Řešení písemné práce z Klasické elektrodynamiky

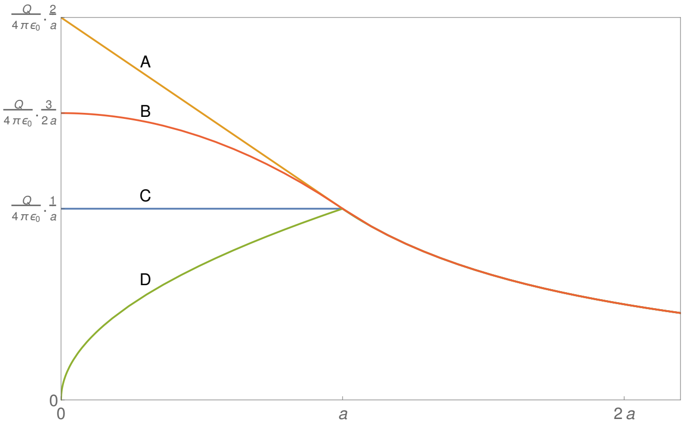
Kristýna Hovořáková

Úloha 1

Na obrázku je průběh potenciálů $\Phi_A, .., \Phi_D$ pro čtyři sféricky symetrické nábojové hustoty $\rho_A, .., \rho_D$. Pro $r \geq a$ se všechny potenciály shodují a platí, že $\Phi = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$. Pro $0 \leq r < a$ je Φ_A lineární funkce radiální souřadnice r, $\Phi_C =$ konst. a pro Φ_B a Φ_D pak platí

$$\Phi_B(r<a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{3a^2 - r^2}{2a^3}, \quad \Phi_D(r<a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. Určete všechny objemové $\rho_A, .., \rho_D$, plošné $\sigma_A, .., \sigma_D$ a bodové $q_A, .., q_D$ náboje, které budí potenciály Φ_A, Φ_B, Φ_C a Φ_D.
2. Určete celkové hodnoty $Q_A, .., Q_D$ těchto nábojů.



Řešení:
a) Objemovou hustotu náboje spočteme za pomoci Poissonovy rovnice $\rho = -\epsilon_0 \Delta\Phi$, kde pro sféricky symetrický potenciál je nejsnazží spočíst $\Delta f(r) = (rf)''/r$. Pro $r > a$ dostáváme samozřejme $\rho(r > a) = 0$, v okolí počátku pak

$$\rho_i(r < a) = \epsilon_0 U_0 \begin{cases} \frac{2}{ra} & i = A \\ \frac{3}{a^2} & i = B \\ 0 & i = C \\ -\frac{3}{4r\sqrt{ar}} & i = D \end{cases}, \quad \text{kde} \quad U_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Plošné nábojové hustoty se projeví nespojitostí elektrického pole a tedy první derivace potenciálu. To nastává pro případy C a D na sféře $r = a$. To, že plošná nábojová hustota je dána nespojitostí radiální složky elektrického pole, je ve sféricky symetrické situaci obzvlášť dobře patrné: náboj uvnitř sféry o poloměru r je dán přímo součinem plochy a elektrické indukce $Q_r = 4\pi r^2\, \epsilon_0 E_r(r)$. Konkrétně

$$\vec{E}_C(r \to a^-) = 0, \qquad \vec{E}_D(r \to a^-) = -\frac{1}{2}\frac{U_0}{a}\vec{e}_r$$

a protože těsně nad povrchem koule je pokaždé $E_r(r \to a^+) = U_0/a$ máme

$$\sigma_A = \sigma_B = 0, \qquad \sigma_C = (1-0)\frac{\epsilon_0 U_0}{a} = \frac{\epsilon_0 U_0}{a}, \qquad \sigma_D = (1-(-1/2))\frac{\epsilon_0 U_0}{a} = \frac{3\epsilon_0 U_0}{2a}$$

Protože elektrická intenzita v počátku je konečná, nemůže tam sídlit nenulový bodový náboj. Nepřítomnost bodového náboje ovšem nezaručuje, že nábojová hustota je konečná, jak je vidět na příkladě nábojové hustoty ρ_A.
b) Celkový náboj sídlí vždy v kouli $r \leq a$ a je ve všech čtyřech případech roven Q. To lze spočíst jednak sečtením nábojů plošných a objemových

$$Q_i = 4\pi a^2 \sigma_i + \int_0^a \rho_i\, 4\pi r^2\, dr,$$

a nebo mnohem snáze přímo z tvaru potenciálu pro $r > a$, který odpovídá právě poli bodového náboje Q.

