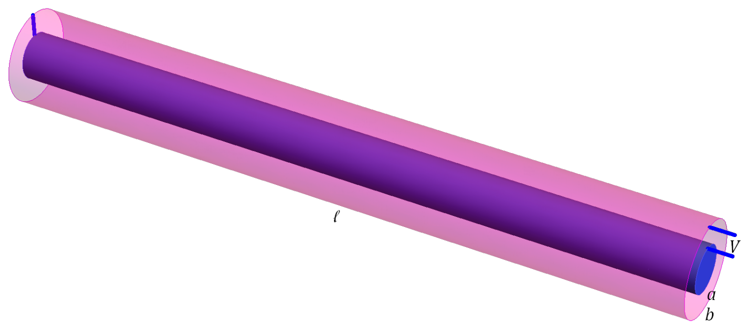
Zápočtový problém č. 2

`NOFY026` – Klasická elektrodynamika, LS 2019

Řešení:

Uvažujme přímý koaxiální kabel orientovaný podél osy z, jehož vnitřní vodič je tvořen válcem ohmického vodiče poloměru a o vodivosti γ a vnější vodič tenkou válcovou plochou poloměru b z ideálního vodiče (tj. o nekonečné vodivosti, nulovém odporu). Délka vodiče ℓ je mnohem větší než poloměry a, b. Na jedné straně ($z = 0$) jsou vnitřní a vnější vodič přímo spojeny (ideálním vodičem), na druhé straně ($z = \ell$) jsou vnitřní a vnější vodič připojeny k baterii udržující na svorkách napětí V.
Předpokládejte, že proud v ohmickém vodiči teče homogenně rozložený v každém řezu $z =$ konst.. Nehomogenity na koncích koaxiálního kabelu zanedbejte – předpokládejte, že se zde všechny veličiny chovají tak, jako kdyby kabel pokračoval. Koaxiální kabel je celkově elektricky neutrální.



a) Nalezněte elektrické pole (jak $\vec{E}$, tak ϕ) a rozložení proudů ve vodičích. Jakou přirozenou hodnotu potenciálu můžete zvolit na vnějším vodiči?

Pole ve vnějším vodiči

Zkoumáme stacionární situaci a koaxiální vodič je navenek neutrální. Elektrické pole okolo vodiče tak bude nulové a můžeme zvolit potenciál na vnějším vodiči nulový

$$\phi\big|_{R=b} = 0\,. \tag{1}$$

Stejně tak je nulová elektrická intenzita "uvnitř" vnějšího vodiče.

Vnitřní vodič

Dle předpokladu můžeme psát $\vec{j} = -\frac{I}{\pi a^2}\,\vec{e}_z$. Lokální Ohmův zákon dává $\vec{j} = \gamma\vec{E}$. Ve vnitřním vodiči tak bude elektrická intenzita konstantní, orientovaná ve směru vodiče. Potenciál bude konstantní v transverzálním směru (kolmo na intenzitu) a bude lineárně narůstat podél vodiče (jeho gradient – intenzita – je konstantní).

Pro $z = 0$ jsou oba vodiče spojeny a mají tedy stejný potenciál, $\phi|_{z=0} = 0$. Pro $z = \ell$ zdroj zajišťuje na vnitřním vodiči potenciál $\phi\big|_{\substack{z=\ell\\R<a}} = V$. Ve vnitřním vodiči tak dostáváme

$$\phi = \frac{V}{\ell}\,z\,, \qquad \vec{E} = -\frac{V}{\ell}\,\vec{e}_z\,, \qquad \vec{j} = -\gamma\frac{V}{\ell}\,\vec{e}_z = -\frac{I}{\pi a^2}\,\vec{e}_z \tag{2}$$

z čehož dostaneme celkový proud

$$I = \gamma V\frac{\pi a^2}{\ell}\,. \tag{3}$$

Proud na vnějším vodiči

Vnějším vodičem poteče stejný celkový proud I. Ten bude rozložený ve shodě s cylindrickou symetrií systému, tedy proudová hustota $\vec{j}$ a povrchová hustota proudu $\vec{\imath}$ jsou.

$$\vec{j} = \frac{I}{2\pi b}\,\delta(R-b)\,\vec{e}_z = \vec{\imath}\,\delta(R-b)\,, \qquad \vec{\imath} = \frac{I}{2\pi b}\,\vec{e}_z = \gamma V\frac{a^2}{2\ell b}\,\vec{e}_z\,. \tag{4}$$

b) Nalezněte skalární potenciál ϕ a jemu odpovídající elektrickou intenzitu $\vec{E}$ mezi vodiči koaxiálního kabelu. (Znáte potenciál na povrchu vodičů. Potenciál na koncových řezech kabelu volte ve shodě se symetrií úlohy – "jako kdyby kabel pokračoval".)

