Matematická analýza pro fyziky

Robert Černý & Milan Pokorný

27. prosince 2015

Kapitola 1

Motivační úvod

1.1 Matematická analýza ve světle matematiky a jiných věd

Matematika je bohužel v současnosti pokládána za téměř neslušné slovo, alespoň v jisté části společnosti, kde je módní chlubit se jejími neznalostmi. Přestože se tito lidé setkávají s matematikou denně, tváří se, že matematika je zbytečná a kdo ji umí, je méněcenný. Doufejme, že se to časem změní a chlubit se neznalostí čehokoliv bude spíše pokládáno za hloupost daného člověka. Ale vraťme se k matematice. Plno věcí, které v každodenním životě používáme, vychází z nějakého matematického modelu, na jehož základě funguje. Vezměme si například přenos dat (zejména v bankovnictví), internet, ale i takové věci jako pračka, fotoaparát, mobilní telefon, atd.

Dále se matematika stala nesmírně důležitou součástí nejen fyziky, ale i jiných věd, jako například chemie, biologie, či ekonomie a sociologie. Bez jistých solidních základů matematiky se nedá v těchto oborech vědecky pracovat, ale ani porozumět nejnovějším objevům. Proto je důležité matematiku na odpovídající úrovni znát a umět ji používat.

Cílem těchto skript je představit jistou důležitou část matematiky, matematickou analýzu, která zejména ve fyzice sehrála v minulosti dominantní roli. Velká část těch nejlepších fyziků byla současně matematiky, kteří se zabývali především matematickou analýzou. Nové objevy ve fyzice ale podnítily rozvoj i dalších oborů, jako je algebra, diferenciální geometrie, ale i mnohých jiných. My se těmto součástem matematiky věnovat nebudeme, naším cílem je představit učebnici matematické analýzy, která má sloužit především studentům fyziky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze, ale mohou z ní čerpat i zájemci z jiných oborů a koneckonců i studenti matematiky, kterým nebude vadit, když se tu a tam setkají s některými aplikacemi, především ve fyzice.

Budeme se ale snažit o pečlivý a přesný výklad. Čtenář, který má spíše zájem matematický aparát využívat, může některé dlouhé technické důkazy přeskočit. Totéž platí i pro ty části, které lze nalézt v Appendixu a jsou uvedeny pro úplnost výkladu. Na přednáškách na tyto věci není čas, pro některé studenty ale může být přínosné je najít na jednom místě spolu se zbytkem výkladu.

Budeme vycházet z toho, že čtenář zná středoškolskou matematiku; alespoň v úvodu by část výkladu bez její znalosti mohla být poměrně komplikovaná. Na druhou stranu je možno motivační úvod a některé příklady přeskočit a začít s budováním matematické analýzy na takřka zelené louce. To ale není naším cílem a čtenářům, kteří mají tyto ambice, spíše doporučujeme učebnice matematické analýzy jako [Ja DPI], [Ja DPII], [Ja IPI], [Ja IPII], [AmEs An] a mnohé jiné. Na druhou stranu, samozřejmě existují i učebnice, které jsou psány přímo pro studenty fyziky. Zmiňme především dnes již klasická skripta [Ko MA I]–[Ci MA V]. Dále existuje celá řada knih, které mohou být vhodným doplňkem tohoto výkladu, jako například [Ap MA], [StSa AnI]–[StSa AnIII] a mnohé jiné.

Samozřejmě, nedílnou součástí výuky matematické analýzy je řešení úloh. Každý student by si měl propočítat během pětisemestrálního kurzu několik tisíc příkladů. V těchto skriptech je možno nalézt pouze pár řešených úloh. Vzhledem k tomu, že počet sbírek příkladů v českém jazyce je poměrně uspokojivý, doporučujeme čtenářům si nalézt příklady například v [Ko Pr I]–[Ko Pr V], nebo v [De]. Navíc existují desítky dalších knih či skript, které obsahují příklady, především k prvním dvěma dílům. Nebudeme je zde vypisovat a ponecháme volbu sbírky na čtenáři.

Nabízí se přirozená otázka, proč psát nová skripta, když existují jiná, která poměrně dobře odpovídají obsahu přednášky z matematické analýzy pro fyziky. Zmiňme zde alespoň hlavní důvody, které současně demonstrují cíle, které si při jejich psaní klademe. Ve skriptech [Ko MA I] chybí pečlivější úvod, který by lépe vysvětlil základy moderní matematiky. Dále se dnes zavedení reálných čísel vykládá trochu jinak, než je popsáno ve skriptech. Metoda zvolená ve skriptech navíc patří k těm méně vhodným pro výklad. K posunu stylu výkladu došlo také v některých dalších částech, jako například pořadí limit posloupností a limit funkcí, v teorii Lebesgueova integrálu, partií týkajících se diferenciálních forem a dalších.

Než se dáme do výkladu, pokusme se na dvou typových fyzikálních úlohách vysvětlit, k čemu je dobré matematickou analýzu znát, ale také, jakými problémy se některé partie matematické analýzy a její nadstavby (funkcionální analýza, teorie diferenciálních rovnic a jiné) věnují v současném výzkumu, a demonstrovat, že je stále mnoho otevřených problémů, které jsou úzce svázány s relativně základními a z fyzikálního pohledu klasickými modely v mechanice. Čtenáři, kteří mají pocit, že něco podobného by je mohlo spíše než motivovat vystrašit, mohou samozřejmě zbytek této kapitoly přeskočit a začít se zabývat rovnou základy matematiky, potřebnými k výkladu matematické analýzy.

1.1.1 Model, jeho matematický popis a vztah k realitě

Uvědomme si, že jiné přírodní vědy než matematika potřebují ke svému zkoumání okolní svět. Na základě experimentů a pozorování přichází s teoriemi, jak příslušné jevy fungují a na základě předpovědí, které by měla každá nová teorie přinášet, pak zpětně ověřit, do jaké míry je tato teorie správná. Matematika a speciálně i matematická analýza si, na rozdíl od jiných věd, vystačí sama se sebou. Je možno formulovat úlohy, které používají pouze jazyk matematiky a nevztahují se nijak k reálnému světu, jejich vyřešením se dosáhne pouze pokroku uvnitř matematiky, není nikterak jasné, že by vyřešení takové úlohy jakkoliv ovlivnilo jiné vědní obory. Ale co není teď, může být třeba někdy v budoucnu.

Naši čtenáři ale samozřejmě očekávají něco jiného. Pokusme se tedy ukázat nějaké úlohy, které bezprostředně vychází z fyzikálního popisu reality. Cílem bude od sebe oddělit, co je reálný svět, co je jeho fyzikálním modelem a kdy nastupuje matematická analýza a jak pomáhá řešit úlohy, které vznikly z těchto fyzikálních modelů. Uvidíme, že někdy se matematická analýza zabývá zdánlivě nesmyslnými úlohami, ale na druhou stranu se ukazuje, že tyto zdánlivě nesmyslné úlohy mohou někdy ukázat, že daný fyzikální model není úplně dobrý a je třeba ho revidovat.

Pohyb částice v silovém poli

Předpokládejme, že hmotná částice, tj. bezrozměrná částice s nenulovou konstantní hmotností, se pohybuje v silovém poli. Budeme tedy zanedbávat relativistické efekty. Začneme jednoduchou situací, tj. situací, kdy se částice může pohybovat pouze ve směru jedné souřadnicové osy. Její pohyb je popsán Newtonovým pohybovým zákonem, tedy

$$ma = f. \tag{1.1.1}$$

Nechť síla f zavisí na čase, na poloze a rychlosti částice. Protože zrychlení a je vlastně druhou derivací polohy částice a rychlost první derivací, dostáváme obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = f\Big(t, x(t), \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\Big), \tag{1.1.2}$$

kde $x(t)$ značí polohu částice v čase t. Abychom měli šanci, že polohu částice určíme jednoznačně, potřebujeme znát počáteční polohu a rychlost částice,

$$x(t_0) = x_0, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0) = v(t_0) = v_0. \tag{1.1.3}$$

Dostali jsme počáteční úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu. Teď by měla nastoupit matematická analýza, tj. na základě vlastností funkce $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ rozhodnout o tom, zda má úloha řešení, zda je jednoznačné a na konec na základě známých metod úlohu vyřešit. To se naučíme mnohem později. Někomu se může zdát, že přemýšlet o tom, zda má rovnice řešení a zda je jednoznačné, je zbytečná věc. Uvidíme později, že je sice toto mnohdy zřejmé, ale na druhou stranu, pokud sestavíme model reality, který nemá řešení, nebo připouští více řešení, která se v realitě nepozorují, tak jsme někde udělali chybu při zanedbávání a zjednodušování modelu, popřípadě je třeba model doplnit, abychom vyloučili nefyzikální řešení.

Pokud je síla v (1.1.2) konstantní, tj. $f = K$, potom je řešením naší úlohy (a to řešením jediným)

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}K(t-t_0)^2 = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}K(t-t_0)^2. \tag{1.1.4}$$

Uvědomme si, že jsme reálnou situaci, tj. částici pohybující se nějakým reálným prostředím, modelovali pomocí pohybu hmotného bodu, přičemž jsme umožnili pouze pohyb ve směru jedné souřadnicové osy. Neuvažovali jsme relativistické efekty, dospěli jsme tedy díky Newtonově pohybovému zákonu k obyčejné diferenciální rovnici (1.1.1). Tu jsme poté formulovali ve tvaru (1.1.2)–(1.1.3) a teprve nyní mohla nastoupit ke slovu matematická analýza. Ta může určit, za jakých podmínek má úloha řešení, popř. úlohu vyřešit, jak tomu je například v (1.1.4), kdy se uvažovala konstantní síla.

Přesnější popis reality získáme, budeme-li uvažovat, že se částice může pohybovat ve všech třech směrech. Dostáváme tedy místo (skalární) obyčejné diferenciální rovnice (zkráceně ODR) 2. řádu systém tří ODR 2. řádu, který je možno pomocí vektorové symboliky zapsat jako

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{f}\Big(t, \mathbf{x}(t), \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t}\Big), \tag{1.1.5}$$

či ve složkách

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_i(t)}{\mathrm{d}t^2} = f_i\Big(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t), \frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x_3(t)}{\mathrm{d}t}\Big), \tag{1.1.6}$$

$i = 1, 2, 3$, spolu s počátečními podmínkami

$$x_i(t_0) = (x_0)_i, \qquad \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(t_0) = v_i(t_0) = (v_0)_i, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1.1.7}$$

Není nutné připomínat, že řešení úlohy (1.1.6)–(1.1.7) je mnohem komplikovanější než řešení skalární úlohy (1.1.3)–(1.1.4). Pokusme se teď řešit trochu jinou úlohu. Předpokládejme pro jednoduchost, že síla $\mathbf{f}$ závisí jen na poloze a že má speciální tvar, tj. je potenciální. To tedy znamená, že

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\partial U}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{1.1.8}$$

kde symbol $\frac{\partial}{\partial x_i}$ označuje parciální derivaci podle i-té proměnné. Hledejme *stacionární* řešení, tj. řešení s nulovou rychlostí. Úloha (1.1.6) se redukuje na řešení úlohy

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{1.1.9}$$

tedy na hledání *stacionárních bodů* funkce $U(\cdot, \cdot, \cdot)$. Obecně tedy řešíme soustavu nelineárních algebraických rovnic a úloha značně závisí na tvaru funkce U. Pokusme se ale proniknout do úlohy ještě hlouběji. Řešením (1.1.9) nalezneme buď body lokálního minima, lokálního maxima nebo sedlové body. Které stavy ale v reálné situaci nastanou? Není těžké si uvědomit, že v případě, kdy půjde o lokální maximum, bude síla působit tak, že se bude snažit při malé výchylce částice ze stacionárního stavu tuto výchylku zvětšovat, zatímco v případě lokálního minima se bude snažit částici vracet zpět do stacionárního stavu. V případě sedlového bodu pak půjde o kombinaci obou, tj. výchylky v některém směru se budou zvětšovat, zatímco výchylky v jiném směru se budou zmenšovat. Vidíme tedy, že částice se pravděpodobněji usadí v bodech lokálního minima funkce U, nejpravděpodobněji pak v bodě globálního minima (pokud existuje). Dostali jsme další zajímavou úlohu, tj. úlohu na hledání lokálních či globálních minim.

Pokud se tedy pokusíme tuto situaci shrnout, dostali jsme se díky zjednodušení (stejná jako výše, kromě omezení pohybu podél jedné souřadnicové osy, bereme speciální tvar síly a hledáme stacionární řešení) na úlohu hledání stacionárních bodů daného potenciálu. Pokud navíc budeme hledat stabilní polohy, pak vlastně hledáme body lokálního či globálního minima dané funkce, což je z pohledu matematické analýzy relativně standardní úloha, může být ale komplikované či nemožné ji řešit analyticky.

Řešení úloh typu (1.1.3)–(1.1.4), (1.1.6)–(1.1.7) či (1.1.9) lze někdy získat jen pomocí přibližných metod. Řešíme tedy dané úlohy jen s jistou přesností, pomocí numerických metod. Výše uvedené úlohy jsou z tohoto pohledu poměrně standardní a umí je řešit celá řada komerčních či akademických balíků programů. Ale pozor, někdy se může stát, že počítač nalezne zdánlivě zcela nesmyslné řešení. V tom okamžiku je třeba se zamyslet a na základě znalostí matematické analýzy a příslušné přibližné metody ověřit, zda někde nenastala chyba a pokusit se ji odstranit. Tedy i v tomto případě jsou znalosti, jak asi řešení vypadá, co o něm můžeme říci, zda je jednoznačné a jaké má další vlastnosti, velmi důležité.

Proudění tekutin

Nyní se podíváme na trochu komplikovanější problém, abychom ilustrovali, jaké problémy současná matematická analýza řeší v souvislosti s fyzikálními modely reality a ukázali, že je stále ještě hodně zajímavých otevřených otázek. Podíváme se na modely proudění tekutin, které vedou ke studiu systémů parciálních diferenciálních rovnic, tedy rovnic, které neobsahují pouze derivace funkce jedné proměnné (jak tomu bylo výše při popisu pohybu hmotné částice), nýbrž derivace funkcí více proměnných.

Jak se dozvíte na přednáškách z mechaniky (blíže si o tom můžete také přečíst například v knize [BrSaSo MeKo]), nejjednodušším modelem tekutin je tzv. ideální tekutina. Budeme pro jednoduchost uvažovat pouze tekutinu nestlačitelnou. Dostáváme následující Eulerův systém parciálních diferenciálních rovnic

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{1.1.10}$$

$$\varrho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \varrho_0 \sum_{j=1}^{3} \Big(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \varrho_0 f_i, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{1.1.11}$$

na $(0, T) \times \Omega$, kde $(0, T)$ je časový interval a $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je nějaká, pro jednoduchost časově neměnná oblast, ve které se tekutina pohybuje. V rovnicích (1.1.10)–(1.1.11) reprezentuje $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ pole rychlosti, p je tlak, ϱ_0 je konstatní hustota a $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ je vnější síla. Pro korektní formulaci bychom museli ještě zadat počáteční podmínku pro rychlost a předepsat chování na hranici (například nulový tok přes hranici), to ale necháme teď být.

Dalo by se očekávat, že nejjednodušší model bude z hlediska matematické analýzy jednoduché cvičení. Ukazuje se, že tomu zdaleka tak není, neboť rovnice (1.1.11) je nelineární. Jako řešení naší úlohy bychom čekali funkci $\mathbf{u}$, která je spojitě diferencovatelná podle času a podle prostorových proměnných a funkce p, která je spojitá v čase a spojitě diferencovatelná podle prostorových proměnných. Ukazuje se ale, že i když předepíšeme rozumné okrajové a počáteční podmínky, takové řešení (pokud existuje, je dáno jednoznačné) bude existovat obecně jen krátkém časovém intervalu (v reálném případě je ale odhad délky časového intervalu řádově i 10^{-10} sekund) nebo na delších intervalech pro malá data, tj. jestliže je tekutina na počátku prakticky v klidu. To samozřejmě moc zajímavé není.

Matematici proto přišli s konceptem tzv. slabého řešení, který ale přesahuje rámec těchto skript. Ukazuje se, že i toto slabé řešení není příliš rozumné, protože v některých případech může existovat dokonce nekonečně mnoho řešení, či tekutina je bez působení sil na začátku v klidu, ale může začít samovolně proudit. Taková řešení nemají s fyzikální realitou nic společného, otázkou ale je, jak je vyloučit. Zatím se nepodařilo nalézt žádné rozumné kritérium, které by z těchto mnoha řešení vybralo to správné, a tato otázka je v současné době otevřená.

Jednou z možností, jak tento problém řešit, je uvědomit si, že žádná reálná tekutina neproudí bez tření. Vnitřní tření popisuje vazkost (viskozita) a odpovídající nejjednodušší model, popisující chování nestlačitelných newtonovských tekutin, jsou Navier–Stokesovy rovnice

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{1.1.12}$$

$$\varrho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \varrho_0 \sum_{j=1}^{3} \Big(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big) - \mu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \varrho_0 f_i, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{1.1.13}$$

kde μ je (pro jednoduchost) konstantní viskozita. Model obsahuje druhé parciální derivace podle prostorových proměnných, musíme tedy příslušným způsobem upravit definici řešení. Opět musíme předepsat chování tekutiny v počátečním čase a na hranici. Ukazuje se, že situace je sice mírně lepší než u rovnic Eulerových, ale stále ne zcela uspokojivá. Klasické řešení opět nemusí existovat (odhady na délku časového intervalu souvisí s velikostí viskozity, která je ale například u vody velmi malá), u slabého řešení je situace lepší. Ví se, že existuje, ví se dost o jeho vlastnostech, ale otázka jeho jednoznačnosti či diferencovatelnosti pro rozumná data je otevřená. Tento problém se dokonce dostal mezi tzv. 7 problémů pro nové milénium, za jejichž vyřešení nabídl Clayův matematický institut v roce 2000 odměnu milión dolarů.

Jen poznamenejme, že situace u dvoudimenzionálního proudění je jiná. Pokud formálně nahradíme funkci tři prostorových proměnných za funkci dvou prostorových proměnných a místo tří složek rychlosti uvažujeme dvě, ví se, že pro vhodnou počáteční podmínku existuje právě jedno klasické řešení. My ale žijeme ve třech dimenzích a tak nás spíše zajímá něco jiného.

Poznamenejme ale, že tyto modely dávají ve speciálních situacích fyzikálně rozumná řešení. Například pro Eulerovy rovnice, pokud předpokládáme potenciální sílu (gravitační síla taková je), lze integrací rovnice (1.1.11) přes proudnice dostat tzv. Bernoulliho zákon, tj.

$$\frac{1}{2}\varrho_0|\mathbf{u}|^2 + p + \varrho_0 U = const,$$

kde $f_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$. Dále speciálním řešením Navier–Stokesových rovnic popisující proudění newtonovské tekutiny v trubici kruhového průřezu (za předpokladu, že tekutina ulpívá na stěně) je tzv. Poisseillovo proudění, které vykazuje parabolický profil rychlosti, což v některých případech dobře aproximuje reálné proudění některých tekutin.

Tedy výše uvedené modely v některých případech dobře aproximují realitu. Ovšem jak dobře souvisí v obecné situaci s problémy, na které jsme upozornili. Odpovědi na výše zmíněné otázky existence a jednoznačnosti řešení, ať negativní či pozitivní, asi neovlivní, že se tyto modely budou nadále používat, ale mohou přivést k zamyšlení, zda reálné tekutiny nejsou komplikovanější než předpokládají nejjednodušší modely a co je rozumné přidat, aby modely nejen fungovaly jako dobrá aproximace, ale aby současně byly jednoznačně řešitelné. To může být důležité i při volbě numerického řešení daného modelu.

Zde je ale situace mnohem komplikovanější než v popisu pohybu hmotné částice. I když se výkonnost počítačů během posledních desetiletí výrazně zvýšila, pořád je velmi přesné řešení třídimenzionálního proudění newtonovské tekutiny na intervalech délky řádově minut otázkou dnů či týdnů výpočtů na nejvýkonnějších strojích, takže je třeba často dělat kompromisy. Je třeba kombinovat fyzikální znalosti se znalostmi z matematické analýzy a numerických metod, aby se ověřilo, že řešení získané méně přesnou metodou stále dobře odpovídá realitě, ale i leží blízko řešení původních rovnic.