Úloha 2

Dvě kuličky z vodivé a nestlačitelné kapaliny o poloměrech (nikoli průměrech) 40 mm resp. 45 mm se vzdáleností středů 350 mm se nacházejí na potenciálech −450 V resp. +600 V vzhledem k nekonečnu. V důsledku vzájemného elektrostatického přitahování se posléze obě spojí do jedné větší kulové kapky. Nalezněte její elektrický potenciál (taktéž vzhledem k nekonečnu.) Za každou platnou cifru výsledku dostanete 3 body (nanejvýš ovšem 15).

Řešení: Označíme-li poloměry kuliček a a b pak pro kuličku vzniklou splynutím máme $c = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$. Pro náboj bude platit $Q_c = Q_a + Q_b$; pro další výpočty zvolíme jednotky náboje $[Q] = \mathrm{Vmm}$ tak, že položíme $4\pi\epsilon_0 = 1$, tedy pro kapacitu kuličky o poloměru a máme $C_a = a$. Komplikace úlohy spočívá v tom, že neznáme náboje, ale pouze napětí na kuličkách.

V nejnižší aproximaci při zanedbání jejich vzájemného ovlivňování dostaneme, že náboje jsou $Q_a = C_a U_a$ a $Q_b = C_b U_b$, a tedy $U_c = Q_c/c = (aU_a + bU_b)/\sqrt[3]{a^3 + b^3}$. Zadání je zvoleno tak, že tento výsledek dá právě jednu platnou cifru výsledku.

Na cvičení jsme nalezli matici kapacit zahrnující první opravu:

$$C_{AB} = 4\pi\epsilon_0 \begin{pmatrix} a & -ab/d \\ -ab/d & b \end{pmatrix}$$

tedy $Q_c = aU_a + bU_b - ab/d(U_a + U_b)$.

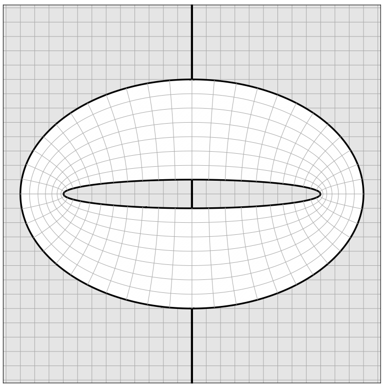
Na dalším cvičení jsme nalezli vztahy pro posloupnost fiktivních nábojů, která dokáže udržet ekvipotenciály ve tvaru sfér se zadanými poloměry a napětími. Nejprve jsme umístili náboje $q_0 = aU_a$ a $q'_0 = bU_b$ do vzdálenosti d a poté jsme mezi ně přidali fiktivní náboje s polohami a velikostí

$$s_i = \frac{a^2}{d - s'_{i-1}}, \quad s'_i = \frac{b^2}{d - s_{i-1}}, \quad q_i = -\frac{a}{d - s'_{i-1}} q'_{i-1}, \quad q'_i = -\frac{b}{d - s_{i-1}} q_{i-1}.$$

Hledané Q_c pak představuje jejich součet $Q_c = \sum_i q_i + q'_i$. Na pět platných cifer potřebujeme:
$q_i = \{-18000, -3086, -269, -47, -4\}\mathrm{Vmm}$, $q'_i = \{27000, 2314, 402, 35, 6\}\mathrm{Vmm}$, případně
$q_i = \{-2.0028, -0.3433, -0.0299, -0.0052, -0.0005\}\mathrm{nC}$, $q'_i = \{3.0042, 0.2575, 0.0447, 0.0039, 0.0007\}\mathrm{nC}$,
$s_i = \{0., 4.5714, 4.6483, 4.6493, 4.6493\}\mathrm{mm}$, $s'_i = \{0., 5.7857, 5.8623, 5.8636, 5.8636\}\mathrm{mm}$.
Výsledné napětí sečtením šesti členů vyjde 155.437 V.

Úloha 3

Nalezněte kapacitu kondenzátoru tvořeného dvěma koncentrickými elektrodami ve tvaru rotačních elipsoidů. Vnitřní elektroda má rovníkový poloměr 9cm a polární poloměr 1cm, vnější elektroda má rovníkový poloměr 12cm a polární poloměr 8cm.