Okrajové podmínky pro potenciál na povrchu vodičů jsou $\phi = 0$ pro $R = b$ a $\phi = \frac{V}{\ell} z$ pro $R = a$. Je tedy přirozené v oblasti $a < R < b$ hledat potenciál ve tvaru

$$\phi = f(R)\, z\,. \tag{5}$$

Laplaceova rovnice

$$0 = \triangle\phi = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\Big(R\frac{\partial}{\partial R}\phi\Big) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\phi = \frac{1}{R}\frac{d}{dR}\Big(R\frac{d}{dR}f\Big)\, z \tag{6}$$

dává $f(R) = k \log\frac{R}{R_\mathrm{o}}$. Při daných okrajových podmínkách $R_\mathrm{o} = b$ a $k = \frac{V}{\ell}\big(\log\frac{a}{b}\big)^{-1}$, tedy

$$\phi = \frac{V}{\ell}\, z\, \frac{\log {}^{R}\!/_{b}}{\log {}^{a}\!/_{b}}\;, \tag{7}$$

a

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{V}{\ell}\left[\frac{1}{\log {}^{b}\!/_{a}}\frac{z}{R}\,\vec{e}_R - \frac{\log {}^{b}\!/_{R}}{\log {}^{b}\!/_{a}}\,\vec{e}_z\right]\,. \tag{8}$$

Vidíme též, že na vnitřním i vnějším válci se generuje povrchová hustota $\sigma = \triangle\vec{E}\cdot\vec{n}$, kde $\vec{n}$ je ven z vodiče orientovaná normála, tj. $\vec{n}|_{R=a} = \vec{e}_R$ a $\vec{n}|_{R=b} = -\vec{e}_R$, a $\triangle\vec{E}$ je skok intenzity ve směru normály. Konkrétně

$$\sigma\big|_{R=a} = \frac{V}{\ell}\frac{1}{\log {}^{b}\!/_{a}}\frac{z}{a}\;, \qquad \sigma\big|_{R=b} = -\frac{V}{\ell}\frac{1}{\log {}^{b}\!/_{a}}\frac{z}{b}\;. \tag{9}$$

Celkový náboj koncentrovaný na $z = \text{konst.}$ vymizí

$$\int_0^{2\pi} \sigma(z,a)\, a\, d\varphi + \int_0^{2\pi} \sigma(z,b)\, b\, d\varphi = 0\;, \tag{10}$$

neboli, každý řez $z = \text{konst.}$ je neutrální.

c) Určete magnetické pole odpovídající nalezeným proudům. (Opět zanedbejte nehomogenity na koncích kabelu.)

Magnetické pole bude mít shodně jako proudy cylindrickou symetrii. Jeho velikost dostaneme z Ampérova zákona – cirkulace magnetické indukce po kružnici $R, z = \text{konst.}$ je dána proudem skrze tuto kružnici. Konkrétně dostáváme

$$\vec{B} = \begin{cases} -\frac{I}{2\pi\varepsilon_\mathrm{o}c^2}\,\frac{R}{a^2}\,\vec{e}_\varphi & R < a\,,\\ -\frac{I}{2\pi\varepsilon_\mathrm{o}c^2}\,\frac{1}{R}\,\vec{e}_\varphi & a < R < b\,,\\ 0 & b < R\,, \end{cases} \tag{11}$$

kde proud I je dán vztahem (3).

d) Nalezněte Poyntingův vektor jak uvnitř ohmického vodiče, tak mezi vodiči a vně kabelu.

$$\vec{S} = \varepsilon_\mathrm{o}c^2\vec{E}\times\vec{B} = \begin{cases} -\frac{VI}{2\pi\ell}\,\frac{R}{a^2}\,\vec{e}_R & R < a\,,\\ -\frac{VI}{2\pi\ell}\left[\frac{1}{\log {}^{b}\!/_{a}}\,\frac{z}{R^2}\,\vec{e}_z + \frac{\log {}^{b}\!/_{R}}{\log {}^{b}\!/_{a}}\,\frac{1}{R}\,\vec{e}_R\right] & a < R < b\,,\\ 0 & b < R\,. \end{cases} \tag{12}$$

e) Spočtěte tok energie skrze válcovou plochu $R = R_\text{o}$ na úseku $z \in \langle z_1, z_2 \rangle$. Určete tok konkrétně pro $R = a$. Kam se tato energie poděje? Kolik energie proteče skrze $R = b$.