Samozřejmě existují i další aplikace matematické analýzy a to nejen ve fyzice, ale i dalších vědních oborech. Uveďme, již jen velmi stručně, že mnohé biologické modely (například typu dravec–kořist) se dají popsat pomocí obyčejných či parciálních diferenciálních rovnic, v lékařství se dnes běžně pracuje s modely proudění krve v cévách, či pomocí matematických modelů se popisuje růst nádorů, při rozpoznávání obrazu se někdy používají parciální diferenciální rovnice a mnohé úlohy v ekonomii jsou popsané pomocí stochastických diferenciálních rovnic, z nichž lze někdy (jako například u Black–Scholesova modelu) přejít k rovnicím deterministickým. Takových aplikací se dá nalézt mnoho a není naším cílem je podrobně komentovat.

Viděli jsme tedy, že matematická analýza má stále co říci i k relativně jednoduchým fyzikálním modelům a že rozhodně není pravdivý názor, že vše v matematice je již známo a nemá cenu se jí příliš věnovat, stačí se jen něco málo naučit a pak to nějak (občas i poněkud nepřesně) používat. Fyzikální modely nejsou vždy takové, aby příslušné problémy byly (jednoznačně) řešitelné, jak se mnozí fyzikové domnívají.

1.2 Pár poznámek k historii matematické analýzy

Protože se budeme velmi často setkávat se jmény slavných matematiků a fyziků (zejména v názvech vět), je vhodné si říci pár slov o tom, jak se ta část matematiky, kterou nazýváme matematickou analýzou, vyvíjela v minulosti, a kteří významní vědci k jejímu rozvoji přispěli nejvíce.

Matematická analýza se v dnešním pojetí věnuje především vlastnostem funkcí. Než však matematika dospěla vůbec k pojmům funkce, derivace a integrál, urazila pořádný kus cesty. My si všimneme jen těch kroků, které k rozvoji nástrojů matematické analýzy přispěly nejvýrazněji.

Pojmy blízké integrálu se objevují ve starověkém Egyptě i Mezopotámii v souvislosti s potřebou měřit obsahy a objemy. Později řecká matematika tyto přístupy zdokonalila, zkoumala např. obsahy či objemy pomocí postupného vyplňování jednoduchými útvary. Odtud také pochází odhady čísla π.

Již v 6.–5. století př.n.l. řecká škola pythagorejců dospěla k závěru, že ne každé číslo je racionální (vyjádřitelné jako podíl dvou celých čísel), například délka přepony v pravoúhlém trojúhelníku s délkami odvěsen 1 je iracionální. Základy logiky se pak objevují u *Aristotela* (384–322 př.n.l.). Antická matematika se setkává i s pojmem nekonečna, slavné jsou například paradoxy typu Achilles a želva. Chápala ho ale jako nekonečno potenciální, tedy jako nikdy nekončící proces přibližování se k němu.

Evropská (chápáno jako křesťanská) matematika se na úroveň matematiky řecké (a arabské) dostávala velmi pozvolna, snad až někdy kolem 15. století můžeme říci, že všechny její myšlenky plně vstřebala. V 16. století pak *Francois Viète* (1540–1603) zavádí symboliku blízkou dnešní, písmena pro označení konstant i proměnných. Tuto symboliku zdokonalil v 17. století *René Descartes* (1596–1650), který je současně zakladatelem analytické geometrie.

Velkým výsledkem matematiky 17. století je pak zrod infinitezimálního počtu; došlo k němu nezávisle v pracích *Isaaca Newtona* (1643–1727) a *Gottfrieda Wilhelma von Leibnize* (1646–1716). Později tyto myšlenky rozvinuli *Jacob* (1655–1705) a *Johann Bernoulliové* (1667–1748) (posledně jmenovaný zavedl pojem integrál). V 18. století k nim ještě můžeme přiřadit *Leonharda Eulera* (1707–1783) (přispěl k rozvoji prakticky celé matematiky), *Josepha-Louise Lagrange* (1736–1813) (věnoval se především variačnímu počtu) a *Brooka Taylora* (1685–1731) (studoval nekonečné řady a rozvoje funkcí do řad).

V 19. století se pak zjišťuje, že základní pojmy matematické analýzy je třeba zpřesnit. Uvědomili k tomu nezávisle na sobě v Praze *Bernard Bolzano* (1781–1848) a ve Francii *Augustin Louis Cauchy* (1789–1857), který zavedl pojem limita funkce. *Karl Weierstraß* (1815–1897) dobudoval tzv. ε-δ gymnastiku, zanedlouho se s ní seznámíme. *Richard Dedekind* (1831–1916) (jeho žák) pak rigorózně vybudoval teorii reálných čísel a *Georg Cantor* (1845–1918) začal systematicky budovat teorii množin.

Cantor zavádí do matematiky pojem aktuálního nekonečna, například $\mathbb{N}$ chápeme rovnou jako jako celek, který má nekonečně (ale spočetně) mnoho prvků. Ovšem pojem množiny chápaný intuitivně se ukazuje jako neudržitelný.

O nápravu se pokusil *David Hilbert* (1862–1943), který chtěl matematiku formálně přesně vybudovat a pak ukázat její bezespornost. To se ukázalo jako nemožné, díky pracím *Kurta Gödela* (1906–1978), který ukázal, že je-li axiomatická teorie bezesporná, pak v ní existuje tvrzení, které nelze ani dokázat, ani vyvrátit a neexistuje žádný konstruktivní přístup, který by ukázal, že teorie je bezesporná.

I přes tyto obtíže zůstává matematika ojedinělou vědou s velkým významem pro jiné obory, ale i se svou vlastní vnitřní krásou.

Shrnutí a závěrečné poznámky. Pokusili jsme se přesvědčit čtenáře přesvědčit o tom, že matematika a matematická analýza zvlášť je užitečná při analýze mnohých, zejména fyzikálních modelů. Současně jsme naznačili, že i v zdánlivě elementárních modelech proudění tekutin není vše tak jednoduché, jak by se mohlo zdát. Existují otevřené matematické problémy, jejichž řešení může mít vliv na vytváření dalších, přesnějších modelů reality.

Kapitola 2

Matematický úvod

2.1 Opakování středoškolské látky, základní značení

V této části budeme vycházet z toho, co by měl znát z matematiky absolvent střední školy. Například budeme předpokládat, že čtenář má nějakou představu reálné osy a umí s reálnými čísly zacházet. Na druhou stranu zavedeme o něco později reálná čísla sami. Přestože naše zavedení nevyžaduje žádné předběžné znalosti, ve skutečnosti vychází z toho, jak se na základní a střední školy s čísly pracuje. Podobně předpokládáme, že čtenář má nějaké povědomí o základech logiky a intuitivní představu o množinách. Některé pojmy upřesníme, upozorníme na jisté problémy, ale v této části nepůjdeme do žádných detailů, nebudeme vše dokazovat a na hlubší výsledky se odkážeme na příslušnou literaturu, kde se těmto věcem věnuje mnohem více prostoru.

Poznamenejme, že pro značení otevřených intervalů v $\mathbb{R}$ budeme používat otevřené závorky, například $(0,1)$, zatímco uzavřené intervaly značíme pomocí závorek hranatých, například $[0,1]$.

2.1.1 Logika

Budeme zásadně používat, tak jak je to v matematické analýze zvykem, *dvouhodnotovou logiku*. Pravdu budeme značit 1 nebo T (z anglického *true*) a nepravdu 0 nebo F (z anglického *false*). Budeme se zabývat jen *výroky*, o kterých má smysl říci, zda jsou pravdivé či nepravdivé. Budeme také pracovat s pojmem *výrokové funkce* neboli *predikátem*, tj. předpisem, který každému prvku z daného pole objektů přiřadí výrok.

Příklad 2.1.1. Výrok: matematika je krásná.

Výroková funkce: $P(x)$: x je krásná. Prvky x bereme z $M = \{$matematika, fyzika, chemie$\}$.

Komplikovanější výroky budeme vytvářet pomocí logických spojek definovaných následující pravdivostní tabulkou.

A	B	negace non A	konjunkce $A \wedge B$	disjunkce $A \vee B$	implikace $A \Longrightarrow B$	ekvivalence $A \Longleftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Příklad 2.1.2. Výrok A: matematika je krásná; výrok B: matematika je těžká.
Negace B: matematika není těžká.
Konjunkce $A \wedge B$: matematika je krásná a těžká.
Implikace $A \Longrightarrow B$: matematika je krásná, proto je těžká.

Příklad 2.1.3. Výrok A: venku prší, výrok B: venku je mokro.
Implikace $A \Longrightarrow B$: Venku prší, proto je mokro.
Implikace $B \Longrightarrow A$: Venku je mokro, proto prší.

Vidíme, že z hlediska reálné zkušenosti (kterou v tomto okamžiku mlčky předpokládáme) je první implikace pravdivý výrok (pokud prší, pak je mokro), zatímco druhý výrok není pravdivý (může být mokro, aniž by pršelo). Je dobré se nad tímto rozdílem zamyslet.

Výroky jsou často doprovázeny kvantifikátory. Používáme

Označení 2.1.4. *Obecný kvantifikátor*: $\forall x \in M \quad P(x)$ (pro každý prvek x z množiny M platí výrok $P(x)$).
Existenční kvantifikátor: $\exists x \in M \quad P(x)$ (existuje prvek x z množiny M takový, že platí výrok $P(x)$).
Budeme také používat kvantifikátor jednoznačné existence značený $\exists!$.

V následujícím příkladu (stejně jako v několika dalších) pracujeme s některými číselnými obory. Předpokládáme, že čtenář má o nich jistou představu ze střední školy. Připomeňme, že $\mathbb{N}$ označuje přirozená čísla, $\mathbb{Z}$ čísla celá, $\mathbb{Q}$ čísla racionální, $\mathbb{R}$ čísla reálná a $\mathbb{C}$ čísla komplexní. Znak $\in$ čteme z, tj. $x \in M$ znamená x z M. Blíže si značení související s pojmem množina připomeneme níže.

Příklad 2.1.5. Výrok $\exists n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{n} \in \mathbb{N}$ je pravdivý výrok (lze vzít třeba $n = 4$). Naopak, výrok $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{n} \in \mathbb{N}$ je nepravdivý (uvažme například $n = 2$).

Při skládání kvantifikátorů lze prohodit dva ze sebou stojící stejné kvantifikátory, nikoliv dva různé.

Příklad 2.1.6. (i) $(\forall x < 0\, \forall y > 0 \quad y < x) \Longleftrightarrow (\forall y > 0\, \forall x < 0 \quad y < x)$
(ii) $(\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} \quad n < m)$ není ekvivalentní s $(\exists m \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} \quad n < m)$.

Snadno se nahlédne, že platí následující vztahy pro negaci výroku s kvantifikátorem.

Tvrzení 2.1.7. *Platí:*
(i) $\mathrm{non}(\exists x \in M \quad P(x)) \iff (\forall x \in M \quad \mathrm{non}\, P(x))$
(ii) $\mathrm{non}(\forall x \in M \quad P(x)) \iff (\exists x \in M \quad \mathrm{non}\, P(x))$.

Ukažme, například, že platí první ekvivalence, druhou pak ponecháme čtenáři k samostatnému rozmyšlení. Nechť je výrok $\mathrm{non}(\exists x \in M \quad P(x))$ pravdivý. Pak neexistuje žádné $x \in M$ tak, že $P(x)$ je pravda, tj. $\forall x \in M$ je $P(x)$ nepravdivý. Analogicky se ukáže i druhá implikace.

Dvouhodnotová logika pracuje s následujícími zákony:
zákon sporu: pro žádný výrok A není zároveň pravda A a $\mathrm{non}\, A$
zákon vyloučení třetího: pro každý výrok A je buď A nebo $\mathrm{non}\, A$ pravdivé.

Poznámka 2.1.8. Výše uvedené zákony jsou naší dohodou, že nebudeme používat výroky typu:

To, co teď říkám, není pravda.

Následující tvrzení plyne okamžitě z definic v pravdivostní tabulce (otestují se všechny volby pravdivosti výroků A, B, C).

Tvrzení 2.1.9. *Platí:*
(i) $A \Longrightarrow A$
(ii) $((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$
(iii) $A \iff A$
(iv) $(A \iff B) \iff (B \iff A)$
(v) $((A \iff B) \wedge (B \iff C)) \Longrightarrow (A \iff C)$
(vi) $\mathrm{non}(\mathrm{non}\, A) \iff A$
(vii) $(A \Longrightarrow B) \iff (\mathrm{non}\, B \Longrightarrow \mathrm{non}\, A)$
(viii) $(A \iff B) \iff (\mathrm{non}\, A \iff \mathrm{non}\, B)$
(ix) $(A \iff B) \iff (A \Longrightarrow B \wedge B \Longrightarrow A)$
(x) $\mathrm{non}(A \vee B) \iff (\mathrm{non}\, A \wedge \mathrm{non}\, B)$
(xi) $\mathrm{non}(A \wedge B) \iff (\mathrm{non}\, A \vee \mathrm{non}\, B)$
(xii) $\mathrm{non}(A \Longrightarrow B) \iff (A \wedge \mathrm{non}\, B)$
(xiii) $\mathrm{non}(A \iff B) \iff ((A \wedge \mathrm{non}\, B) \vee (\mathrm{non}\, A \wedge B))$.

Ukažme alespoň platnost (ix), ostatní ponecháme čtenáři k samostatnému rozmyšlení. Máme

A	B	$A \iff B$		$A \Longrightarrow B$	$B \Longrightarrow A$	$A \Longrightarrow B \wedge B \Longrightarrow A$
1	1	1		1	1	1
1	0	0		0	1	0
0	1	0		1	0	0
0	0	1		1	1	1

V matematice nejčastěji dokazujeme implikace (připomeňme, že ekvivalence se dá rozložit na dvě implikace). Na předchozím tvrzení jsou založeny metody jejich důkazů. Ty nejčastěji dělíme na:
- přímý důkaz
- nepřímý důkaz (využívá (vii))
- důkaz sporem (využívá (xii)).

Úloha 2.1.10. Dokažme: je-li n^2 liché číslo, pak n je rovněž liché číslo.

Řešení: Ukážeme si všechny tři metody důkazu, které jsme zmínili výše.
• Začneme přímým důkazem. Nechť $n = p_1 \dots p_r$ je prvočíselný rozklad (p_i jsou prvočísla, mohou se opakovat). Pak zřejmě platí $n^2 = p_1^2 \dots p_r^2$. Protože n^2 je liché, žádné z čísel p_i^2 nemůže být dělitelné dvěma a tedy ani žádné z prvočísel p_i není rovno dvěma. Proto n je liché.
• Ukažme si důkaz nepřímý. Předpokládejme, že n je sudé. Pak lze psát $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Proto $n^2 = 4k^2$ a je tedy také sudé.
• Nakonec si ukážeme důkaz sporem. Nechť n^2 je liché a n je sudé. Pak musí být $n^2 + n$ liché. Na druhou stranu, ze dvou po sobě jdoucích čísel je vždy jedno sudé a jedno liché, a proto $n^2 + n = (n+1)n$ je sudé. To je spor. ☆

V matematice nám samozřejmě stačí jen jeden důkaz.

Poznámka 2.1.11. V pokročilé matematické analýze se symboly pro kvantifikátory a logické spojky často nepoužívají, neboť by tvrzení se složitější logickou stavbou vyžadovala použití příliš velkého počtu závorek, což by zhoršilo čitelnost. V těchto situacích právě volba vhodných slov na místě logických spojek a kvantifikátorů umožňuje snazší orientaci čtenáře.

Poznámka 2.1.12. Poznámku si také zaslouží jev, kterému se říká důkaz kruhem. Dochází k tomu, když v důkazu použijeme výrok, který právě dokazujeme. Takový důkaz je pak bezcenný a o platnosti dokazovaného výroku nám nedává žádnou informaci.

2.1.2 Množiny

Množiny definujeme jako soubor prvků, přičemž o každém prvku lze rozhodnout, zda do dané množiny patří, či nikoliv. Budeme se tedy vyhýbat následujícím situacím.

Příklad 2.1.13 (Příklad (paradox) Bertranda Russella)**.** Definujme Y jako množinu všech množin, které neobsahují sebe sama jako prvek. Potom nelze rozhodnout, zda $Y \in Y$. Kdyby totiž množina Y patřila do množiny množin Y, pak dostáváme spor s definicí množiny množin Y. Pokud by tam nepatřila, pak dostáváme spor též, protože dle definice Y by tam pak patřit měla.

Množiny tedy zadáváme následujícími způsoby:
• výčtem prvků (například $M = \{1, 2, 3\}$)
• zadáním vlastností prvků ($M = \{n\colon n \text{ je prvočíslo}\}$)
• pomocí už známé množiny ($M = \mathbb{N} \cap [1, 3]$).
Budeme používat následující značení:

Označení 2.1.14. (i) $x \in M$ (x patří do M), $x \notin M$ (x nepatří do M)
(ii) $P \subset M \iff \forall p \in P \quad p \in M$ (podmnožina)
(iii) $P = M \iff P \subset M \wedge M \subset P$ (rovnost množin)
(iv) $P \cup M = \{x\colon x \in M \vee x \in P\}$ (sjednocení)

(v) $P \cap M = \{x \colon x \in M \wedge x \in P\}$ (průnik)
(vi) $P \subsetneq M \Longleftrightarrow P \subset M \wedge P \neq M$ (vlastní podmnožina)
(vii) $\emptyset$ je prázdná množina a je podmnožinou každé množiny
(viii) $\#M$ je počet prvků, který zavádíme jen pro konečné množiny
(ix) $\exp M$ je množina všech pomnožin (včetně M a $\emptyset$), platí $\#\exp M = 2^{\#M}$
(x) $M \setminus P = \{x \in M \colon x \notin P\}$ (rozdíl množin)
(xi) $M \Delta P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ (symetrická diference).

Poznámka 2.1.15. Mezi značením nerovností a množinových inkluzí je jistý nesoulad. Zatímco $x < y$ vylučuje případ $x = y$, v množinovém značení je připuštěno $A \subset A$.

Příklad 2.1.16. Pro množinu $\{1, 2, 3\}$ máme

$$\exp\{1,2,3\} = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}$$

a platí $\#\exp\{1,2,3\} = 8 = 2^3 = 2^{\#\{1,2,3\}}$.

Tvrzení 2.1.17. *Nechť A, B jsou množiny. Pak*

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$$
$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \Delta B.$$

Důkaz. Rovnosti ověříme ve čtyřech možných případech $x \in A \wedge x \in B$, $x \in A \wedge x \notin B$, $x \notin A \wedge x \in B$ a $x \notin A \wedge x \notin B$. Pro ilustraci si ukažme důkaz první rovnosti pro první případ. Levá strana zjevně obsahuje x, protože x patří do průniku obou množin. Proto ho pravá strana obsahuje též. Analogicky se postupuje v ostatních případech. □

Definice 2.1.18. Nechť $\mathcal{M}$ je systém množin. *Sjednocením systému* $\mathcal{M}$ nazveme množinu všech bodů, které leží alespoň v jedné z množin $M \in \mathcal{M}$, tedy

$$\bigcup_{M \in \mathcal{M}} = \{x \colon \exists M \in \mathcal{M} \quad x \in M\}.$$

Průnikem systému $\mathcal{M}$ nazveme množinu všech bodů, které leží ve všech množinách $M \in \mathcal{M}$, tedy

$$\bigcap_{M \in \mathcal{M}} = \{x \colon \forall M \in \mathcal{M} \quad x \in M\}.$$

Příklad 2.1.19. Pro systém množin $\mathcal{M} := \{(-\infty, y) \colon y \in (0,1)\}$ platí

$$\bigcup_{y \in (0,1)} (-\infty, y) = (-\infty, 1) \qquad \text{a} \qquad \bigcap_{y \in (0,1)} (-\infty, y) = (-\infty, 0].$$

Tvrzení 2.1.20 (De Morganovy vzorce)**.** *Nechť A, B, C jsou množiny. Pak*

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

Nechť P je množina a pro systém $\mathcal{M}$ platí $M \in \mathcal{M} \Longrightarrow M \subset P$. Pak

$$P \setminus \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} P \setminus M$$
$$P \setminus \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} P \setminus M.$$

Důkaz. Uvažme druhou situaci, tj. libovolný počet množin. Ukažme nejprve, že $P \setminus \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M \subset \bigcap_{M \in \mathcal{M}} P \setminus M$. Nechť tedy $x \in P \setminus \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$. Potom nutně $x \in P$, ale x nepatří do žádné z množin patřících do $\mathcal{M}$, tedy patří do každé množiny $P \setminus M$ pro $M \in \mathcal{M}$. Ukažme druhou inkluzi. Nechť $x \in \bigcap_{M \in \mathcal{M}} P \setminus M$. Tedy $x \in P \setminus M$ pro každé $M \in \mathcal{M}$. Proto $x \in P$, ale $x \notin \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$. Analogicky se postupuje i v jiných případech. □

Definice 2.1.21. Nechť A, B jsou množiny. *Kartézský součin* $A \times B$ definujeme předpisem $A \times B = \{(a, b) \colon a \in A \wedge b \in B\}$ (jedná se tedy o množinu uspořádaných dvojic prvků z A a B). Analogicky definujeme $A_1 \times \cdots \times A_k$ pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$.