Obrázek k úloze 3. Vertikální osa je osou axiální symetrie kondenzátoru.

Řešení:

Rotační elipsoidy, ze kterých je kondenzátor vytvořem, se dostanou rotací elipsy (se zadanou hlavní a vedlejší polosou) okolo vedlejší poloosy. V prvním kroku si pro obě elipsy spočteme vzdálenost a ohnisek od středu. Z vlastnosti elipsy, že součet vzdáleností od ohnisek je na elipse konstantní, aplikované na body na osách, plyne $R^2 = P^2 + a^2$. Dosazením číselných hodnot pro vnitřní elipsoid $R_\mathrm{i} = 9\mathrm{cm}$, $P_\mathrm{i} = 1\mathrm{cm}$ a pro vnější elipsoid $R_\mathrm{o} = 12\mathrm{cm}$, $P_\mathrm{o} = 8\mathrm{cm}$ zjistíme, že pro oba elipsoidy dostáváme stejnou hodnotu

$$a = \sqrt{R_\mathrm{i}^2 - P_\mathrm{i}^2} = \sqrt{R_\mathrm{o}^2 - P_\mathrm{o}^2} = \sqrt{80}\mathrm{cm}\ .$$

Elisoidy jsou tak konfokální: elipsy, které je generují mají stejná ohniska.

Na přednášce jsme nalezli skalární potenciál od nabitého vodivého zploštělého elipsoidu a ukázali, že jeho ekvipotenciály jsou přesně konfokální elipsoidy. Umístění druhého vodiče na takovou ekvipotenciálu toto pole nezmění – dojde k prosté superpozici polí obou elipsoidů.

Pro jeden elipsoid nabitý nábojem Q je pole vně elisoidu dáno vzorcem odvozeným na přednášce,

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{a}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\sinh\eta\Big)\ ,$$

kde eliptická souřadnice η je spojena se vzdálenostmi od ohnisek r_-, r_+ vztahem

$$\cosh\eta = \frac{r_- + r_+}{2a}\ .$$

Součet vzdáleností od ohnisek je ale přesně dvojnásobek hlavní poloosy $2R$ příslušné elipsy, tedy

$$\cosh\eta = \frac{R}{a} \quad \Rightarrow \quad \sinh\eta = \sqrt{\frac{R^2}{a^2} - 1} = \frac{P}{a}\ .$$

Tento vztah lze také přímo vyčíst z trasformací definujících tyto křivočaré souřadnice, na pólu musí platit $z = P = a\sinh\eta$, na rovníku na ose x pak $x = R = a\cosh\eta$.

Uvnitř elipsoidu je potenciál konstantní s hodnotou potenciálu danou spojitostí s polem vně.

Superpozicí polí elipsoidu o polosách R_i, P_i s nábojem $+Q$ a elipsoidu o polosách R_o, P_o s nábojem $-Q$ mezi oběma elipsoidy dostaneme

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{a}\Big(\arctan\sinh\eta_\mathrm{o} - \arctan\sinh\eta\Big)\ .$$

Vně vnějšího elipsoidu (a na něm) je potenciál nulový, uvnitř vnitřního elipsoidu (a na něm) je potenciál konstantní daný

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{a}\Big(\arctan\frac{P_\mathrm{o}}{a} - \arctan\frac{P_\mathrm{i}}{a}\Big)\ ,$$

kde jsme použili vztah pro $\sinh\eta$. Toto je tedy též napětí mezi oběma částmi kondenzátoru. Kapacita elipsoidálního kondenzátoru tedy je

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_o a\left(\arctan\frac{P_\mathrm{o}}{a} - \arctan\frac{P_\mathrm{i}}{a}\right)^{-1} = 4\pi\epsilon_0\left(\frac{1}{P_\mathrm{i}} - \frac{1}{P_0}\right)^{-1} + \mathcal{O}\Big(\frac{a^2}{P^2}\Big)\ .$$

