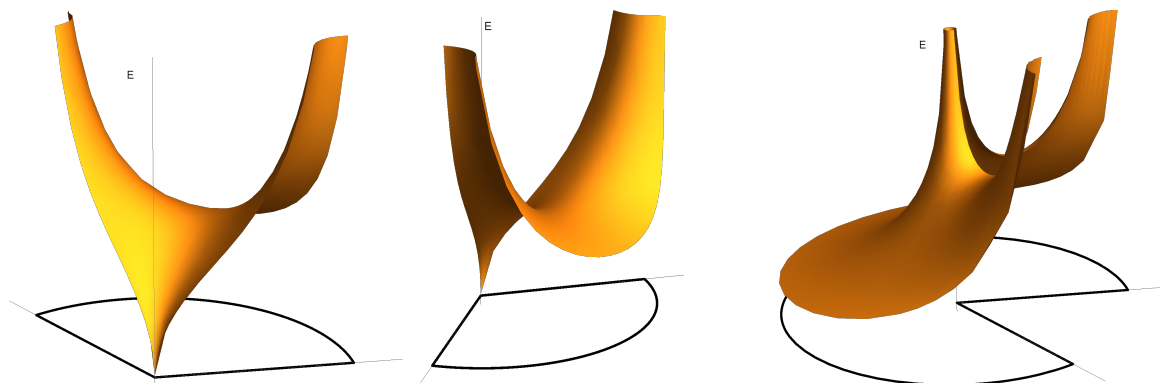


Skalární potenciál ϕ .

Je vidět, že na okrajích splňuje požadované okrajové podmínky – Dirichletovy podmínky na polorovinách a konstantní potenciál (modře) na válcové ploše. (Pro konvexní úhel jsou zobrazeny pohledy ze dvou stran.)

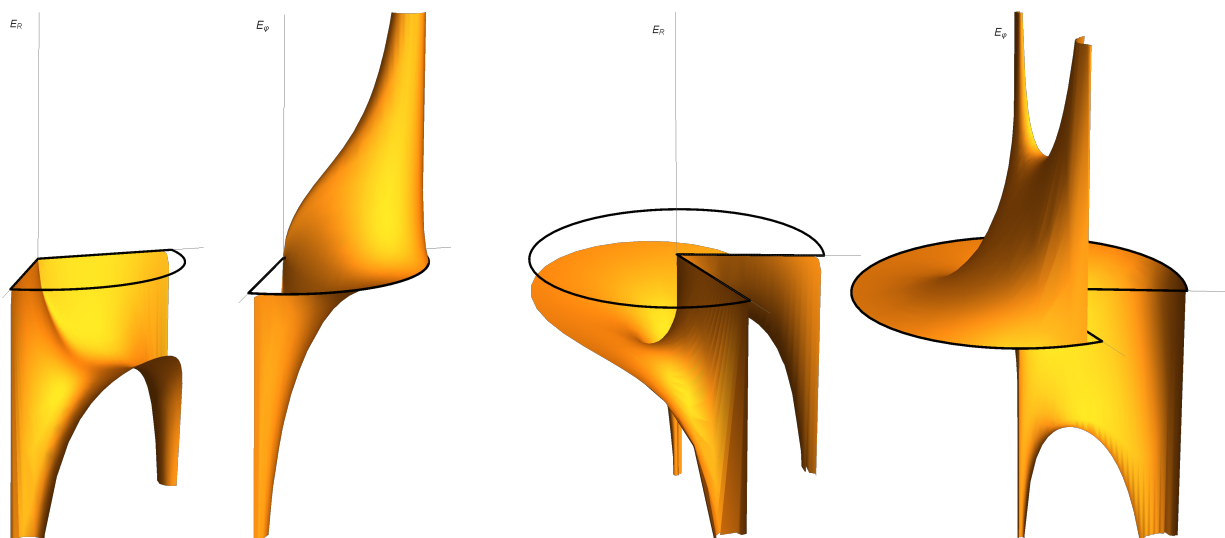


Ekvipotenciály skalárního potenciálu ϕ .

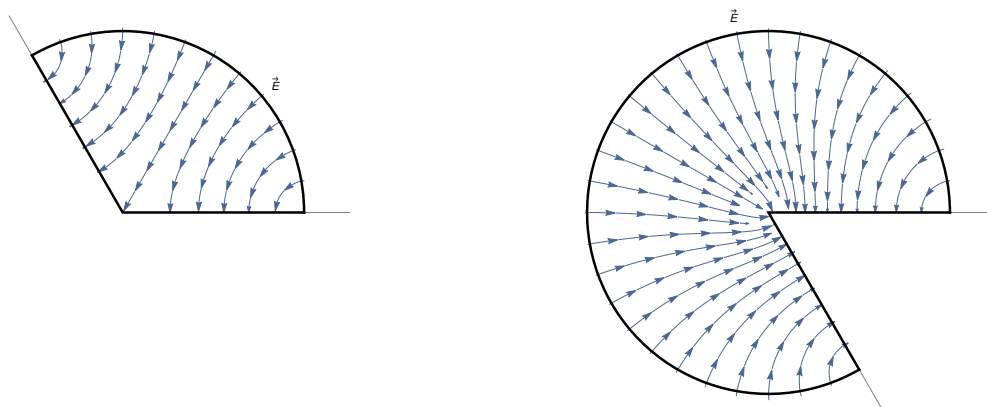


Velikost elektrické intenzity E .

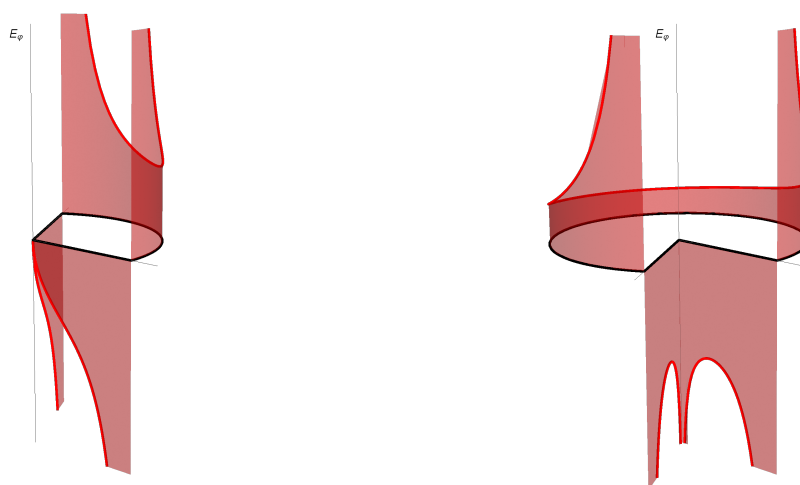
Pro konvexní úhel (vlevo) je intenzita blízko osy konečná, pro konkávní úhel (vpravo) intenzita v blízkosti osy diverguje. V obou případech intenzita diverguje v blízkosti (nevodivého) doteku polorovin s válcovou plochou. (Pro konvexní úhel jsou zobrazeny pohledy z dvou různých stran.)



Radiální a tanhenciální složky elektrické intenzity E_R a E_φ .



Siločáry elektrické intenzity \vec{E} .



Nábojová hustota na vnitřním povrchu vodivých okrajů zkoumané oblasti.

Pro konvexní úhel (vlevo) je nábojová hustota blízko osy konečná, pro konkávní úhel (vpravo) nábojová hustota v blízkosti osy diverguje. V obou případech nábojová hustota diverguje v blízkosti (nevodivého) doteku polorovin s válcovou plochou.