Poznámka 2.1.22. (i) Obecně $A \times B \neq B \times A$. Stačí volit třeba $A = (0, 1)$ a $B = (1, 2)$. Pokud by však platilo $A = B$, nebo alespoň jedna z množin byla prázdná, měli bychom $A \times B = B \times A$.
(ii) Často budeme pracovat s množinou $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (N-krát). Budeme ji značit $\mathbb{R}^N$, podobně jako například $\mathbb{Z}^N$ či $\mathbb{N}^N$.

Důležitým pojmem je *axiom výběru*. Zdánlivě je přirozené očekávat, že mohu z každé množiny z nějakého souboru množin vždy vybrat po jednom prvku, ať je počet množin jakýkoliv. Překvapivě to ale vede v některých případech k zajímavým paradoxům, jako je například Banach–Tarského věta (v jistém matematickém smyslu mohu zdvojnásobovat hmotu). Na druhou stranu matematika bez axiomu výběru je podstatně ochuzená o mnohé důležité výsledky. Axiomatická teorie množin, která nahrazuje intuitivní teorii množin a zbavuje nás paradoxů typu Příklad 2.1.13, blíže viz např. [BaSt TeMno], si s tímto problémem neumí poradit. Pokud mám bezespornou teorii množin (tj. teorii, která neobsahuje žádný vnitřní rozpor) a přidám k ní axiom výběru, teorie zůstane bezespornou.

Ovšem pojem bezespornosti není také tak jednoduchý. Důležitý výsledek K. Gödela říká, že nelze konstruktivně prostředky teorie množin ověřit, že daná teorie je bezesporná. Vždy v ní existují výroky, které nelze konstruktivně dokázat.

2.1.3 Zobrazení

Pojem zobrazení je také jedním ze základních pojmů v matematické analýze.

Definice 2.1.23. Nechť A, B, D jsou množiny a $D \subset A$. Nechť každému prvku $x \in D$ je přiřazeno právě jedno $y_x \in B$. Označme $\varphi(x) := y_x$. Pak říkáme, že $\varphi \colon A \to B$ je *zobrazení* z množiny A do množiny B.

Množinu D nazýváme *definičním oborem* φ a značíme ji D_φ. Množina $\varphi(D) := \{\varphi(x) \colon x \in D\}$ se nazývá *oborem hodnot* (někdy se také značí R_φ či H_φ). Množina $\varphi^{-1}(\{y\}) := \{x \in D \colon \varphi(x) = y\}$ se nazývá *vzorem* prvku y.

Jestliže $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$, φ se nazývá *prosté zobrazení* (nebo také *injektivní*). Jestliže $R_\varphi = B$, řekneme, že φ je *na* (jde o zkrácení: φ zobrazuje A na (celé) B; *surjektivní zobrazení*). Je-li φ prosté, na a $D_\varphi = A$, říkáme, že φ je *vzájemně jednoznačné* (*bijektivní*).

Poznámka 2.1.24. Množina $\varphi^{-1}(\{y\})$ může být prázdná. Obecně lze definovat vzor jakékoliv podmnožiny B. Někdy se stručně píše $\varphi^{-1}(y)$, což může být zavádějící vzhledem k označení inverzního zobrazení.

Poznámka 2.1.25. Podmínka pro prostotu zobrazení se dá ekvivalentě zapsat jako

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Cvičení 2.1.26. Ověřte, že implikace z Poznámky 2.1.25 je ekvivalentní definici prostého zobrazení.

Poznámka 2.1.27. Pokud definujeme $\varphi(x) = x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$ (tedy $D_\varphi = \mathbb{R}$), máme zobrazení, které není prosté. Pokud definujeme $\psi(x) = x^2$ pro $x \in (0, \infty)$, máme bijekci mezi $(0, \infty)$ a $(0, \infty)$. Při zadávání zobrazení je tedy důležité se nejenom zabývat předpisem, ale i definičním oborem. Podobně lze porovnávat například $\varphi(x) = 1$ a $\psi(x) = \frac{x}{x}$ (není-li definiční obor explicitně uveden, uvažuje se největší možný, což je zde $D_\varphi = \mathbb{R}$ a $D_\psi = \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Uveďme některá důležitá zobrazení a některé důležité pojmy, které budeme nadále často používat.
• Pokud $A = \mathbb{R}$ a $B = \mathbb{R}$, mluvíme o *reálné funkci jedné reálné proměnné.*
• Pokud $A = \mathbb{R}$ a $B = \mathbb{C}$, mluvíme o *komplexní funkci jedné reálné proměnné.*
• Pokud $A = \mathbb{N}$ a $B = \mathbb{R}$, mluvíme o (reálné) *posloupnosti* (komplexní posloupnost se zavádí analogicky).
• Funkce $\varphi(x) = x$ se nazývá identita.
• Pro $a, b \in \mathbb{R}$ se $\varphi(x) = ax+b$ často nazývá lineární funkce (vhodnější název je ale afinní, neboť mimo matematickou analýzu se linearita obvykle definuje způsobem, který připouští jen $b = 0$).
• $\varphi(x) = y_0$ pro všechna $x \in D_\varphi$ definuje konstantní zobrazení (často píšeme $\varphi(x) \equiv y_0$ nebo $\varphi \equiv y_0$).
• Funkce $\operatorname{sign}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

• Přiřazujeme-li číslům $x \in \mathbb{R}$ čísla $y \in \mathbb{R}$ taková, že $y^2 = x$, nejedná se o zobrazení (zde nevadí, že pro záporné x nenajdeme vyhovující y, naše definice totiž připouští $A = B = \mathbb{R}$ a $D_\varphi = [0, \infty)$; definici zobrazení porušuje skutečnost, že kladným číslům přiřazujeme hned dvě čísla zároveň).

Inverzní zobrazení φ^{-1} zavádíme jen v případě, že φ je prosté.

Definice 2.1.28 (Inverzní zobrazení)**.** Nechť zobrazení $\varphi\colon A \to B$ je prosté. Pak inverzní zobrazení $\varphi^{-1}\colon B \to A$ je definováno vztahy

$$\begin{aligned} D_{\varphi^{-1}} &= R_\varphi \\ \varphi^{-1}(x) = y \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \varphi(x). \end{aligned}$$

Příklad 2.1.29. Později si ukážeme, že zobrazení $x \mapsto x^2$ je na $[0,\infty)$ prosté, zatímco na celém $\mathbb{R}$ zjevně prosté není. Potom zobrazení $x \mapsto \sqrt{x}$ je inverzním zobrazením k zobrazení $\varphi(x) = x^2$, $x \in [0,\infty)$. Zobrazení $\psi(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, inverzi nemá.

Definice 2.1.30 (Skládání zobrazení)**.** Nechť jsou dána dvě zobrazení $\varphi\colon A \to C$ a $\psi\colon C \to B$ a platí $R_\varphi \cap D_\psi \neq \emptyset$. Pak složené zobrazení $\psi \circ \varphi\colon A \to B$ je dáno vztahy

$$\begin{aligned} D_{\psi\circ\varphi} &= \varphi^{-1}(R_\varphi \cap D_\psi) \\ (\psi \circ \varphi)(x) &= \psi(\varphi(x)). \end{aligned}$$

Příklad 2.1.31. Nechť $\varphi(x) = 2x + 4$, $x \in \mathbb{R}$, a $\psi(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,\infty)$. Platí

$$R_\varphi \cap D_\psi = \mathbb{R} \cap [0,\infty) = [0,\infty).$$

Proto má složené zobrazení $\psi \circ \varphi\colon x \mapsto \sqrt{2x+4}$ neprázdný definiční obor a sice

$$\varphi^{-1}([0,\infty)) = [-2,\infty).$$

Ukažme si některé vlastnosti inverzního zobrazení.

Tvrzení 2.1.32 (Základní vlastnosti inverze)**.** *Nechť $\varphi\colon A \to B$ je prosté zobrazení. Pak*
(i) φ^{-1} *je prosté a* $R_{\varphi^{-1}} = D_\varphi$
(ii) $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}$ *na* D_φ *a* $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}$ *na* $D_{\varphi^{-1}}$
(iii) $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$.

Důkaz. Nejprve dokážeme prostotu. Nechť $\varphi^{-1}(x_1) = \varphi^{-1}(x_2)$ pro $x_1, x_2 \in D_{\varphi^{-1}}$. Označme tuto společnou hodnotu y. Podle definice φ^{-1} platí

$$x_1 = \varphi(y) = x_2,$$

tedy φ je prosté.

Nyní ukážeme, že $R_{\varphi^{-1}} = D_\varphi$. Pro prvek y platí $y \in R_{\varphi^{-1}}$ právě tehdy, když existuje $x \in D_{\varphi^{-1}}$ takové, že $\varphi^{-1}(x) = y$. To podle definice inverzního zobrazení znamená totéž, co existence $x \in R_\varphi$ splňujícího $x = \varphi(y)$, neboli $y \in D_\varphi$.

Dokažme část (ii). Zafixujme $x \in D_\varphi$ a položme $\tilde{x} = \varphi^{-1}(\varphi(x))$. To znamená $\varphi(\tilde{x}) = \varphi(x)$ a prostota φ zaručuje, že $\tilde{x} = x$. Rovnost $\varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$ se dokáže podobně s využitím prostoty φ^{-1}.

Zbývá dokázat část (iii). Protože obecně platí $D_{\varphi^{-1}} = R_\varphi$ a navíc $R_{\varphi^{-1}} = D_\varphi$, máme

$$D_{(\varphi^{-1})^{-1}} = R_{\varphi^{-1}} = D_\varphi.$$

Konečně, poslední požadovaná rovnost plyne z toho, že

$$(\varphi^{-1})^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow x = \varphi^{-1}(y) \Longleftrightarrow \varphi(x) = y.$$

$\square$

Příklad 2.1.33. Při používání druhé části Tvrzení 2.1.32 je nutné pečlivě hlídat definiční obory výsledných identit. Vezmeme-li například funkci $x^2 \colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, její inverzí je funkce $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$. Platí

$$(\sqrt{x})^2 = x \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}_0^+.$$

Na druhou stranu $x \mapsto \sqrt{x^2}$ je definována na celém $\mathbb{R}$ a platí

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R},$$

přičemž $|x| = x$ pro $x \in \mathbb{R}_0^+$, $|x| = -x$ pro $x \in \mathbb{R}^-$.

Tvrzení 2.1.34. *Nechť φ, ψ jsou prostá zobrazení a $D_\psi \cap R_\varphi \neq \emptyset$. Pak $\psi \circ \varphi$ je prosté zobrazení.*

Důkaz. Použijeme ekvivalentní podmínku pro prostotu. Nechť $x_1, x_2 \in D_{\psi\circ\varphi}$ splňují $\psi(\varphi(x_1)) = \psi(\varphi(x_2))$. Protože ψ je prosté, musí nutně platit $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Protože dále φ je prosté, dostáváme $x_1 = x_2$. Tedy $\psi \circ \varphi$ je prosté. $\square$

Definice 2.1.35. Nechť $\varphi \colon A \to B$ je zobrazení. Množina $\{(x, \varphi(x)) \colon x \in D_\varphi\}$ se nazývá *grafem zobrazení.*

Pokud $B = \mathbb{R}$, definujeme ještě *nadgraf* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in D_\varphi \wedge y \geq \varphi(x)\}$ a *podgraf* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in D_\varphi \wedge y \leq \varphi(x)\}$.

2.2 Číselné obory

Jak již bylo zmíněno výše, předpokládáme, že čtenář má ze střední školy intuitivní představu o tom, co je množina přirozených, celých, racionálních a především reálných čísel, popřípadě i čísel komplexních. Ukážeme si, jak je možno matematicky přesně tyto číselné obory definovat, budeme ale postupovat trochu jinak, než by mohl čtenář očekávat. Nejprve budeme definovat čísla reálná a teprve z nich vyvodíme další číselné obory. Lze postupovat i opačně, tj. začít přirozenými čísly a z nich postupně přes čísla racionální metodou Dedekindových řezů dospět až k číslům reálným, viz například [Ja DPI]. Tento postup je ale poněkud zdlouhavý a proto ho zde nebudeme používat; raději představíme axiomatický způsob zavedení reálných čísel.

2.2.1 Supremum a infimum, axiomatické zavedení reálných čísel

Relací na $X \times X$ rozumíme libovolnou podmnožinu $X \times X$. Nás ale zajímá speciální třída relací.

Definice 2.2.1. Nechť X je množina. Relaci R na $X \times X$ nazveme *(částečným) uspořádáním*, jestliže
• $x \in X \Longrightarrow (x, x) \in R$ (reflexivita)
• $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R$ (tranzitivita)
• $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Longrightarrow x = y$ (antisymetrie).
Pokud navíc platí

$$x, y \in X \Longrightarrow (x, y) \in R \vee (y, x) \in R,$$

relaci R nazveme *úplným uspořádáním* a značíme ji symbolem $\leq$ (tedy $x \leq y \Longleftrightarrow (x, y) \in R$).

Příklad 2.2.2. (i) Snadno se ověří, že v případě $X = \mathbb{R}$ symbol $\leq$ s obvyklým významem (ze střední školy) splňuje předchozí definici.
(ii) Na $X = \mathbb{R}^2$ můžeme zavést částečné uspořádání předpisem

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2.$$

Toto uspořádání však není úplné, neboť neumíme porovnat například prvky $(0, 1)$ a $(1, 0)$.
(iii) Pokud na $X = \mathbb{R}^2$ definujeme velikost vektoru jako $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ a zavedeme

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \|(x_1, x_2)\| \leq \|(y_1, y_2)\|,$$

výsledná relace není uspořádáním, neboť chybí antisymetrie (stačí uvážit $\|(0, 1)\| = 1 = \|(1, 0)\|$).

Ostatní často používané relace se definují následovně

$$x < y \Longleftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$$
$$x \geq y \Longleftrightarrow y \leq x$$
$$x > y \Longleftrightarrow y \leq x \wedge x \neq y.$$

Definice 2.2.3 (Omezenost shora a zdola)**.** Nechť A je množina s úplným uspořádáním a $B \subset A$. Řekneme, že množina B je *omezená shora*, jestliže existuje její horní závora v A ($\exists y \in A \quad x \in B \Longrightarrow x \leq y$). Řekneme, že množina B je *omezená zdola*, jestliže existuje její dolní závora v A ($\exists y \in A \quad x \in B \Longrightarrow x \geq y$). Řekneme, že množina B je *omezená*, jestliže je omezená shora i zdola.

K nejdůležitějším pojmům v matematické analýze patří maximum a minimum. Připomeňme si jejich definici.

Definice 2.2.4 (Maximum a minimum)**.** Nechť A je množina s úplným uspořádáním a $B \subset A$. Prvek $M \in B$ nazveme *maximem* množiny B (píšeme $M = \max B$), jestliže je horní závorou této množiny ($x \in B \Longrightarrow x \leq M$). Prvek $m \in B$ nazveme *minimem* množiny B (píšeme $m = \min B$), jestliže je dolní závorou této množiny ($x \in B \Longrightarrow x \geq m$).

Jak uvidíme na příkladech uvedených níže, obecně se může stát, že množina maximum nemá, stejně tak minimum. V takové situaci nám srovnatelně kvalitní informaci o velikosti prvků množiny poskytují pojmy supremum a infimum.

Definice 2.2.5 (Supremum a infimum)**.** Nechť A je množina s úplným uspořádáním a $B \subset A$. Prvek $S \in A$ nazveme *supremem* B (píšeme $S = \sup B$), jestliže je nejmenší horní závorou množiny B, nebo-li
• $x \in B \Longrightarrow x \leq S$ (S je horní závora)
• $(y \in A \wedge y < S) \Longrightarrow (\exists x \in B \quad x > y)$ (zmenšíme-li S, už nebude horní závorou).
Prvek $s \in A$ nazveme *infimem* B (píšeme $s = \inf B$), jestliže je největší dolní závorou množiny B, nebo-li
• $x \in B \Longrightarrow x \geq s$ (s je dolní závora)
• $(y \in A \wedge y > s) \Longrightarrow (\exists x \in B \quad x < y)$ (zvětšíme-li s, už nebude dolní závorou).

Následující úloha pracuje s reálnými čísly na základě středoškolských představ. Axiomatické zavedení bude o kousek níže.

Úloha 2.2.6. Nechť $B = [0, 1) \subset \mathbb{R}$. Nalezněte $\max B$, $\min B$, $\sup B$ a $\inf B$, pokud existují. Je množina B omezená?

Řešení: Omezenost plyne ze skutečnosti, že $0 \leq x \leq 1$ pro všechna $x \in B$. Protože $0 \in B$, z předchozího odhadu také plyne, že $0 = \min B$. Ukažme, že neexistuje $\max B$. Pokud by existovalo $M = \max B$, muselo by platit $M \in B$, a proto $0 \leq M < 1$. Potom ale máme

$$0 \leq M = \frac{M+M}{2} < \frac{M+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1.$$

Tedy $\frac{M+1}{2} \in B$ a zároveň $\frac{M+1}{2} > M$. Prvek M tedy nemůže být maximem, což je spor. Proto $\max B$ neexistuje.

Dále tvrdíme, že $\inf B = 0$. Prvek 0 je dolní závorou B. Zafixujeme-li $y \in \mathbb{R}$ splňující $y > 0$, stačí položit $x = 0$ a vidíme, že je splněna i druhá vlastnost infima. Ještě ukažme, že $\sup B = 1$. První vlastnost je zřejmě splněna. Druhá vlastnost suprema se ukáže tak, že k zafixovanému $y < 1$ zkonstruujeme $x = \max\{\frac{1}{2}, \frac{y+1}{2}\}$.
☆

Poznámka 2.2.7. Snadno se z definice ověří, že existuje-li minimum, existuje i infimum a rovnají se. Podobně existuje-li maximum, existuje i supremum a rovnají se.

Nyní se můžeme pustit do axiomatického vybudování reálných čísel. Jeho výhodou je, že jen opakuje kalkulus, který se učí na základních a středních školách.

Definice 2.2.8. Nechť $\mathbb{R}$ je množina s uspořádáním označeným $\leq$, operací sčítání označenou $+$ a operací násobení označenou $\cdot$. Množinu $\mathbb{R}$ nazveme *množinou reálných čísel*, jestliže:
(A1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\, \exists! \gamma \in \mathbb{R} \quad \gamma = \alpha + \beta$
(A2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha$ (komutativita sčítání)
(A3) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (asociativita sčítání)
(A4) $\exists 0 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = 0 + x = x$ (existence neutrálního prvku)
(A5) $\forall x \in \mathbb{R} \exists -x \in \mathbb{R} \quad x + (-x) = (-x) + x = 0$ (existence inverzního prvku)
(P1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\, \exists! \gamma \in \mathbb{R} \quad \gamma = \alpha \cdot \beta$

(P2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (komutativita násobení)
(P3) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ (asociativita násobení)
(P4) $\exists 1 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (existence neutrálního prvku)
(P5) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists x^{-1} \in \mathbb{R} \quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ (existence inverzního prvku)
(D1) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ (distributivita)
(O1) uspořádání $\leq$ je úplné
(O2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad 0 \leq \alpha \wedge 0 \leq \beta \Longrightarrow 0 \leq \alpha \cdot \beta$
(O3) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad \alpha \leq \beta \Longrightarrow 0 \leq \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$
(C1) každá shora omezená neprázdná podmnožina $\mathbb{R}$ má v $\mathbb{R}$ supremum.

Poznámka 2.2.9. Samozřejmě, nic není zadarmo. Je třeba ukázat, že tato definice dává (až na izomorfní zobrazení) množinu $\mathbb{R}$ jednoznačně. To je možno ukázat, ale my se tím nebudeme zabývat a odkazujeme čtenáře například na [Di An].

Poznámka 2.2.10. (i) prvních jedenáct axiomů splňuje také dvouprvková množina $\{0, 1\}$ s operacemi definovanými následovně

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

(ii) bez podmínky (C1) by definici splňovala i množina racionálních čísel.