Tok energie $P = \frac{dU}{dt}$ skrze plochu je dán integrálem Poyntingova vektoru přes tuto plochu. Skrze válcovou plochu $R = \text{konst.}$ mezi $z = z_1$ a $z = z_2$ směrem dovnitř proteče energie

$$P_{\text{válc.pl.}}(R_\text{o}) = \int_{z_1}^{z_2}\int_0^{2\pi} \vec{\mathcal{S}} \cdot d\vec{S} = -\int_{z_1}^{z_2}\int_0^{2\pi} \vec{\mathcal{S}} \cdot \vec{e}_R \, R_\text{o} \, d\varphi \, dz = \begin{cases} VI \, \frac{z_2 - z_1}{\ell} \frac{R_\text{o}^2}{a^2} & R_\text{o} < a \,, \\ VI \, \frac{z_2 - z_1}{\ell} \frac{\log b/R_\text{o}}{\log b/a} & a < R_\text{o} < b \,, \\ 0 & b < R_\text{o} \,. \end{cases} \tag{13}$$

Vidíme, že přes vnější vodič neteče žádná energie, $P_{\text{válc.pl.}}(b) = 0$. Přes povrch vnitřního vodiče vtéká energie

$$P_{\text{válc.pl.}}(a) = VI \, \frac{z_2 - z_1}{\ell} \,. \tag{14}$$

Pro tento výraz se nabízí interpretace, že se jedná o energii přeměnou na Jouleovo teplo na úseku $z \in \langle z_1, z_2 \rangle$, jelikož VI je celkové Jouleovo teplo vzniklé v ohmickém vodiči v našem případě délky ℓ. Tuto interpretaci potvrdíme následující diskusí.

f) Spočtěte Jouleovo teplo vyprodukované ve válcové oblasti $R \in \langle 0, R_\text{o} \rangle$, $z \in \langle z_1, z_2 \rangle$ ohmického vodiče a jeho velikost konkrétně pro $R_\text{o} = a$.

Z Jouleova zákona je hustota energie přeměněná v ohmickém vodiči na teplo za jednotku času dána

$$w = \vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{VI}{\pi a^2 \ell} \,, \tag{15}$$

viz (2). V zadaném objemu tedy dostáváme

$$W_{\text{válec}}(R_\text{o}) = \int_0^{R_0}\int_{z_1}^{z_2}\int_0^{2\pi} w \, R \, d\varphi \, dz \, dR = VI \, \frac{R_\text{o}^2}{a^2} \frac{z_2 - z_1}{\ell} \,. \tag{16}$$

Pro $R_\text{o} = a$ máme

$$W_{\text{válec}}(a) = VI \, \frac{z_2 - z_1}{\ell} \,, \tag{17}$$

což je přesně množství energie (14), které vtéká do vodiče přes povrch $R = a$.

g) Spočtěte tok energie skrze kruhový řez $z = z_\text{o}$, $R \in \langle 0, a \rangle$. Podobně určete tok energie skrze řez $z = z_\text{o}$, $R \in \langle a, b \rangle$ (mezikruží mezi vodiči).

Pro $R < a$ máme $\vec{\mathcal{S}} \cdot \vec{e}_z = 0$ a tedy i celkový tok danou plochou je nulový,

$$P_{\text{kruh}}(z_\text{o}) = 0 \,. \tag{18}$$

Pro mezikruží $a < R < b$ tok energie směrem od zdroje je

$$P_{\text{mezikruží}}(z_\text{o}) = -\int_a^b\int_0^{2\pi} \vec{\mathcal{S}} \cdot \vec{e}_z \, d\varphi \, dR = VI \, \frac{z_\text{o}}{l} \frac{1}{\log b/a} \int_a^b \frac{1}{R} \, dR = VI \, \frac{z_\text{o}}{l} \,. \tag{19}$$

h) Na základě předchozích výpočtů popište, kudy se dostává energie od zdroje do vodiče?