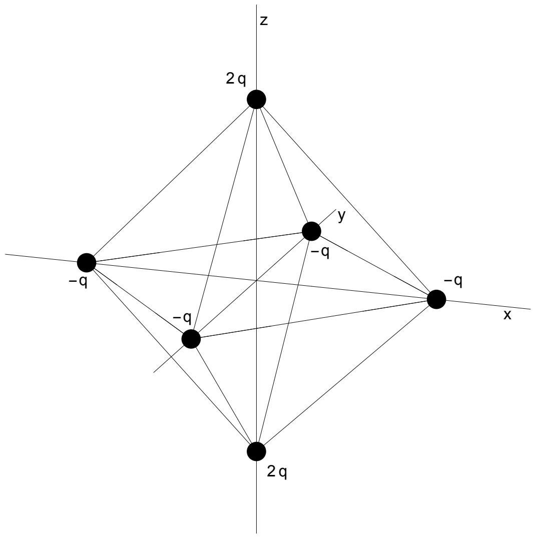
Poslední výraz reprezentuje rozvoj v bezrozměrné výstřednosti $\frac{a}{P}$. Dominantní člen má ilustrovat, že pro malé výstřednosti dostaneme známý vztah pro kapacitu kulového kondenzátoru. Tento rozvoj však není obecně užitečný pro zadané hodnoty. Pro ty dosazením do přesného výrazu dostáváme

$$C = 16.1\mathrm{pF}\ .$$

Úloha 4

Mějme náboje rozložené ve vrcholech pravidelného osmistěnu jak je znázorněno na obrázku. Vzdálenost všech nábojů $-q$ od počátku je a.

Určete tenzor dominantního multipólu pro toto rozložení a pomocí něj zapište skalární potenciál v závislosti na radiální vzdálenosti a směrovém vektoru $\vec{e}$. Po té nalezněte skalární potenciál ϕ a elektrickou intenzitu $\vec{E}$ ve sférických souřadnicích r, ϑ, φ.



Rozložení nábojů

Řešení:

Polohy nábojů lze pomocí kartézských jednotkových vektorů zapsat:

náboj q_i	průvodič $\vec{r}_i$	člen $\vec{r}_i\,\vec{r}_i$
$2q$	$a\vec{e}_z$	$a^2\,\vec{e}_z\vec{e}_z$
$2q$	$-\,a\vec{e}_z$	$a^2\,\vec{e}_z\vec{e}_z$
$-q$	$a\vec{e}_x$	$a^2\,\vec{e}_x\vec{e}_x$
$-q$	$a\vec{e}_y$	$a^2\,\vec{e}_y\vec{e}_y$
$-q$	$-\,a\vec{e}_x$	$a^2\,\vec{e}_x\vec{e}_x$
$-q$	$-\,a\vec{e}_y$	$a^2\,\vec{e}_y\vec{e}_y$

Celkový náboj je nulový. Díky středové symetrii nábojového rozložení je dipólový člen též nulový.

Druhý moment nábojového rozložení je pro diskrétní náboje dán sumou $\overleftrightarrow{Q}_2 = \sum_i q_i\,\vec{r}_i\,\vec{r}_i$. Dosazením dostáváme

$$\overleftrightarrow{Q}_2 = -2qa^2\left(\vec{e}_x\vec{e}_x + \vec{e}_y\vec{e}_y - 2\vec{e}_z\vec{e}_z\right)\ .$$

Dominantní člen multipólového rozložení je tedy kvadrupól. Tenzor, který ho charakterizuje, je dán bezestopou částí druhého momentu, $\overleftrightarrow{K} = 3\langle\overleftrightarrow{Q}_2\rangle = 3\overleftrightarrow{Q} - Q\overleftrightarrow{q}$. Stopa momentu je $Q = Q^c_c = 0$ a pro bezestopou část dostáváme

$$\overleftrightarrow{K} = -6qa^2\left(\vec{e}_x\vec{e}_x + \vec{e}_y\vec{e}_y - 2\vec{e}_z\vec{e}_z\right)\ .$$

Skalární potenciál kvadrupólu je $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r^3}\frac{1}{2}\,\vec{e}\cdot\overleftrightarrow{K}\cdot\vec{e}$. V kartézských souřadnicích je jednotkový směrový vektor $\vec{e} = r^{-1}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$ a potenciál tak je