Poznámka 2.2.11. Z definice reálných čísel se dají poměrně snadno odvodit následující pravidla. Nechť $x \in \mathbb{R}$, pak

$$\begin{array}{ccc} 0 \cdot x = 0 & (-1) \cdot (-1) = 1 & (-1) \cdot x = -x \\ 1 > 0 & (x^{-1})^{-1} = x \text{ pro } x \neq 0 & x \cdot x \geq 0 \\ x \cdot x = 0 \Longleftrightarrow x = 0 & x > 0 \Longleftrightarrow x^{-1} > 0 & x > 1 \Longleftrightarrow 0 < x^{-1} < 1. \end{array}$$

Cvičení 2.2.12. Dokažte použitím axiomů z Definice 2.2.8 tvrzení z Poznámky 2.2.11.

Podmnožinu $\mathbb{R}$ ležící mezi dvěma body nazýváme *interval*. Pro $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$, definujeme (připomeňme $\pm\infty \notin \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\} & (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \colon x > a\} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\} & [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq a\} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\} & (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} \colon x < a\} \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\} & (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq a\} \\ & & (-\infty, +\infty) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Poznámka 2.2.13. (i) Symbol $+\infty$ se často zkracuje na ∞. Druhý symbol je však používán v teorii komplexních čísel (později si připomeneme, že komplexní čísla mají jen jedno nekonečno). Výše uvedené zkrácení je tedy nevhodné v textech, kde se zároveň pracuje s reálnými a komplexními čísly.
(ii) Často se také vynechává symbol $\cdot$ pro násobení. Pokud tento symbol zastává

úlohu skalárního součinu ve vyšší dimenzi (připomeňme, že násobení reálných čísel je jednodimenzionální verzí skalárního součinu), nevynechává se. Dále se někdy namísto $\cdot$ píše hůře přehlédnutelný znak $\times$.
(iii) Potřebujeme-li matematickou formuli přerušit kvůli přechodu na nový řádek v místě symbolu jako třeba $=$, $\geq$, $+$ a $\cdot$, symbol přesouváme na nový řadek.

Označení 2.2.14. Je-li $x \in \mathbb{R}$, jeho *celou část* $[x]$ definujeme jako největší celé číslo splňující $[x] \leq x$. Pak nutně $[x] \leq x < [x] + 1$.

Ještě se na chviličku vraťme k Úloze 2.2.6. Zde mělo jistě mnoho čtenářů silné nutkání neověřovat výsledky $\inf B = 0$ a $\sup B = 1$ přímo z definice, nýbrž použít intuitivní představu vyplývající ze zkušenosti vytvořené na jednoduchých úlohách, že například supremum je v podstatě maximum, přidáme-li do množiny správný bod (který se navíc přirozeně sám nabízí). Před tímto přístupem však musíme čtenáře varovat. Intuitivní představa totiž nemusí odpovídat skutečné definici ve složitějších situacích, a proto v důkazech zásadně používáme pouze přesné definice a již dokázané výsledky (dlužno ovšem podotknout, že vědecké výsledky vznikají tak, že si autor na základě jednoduchých situací a geometrických představ nejprve vytvoří jakousi pracovní hypotézu, často i základní strategii důkazu, nicméně finální verze článku je již zpracována matematicky zcela korektně). Druhou nevýhodou onoho povrchního přístupu při řešení snadných úloh je, že si řešitel patřičně neosvojí základní techniky, které jsou při řešení obtížných úloh nezbytné.

Pasáž o supremu a infimu zakončíme několika obtížnějšími úlohami.

Úloha 2.2.15. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázné shora omezené množiny (pak mají supremum podle (C1) z definice reálných čísel). Zabývejte se otázkou vyjádření veličin $\sup(A \cup B)$ a $\sup(A \cap B)$ pomocí $\sup A$ a $\sup B$.

Řešení: Nejprve se zabývejme veličinou $\sup(A \cup B)$. Ukážeme, že

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

Předně množina $A \cup B$ je shora omezená, má tedy supremum. Nyní si uvědomíme, že inkluze $A \subset (A \cup B)$ má za následek, že $\sup(A \cup B)$ je jednou z horních závor množiny A, a proto $\sup A \leq \sup(A \cup B)$. Analogická úvaha s množinou B vede na

$$\sup(A \cup B) \geq \max\{\sup A, \sup B\}.$$

Dokažme obrácenou nerovnost. Zvolme libovolné $S > \max\{\sup A, \sup B\}$. Vezmeme-li nyní $\tilde{S}$ jako střed intervalu $(\max\{\sup A, \sup B\}, S)$, pak $\tilde{S}$ je horní závorou množiny $A \cup B$ a proto S nesplňuje druhou vlastnost suprema. Protože číslo $S > \max\{\sup A, \sup B\}$ bylo libovolné, dostáváme zbývající nerovnost

$$\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}.$$

Nyní se zabývejme hodnotou $\sup(A \cap B)$. Tvrdíme, že pokud existuje, pak

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}. \tag{2.2.1}$$

Důkaz této nerovnosti se snadno získá výše podrobně zdůvodněným argumentem, že supremum podmnožiny je shora odhadnuto supremem nadmnožiny, aplikovaným na $(A \cap B) \subset A$ a $(A \cap B) \subset B$.

Obecně supremum průniku existovat nemusí (bereme-li supremum vůči $\mathbb{R}$), stačí si vzít A, B disjunktní. Volba $A = (0,1) \cup (9,10)$ a $B = (0,1) \cup (8,9)$ ukazuje i v případě existence suprema průniku, že toto supremum může být velmi vzdálené hodnotě $\min\{\sup A, \sup B\}$. Na druhou stranu odhad (2.2.1) je nejlepší možný, jak ukazuje volba $B = A$. ☆

Úloha 2.2.16. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Definujme $-A := \{-x : x \in A\}$. Ukažte, že $\sup A$ existuje v $\mathbb{R}$ právě tehdy, když v $\mathbb{R}$ existuje $\inf(-A)$. Navíc v takovém případě $\inf(-A) = -\sup A$.

Řešení: Nechť existuje $S = \sup A \in \mathbb{R}$. Pak pro všechna $x \in A$ platí $x \leq S$, neboli $-S \leq -x$, tedy $-S$ je dolní závora $-A$. Číslo $-S$ dále splňuje druhou vlastnost infima. Vskutku, kdyby tomu tak nebylo, existovalo by $\varepsilon > 0$ takové, že $-S + \varepsilon$ by bylo dolní závorou $-A$. To zase implikuje, že $S - \varepsilon$ je horní závorou A a proto S není supremem. Tím je dokázáno, že $\inf(-A) = -\sup A$ (a existuje).

Obrácená implikace se ukáže analogicky. ☆

Poznámka 2.2.17. Výsledek předchozího problému nám s ohledem na (C1) z definice reálných čísel říká, že je-li množina omezená zdola, má infimum v $\mathbb{R}$.

V další úloze budeme uvažovat $f, g \colon (0,1) \to \mathbb{R}$ (definiční obor bude celý interval $(0,1)$) a budeme používat zkrácené značení typu $\sup f = \sup_{(0,1)} f = \sup_{x \in (0,1)} f(x) = \sup\{f(x) : x \in (0,1)\}$.

Úloha 2.2.18. Nechť $f, g \colon (0,1) \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce. Je nějaký vztah mezi veličinami $\sup(f+g)$ a $\sup f + \sup g$?

Řešení: Z definice suprema máme $f(x) \leq \sup f$ a $g(x) \leq \sup g$ pro všechna $x \in (0,1)$, tedy $f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g$ pro všechna $x \in (0,1)$, a proto

$$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g.$$

Tento odhad se nedá vylepšit, jak ukazuje volba $f \equiv 1 \equiv g$. V odhadu obecně neplatí rovnost, jak ukazuje volba $f(x) = x$ a $g(x) = 1 - x$. Pak totiž

$$\sup f = \sup g = \sup(f+g) = 1.$$

☆

2.2.2 Přirozená, celá a racionální čísla

Definice 2.2.19. *Množinu přirozených čísel* $\mathbb{N}$ definujeme jako nejmenší podmnožinu $\mathbb{R}$ s vlastnostmi
(i) $1 \in \mathbb{N}$
(ii) $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n+1 \in \mathbb{N}$.

Označení 2.2.20. Často značíme $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Poznámka 2.2.21. Zřejmě $\mathbb{N}$ je zdola omezená množina. Tuto vlastnost má i každá podmnožina $\mathbb{N}$.

Připomeňme, že z definice přirozených čísel nelze vypustit slovo "nejmenší", pak by definici splňovalo i třeba $\mathbb{R}$.

Definice 2.2.22. *Množinu celých čísel* $\mathbb{Z}$ definujeme předpisem

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Definice 2.2.23. *Množinu racionálních čísel* $\mathbb{Q}$ definujeme předpisem

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \colon p \in \mathbb{Z} \land q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Poznámka 2.2.24. Připomeňme, že každé přirozené číslo lze jednoznačně zapsat způsobem

$$n = p_1 p_2 \dots p_k,$$

kde p_i, $i = 1, \dots, k$, jsou vzestupně seřazená prvočísla. To nám umožňuje psát racionální čísla v jednoznačném nesoudělném tvaru.

Tvrzení 2.2.25. *Množina* $\mathbb{N}$ *není omezená shora.*

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Nechť je $\mathbb{N}$ omezená shora. Pak podle vlastnosti (C1) reálných čísel existuje $S := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Podle druhé vlastnosti suprema pak musí ještě existovat $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > S - 1$. Poslední odhad je totéž, co $n_0 + 1 > S$, a protože $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ podle definice přirozených čísel, S nesplňuje první vlastnost suprema a dostáváme spor. □

Tvrzení 2.2.26 (Důkaz matematickou indukcí)**.** *Nechť* $n_0 \in \mathbb{N}$*, každému* $n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty)$ *je přiřazen výrok* $P(n)$*, a platí:*
(i) $P(n_0)$ *je pravdivý výrok*
(ii) *pravdivost* $P(n)$ *implikuje pravdivost* $P(n+1)$ *kdykoliv* $n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty)$.
Pak pro každé $n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty)$ *je výrok* $P(n)$ *pravdivý.*

Důkaz. Zvolme libovolné $n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty)$. Pokud $n = n_0$, je zřejmě $P(n) = P(n_0)$ pravdivý výrok. Pokud $n > n_0$, položíme $m = n - n_0 \in \mathbb{N}$ a postupujeme následovně. Protože $P(n_0)$ je pravdivý, podle předpokladu je pravdivý i $P(n_0+1)$. Nyní z pravdivosti $P(n_0+1)$ plyne pravdivost $P(n_0+2)$. Takto pokračujeme celkem $(m-1)$-krát a zjistíme, že $P(n)$ je pravdivý výrok. Protože $n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty)$ bylo libovolné, je důkaz hotov. □

Úloha 2.2.27. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Řešení: Provedeme důkaz indukcí s volbou $n_0 = 1$. Nejprve vidíme, že $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$ a proto výrok $P(1)$ platí. Předpokládejme nyní, že platí $P(n)$ pro pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$. S využitím této informace dostáváme

$$1 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Platí tedy i výrok $P(n+1)$. Všechny předpoklady tvrzení o matematické indukci jsou splněny, a proto požadovaná rovnost platí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. ☆

Dokazujeme-li matematickou indukcí nerovnosti, často používáme

$$\alpha \leq \beta \wedge \gamma \leq \delta \Longrightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \delta, \tag{2.2.2}$$

nebo

$$\alpha < \beta \wedge \gamma \leq \delta \Longrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta. \tag{2.2.3}$$

Cvičení 2.2.28. Dokažte (2.2.2) respektive (2.2.3) pomocí axiomů z Definice 2.2.8.

Protože přičtení nerovnosti je neekvivalentní úprava, mají důkazy nerovností složitější logickou stavbu a je těžší je vymyslet. Dalším překážkou je, že mnohdy není z důkazu jasné, zda bylo dosaženo nejlepšího možného výsledku.

Pokusme se teď podívat na důkazy obecněji. Existují dva možné přístupy prezentace výsledku. Jedna možnost je důkaz sepsat tak, jak jsme problém řešili. Druhá možnost je důkaz sepsat tak, aby čtenář byl schopen co nejrychleji ověřit pravdivost našeho závěru. Oba přístupy mají své výhody a nevýhody. Ukážeme si je na následující úloze.

Úloha 2.2.29. Pomocí matematické indukce ukažte, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty)$ platí $n^2 < 2^n$. Nalezněte minimální n_0, aby nerovnost pro daná n platila.

Nejprve ukážeme podrobný postup řešení sledující autorovy úvahy.

Řešení: Zřejmě platí $1 = 1^2 < 2 = 2^1$. Pokusíme se tedy nerovnost dokázat pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Přistupme k indukčnímu kroku. Předpokládejme, že platí $n^2 < 2^n$. Chceme ukázat $(n+1)^2 < 2^{n+1}$. Podle (2.2.3) nám tedy stačí ukázat, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(n+1)^2 - n^2 \leq 2^{n+1} - 2^n,$$

což je totéž jako

$$2n + 1 \leq 2^n. \tag{2.2.4}$$

Tuto nerovnost dokážeme indukcí. Nerovnost (2.2.4) neplatí pro $n = 1$ $(3 > 2)$, $n = 2$ $(5 > 4)$ a platí pro $n = 3$ $(7 < 8)$. Pokusíme se ji tedy dokázat pro $n \geq 3$. První krok důkazu jsme již učinili, zbývá indukční krok. Podle (2.2.2) nám stačí ukázat, že pro $n \geq 3$ máme

$$2 = (2n+3) - (2n-1) \leq 2^{n+1} - 2^n = 2^n.$$

Poslední nerovnost už platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ proto jsme dokázali, že nerovnost (2.2.4) platí pro $n \geq 3$. Připomeňme, že díky tomu máme

$$n^2 < 2^n \Longrightarrow (n+1)^2 < 2^{n+1} \qquad \text{pro všechna } n \geq 3.$$

Tento výsledek však nemůžeme kombinovat s tím, že jsme na začátku důkazu ověřili, že nerovnost platí pro $n = 1$. Přirozené je otestovat platnost nerovnosti pro $n = 3$. Máme

$$3^2 = 9 > 8 = 2^3.$$

Dokazovaná nerovnost tedy pro $n = 3$ neplatí a důkaz indukcí stále nemůžeme použít. Stačí ale najít první $n_0 \geq 3$ pro které nerovnost platí. Pro $n = 4$ nerovnost neplatí ($4^2 = 16 = 2^4$), ale pro $n = 5$ už nerovnost platí ($5^2 = 25 < 32 = 2^5$), a proto podle indukčního kroku (platného pro $n \geq 3$) dostáváme platnost požadované nerovnosti pro $n \geq 5$. Pokud si ještě dosadíme $n = 2$, dostaneme $2^2 = 2^2$. Celkově jsme tedy zjistili, že nerovnost $n^2 < 2^n$ platí právě tehdy, když

$$n \in \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \colon n \geq 5\}.$$

☆

Právě použitý přístup k řešení úlohy se často používá v učebnicích. Má totiž výhodu v tom, že studentům přiblíží myšlenkové pochody řešitele a studenti jsou pak schopni sami tyto myšlenky používat v podobných úlohách. Přístup má však i své nevýhody. Jednak zdržuje čtenáře, který si chce přečíst jen výsledek a ověřit jeho správnost (málokoho bude zajímat naše tápání pro $n = 3$). Druhá nevýhoda spočívá v tom, že student po čase získává dojem, že správné řešení má vypadat takto (připomeňme, že správné řešení obsahuje výsledek a důkaz jeho správnosti, pedagogické poznámky tam být nemusí).

Opačným extrémem je důkaz upravený tak, aby se co nejlépe četl. Ukažme si ale nejprve verzi, ve které využijeme toho, že už víme, jak příklad dopadne. Důkaz bude elegantnější, zároveň v něm ale ponecháme hlavní myšlenky.

Řešení: Dokažme, že $n^2 < 2^n$ platí právě tehdy, když

$$n \in \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \colon n \geq 5\}.$$

Nejprve dosazením snadno ověříme, že nerovnost platí pro $n = 1, 5$ a neplatí pro $n = 2, 3, 4$. Matematickou indukcí dokážeme, že požadovaná nerovnost platí pro $n \geq 5$. Pro $n = 5$ jsme nerovnost ověřili dosazením, zbývá ověřit indukční krok. Předpokládejme, že platí $n^2 < 2^n$. Chceme ukázat $(n+1)^2 < 2^{n+1}$. Podle (2.2.3) nám tedy stačí ukázat, že pro všechna $n \geq 5$ platí

$$(n+1)^2 - n^2 \leq 2^{n+1} - 2^n,$$

což je totéž jako

$$2n + 1 \leq 2^n. \tag{2.2.5}$$

Tuto nerovnost dokážeme indukcí. Nerovnost (2.2.5) zřejmě platí pro $n = 5$, zbývá indukční krok. Podle (2.2.2) nám stačí ukázat, že pro $n \geq 5$ máme

$$2 = (2n+3) - (2n-1) \leq 2^{n+1} - 2^n = 2^n,$$

což je zřejmě pravda. Tím jsme dokázali nerovnost (2.2.4) pro $n \geq 5$ a díky tomu máme i

$$n^2 < 2^n \Longrightarrow (n+1)^2 < 2^{n+1} \qquad \text{pro všechna } n \geq 5.$$

Tím je důkaz dokončen. ☆

Pokud chceme, co nejkratší a nejlépe čitelný důkaz, přeskupíme jej tak, aby měl co nejjednodušší myšlenkovou stavbu.

Řešení: Dokažme, že $n^2 < 2^n$ platí právě tehdy, když

$$n \in \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \colon n \geq 5\}.$$

Nejprve si indukcí dokažme pomocné tvrzení

$$2n + 1 \leq 2^n \qquad \text{pro všechna } n \geq 5. \tag{2.2.6}$$

Pro $n = 5$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že pro jisté $n \geq 5$ je splněno $2n+1 \leq 2^n$. Sečteme-li tuto nerovnost se zřejmou nerovností $2 \leq 2^n$, dostáváme

$$2n + 3 \leq 2^{n+1},$$

čímž jsme ověřili indukční krok a máme tedy dokázáno (2.2.6).

Přistupme nyní k důkazu požadované nerovnosti. Nejprve dosazením snadno ověříme, že nerovnost platí pro $n = 1, 5$ a neplatí pro $n = 2, 3, 4$. Pokračujeme matematickou indukcí. Pro $n = 5$ jsme nerovnost ověřili dosazením, zbývá ověřit indukční krok. Předpokládejme, že platí $n^2 < 2^n$. Sečteme-li tuto nerovnost s nerovností (2.2.6), dostáváme

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2^n + 2^n = 2^{n+1},$$

čímž jsme ověřili indukční krok a máme tedy dokázáno, že $n^2 < 2^n$ pro $n \geq 5$ a důkaz je dokončen. ☆

2.2.3 Vlastnosti reálných, racionálních a přirozených čísel

Tvrzení 2.2.30. (i) *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > x$.*
(ii) *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\varepsilon n > x$.*

Důkaz. Pokud by první tvrzení nebylo pravdivé, nalezli bychom $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geq n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. To by ale znamenalo, že $\mathbb{N}$ je shora omezená množina, což je spor (připomeňme Tvrzení 2.2.25).

Zafixujme $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Protože $\frac{x}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$, podle právě dokázaného výsledku existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $n > \frac{x}{\varepsilon}$. Poslední nerovnost je ale ekvivalentní s dokazovanou nerovností $\varepsilon n > x$. Tím je důkaz dokončen. □

Kromě toho, že budeme pracovat spíše s implikacemi než s ekvivalencemi, mnohem častěji se budeme setkávat s nerovnostmi než s rovnostmi. Rovnosti se často dokazují pomocí antisymetrie neostré nerovnosti, neboli rovnost $a = b$ získáme důkazem nerovností $a \leq b$ a $b \leq a$. Dalším častým problémem je, že řada matematických nástrojů neposkytuje požadovanou nerovnost typu $a \leq b$ přímo, ale jen v nějaké slabší podobě. Následující výsledek ukazuje situaci, kdy nerovnost $a \leq b$ může být nahrazena velkým množstvím slabších výsledků.