Bilance energie v diferenciálním tvaru má tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{S}} = -w \,. \tag{20}$$

Ve stacionární situaci se hustota energie u v čase nemění, první člen je tak nulový. Pro divergenci Poyntingova vektoru dostáváme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{S}} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\Big(R \, \mathcal{S}^R\Big) + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathcal{S}^\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{S}^z = \begin{cases} -\frac{VI}{\pi a^2 \ell} & R < a \,, \\ 0 & a < R \,. \end{cases} \tag{21}$$

Vidíme, že vně vnitřního vodiče je Poyntingův vektor bezdivergentní, čili energie stacionárně proudí bez toho, aby se kdekoli kumulovala či přeměňovala na jinou formu. Uvnitř ohmického vodiče se elektromagnetická energie též nekumuluje ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0$), ale přeměňuje se na Jouleovo teplo: vskutku, divergence (21) odpovídá Jouleovu teplu (15).

V integrální podobě vidíme, že energie proudí ve směru osy z pouze v oblasti mezi oběma vodiči. Tok energie zde však má i radiální složku a část energie se z této oblasti zanořuje do vnitřního vodiče. Z odvozených veličin můžeme napsat bilanci energie

$$P_{\text{mezikruží}}(z_2) = P_{\text{mezikruží}}(z_1) + P_{\text{válc.pl.}}(a) \,, \tag{22}$$

viz vztahy (14) a (19). Slovy: energie skrze mezikruží $z = z_2$ se rozdělí na energii skrze mezikruží $z = z_1$ a energii proudící do vnitřního vodiče.

Ve vnitřním vodiči proudí elektromagnetická energie čistě v radiálním směru směrem k ose. Postupně se však přeměňuje na teplo. Bilance energie zde má podobu

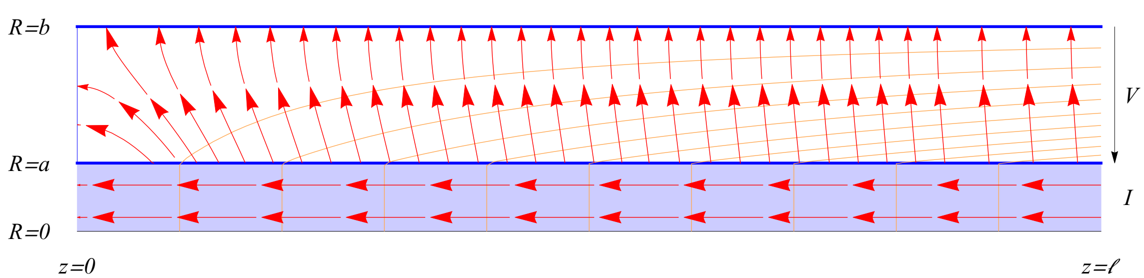
$$P_{\text{válc.pl.}}(R_{\text{o}}) = W_{\text{válec}}(R_{\text{o}}) \,, \tag{23}$$

viz vztahy (13) a (16).

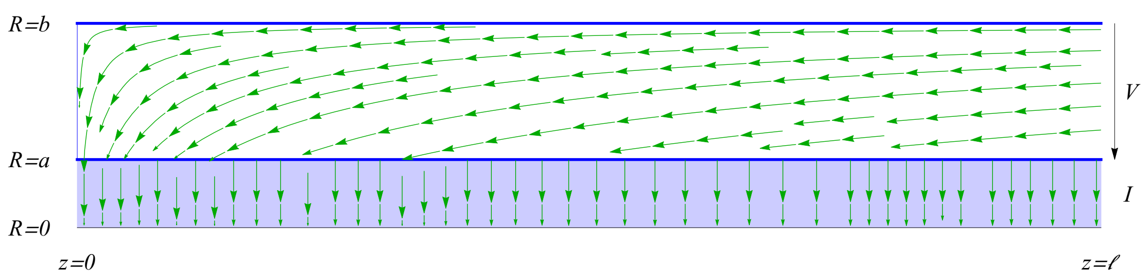
Veškerá energie vtéká do koaxiálního vodiče ze zdroje skrze mezikruží $z = \ell$

$$P_{\text{mezikruží}}(\ell) = VI \,, \tag{24}$$

což odpovídá celkové tvorbě Jouleova tepla.



Ekvipotenciály potenciálu ϕ a integrální křivky elektrické intenzity $\vec{E}$. Řez $\varphi = $ konst.



Tok energie – integrální křivky Poyntigova vektoru $\vec{S}$. Řez $\varphi = $ konst.