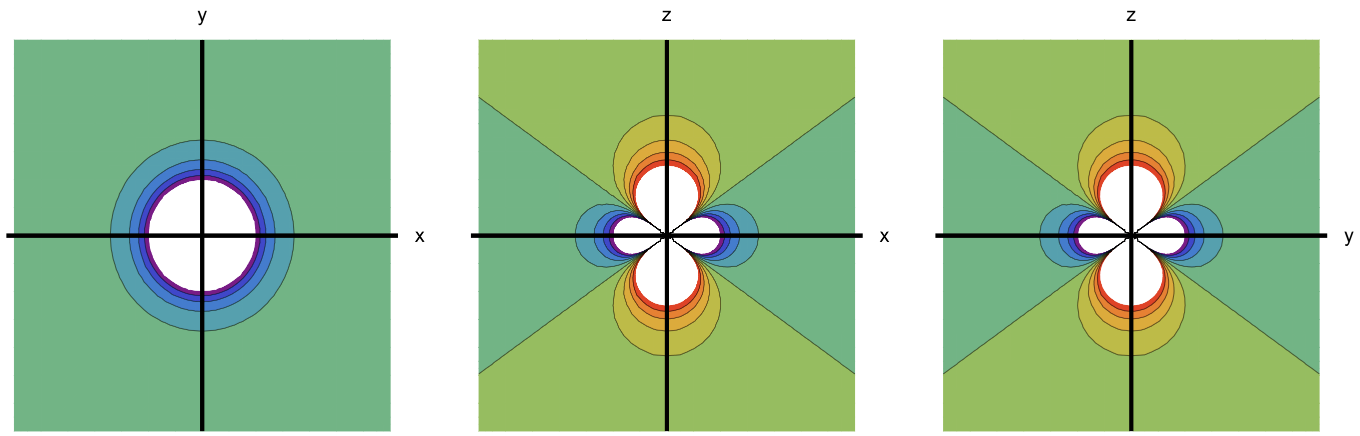
$$\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{a^2}{r^5}3\Big(-x^2 - y^2 + 2z^2\Big) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{a^2}{r^3}3\Big(3\frac{z^2}{r^2} - 1\Big)\ .$$

Dosadíme-li směrový vektor vyjádřený pomocí sférických úhlů $\vec{e} = \sin\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\vartheta\,\vec{e}_z$, nalezneme skalární potenciál ve sférických souřadnicích,

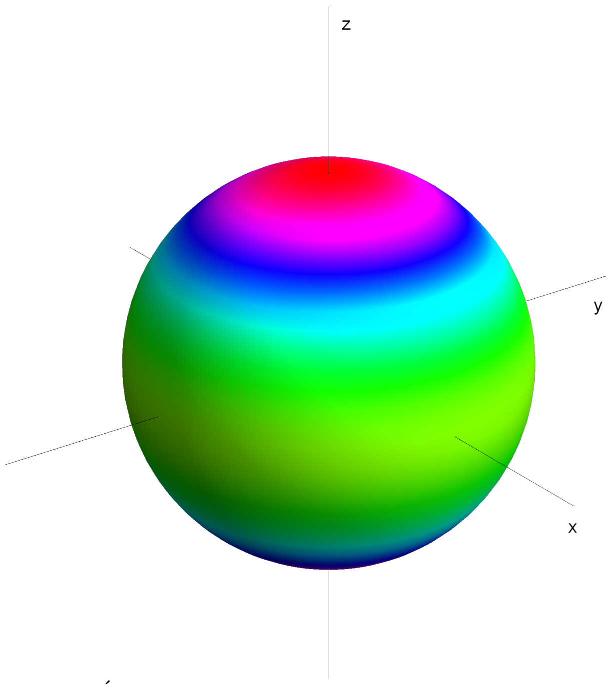
$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{a^2}{r^3}3\Big(3\cos^2\vartheta - 1\Big) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{a^2}{r^3}\frac{3}{2}\Big(3\cos(2\vartheta) + 1\Big)\ .$$

Obrázek níže zobrazuje ekvipotenciály v řezech $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, úhlová závislost potenciálu při $r =$ konst. je znázorněna výše. Derivací podle souřadnic r, ϑ, φ se zahrnutím Lamého koeficientu h_i^{-1} dostaneme komponenty elektrické intenzity,

$$\vec{E}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{a^2}{r^4}9\Big(\big(3\cos^2\vartheta) - 1\big)\,\vec{e}_r + \sin(2\vartheta)\,\vec{e}_\vartheta\Big)\ .$$



Ekvipotenciály skalárního potenciálu v rovinnách $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$.



Úhlová závislost skalárního potenciálu.