Tvrzení 2.2.31. *Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. Pak*

$$x \leq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq y + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Důkaz. Implikace „$\Rightarrow$“ je zřejmá. Implikaci „$\Leftarrow$“ dokážeme nepřímo. Předpokládejme, že $x > y$. Můžeme pak položit $\varepsilon := \frac{x-y}{2} > 0$. Proto máme

$$y + \varepsilon = y + \frac{x-y}{2} = x - \frac{x-y}{2} < x,$$

tedy neplatí ani výrok na pravé straně dokazované implikace a jsme hotovi. □

Poznámka 2.2.32. (i) Snadno se ověří, že předchozí tvrzení zůstává v platnosti, nahradíme-li pravou stranu ekvivalence kteroukoliv z následujících podmínek

$$x < y + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \qquad x \leq y + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$
$$x \leq y + \varepsilon^2 \quad \forall \varepsilon > 0, \qquad x \leq y + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poslední podmínka vyžaduje větší zásah do důkazu, kdy v situaci $x > y$ hledáme $n \in \mathbb{N}$ dost velké, aby $y + \frac{1}{n} < x$, neboli $n > \frac{1}{x-y}$.
(ii) Na levé straně nemůžeme psát $x < y$.
(iii) Jednou z nejčastějších aplikací předchozího tvrzení je $x \leq \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow x \leq 0$.

Následuje několik tvrzení, v nichž si ukážeme, že racionálních čísel je velmi mnoho.

Tvrzení 2.2.33. *Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ a $x < y$. Pak existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $x < q < y$.*

Důkaz. Nejprve zafixujme $m \in \mathbb{N}_0$ dost velké, aby $m + x > 0$. Dále si zafixujme $r \in \mathbb{N}$ dost velké, aby splňovalo $\frac{1}{r} < y - x$. Nyní nalezněme $p \in \mathbb{N}$ minimální, aby platilo $\frac{p}{r} > m + x$ (existence plyne z toho, že $\mathbb{N}$ je zdola omezená množina). Proto $\frac{p-1}{r} \leq m + x$ a celkově máme

$$x < \frac{p}{r} - m = \frac{p-1}{r} - m + \frac{1}{r} \leq x + \frac{1}{r} < x + y - x = y.$$

Proto $\frac{p}{r} - m = \frac{p-rm}{r}$ má vlastnosti hledaného racionálního čísla. □

Důsledek 2.2.34. *Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ a $x < y$. Pak existuje nekonečně mnoho racionálních čísel z intervalu (x, y).*

Důkaz. Z předchozího tvrzení víme, že alespoň jedno racionální číslo z intervalu (x, y) existuje. Pokud by jich byl jen konečný počet, označme q_1 nejmenší z nich. Nyní podle předchozího tvrzení existuje $q_0 \in \mathbb{Q}$ takové, že $x < q_0 < q_1$. To je spor, neboť q_1 mělo být nejmenší. □

Označení 2.2.35. Reálná čísla, která nejsou racionální, se nazývají *iracionální* a jejich množinu značíme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Postupně si v několika krocích ukážeme, že i iracionálních čísel je velmi mnoho. Začneme tím, že alespoň jedno iracionální číslo existuje.

Tvrzení 2.2.36. *Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.*

Důkaz. Pokud by číslo $\sqrt{2}$ bylo racionální, po přepisu do nesoudělného tvaru a prvočíselném rozkladu bychom dostali

$$2 = \sqrt{2}^2 = \frac{p_1^2 p_2^2 \dots p_k^2}{q_1^2 q_2^2 \dots q_m^2}, \tag{2.2.7}$$

kde $p_1, \dots, p_k$ jsou vzestupně seřazená prvočísla a totéž platí pro $q_1, \dots, q_m$. Ze zápisu (2.2.7) plyne, že $p_1 = 2$. Pak ale po úpravě dostáváme

$$q_1^2 q_2^2 \dots q_m^2 = 2p_2^2 \dots p_k^2.$$

Odtud $q_1 = 2$ a to je spor s nesoudělností čitatele a jmenovatele v zápisu čísla $\sqrt{2}$. $\square$

Připomeňme, že součet dvou racionálních čísel je vždy racionální (to snadno to plyne z převodu na společný jmenovatel). Součet dvou iracionálních čísel může být jak racionální ($\sqrt{2} - \sqrt{2}$), tak iracionální $\sqrt{2} + \sqrt{2}$. Pokud sčítáme číslo racionální s číslem iracionálním, může nastat jen jedna možnost.

Tvrzení 2.2.37. *Nechť $q \in \mathbb{Q}$ a $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pak $q + r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Důkaz. Pokud by platilo $q+r \in \mathbb{Q}$, nutně by platilo i $-q+(q+r) \in \mathbb{Q}$. To je spor, neboť $-q + (q + r) = r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\square$

Důsledek 2.2.38. *Množina $\mathbb{Q}$ nesplňuje podmínku* (C1) *z definice reálných čísel.*

Důkaz. Označme $M = \{q \in \mathbb{Q} \colon q^2 \leq 2\}$. O této shora omezené množině ukážeme, že nemá supremum v $\mathbb{Q}$. Pro spor předpokládejme, že existuje $S := \sup M \in \mathbb{Q}$. Nutně pak $S \neq \sqrt{2}$, neboť $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pokud by platilo $S < \sqrt{2}$, pak bychom dokázali najít racionální číslo $q \in (S, \sqrt{2})$ a tím bychom dostali spor s první vlastností suprema. Zbývá tedy případ $S > \sqrt{2}$. Tentokrát najdeme racionální $q \in (\sqrt{2}, S)$, tedy horní závoru M, která je menší než S, a dostáváme spor s druhou vlastností suprema. $\square$

Tvrzení 2.2.39. *Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ a $x < y$. Pak existuje nekonečně mnoho iracionálních čísel z intervalu (x, y).*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že v intervalu (x, y) existuje alespoň jedno iracionální číslo. Podle Tvrzení 2.2.33 existuje $q \in \mathbb{Q} \cap (x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2})$, tedy $q + \sqrt{2} \in (x, y)$, což je iracionální číslo, neboť je součtem racionálního čísla s iracionálním.

Pokud by takových čísel byl jen konečný počet, označili bychom nejmenší z nich r_1 a nalezením iracionálního čísla v intervalu (x, r_1) (pomocí již dokázaného) dostáváme spor. $\square$

2.2.4 Základní rovnosti a nerovnosti

Definice 2.2.40. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Jeho *absolutní hodnotu* definujeme předpisem

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0 \\ -x & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Tvrzení 2.2.41. *Nechť $a \geq 0$. Pak pro $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$|x| \leq a \qquad \Longleftrightarrow \qquad -a \leq x \leq a.$$

Speciálně $-|x| \leq x \leq |x|$.

Důkaz. Uvažme dva případy. Pokud $x \geq 0$, jsou výroky $x = |x| \leq a$ a $-a \leq x \leq a$ zřejmě ekvivalentní. Pokud $x < 0$, nalevo máme výrok $-x \leq a$ a napravo (po přenásobení číslem -1) $-a \leq -x \leq a$, což jsou opět ekvivalentní výroky. □

Tvrzení 2.2.42 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí*

$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x| + |y| \\ ||x| - |y|| &\leq |x - y| \\ |x - z| &\leq |x - y| + |y - z|. \end{aligned}$$

Důkaz. Podle Tvrzení 2.2.41 máme $-|x| \leq x \leq |x|$ a $-|y| \leq y \leq |y|$. Proto po sečtení

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Nyní Tvrzení 2.2.41 s volbou $a = |x| + |y|$ dává $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Dále využijeme právě dokázanou nerovnost

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|.$$

Odtud $|x| - |y| \leq |x - y|$. Prohozením rolí x a y bychom dostali

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|.$$

Poslední dva odhady dávají $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Třetí z dokazovaných nerovností plyne okamžitě z první. □

Poznámka 2.2.43. Občas se hodí následující vzoreček vyjadřující vztah mezi maximem dvou čísel a absolutní hodnotou jejich rozdílu

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

Tento vzoreček se snadno dokáže rozlišením případů $x \geq y$ a $x < y$.

Tvrzení 2.2.44 (Cauchy–Schwarzovy nerovnosti). *Nechť* $a_1, \ldots, a_N$ *a* $b_1, \ldots, b_N$ *jsou* N*-tice reálných čísel a* $\varepsilon > 0$. *Pak*

$$\Big(\sum_{k=1}^N a_k b_k\Big)^2 \le \Big(\sum_{k=1}^N a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^N b_k^2\Big)$$

a

$$\sum_{k=1}^N a_k b_k \le \varepsilon \sum_{k=1}^N a_k^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\sum_{k=1}^N b_k^2.$$

Důkaz. Předně si povšimněme, že pro libovolnou volbu $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$\sum_{k=1}^N (\lambda a_k + b_k)^2 \ge 0.$$

Definujeme-li $A := \sum_{k=1}^N a_k^2$, $B := \sum_{k=1}^N a_k b_k$ a $C := \sum_{k=1}^N b_k^2$, naše nerovnost má tvar

$$\lambda^2 A + 2\lambda B + C \ge 0. \tag{2.2.8}$$

Pokud $A \neq 0$, položme $\lambda = -\frac{B}{A}$ a z (2.2.8) dostáváme $\frac{B^2}{A} - 2\frac{B^2}{A} + C \ge 0$. To je ekvivalentní $B^2 \le AC$, což při naší volbě A, B, C dává přesně první Cauchy–Schwarzovu nerovnost. Zbývá ověřit, že první Cauchy–Schwarzova nerovnost platí i v případě $A = 0$, ale to je zřejmé.

Při důkazu druhé Cauchy–Schwarzovy nerovnosti si nejprve povšimněme, že pro $a, b \in \mathbb{R}$ vždy platí $(a-b)^2 \ge 0$. Odtud jednoduchou úpravou dostáváme

$$ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Položíme-li nyní v předchozí nerovnosti $a = \alpha\sqrt{2\varepsilon}$ a $b = \frac{\beta}{\sqrt{2\varepsilon}}$, dostáváme

$$\alpha\beta \le \varepsilon\alpha^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\beta^2.$$

Nyní stačí použít poslední nerovnost na všechny sčítance typu $a_k b_k$ zvlášť. □

Poznámka 2.2.45. (i) Pokud si čísla $a_1, \ldots, a_N$ představíme jako souřadnice vektoru $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$, podobně pro $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$, skalární součin $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ definujeme standardním vzorcem a pokud si na $\mathbb{R}^N$ definujeme délku vektoru předpisem

$$\|\mathbf{a}\| = \Big(\sum_{k=1}^N a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

první Cauchy–Schwarzova nerovnost po odmocnění dává $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$.
(ii) V důkazu druhé Cauchy-Schwarzově nerovnosti jsme si odvodili a používali nerovnost $ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ (odpovídá také volbě $N = 1$ a $\varepsilon = \frac{1}{2}$ v druhé Cauchy-Schwarzově nerovnosti) . Tato nerovnost se používá velice často a říká se jí Youngova nerovnost (obecná Youngova nerovnost má tvar $ab \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}}$ s pevným

parametrem $p \in (1, \infty)$).
(iii) Druhá Cauchy–Schwarzova nerovnost se používá s volbou $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (pak i $\frac{1}{4\varepsilon} = \frac{1}{2}$), ale mnohem častěji s ε dostatečně malým, kde malost ε závisí na dané úloze. Jak jsme viděli v důkazu, stačí si pamatovat znění nerovnosti pro první případ a verze s obecným $\varepsilon > 0$ se pak snadno odvodí.

Cauchy–Schwarzova se dá v některých situacích využít k pěkným odhadům, jak ukazuje následující problém.

Úloha 2.2.46. Na základě definic z Poznámky 2.2.45 (i) ukažte, že

$$\max_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N; \|\mathbf{v}\|=1} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{a}\|.$$

Řešení: Použitím Cauchy–Schwarzovy nerovnosti ve tvaru z Poznámky 2.2.45 (i) máme

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{a}\|.$$

Nyní si stačí uvědomit, že pro $\mathbf{a}$ nenulový vektor volbou $\mathbf{v} = \mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ dostaneme rovnost, zatímco pro $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ je tvrzení zřejmé. ☆

Věta 2.2.47 (Binomická věta)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \tag{2.2.9}$$

kde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (připomeňme $0! = 1$).

Důkaz. Nejprve si dokažme Pascalovo pravidlo ($n, k \in \mathbb{N}_0$, $n > k$)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{2.2.10}$$

Zřejmě

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Nyní dokážeme požadovaný vzoreček indukcí. Předně, pro $n = 1$ vztah (2.2.9) zřejmě platí. Dále předpokládejme, že (2.2.9) platí pro nějaké pevné $n \in \mathbb{N}$. Díky tomu a Pascalově pravidlu (2.2.10) dostáváme

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}(a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}.
\end{aligned}$$

Tím jsme dokončili indukční krok a jsme hotovi. □

Další vzoreček, který je občas užitečný, ponecháme čtenáři za cvičení. Používá se například ke sčítání geometrických řad a k odhadům odmocnin.

Cvičení 2.2.48. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pak

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^0 b^{n-1}).$$

Připomeňme, že na $\mathbb{R}_0^+$ je definována funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ jako inverzní funkce k $x \mapsto x^n$. Blíže si vše dokážeme později, až se budeme věnovat vlastnostem elementárních funkcí.

Úloha 2.2.49. Dokažte A-G nerovnost, která říká, že geometrický průměr konečného počtu nezáporných čísel je shora odhadnut průměrem aritmetickým, neboli

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}. \tag{2.2.11}$$

Řešení: Důkaz bude proveden nestandardní verzí matematické indukce. Nejprve si povšimněme, že tvrzení pro $n = 1$ je zřejmé (dokonce platí rovnost) a pro $n = 2$ se snadno získá z Youngovy nerovnosti. Pro přehlednost v dalším označujme $P(n)$ A-G nerovnost pro n čísel, tj. vztah (2.2.11).

Ukažme nejprve, že $P(n) \Rightarrow P(2n)$ pro $n \geq 2$. Nechť tedy $a_1, \dots, a_{2n} \geq 0$ a platí $P(n)$. Nerovnost $P(n)$ použijeme jednak na $a_1, \dots, a_n$, pak na $a_{n+1}, \dots, a_{2n}$ a nakonec ještě na výsledek aplikujeme $P(2)$

$$\begin{aligned}
\sqrt[2n]{a_1 \dots a_{2n}} &= \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}\,\sqrt[n]{a_{n+1} \dots a_{2n}}} \leq \sqrt{\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n}} \\
&\leq \frac{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} + \frac{a_{n+1}+\cdots+a_{2n}}{n}}{2} = \frac{a_1 + \cdots + a_{2n}}{2n}.
\end{aligned}$$

Platí tedy $P(2n)$ a požadovaná implikace je dokázána. Dále dokážeme, že $P(n+1) \Rightarrow P(n)$ pro $n \geq 1$. Nechť tedy $a_1, \dots, a_n \geq 0$ a platí $P(n+1)$. Položme ještě $a_{n+1} = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$ a použijme $P(n+1)$

$$\sqrt[n+1]{a_1 \dots a_n \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n + \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}{n+1}.$$

Tuto nerovnost přepíšeme jako

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = (a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

Nyní již stačí od obou stran odečíst $\frac{1}{n+1} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$, výslednou nerovnost vynásobit $\frac{n+1}{n}$ a získáme $P(n)$.

Tím je důkaz dokončen, neboť platí $P(1)$ a $P(2)$, dále díky druhému indukčnímu kroku platí $P(2^k)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a tím pádem díky třetímu indukčnímu kroku platí $P(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. ☆

Poznámka 2.2.50. V posledním kroku by k cíli vedla i volba $a_{n+1} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$.

2.2.5 Komplexní čísla

Definice 2.2.51. *Množinou komplexních čísel* nazveme množinu

$$\mathbb{C} = \{z = (z_1, z_2) \colon z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$$

s operací sčítání označenou $+$ a operací násobení označenou $\cdot$ definovanými předpisy

$$\begin{aligned} z + w &= (z_1, z_2) + (w_1, w_2) := (z_1 + w_1, z_2 + w_2) \\ z \cdot w &= (z_1, z_2) \cdot (w_1, w_2) := (z_1 w_1 - z_2 w_2, z_1 w_2 + z_2 w_1). \end{aligned}$$

Poznámka 2.2.52. (i) Reálná čísla můžeme považovat za podmnožinu komplexní roviny; stačí položit imaginární část reálného čísla jako 0.
(ii) Z definice plyne $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$. Pokud označíme $\mathrm{i} = (0,1)$ a komplexní čísla stručně píšeme ve tvaru

$$(z_1, z_2) = z_1(1,0) + z_2(0,1) = z_1 + \mathrm{i} z_2$$

(namísto $(1,0)$ píšeme 1), dostáváme $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (-1,0) = -1$ a máme standardní kalkulus komplexních čísel ze střední školy.
(iii) Pokud $z = z_1 + \mathrm{i} z_2$, číslo z_1 se nazývá reálná složka komplexního čísla z a značí se $\operatorname{Re} z$. Číslo z_2 se nazývá imaginární složka komplexního čísla z a značí se $\operatorname{Im} z$. Tedy $z = \operatorname{Re} z + \mathrm{i} \operatorname{Im} z$.
(iv) Přímým výpočtem se dá ověřit, že komplexní čísla splňují podmínky (A1) až (A5), (P1) až (P5) a (D1) z definice reálných čísel. Potíže může dělat snad jedině hledání inverzního prvku vůči násobení. Připomeňme tedy metodu rozšíření zlomku

$$\frac{1}{z_1 + \mathrm{i} z_2} = \frac{z_1 - \mathrm{i} z_2}{(z_1 + \mathrm{i} z_2)(z_1 - \mathrm{i} z_2)} = \frac{z_1 - \mathrm{i} z_2}{z_1^2 + z_2^2} = \frac{z_1}{z_1^2 + z_2^2} - \mathrm{i} \frac{z_2}{z_1^2 + z_2^2}.$$

(v) Poznamenejme, že ani vektorový součin na $\mathbb{R}^2$ ani skalární součin nemají analogické vlastnosti jako násobení, které jsme právě zavedli. Vektorový součin například není komutativní, skalární součin zase přiřazuje vektorům skalár.
(vi) Na množině $\mathbb{C}$ se nedá zavést úplné uspořádání, které by splňovalo (O1) až (O3) z definice reálných čísel. Skutečně, pokud by platilo $\mathrm{i} > (0,0) = 0$, měli bychom

$$0 > -\mathrm{i} = \mathrm{i}^3 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} > 0,$$

což je spor. Naopak, v případě $\mathrm{i} < 0$ máme spor díky

$$-\mathrm{i} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{i} = (-\mathrm{i})^3 > 0.$$

Definice 2.2.53. Nechť $z = z_1 + \mathrm{i}z_2 \in \mathbb{C}$. *Velikostí komplexního čísla* z je nezáporné reálné číslo

$$|z| := \sqrt{z_1^2 + z_2^2}.$$

Kolize se značením absolutní hodnoty u reálného čísla nehrozí, neboť pro $x \in \mathbb{R}$ máme $\sqrt{x^2} = |x|$ jak ve smyslu absolutní hodnoty, tak ve smyslu velikosti komplexního čísla.

Tvrzení 2.2.54. *Nechť $z, w \in \mathbb{C}$. Potom platí:*
(i) $|z| \geq 0$ *a* $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
(ii) $|\operatorname{Re} z| \leq z$ *a* $|\operatorname{Im} z| \leq z$
(iii) $|zw| = |z||w|$ *a* $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ *pro* $w \neq 0$
(iv) $|z + w| \leq |z| + |w|$
(v) $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Důkaz. První dvě tvrzení jsou zřejmá. Dokažme třetí. Začneme s velikostí součinu

$$\begin{aligned}
|zw| &= |(z_1 + \mathrm{i}z_2)(w_1 + \mathrm{i}w_2)| = |z_1w_1 - z_2w_2 + \mathrm{i}(z_1w_2 + z_2w_1)| \\
&= \sqrt{(z_1w_1 - z_2w_2)^2 + (z_1w_2 + z_2w_1)^2} \\
&= \sqrt{z_1^2w_1^2 - 2z_1z_2w_1w_2 + z_2^2w_2^2 + z_1^2w_2^2 + 2z_1z_2w_1w_2 + z_2^2w_1^2} \\
&= \sqrt{z_1^2w_1^2 + z_2^2w_2^2 + z_1^2w_2^2 + z_2^2w_1^2} \\
&= \sqrt{(z_1^2 + z_2^2)(w_1^2 + w_2^2)} = |z||w|.
\end{aligned}$$

Dále, protože si můžeme přepsat $|\frac{z}{w}| = |z\frac{1}{w}|$ a tvrzení o velikosti součinu jsme již dokázali, stačí nám dokázat $|\frac{1}{w}| = \frac{1}{|w|}$, což snadno ověříme rozšířením zlomku

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{w}\right| &= \left|\frac{w_1 - \mathrm{i}w_2}{(w_1 + iw_2)(w_1 - iw_2)}\right| = \left|\frac{w_1 - \mathrm{i}w_2}{w_1^2 + w_2^2}\right| = \left|\frac{1}{|w|^2}(w_1 - \mathrm{i}w_2)\right| \\
&= \frac{1}{|w|^2}|w_1 - \mathrm{i}w_2| = \frac{1}{|w|^2}\sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \frac{1}{|w|}.
\end{aligned}$$

Dokažme předposlední tvrzení. Rozepsání po složkách a první Cauchy–Schwarzova nerovnost dávají

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z_1+w_1)^2+(z_2+w_2)^2 = z_1^2+w_1^2+z_2^2+w_2^2+2(z_1w_1+z_2w_2)\\ &\le |z|^2+|w|^2+2\sqrt{z_1^2+z_2^2}\sqrt{w_1^2+w_2^2} = (|z|+|w|)^2.\end{aligned}$$

Poslední tvrzení se získá z předposledního, stačí jen zopakovat postup z důkazu trojúhelníkové nerovnosti. □

Definice 2.2.55. Nechť $z = z_1 + \mathrm{i}z_2 \in \mathbb{C}$. Pak komplexní číslo $\overline{z} = z_1 - \mathrm{i}z_2$ nazveme *číslem komplexně sdruženým* k číslu z.

Tvrzení 2.2.56. *Nechť $z, w \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:*
(i) $\overline{\overline{z}} = z$, $|\overline{z}| = |z|$
(ii) $z\overline{z} = |z|^2$
(iii) $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ *pro* $z \neq 0$
(iv) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
(v) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
(vi) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ *pro* $w \neq 0$
(vii) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Důkaz. Důkazy tvrzení (i) a (iv) jsou triviální, (ii) a (iii) se snadno ověří výpočtem (dokonce jsme obojí viděli v důkazu předchozího tvrzení). Páté tvrzení plyne z

$$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{z_1w_1 - z_2w_2 + \mathrm{i}(z_1w_2 + z_2w_1)} = z_1w_1 - z_2w_2 - \mathrm{i}(z_1w_2 + z_2w_1)\\ \overline{z}\,\overline{w} &= (z_1 - \mathrm{i}z_2)(w_1 - \mathrm{i}w_2) = z_1w_1 - z_2w_2 - \mathrm{i}z_1w_2 - \mathrm{i}z_2w_1.\end{aligned}$$

Šesté tvrzení dostaneme ze třetího, pátého a druhého

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{z\overline{w}}{|w|^2}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{|w|^2}\right)}\overline{z\overline{w}} = \frac{1}{|w|^2}\overline{z}\,\overline{\overline{w}} = \frac{1}{w\overline{w}}\overline{z}w = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

Poslední tvrzení se snadno dokáže matematickou indukcí za pomoci tvrzení (v). □

Poznámka 2.2.57. Připomeňme, že komplexní číslo z se dá přepsat do takzvaného *goniometrického tvaru*

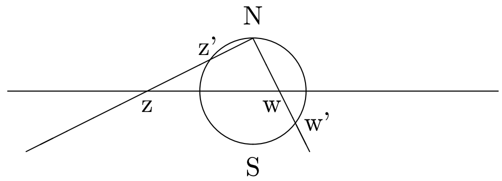
$$z = |z|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha),$$

kde úhel α je určen jednoznačně až na přičtení libovolného (třeba i záporného) násobku čísla 2π. Máme-li ještě dáno $w = |w|(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$, pak Moivreova věta říká, že

$$zw = |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)).$$

Moivreova věta se často používá při hledání komplexních odmocnin. Na důkaz této věty zatím nejsme vybaveni, neboť používá hlubší výsledky o chování funkce exp.

Poznámka 2.2.58. Množina komplexních čísel bývá ztotožňována s jednotkovou sférou v $\mathbb{R}^3$ s vynechaným severním pólem, která je umístěna tak, že komplexní rovina sféru protíná na rovníku a střed sféry odpovídá bodu $0 + i0 \in \mathbb{C}$. Tomuto ztotožnění se říká stereografická projekce a je definováno tak, že každému bodu $z \in \mathbb{C}$ přiřadíme průsečík naší sféry a polopřímky vycházející ze severního pólu a procházející bodem z. Body, pro něž platí $|z| = 1$ (tedy leží na rovníku), se zobrazí sami na sebe. Body, pro něž platí $|z| < 1$, se zobrazí na jižní polokouli, přičemž čím blíže jsou k počátku, tím blíže je jejich obraz k jižnímu pólu a samotný počátek se zobrazuje na jižní pól. Body, pro něž platí $|z| > 1$, se zobrazí na severní polokouli, přičemž čím je jejich velikost větší, tím blíže je jejich obraz k severnímu pólu.



Obrázek 2.1: Stereografická projekce.

2.2.6 Rozšířená reálná osa a komplexní rovina, okolí bodu v $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^*$ a $\mathbb{C}^*$

Definice 2.2.59. Množinu $\mathbb{R}^* = [-\infty, \infty]$ definujeme jako $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ spolu s pravidly:
(i) jestliže $x \in \mathbb{R}$, pak

$$x + (+\infty) = +\infty \qquad x + (-\infty) = -\infty$$

pro $x > 0$ navíc

$$x \cdot (+\infty) = +\infty \qquad x \cdot (-\infty) = -\infty$$

a pro $x < 0$ navíc

$$x \cdot (+\infty) = -\infty \qquad x \cdot (-\infty) = +\infty$$

(ii) definujeme následující operace mezi prvky $-\infty$ a $+\infty$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad -\infty + (-\infty) = -\infty \qquad \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty \qquad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

(iii) v předchozích pravidlech platí komutativita použitých operací
(iv) pro všechna $x \in \mathbb{R}$ zavádíme $-\infty < x < +\infty$.

Poznámka 2.2.60. (i) Z předchozí definice plynou ještě pravidla pro odčítání a dělení

$$x - (+\infty) = -\infty \qquad x - (-\infty) = +\infty \qquad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

pro $x > 0$

$$\frac{+\infty}{x} = +\infty \qquad \frac{-\infty}{x} = -\infty$$

pro $x < 0$

$$\frac{+\infty}{x} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{x} = +\infty$$

a

$$(+\infty) - (-\infty) = +\infty \qquad (-\infty) - (+\infty) = -\infty.$$

(ii) Nejsou definované výrazy

$$(+\infty) - (+\infty) \qquad (-\infty) - (-\infty) \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad 0 \cdot (\pm\infty) \qquad \frac{x}{0} \qquad \frac{\pm\infty}{0}.$$

Na rozšířené reálné ose máme následující důležitý výsledek, který zobecňuje existenci suprema a infima v $\mathbb{R}$ pro omezené množiny.

Tvrzení 2.2.61. *Každá podmnožina $\mathbb{R}^*$ má v $\mathbb{R}^*$ supremum a infimum.*

Důkaz. Ukažme nejprve, že existuje supremum. Mohou nastat tři případy. Pokud je naše množina neprázdná a omezená shora, podle definice reálných čísel má supremum, které je dokonce reálné. Prázdná množina má supremum $-\infty$, neboť to je nejmenší horní závora. Konečně, pokud množina není omezená shora, má jedinou horní závoru ∞. Při důkazu existence infima postupujeme podobně, v případě zdola omezené neprázdné množiny použijeme Úlohu 2.2.16. □

Poznámka 2.2.62. Prázdná množina je jediným případem, kdy neplatí $\inf M \leq \sup M$.

Definice 2.2.63. Množinu $\mathbb{C}^*$ definujeme jako $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ spolu s pravidly:
(i)

$$\frac{\infty}{0} = \infty \qquad \frac{1}{\infty} = 0 \qquad \frac{z}{0} = \infty$$

(ii) jestliže $z \in \mathbb{C}$, pak

$$z + \infty = \infty$$

(iii) jestliže $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pak

$$z \cdot \infty = \infty \qquad \frac{z}{0} = \infty.$$

Poznámka 2.2.64. Reálná osa je rozšířena o body $-\infty$ a $+\infty$ (korektní značení). Pokud nehrozí záměna za $\infty \in \mathbb{C}^*$, je možné zkrátit $+\infty \in \mathbb{R}^*$ na ∞. V těchto skriptech budeme toto zkrácení používat velice často v dlouhých pasážích, kde se pracuje jen s reálnými čísly.

Poznámka 2.2.65. Připomeňme si stereografickou projekci z Poznámky 2.2.58. Potom můžeme chápat obraz bodu ∞ jako severní pól N, současně si také lépe uvědomíme, proč rozšířená komplexní rovina obsahuje nekonečno jediné.

Nyní přistoupíme k definici pojmu okolí. To nám později umožní elegantně zadefinovat pojem limity funkce, aniž bychom v definici museli rozlišovat limitu ve vlastním bodě od limity v bodě nevlastním, stejně tak limitu vlastní od limity nevlastní.

Definice 2.2.66. Nechť $\varepsilon > 0$ a $x \in \mathbb{R}^*$. Epsilonové *okolí* bodu x definujeme jako

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x) := \begin{cases} (x-\varepsilon, x+\varepsilon) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \\ (\varepsilon, +\infty] & \text{pro } x = +\infty \\ [-\infty, -\varepsilon) & \text{pro } x = -\infty. \end{cases}$$

Levé epsilonové okolí bodu $x \in (-\infty, \infty]$ definujeme jako

$$\mathcal{U}_\varepsilon^-(x) := \begin{cases} (x-\varepsilon, x] & \text{pro } x \in \mathbb{R} \\ (\varepsilon, +\infty] & \text{pro } x = +\infty. \end{cases}$$

Analogicky definujeme pravé epsilonové okolí $\mathcal{U}_\varepsilon^+(x)$ bodu $x \in [-\infty, +\infty)$.

Poznámka 2.2.67. V aplikacích nás budou zajímat především velice malá okolí. Tedy pro $x \in \mathbb{R}$ bude $\varepsilon > 0$ velice malé číslo. Naopak, například pro $x = +\infty$ se okolí zmenšují (ve smyslu množství bodů obsažených v uvažované množině) se zvětšujícím se ε. Protože v matematice je zvykem, že znak ε reprezentuje velmi malé číslo, raději v takové situaci budeme používat značení $\mathcal{U}_K(\infty) = (K, +\infty]$.

Zavedeme si ještě pojem prstencového okolí (někdy se mu též říká okolí redukované), které získáme tak, že z klasického okolí vypustíme bod x.

Definice 2.2.68. Nechť $\varepsilon > 0$ a $x \in \mathbb{R}^*$. Epsilonové *prstencové okolí* bodu x definujeme jako $\mathcal{P}_\varepsilon(x) := \mathcal{U}_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$. Analogicky definujeme jednostranná prstencová okolí.

Poznámka 2.2.69. Pokud se mluví o redukovaném okolí, často se používá místo $\mathcal{P}_\varepsilon(x)$ značení $\mathcal{U}_\varepsilon^*(x)$.

Zavedeme si ještě okolí pro komplexní čísla. Přístup bude podobný jako u reálných čísel. Epsilonovým okolím bodu $z \in \mathbb{C}^*$ bude kruh se středem z a poloměrem ε. Epsilonovým okolím bodu $z \in \mathbb{C}$ bude doplněk kruhu se středem v počátku a poloměrem ε. Protože na $\mathbb{C}$ nemáme uspořádání, nic jako jednostranné okolí zde nedefinujeme.

Definice 2.2.70. Nechť $\varepsilon > 0$ a $z \in \mathbb{C}^*$. Epsilonové *okolí* bodu z definujeme jako

$$\mathcal{U}_\varepsilon(z) := \begin{cases} \{w \in \mathbb{C} \colon |w - y| < \varepsilon\} & \text{pro } z \in \mathbb{C} \\ \{w \in \mathbb{C} \colon |w| > \varepsilon\} \bigcup \{\infty\} & \text{pro } z = \infty. \end{cases}$$

Epsilonové *prstencové okolí* bodu z definujeme jako $\mathcal{P}_\varepsilon(x) := \mathcal{U}_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$.

2.2.7 Mohutnost množin, spočetné a nespočetné množiny

Cílem této kapitoly je naučit se porovnávat množiny podle počtu jejich prvků. U konečných množin se jejich mohutnost definuje jako počet jejich prvků. V případě nekonečné množiny budeme chtít mohutnost definovat tak, aby měla větší vypovídací hodnotu než je informace, že uvažovaná množina je nekonečná. O složitosti našeho úkolu vypovídá následující jednoduchý příklad. Uvažme množinu sudých přirozených čísel. Na jednu stranu se na tuto množinu dá pohlížet tak, že vznikla z množiny přirozených čísel odstraněním čísel lichých, a proto by měla mít menší mohutnost než má $\mathbb{N}$. Na druhou stranu uvedená množina mohla také být zkonstruována tak, že jsme do ní umístili dvojnásobek každého přirozeného čísla a pak by měla mít stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$. Jako rozumná se ukazuje následující definice.

Definice 2.2.71. Nechť A, B jsou dvě množiny. Řekneme, že A má *stejnou nebo menší mohutnost* než B, píšeme $\mathrm{m}(A) \leq \mathrm{m}(B)$, jestliže existuje prosté zobrazení množiny A do množiny B.
Řekneme, že A má *stejnou mohutnost* jako B, píšeme $\mathrm{m}(A) = \mathrm{m}(B)$, jestliže existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B.
Řekneme, že A má *menší mohutnost* než B, píšeme $\mathrm{m}(A) < \mathrm{m}(B)$, jestliže $\mathrm{m}(A) \leq \mathrm{m}(B)$ a neplatí $\mathrm{m}(A) = \mathrm{m}(B)$.

Velice užitečná je následující věta. Její důkaz je možno nalézt například v [BaSt TeMno].

Věta 2.2.72 (Cantor–Bernsteinova věta)**.** *Nechť A, B jsou dvě množiny. Jestliže $\mathrm{m}(A) \leq \mathrm{m}(B)$ a $\mathrm{m}(B) \leq \mathrm{m}(A)$, pak $\mathrm{m}(A) = \mathrm{m}(B)$.*

Příklad 2.2.73. • Položme $A = \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}$. Pak $\mathrm{m}(A) = \mathrm{m}(\mathbb{N})$, neboť například $k \mapsto k^2$ je zobrazuje prostě $\mathbb{N}$ na A.
• Položme $A = \{1, 2, 3\}$. Pak $\mathrm{m}(A) \leq \mathrm{m}(\mathbb{N})$, neboť například identita zobrazuje A do $\mathbb{N}$. Na druhou stranu jakékoliv zobrazení A do $\mathbb{N}$ zobrazuje A na nejvýše tříprvkovou (tedy vlastní) podmnožinu $\mathbb{N}$, proto $\mathrm{m}(A) < \mathrm{m}(\mathbb{N})$.
• Nechť $A = (-1, 1)$. Pak $\mathrm{m}(A) = \mathrm{m}(\mathbb{R})$ díky funkci $x \mapsto \frac{2x}{1+|x|}$.

Není vůbec zřejmé, že mohutnost libovolné dvojice množin lze porovnat. Pokud se připustí *axiom výběru* (pro každou neprázdnou třídu neprázdných množin existuje funkce, která z každé množiny tohoto souboru vybírá právě jeden prvek), dá se ukázat, že pro každou dvojici množin A, B platí právě jedna z možností $\mathrm{m}(A) < \mathrm{m}(B)$, $\mathrm{m}(A) = \mathrm{m}(B)$, $\mathrm{m}(A) > \mathrm{m}(B)$. Blíže se lze o tom dočíst například v [BaSt TeMno].

V dalším se budeme zabývat mohutností $\mathbb{N}$. Pokud jsou tvrzení uvedena bez důkazu, je možno je nalézt například v [BaSt TeMno] či v [Ja DPI].

Tvrzení 2.2.74. *Každá nekonečná podmnožina $\mathbb{N}$ má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$.*

Ostatní podmnožiny $\mathbb{N}$ jsou konečné, proto mají mohutnost menší (neostrou nerovnost mezi mohutnostmi nám dá identita, navíc žádnou konečnou množinu zřejmě nemůžeme prostě zobrazit na celé $\mathbb{N}$). Platí dokonce následující tvrzení.

Tvrzení 2.2.75. *Žádná nekonečná množina nemůže mít menší mohutnost než* $\mathbb{N}$.

Definice 2.2.76. Množina se nazývá *spočetná*, má-li stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$. Množina, která má konečný počet prvků se nazývá *konečná*. Množina, která je konečná nebo spočetná se nazývá *nejvýše spočetná*, ostatní množiny se nazývají *nespočetné*. Značí se $\mathrm{m}(\mathbb{N}) = \aleph_0$.

Poznámka 2.2.77. (i) Symbol $\aleph$ označuje první písmeno hebrejské abecedy *alef*.
(ii) Spočetnost je v matematice velice důležitá vlastnost. Znamená, že je možné prvky dané množiny seřadit do nekonečné posloupnosti.

Tvrzení 2.2.78. (i) *Spočetná množina nemůže obsahovat nespočetnou podmnožinu.*
(ii) *Každá nekonečná množina obsahuje spočetnou podmnožinu.*
(iii) *Každá nekonečná podmnožina spočetné množiny je spočetná.*
(iv) *Sjednocení nejvýše spočetného systému spočetných množin je spočetné.*

Důkaz. Ukážeme si důkaz čtvrtého tvrzení neboť obsahuje velice důležitou konstrukci. Nechť máme spočetné množiny $A_1, A_2, \dots$ a jejich prvky jsou číslovány metodou $A_i = \{a_1^i, a_2^i, \dots\}$. Sjednocení seřadíme následující diagonální metodou (modifikace konstrukce v případě konečného počtu množin je jasná)

$$a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_1^3, a_2^2, a_3^1, a_1^4, a_2^3, a_3^2, a_4^1, \dots.$$

Pro lepší představu možná poslouží ilustrace na Obrázku 2.2.

$$\begin{array}{ccccc}
a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & \cdots \\
a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots \\
a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & \\
a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Obrázek 2.2: Seřazení do posloupnosti.

□

Poznámka 2.2.79. Pomocí diagonální metody z důkazu předchozího tvrzení lze snadno dokázat, že $\mathbb{N}^2$ je spočetná. Odtud je již jen krůček k tomu, abychom si uvědomili, že množina racionálních čísel je spočetná. Není také těžké metodu modifikovat pro důkaz spočetnosti $\mathbb{N}^3$, potažmo $\mathbb{N}^k$ s libovolným pevným $k \in \mathbb{N}$.

Tvrzení 2.2.80. *Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná.*

Důkaz. Stačí ukázat, že interval $(0,1)$ je nespočetný. Každé číslo z intervalu $(0,1)$ můžeme reprezentovat jeho nekonečným desetinným rozvojem (je-li konečný, doplníme nuly). Toto přiřazení bude jednoznačné, odstraníme-li desetinné rozvoje, obsahující od určité pozice samé devítky. Předpokládejme pro spor, že $(0,1)$ je spočetný. Pak můžeme všechny jeho prvky seřadit do posloupnosti. Máme tedy

$$\begin{array}{ccccc} 0, & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots \\ 0, & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots \\ 0, & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

a můžeme definivat číslo $a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ předpisem

$$a_k = \begin{cases} 2 & \text{pokud } a_k^k = 1 \\ 1 & \text{pokud } a_k^k \neq 1. \end{cases}$$

Naše nové číslo zřejmě splňuje $a \in (0,1)$. Bylo však zkonstruováno tak, že nemůže být obsaženo ve výše uvedené posloupnosti, což je spor s tím, že výše uvedená posloupnost obsahuje všechna čísla z intervalu $(0,1)$. □

Důsledek 2.2.81. *Iracionální čísla jsou nespočetná, je jich tedy mnohem více než čísel racionálních.*

Poznámka 2.2.82. (i) Mohutnost $\mathbb{R}$ se značí $2^{\aleph_0}$ a říká se jí mohutnost kontinua.
(ii) Neví se, zda mohutnost kontinua je nejmenší možná mohutnost nespočetné množiny (hypotéza kontinua). Ví se však, že toto tvrzení není možné dokázat ani vyvrátit pomocí axiomatické teorie množin, dokonce ani použitím axiomu výběru.
(iii) Platí, že $\mathrm{m}(\exp \mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$. Toto tvrzení může vypadat na první pohled překvapivé, neboť pro pevné $k \in \mathbb{N}$ je počet k-prvkových podmnožin $\mathbb{N}$ spočetný, stejně tak počet množin, kterým chybí právě k prvků, a nabízí se použití Tvrzení 2.2.78. Problémy však působí podmnožiny $\mathbb{N}$, které obsahují nekonečně prvků a zároveň neobsahují žádný prvek z nějaké nekonečné podmnožiny $\mathbb{N}$.

Shrnutí a závěrečné poznámky. V této kapitole jsme si zopakovali středoškolskou látku, na kterou budeme navazovat. Zároveň jsme si u důležitých objektů zavedli značení, které budeme ve skriptech používat. Připomněli jsme si dvouhodnotovou logiku a základy teorie množin. Ukázali jsme si axiomatické zavedení reálných čísel a pomocí nich jsme zavedli i další číselné obory. Současně jsme se naučili porovnávat libovolné, tedy i nekonečné množiny. Upozornili jsme ale i na některé komplikovanější věci, které jsou součástí základů matematiky. Ty nejsou a nemohou být tak průzračně jasné a nezpochybnitelné, jak se ještě počátkem 20. století někteří matematici a filozofové domnívali. Viděli jsme dokonce i tvrzení, která se nedají ani dokázat, ani vyvrátit.

I přesto jsme snad čtenáře přesvědčili, že v matematice (a zejména v pokročilé) se všechna tvrzení zdůvodňují, stejně tak správné řešení příkladu obsahuje podrobný postup, který dokazuje správnost řešení. Důkazy používají definice, axiomy a již dokázaná tvrzení pospojovaná za pomoci matematické logiky. Volba důkazových prostředků odpovídá očekávané úrovni čtenáře. Práci nám zefektivňují jednak různé symetrie (bývá například zvykem podrobně studovat jen vlastnosti suprema, vlastnosti infima se odvodí jen přechodem k množině přezrcadlené přes počátek) a navazování na předešlé výsledky.

Kapitola 3

Limita, spojitost a derivace funkce jedné reálné proměnné

Dříve než budeme definovat jeden ze základních pojmů matematické analýzy, limitu funkce, dohodněme se, že kromě poslední části budeme v celé kapitole uvažovat pouze reálné funkce, tj. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Až na konci kapitoly uvedeme několik poznámek týkajících se případu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Pro jednoduchost značení se dále domluvme, že v celé kapitole budeme předpokládat, že

$$x_0 \in (a, b) \subset D_f.$$

Počítáním limit a derivací na kraji definičního oboru (či případem se složitějším definičním oborem) se budeme zabývat později.

Upozorněme také, že ve většině vysokoškolských učebnic se nejprve probírají limity posloupností a teprve později se autoři věnují funkcím. K tomuto přístupu jsou didaktické důvody. Naše skripta jsou ale určena pro studenty, kteří matematiku aplikují v jiných vědách a pro ně je tedy důležité poměrně rychle dospět k pojmu funkce a definovat si základní pojmy: limity funkcí, spojitost a derivaci. Teprve později se vrátíme k pojmu limita posloupnosti, protože i s ním budeme samozřejmě potřebovat pracovat. Postup, kterým se co nejrychleji propracujeme k pojmu funkce a definujeme všechny základní pojmy, má také svá negativa. Některá tvrzení budeme potřebovat dříve, než je budeme schopni dokázat. Protože ale nepůjde o důkaz kruhem, není to žádný problém a tato didaktická oběť splní svůj účel; na konci této kapitoly zavedeme rigorózně všechny elementární funkce a budeme schopni s nimi pracovat.

Budeme zde sice probírat témata, která běžně bývají součástí středoškolské látky, ale půjdeme mnohem více do hloubky a budeme řešit obtížnější úlohy. Právě řešení obtížných úloh a práce se složitějšími funkcemi než jsou polynomy či takzvané elementární funkce vyžadují opustit neopatrný zmechanizovaný přístup k matematice, který by mohl v některých případech vést k nepravdivým výsledkům.

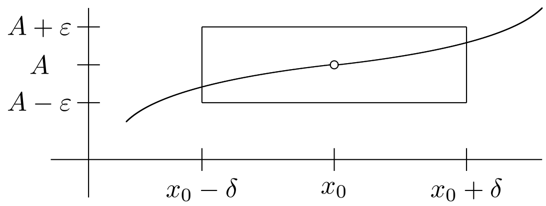
3.1 Limita funkce

Limita funkce je jeden z nejzákladnějších pojmů matematické analýzy, pomocí něhož se později definují další důležité pojmy jako jsou derivace, primitivní funkce, určitý integrál nebo součet řady. Počítat limity budeme potřebovat snad ve všech kapitolách. Navíc budeme muset umět s tímto pojmem pracovat i v důkazech vět. A to dokonce i v tak pokročilých partiích, jako jsou třeba parciální diferenciální rovnice.

Definice 3.1.1 (Definice limity funkce)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $A \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že A je *limitou funkce f pro x jdoucí k x_0*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A).$$

V takovém případě píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $f(x) \to A$ pro $x \to x_0$, nebo také $f(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$.



Obrázek 3.1: Limita funkce: pro dané $\varepsilon > 0$ hledáme $\delta > 0$ tak, aby na množině $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ byl graf funkce uvnitř obdélníku o rozměrech $2\delta\times 2\varepsilon$ se středem v bodě (x_0, A). Tento bod ale bodem grafu být nemusí a $(x_0, f(x_0))$ nemusí v tomto obdélníku ležet či nemusí být vůbec definován.

Právě definovaný pojem si nejprve ilustrujme na několika příkladech, pak se budeme věnovat jeho vlastnostem.

Příklad 3.1.2. Uvažme funkci $f(x) = x$, pro $x \in \mathbb{R}$, a bod $x_0 = 1$. Ukažme, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Chceme k němu najít $\delta > 0$, aby

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Longrightarrow \quad 0 \le |f(x)-1| < \varepsilon.$$

Při naší volbě funkce f však máme $|f(x)-1| = |x-1|$, a proto vidíme, že stačí volit $\delta := \varepsilon$.

Drobnou modifikací postupu lze ukázat, že $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$.

Příklad 3.1.3. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Uvažme funkci $f(x) \equiv c$ na $\mathbb{R}$. Pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ se dá snadno ukázat (podobně jako v předchozím příkladu), že $\lim_{x\to x_0} c = c$.

Příklad 3.1.4. Uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Tvrdíme, že $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Ověření je zde obzvlášť snadné, neboť pro libovolné $\delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ máme

$$0 < |x - 0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad x \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - 0| = 0 < \varepsilon.$$

Příklad 3.1.5. Uvažme Dirichletovu funkci

$$f(x) = D(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tvrdíme, že neexistuje $A \in \mathbb{R}$ splňující $A = \lim_{x \to 0} f(x)$. Postupujme sporem. Uvážíme dva případy. Nejprve předpokládejme, že nějaké $A \leq \frac{1}{2}$ je limitou. Pak by při volbě $\varepsilon = \frac{1}{4}$ muselo existovat $\delta > 0$ takové, že

$$x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\} \quad \Longrightarrow \quad |A - f(x)| < \frac{1}{4}.$$

Odtud plyne

$$f(x) = A + f(x) - A \leq A + |f(x) - A| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1.$$

To však není možné, neboť otevřený interval $(0, \delta)$ obsahuje nekonečně mnoho racionálních čísel (stačilo by jedno) a v nich je funkční hodnota rovna jedné.

Případ $A > \frac{1}{2}$ se vyloučí podobným způsobem (využijeme toho, že každý otevřený interval obsahuje nekonečně mnoho iracionálních čísel).

Příklad 3.1.6. Funkce $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$, $x \neq 0$, také nemá limitu v počátku. Všimněme si, že v libovolně malém prstencovém okolí bodu 0 máme nekonečně mnoho bodů, ve kterých je hodnota funkce například 1, tj. $x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$, a bodů, ve kterých je hodnota funkce například 0, tj. $y_n = \frac{1}{\pi n}$. Zde bereme jen $n \geq n_0$ pro dostatečně velké $n_0 \in \mathbb{N}$.

Příklad 3.1.7. Uvažme funkci $f(x) = x^2$, pro $x \in \mathbb{R}$, a bod $x_0 = 2$. Ukažme, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = 4$. Zvolme libovolné $\varepsilon \in (0, 2)$ (rozmyslete si, že omezení čísla ε shora dvojkou v definici limity nic nezmění). Pro $x \in (\sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon})$ pak máme

$$4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon \qquad \text{neboli} \qquad |x^2 - 4| < \varepsilon.$$

Položíme-li nyní $\delta_1 = 2 - \sqrt{4 - \varepsilon} > 0$, $\delta_2 = \sqrt{4 + \varepsilon} - 2 > 0$ a $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, platí

$$(\sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon}) = (2 - \delta_1, 2 + \delta_2) \supset (2 - \delta, 2 + \delta).$$

Celkově máme

$$x \in (2 - \delta, 2 + \delta) \quad \Longrightarrow \quad |x^2 - 4| < \varepsilon.$$

Poznámka 3.1.8. (i) V předchozích příkladech jsme viděli, že limita vůbec existovat nemusí.
(ii) Také jsme viděli, že i v případě existence limity nemusí obecně platit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Je to způsobeno tím, že v definici limity bereme x pouze z prstencového okolí.
(iii) Příklad 3.1.2 nám ukázal, že limitní hodnota se nemusí rovnat žádné hodnotě z prstencového okolí.
(iv) To, že se x bere z prstencového okolí, je motivováno aplikacemi, v nichž často není potřeba vůbec vědět, jaká je hodnota funkce f v bodě x_0, případně tam funkce nemusí být vůbec definována. Pojem limity je lokální, roli tady hrají jen hodnoty funkce blízko bodu x_0. Proto jsou důležité jen malé hodnoty ε.
(v) Při ověřování limity z definice k danému ε hledáme jakékoliv kladné δ splňující požadovanou podmínku. Není nutné hledat δ tak, aby bylo největší možné. Například v Příkladu 3.1.2 jsme namísto volby $\delta = \varepsilon$ mohli použít třeba $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ či $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$ a ničemu by to nevadilo.

3.1.1 Vlastní limita ve vlastním bodě

Nebude-li výslovně uvedeno jinak, v dalším se budeme věnovat pouze vlastním limitám ve vlastních bodech. V této situaci máme

$$x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

a

$$f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A) \quad \Longleftrightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Poznámka 3.1.9. (i) Stručný zápis definice limity pomocí kvantifikátorů je například následující

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \quad f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A). \tag{3.1.1}$$

(ii) Snadno se dá nahlédnout, že následující výroky jsou ekvivalentní s definicí limity

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \quad & 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \\
\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \quad & 0 < |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \\
\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \quad & 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon \\
\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \quad & 0 < |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon \\
\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \quad & 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < 2\varepsilon \\
\exists C > 0 \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \quad & 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < C\varepsilon \\
\exists \varepsilon_0 > 0 \, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \quad & 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cvičení 3.1.10. Dokažte, že všechny výroky v Poznámce 3.1.9 (ii) jsou ekvivalentní s definicí limity (3.1.1).

Poznámka 3.1.11. (i) Přestože jsme si ukázali, že v definici limity máme jistou volnost, je stále nutné zachovávat značnou opatrnost. Už například prohození kvantifikátorů by mělo dalekosáhlé následky. Uvážíme-li například výrok

$$\exists \delta > 0 \, \forall \varepsilon > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

snadno nahlédneme, že je ekvivalentní s

$$\exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) = A,$$

což je přísnější podmínka, než je definice limity.
(ii) Negace výroku definujícího vlastnost $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ je

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \quad f(x) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(A).$$

Protože výrok $|f(x) - A| \geq \varepsilon$ implikuje, že $|f(x) - A|$ je větší než všechna čísla z intervalu $(0, \varepsilon)$, negací $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ je také

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \, \forall \delta > 0 \, \exists x \in P_\delta(x_0) \quad |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

(znovu vidíme, že v definici limity jsou důležitá jen velmi malá $\varepsilon > 0$).
(iii) O naší definici limity se někdy říká, že je moderní. Ještě zhruba před dvěma sty lety by se výrok $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ definoval jinak a sice velmi dlouhým výčtem situací.
(iv) Naše definice limity má jednu zvláštnost. Stručný matematický zápis vypadá takto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \quad f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A).$$

Přesto se v definici používá slůvko „jestliže“, které značí implikaci, nikoliv ekvivalenci. Tento přístup se používá v definicích napříč celou matematikou a dokonce i v cizojazyčné literatuře. Domníváme se, že tato zvláštnost v matematické kultuře může být způsobena tím, že mnoho matematických termínů je reprezentovaných slovy, která často mají v jiných oborech odlišný význam.

Přirozenou otázkou je, zda je limita určena jednoznačně (pokud existuje).

Věta 3.1.12 (Jednoznačnost limity)**.** *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Pak existuje nejvýše jedna limita funkce* f *v bodě* x_0.

Důkaz. Postupujme sporem. Nechť čísla A_1, A_2 splňují definici limity a $A_1 \neq A_2$. Volme $\varepsilon := \frac{|A_1 - A_2|}{3} > 0$. Podle definice limity pak musí existovat $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon$$

a

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon.$$

Zafixujeme-li nyní libovolné x splňující $0 < |x - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, dostáváme

$$3\varepsilon = |A_1 - A_2| = |A_1 - f(x) + f(x) - A_2| \leq |A_1 - f(x)| + |f(x) - A_2| < 2\varepsilon,$$

což nám dává spor. $\square$

Dalším významným pojmem jsou jednostranné limity, které nám často dávají jemnější informaci než limita.

Definice 3.1.13. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je *limitou funkce f pro x jdoucí k x_0 zprava*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$x \in \mathcal{P}_\delta^+(x_0) \quad\Longrightarrow\quad f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A).$$

V takovém případě píšeme $\lim_{x\to x_{0+}} f(x) = A$ nebo $f(x) \to A$ pro $x \to x_{0+}$, nebo také $f(x) \overset{x\to x_{0+}}{\longrightarrow} A$.

Limita zleva (tedy $\lim_{x\to x_{0-}} f(x)$) se definuje analogicky za pomoci levého prstencového okolí.

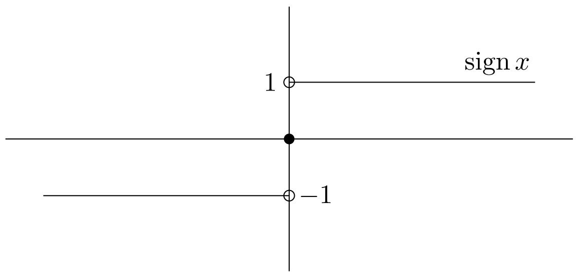
Příklad 3.1.14. Funkce signum je definována předpisem

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Snadno se dá ověřit, že

$$\lim_{x\to 0_+} \operatorname{sign} x = 1, \qquad \lim_{x\to 0_+} \operatorname{sign} x = -1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 0} \operatorname{sign} x \text{ neexistuje}$$

(první dva výsledky ověříme přímo z definice, třetí získáme postupem z Příkladu 3.1.5). Náčrt grafu této funkce je na Obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Náčrt části grafu funkce sign.

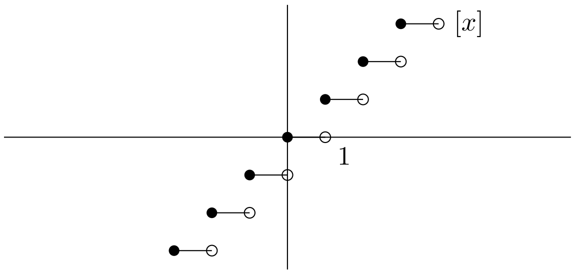
Příklad 3.1.15. Uvažujme funkci $[x]$ (celá část x) definovaná slovně jako: $[x]$ je největší celé číslo, které je menší nebo rovno x, tj.

$$[x] = n, \qquad n = \max\{k \in \mathbb{Z}; k \le x\}.$$

Potom platí

$$\lim_{x\to k_+} [x] = k, \qquad \lim_{x\to k_-} [x] = k-1, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Náčrt grafu funkce je na Obrázku 3.3.



Obrázek 3.3: Náčrt části grafu funkce $x \mapsto [x]$.

Nyní se zabývejme vztahem jednostranných limit a limity (oboustranné).

Věta 3.1.16 (Vztah limity k jednostranným limitám)**.** *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *a* $A \in \mathbb{R}$. *Pak*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_{0+}} f(x) = \lim_{x\to x_{0-}} f(x) = A.$$

Důkaz. Implikace „⇒“ je zřejmá. Umíme-li k danému $\varepsilon > 0$ najít $\delta > 0$ takové, že na množině $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{0\}$ platí požadovaná nerovnost, tato nerovnost bude jistě platit jak na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$, tak i na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$.

Dokažme implikaci „⇐“. Nechť platí $\lim_{x\to x_{0+}} f(x) = \lim_{x\to x_{0-}} f(x) = A$. K danému $\varepsilon > 0$ pak existují $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$x \in (x_0 - \delta_1, x_0) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad x \in (x_0, x_0 + \delta_2) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Stačí tedy položit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ a jsme hotovi. □

Poznámka 3.1.17. Poslední věta se často používá, když chceme ukázat, že nějaká limita neexistuje. Vzpomeňme na funkci signum, která má rozdílné jednostranné limity v počátku.

Už z Příkladu 3.1.5 se dá odtušit, že počítání limit přímo z definice nemusí být příliš příjemné. Budeme používat elegantnější přístup, kdy si dokážeme několik obecných tvrzení o limitách a ta pak budeme kombinovat s několika málo výsledky, které získáme přímo z definice (například díky znalosti limity konstanty a identity budeme schopni počítat limity všech polynomů).

Věta 3.1.18 (Limita absolutní hodnoty)**.** *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *a* $A \in \mathbb{R}$. *Jestliže* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, *pak* $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad \text{pro } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Díky trojúhelníkové nerovnosti také máme

$$||f(x)| - |A|| \leq |f(x) - A| \qquad \text{pro všechna } x \in D_f,$$

a proto $||f(x)| - |A|| < \varepsilon$ pro $0 < |x - x_0| < \delta$, což jsme chtěli ukázat. □

Poznámka 3.1.19. Obrácená implikace v předchozí větě obecně neplatí. Stačí uvážit funkci signum, pro niž platí $\lim_{x\to 0} |\operatorname{sign} x| = 1$, ale $\lim_{x\to 0} \operatorname{sign} x$ neexistuje.

Na druhou stranu, v některých situacích platí i obrácená implikace.

Tvrzení 3.1.20. *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}$. Pak:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad &\iff \qquad \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0\\ \lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad &\iff \qquad \lim_{x\to x_0} |f(x) - A| = 0.\end{aligned}$$

Důkaz. První ekvivalence je jen speciálním případem druhé ekvivalence (stačí volit $A := 0$). Druhá ekvivalence plyne přímo z definice limity, neboť podmínka $f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)$ je ekvivalentní podmínce $|f(x) - A| < \varepsilon$. □

Uveďme si ještě dva výsledky o tom, jak hodnota limity ovlivňuje chování funkce na malých prstencových okolích. Tyto výsledky budeme často používat v důkazech.

Věta 3.1.21 (Vztah limity a omezenosti)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Pak je f na jistém prstencovém okolí bodu x_0 omezená.*

Důkaz. Volme $\varepsilon = 1$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že na $\mathcal{P}_\delta(x_0)$ platí $|f(x) - A| < 1$. Proto

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \le |f(x) - A| + |A| \le 1 + |A|.$$

□

Poznámka 3.1.22. Čtenáři bychom doporučili, aby si předchozí větu zapamatoval ve znění: má-li funkce v nějakém bodě vlastní limitu, pak je na jistém prstencovém okolí tohoto bodu omezená.

Důraz klademe na slovo „vlastní“. V této kapitole toto slovo není podstatné, neboť zde pracujeme jen s vlastními limitami. Na druhou stranu, časem začneme připouštět i limity nevlastní a nevlastní limita omezenost vylučuje.

Věta 3.1.23 (Nenulová limita a odraženost od nuly)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak je f na jistém prstencovém okolí bodu x_0 odražená od nuly. Speciálně, prstencové okolí je možné volit tak, že $|f|$ je na něm odražena od nuly hodnotou $\frac{|A|}{2}$.*

Důkaz. Volme $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že na $\mathcal{P}_\delta(x_0)$ platí $|f(x) - A| \le \frac{A}{2}$, a proto

$$|f(x)| = |A - (A - f(x))| \ge ||A| - |f(x) - A|| \ge |A| - |f(x) - A| \ge A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}.$$

□

Nyní již můžeme přistoupit ke slíbeným větám, které nám ušetří mnoho práce při počítání limit.

Věta 3.1.24 (Aritmetika limit)**.** *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}$ a nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ a $\lim_{x\to x_0} f(x) = B$. Pak:*
(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = A + B$
(ii) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB$
(iii) *pokud navíc platí $B \neq 0$, máme $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.*

Důkaz. (i) Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu existují $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$x \in \mathcal{P}_{\delta_1}(x_0) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad x \in \mathcal{P}_{\delta_2}(x_0) \Longrightarrow |g(x) - B| < \varepsilon.$$

Položíme-li $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, na $\mathcal{P}_\delta(x_0)$ platí obě výše uvedené nerovnosti a dostáváme

$$|f(x) + g(x) - (A + B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < 2\varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, jsme hotovi (čtenáři zde doporučujeme, aby si připomněl ekvivalentní definice limity z Poznámky 3.1.9 (ii)).

(ii) Zvolme $\varepsilon > 0$. Je-li $\delta > 0$ dostatečně malé (upřesníme níže), máme

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - AB| &= |f(x)g(x) - f(x)B + f(x)B - AB| \\ &\leq |f(x)||g(x) - B| + |B||f(x) - A| < (|A| + |B| + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Zvolili jsme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, kde $\delta_1, \delta_2 > 0$ bereme jako v části (i), a $\delta_3 > 0$ získáme aplikací Věty o vztahu limity a omezenosti (Věta 3.1.21), tedy

$$x \in \mathcal{P}_{\delta_3}(x_0) \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| \leq |A| + 1.$$

(iii) Protože již máme dokázanou část (ii), stačí nám ověřit jednodušší tvrzení $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Je-li $\delta > 0$ dostatečně malé (upřesníme níže), máme

$$\Big|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\Big| = \Big|\frac{B - f(x)}{g(x)B}\Big| = \frac{|f(x) - B|}{|g(x)||B|} \leq \frac{\varepsilon}{|B|\frac{|B|}{2}} = \frac{2}{B^2}\varepsilon.$$

Zde volíme $\delta = \min\{\delta_2, \delta_4\}$, kde $\delta_2 > 0$ je jako v části (i) a $\delta_4 > 0$ jsme získali aplikací Věty o nenulové limitě a odraženosti od nuly (Věta 3.1.23), tedy

$$x \in \mathcal{P}_{\delta_4}(x_0) \quad \Longrightarrow \quad |g(x)| \geq \frac{|B|}{2}.$$

□

Poznámka 3.1.25. (i) Všechny části věty jsou opět implikace, které nelze obrátit. Například při volbě $x_0 = 0$, $f(x) = \operatorname{sign} x$ a $g(x) = -\operatorname{sign} x$ jednotlivé limity neexistují, zatímco limita součtu existuje.
(ii) Podmínka $B = 0$ ve třetí části věty se nedá vypustit. Jednak by nám pak hrozila nevlastní limita, ale ani výraz $\frac{0}{0}$ se nedá interpretovat jednoznačně, jak ukazují následující příklady

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0.$$

(iii) Aritmetika limit se dá aplikovat vícenásobně. Pokud například platí ($x_0 \in \mathbb{R}$ a $A, B, C \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = B \qquad \lim_{x\to x_0} h(x) = C,$$

pak $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)+h(x)) = A+B+C$. Skutečně, první aplikací aritmetiky limit dostáváme $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = A+B$ a druhá aplikace dává

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)+h(x)) &= \lim_{x\to x_0}\big((f(x)+g(x))+h(x)\big)\\ &= \lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) + \lim_{x\to x_0} h(x) = (A+B)+C.\end{aligned}$$

(iv) Ve větě jsme nezmínili pravidlo pro výpočet limity rozdílu, které se dá snadno odvodit z pravidel (i) a (ii). Skutečně, nejprve máme podle (ii)

$$\lim_{x\to x_0} -g(x) = -\lim_{x\to x_0} g(x) = -B$$

(použili jsme pomocnou funkci $h(x) \equiv -1$) a teď už stačí jen použít (i) na součet $f(x) + (-g(x))$.

Úloha 3.1.26. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{2x+1}.$$

Připomeňme, že už umíme počítat limitu identity a konstanty. Nejprve si ukážeme postup, který s aritmetikou limit pracuje velice opatrně.

Řešení: Podle aritmetiky limit máme

$$\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0} x = 0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 0} 3x = \lim_{x\to 0} 3 \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Proto aritmetika limit dává

$$\lim_{x\to 0}(x^2+3x) = 0.$$

Použijme opět aritmetiku limit

$$\lim_{x\to 0} 2x = \lim_{x\to 0} 2 \lim_{x\to 0} x = 0,$$

a proto další užití aritmetiky limit dává

$$\lim_{x\to 0}(2x+1) = 1.$$

Teď již stačí jen použít aritmetiku limit v kombinaci se získanými mezivýsledky:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{2x+1} = \frac{\lim_{x\to 0}(x^2+3x)}{\lim_{x\to 0}(2x+1)} = \frac{0}{1} = 0.$$

☆

Nyní si předvedeme elegantnější přístup, který však vyžaduje jistou opatrnost.

Řešení: Několikanásobným užitím aritmetiky limit dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{2x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}(x^2+3x)}{\lim_{x\to 0}(2x+1)}=\frac{\lim_{x\to 0}x^2+\lim_{x\to 0}3x}{\lim_{x\to 0}2x+\lim_{x\to 0}1}$$
$$=\frac{\lim_{x\to 0}x\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}3\lim_{x\to 0}x}{\lim_{x\to 0}2\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}=\frac{0\cdot 0+3\cdot 0}{2\cdot 0+1}=0.$$

☆

Poznámka 3.1.27. (i) Druhý z postupů je přehlednější a také věrněji sleduje pořadí úvah řešitele.
(ii) Druhý postup je korektní teprve ve chvíli, kdy je úplně dokončen. Skutečně, například první ze čtyř rovností je zdůvodněna teprve ve chvíli, kdy zjistíme, že čitatel má konečnou limitu a jmenovatel má limitu konečnou a nenulovou. To se ale dozvíme až na konci výpočtu. Této situaci se někdy říká *podmíněná rovnost*.

Z předchozích příkladů by se mohlo zdát, že zaručenou metodou pro hledání limit racionálních lomených funkcí (podíl dvou polynomů) je rozložení zadání na konstantní či identická zobrazení a pak už jen využití aritmetiky limit. Skutečností ovšem je, že neopatrnou aplikací aritmetiky limit může řešitel od správného řešení zbloudit, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 3.1.28. Výsledek $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$ se nedá získat vzorečkem pro limitu podílu, neboť jmenovatel má nulovou limitu. Tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}\neq\frac{\lim_{x\to 0}x^2}{\lim_{x\to 0}x}.$$

Na druhou stranu, $\frac{x^2}{x}=x$ pro $x\neq 0$, a proto

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0.$$

Odlišné chování uvažovaných funkcí v počátku znamená, že se jedná o různé funkce. Tyto funkce se však rovnají na všech prstencových okolích počátku, je tedy jedno, se kterou z nich při počítání limit pracujeme.

Úloha 3.1.29. Spočtěte limitu $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x^3-x^2-x+1}$.

Ukážeme si dvě řešení využívající myšlenku z předchozího příkladu.

Řešení: Provedeme rozklad na kořenové činitele, provedeme částečné vykrácení (vzniklá funkce se pak bude shodovat s původní na jistém prstencovém okolí) a pak použijeme aritmetiku limit

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x+1)}=\frac{1}{2}.$$

☆

Poznámka 3.1.30. (i) Ke čtenáři jsme zatím byli šetrní v tom, že v našich příkladech má vždy kořenový činitel s nulovou limitou v čitateli mocninu větší nebo rovnou své mocnině ve jmenovateli. Opačná situace vede buď na nevlastní limitu, nebo limita neexistuje (závisí to na paritě rozdílu mocnin; tyto problémy budeme studovat až v kapitole o nevlastních limitách).
(ii) Pro naše řešení nebyl klíčový rozklad na všechny kořenové činitele. Stačilo nalézt nejvyšší mocninu, se kterou se činitel $(x-1)$ vyskytuje ve jmenovali (zde je nutné ovládat dělení polynomů) a starat se jen o ni.

Další možností řešení naší úlohy je převedení na zkoumání limity v počátku. To má své výhody, které shrneme pod výpočtem.

Řešení: Přepíšeme si $x = 1 + t$, provedeme částečné vykrácení a pak použijeme aritmetiku limit

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2+x}{x^3-x^2-x+1} &= \lim_{t\to 0} \frac{(t+1)^3-2(t+1)^2+(t+1)}{(t+1)^3-(t+1)^2-(t+1)+1} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t^3+t^2}{t^3+2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t+1}{t+2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

☆

Poznámka 3.1.31. (i) Přepsání $x = 1 + t$ je jednoduchá úprava, která zachovává vzdálenosti ($|x-1| = |t-0|$), v definici limity bude k danému $\varepsilon > 0$ použitelné stejné $\delta > 0$, které šlo použít před úpravou. Jedná se tedy o korektní operaci, které není nutné vznešeně říkat substituce a ani není nutné používat Větu o limitě složené funkce (Věta 3.1.46), která bude uvedena níže.
(ii) Použitá metoda je příjemná v tom, že jsme poměrně nepříjemné dělení polynomů nahradili jen sčítáním a umocněním polynomu stupně jedna.
(iii) Hlavním přínosem převádění na limitu v počátku je však to, že budeme-li takto počítat všechny limity, budeme moci snáze používat zkušenosti z předešlých výpočtů. Tento přístup je velice rozšířený, proto bývá zvykem hlubší výsledky uvádět pro limitu v počátku.

V předchozí části textu jsme si ukázali některé jevy související s tím, že aritmetika limit není ekvivalentní úpravou. Viděli jsme, že jistotu o oprávněnosti použití aritmetiky získáme až po úspěšném dokončení celého výpočtu, neboť v průběhu tohoto výpočtu ještě nemáme informaci o splnění předpokladů na existenci dílčích limit. V průběhu tohoto výpočtu navíc nikdy nevíme, zda se skutečně blížíme k cíli (pokud jsme se ovšem nedostali do situace, kde nám pomůže zkušenost s podobnými úlohami). Navíc může dojít k tomu, že nenávratně sejdeme ze správné cesty (v situaci z Příkladu 3.1.28 se po přehození limit na čitatele a jmenovatele už nemůžeme vrátit). V některých situacích však aritmetika limit ekvivalentní úpravou je, máme tedy jistotu, že jsme z cesty nesešli.

Tvrzení 3.1.32. *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. Pak*
(i) $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = A + \lim_{x\to x_0} g(x)$
(ii) *pokud navíc platí $A \neq 0$, máme* $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = A \lim_{x\to x_0} g(x)$,

kde v obou případech rovnost navíc chápeme tak, že limita na levé straně existuje a je konečná právě tehdy, když existuje konečná $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

Důkaz. Nejprve dokažme (i). Pokud existuje konečná $\lim_{x\to x_0} g(x)$, podle aritmetiky limit existuje i limita levé strany a nastává požadovaná rovnost. Pokud existuje limita levé strany, napíšeme si $g(x) = (f(x) + g(x)) - f(x)$ a opět použijeme aritmetiku limit.

Zabývejme se tvrzením (ii). Pokud existuje konečná $\lim_{x\to x_0} g(x)$, existence a rovnost plynou z aritmetiky limit. Pokud existuje limita levé strany, napíšeme si $g(x) = \frac{f(x)g(x)}{f(x)}$ a aritmetika limit dokončí důkaz. □

Příklad 3.1.33. Pokud bychom dostali variantu Úlohy 3.1.29

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x^3-2x^2+x)}{(x+2)(x^3-x^2-x+1)} \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x+2} + \frac{x^3-2x^2+x}{x^3-x^2-x+1}\right),$$

máme jistotu, že nic nezkazíme prvním krokem výpočtu

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x^3-2x^2+x)}{(x+2)(x^3-x^2-x+1)} &= \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+2}\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x^3-x^2-x+1}\\ &= \frac{2}{3}\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x^3-x^2-x+1},\end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x+2} + \frac{x^3-2x^2+x}{x^3-x^2-x+1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+2} + \lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x^3-x^2-x+1}\\ &= \frac{2}{3} + \lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x^3-x^2-x+1}.\end{aligned}$$

Nyní se zaměříme na vztah limit a nerovností.

Věta 3.1.34 (Zachování nerovnosti při limitním přechodu)**.** *Nechť* $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$, $A, B\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ *a* $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$. *Jestliže* $f \le g$ *na jistém prstencovém okolí bodu* x_0, *pak* $A \le B$.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $B < A$. Pak můžeme položit $\varepsilon = \frac{1}{3}(A-B) > 0$. Podle předpokladů věty lze nalézt $\delta > 0$ tak malé, že na $\mathcal{P}_\delta(x_0)$ platí

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \qquad |g(x) - B| < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad f(x) \le g(x).$$

Odtud

$$f(x) \le g(x) < B + \varepsilon = A - 2\varepsilon < f(x) - \varepsilon,$$

což vede ke sporu. □

Poznámka 3.1.35. (i) V důkazu jsme poněkud zrychlili naši standardní proceduru při práci s prstencovým okolím. Číslo $\delta > 0$ lze opět volit jako $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, kde δ_1 získáme z limitního chování funkce f, δ_2 nám obstará limitní

chování funkce g a δ_3 je takové, že $f \le g$ na $\mathcal{P}_{\delta_3}(x_0)$.
(ii) Ostrá nerovnost se při limitním přechodu obecně nezachovává. Stačí uvážit $f \equiv 0$ a $g(x) = x^2$. Pak $f < g$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ale

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x).$$

Věta 3.1.36 (O dvou strážnících)**.** *Nechť $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ a nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} h(x) = A$. Jestliže $f \le g \le h$ na jistém prstencovém okolí bodu x_0, pak $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pro dostatečně malé $\delta > 0$ pak máme na $P_\delta(x_0)$

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \qquad |h(x) - A| < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad f(x) \le g(x) \le h(x).$$

Proto

$$A - \varepsilon \le f(x) \le g(x) \le h(x) \le A + \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, podle definice limity máme $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$. □

Úloha 3.1.37. Spočtěte $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}$, kde $k \in \mathbb{N}$.

Řešení: Aplikací vzorečku pro $a^k - b^k$ (Cvičení 2.2.48) dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-1}{x} \frac{1}{\sqrt[k]{1+x}^{k-1} + \sqrt[k]{1+x}^{k-2} + \cdots + 1}.$$

Dále, protože

$$1 - x \le 1 \le \sqrt[k]{1+x} \le 1 + x \qquad \text{pro } x > 0$$

a

$$1 + x \le \sqrt[k]{1+x} \le 1 \le 1 + |x| \qquad \text{pro } -1 < x < 0,$$

máme na $\mathcal{P}_1(0)$

$$1 - |x| \le \sqrt[k]{1+x} \le 1 + |x|.$$

Odtud již snadno pomocí Věty o dvou strážnících (Věta 3.1.36) dostáváme, že platí $\lim_{x\to 0} \sqrt[k]{1+x} = 1$. Celkově z aritmetiky limit máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{1^{k-1} + 1^{k-2} + \cdots + 1^1 + 1} = \frac{1}{k}.$$

☆

Vraťme se ještě jednou k aritmetice limit. Je nutné používat pouze v situacích popsaných v odpovídající větě. Jinak riskujeme špatný výsledek, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 3.1.38. Spočtěme

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 2x + x^2}{x - 1}.$$

Správný postup je

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}+\frac{1-2x+x^2}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^2}{(x-1)}=\frac{1}{2}.$$

Ale někdo by mohl uvažovat špatně následujícím způsobem

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-2x+x^2}{x-1}\neq\lim_{x\to 1}\frac{1-2x+x^2}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x-1}=0.$$

Této typické chybě se často říká „částečné dosazení“.

Věta 3.1.39 (Omezená krát jdoucí k nule)**.** *Nechť $f,g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$, nechť $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ a g je omezená na jistém prstencovém okolí bodu x_0. Pak $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon>0$. Pak existují $\delta>0$ a $K>0$ taková, že na $\mathcal{P}_\delta(x_0)$ platí

$$|f(x)|<\varepsilon \qquad \text{a} \qquad |g(x)|\leq K.$$

Odtud $|f(x)g(x)|<K\varepsilon$ na $\mathcal{P}_\delta(x_0)$ a ověřili jsme jednu z ekvivalentních definic limity. □

Poznámka 3.1.40. Předpoklad o omezenosti funkce g nelze vypustit. Uvažme třeba $\lim_{x\to 0} x\frac{1}{x}$.

Úloha 3.1.41. Spočtěte limitu $\lim_{x\to 0} xD(x)$, kde D je Dirichletova funkce.

Řešení: Protože $|D(x)|\leq 1$ na $\mathbb{R}$ a $\lim_{x\to 0} x=0$, z předchozí věty okamžitě dostáváme $\lim_{x\to 0} xD(x)=0$. ☆

Poznámka 3.1.42. (i) V předchozí úloze jsme nemohli použít aritmetiku limit, neboť $\lim_{x\to 0} D(x)$ neexistuje. Je tedy vidět, že někdy standardní nástroje selžou. Protože vždy platí $|xD(x)-0|\leq|x-0|$ (neboli vzdálenost $xD(x)$ od limitní hodnoty 0 je shora odhadnuta vzdáleností x od limitní hodnoty 0), nabízí myšlenka, že by nemělo být o nic těžší dokázat, že $\lim_{x\to 0} xD(x)=0$, než že $\lim_{x\to 0} x=0$. V matematice se skutečně poměrně často stává, že obecné věty nejsou tím správným nástrojem v jednoduché situaci. Proto potřebujeme matematice co nejlépe porozumět a umět používat i ty nejjednodušší nástroje.
(ii) Předchozí věta nám nedává nic, co by nezvládla Věta o dvou strážnících (Věta 3.1.36). Stačí položit

$$-K|f(x)|\leq f(x)g(x)\leq K|f(x)|,$$

kde $K>0$ je takové, že $|g(x)|\leq K$ na jistém prstencovém okolí bodu x_0.

Příklad 3.1.43. Analogicky jako v předchozím příkladu se ověří, že

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

Nyní přistoupíme k otázce počítání limit složených funkcí. V Úloze 3.1.37 měl mnohý čtenář jistě silné nutkání použít následující postup:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[k]{1+x} = \sqrt[k]{\lim_{x\to 0}(1+x)} = \sqrt[k]{1} = 1.$$

Je tedy přirozené zabývat se otázkou, zda v situaci $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim_{y\to A} g(y) = B \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = B. \tag{3.1.2}$$

Odpověď je obecně negativní, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 3.1.44. Nechť $f(x) = xD(x)$ pro $x \neq 0$ a

$$g(y) = \begin{cases} y^2 & \text{pro } y \neq 0 \\ 1 & \text{pro } y = 0. \end{cases}$$

Pak $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$, ale $\lim_{x\to 0} g(f(x))$ neexistuje, neboť

$$g(f(x)) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Poznámka 3.1.45. Pokud bychom v předchozím příkladu volili $f \equiv 0$, vyšlo by nám $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 1 \neq 0 = \lim_{y\to 0} g(y)$.

Z předchozích příkladů vidíme, že pro platnost vzorce (3.1.2) je nutné předpokládat víc, než jen existenci vlastních limit obou funkcí v odpovídajících bodech.

Věta 3.1.46 (O limitě složené funkce I)**.** *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, dále nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim_{y\to A} g(y) = B \in \mathbb{R}$ a navíc $f(x) \neq A$ na jistém prstencovém okolí bodu x_0. Pak*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = B.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože $\lim_{y\to A} g(y) = B$, můžeme najít $\delta > 0$ takové, že

$$y \in \mathcal{P}_\delta(A) \quad\Longrightarrow\quad g(y) \in \mathcal{U}_\varepsilon(B).$$

Dále protože $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, k výše zvolenému $\delta > 0$ můžeme najít $\tau_1 > 0$ takové, že

$$x \in \mathcal{P}_{\tau_1}(x_0) \quad\Longrightarrow\quad f(x) \in \mathcal{U}_\delta(A).$$

Konečně, podle posledního předpokladu věty máme $\tau_2 > 0$ takové, že $f(x) \neq A$ na $\mathcal{P}_{\tau_2}(x_0)$. Položme $\tau = \min\{\tau_1, \tau_2\}$. Pak celkově dostáváme

$$x \in \mathcal{P}_\tau(x_0) \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\delta(A) \wedge f(x) \neq A \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{P}_\delta(A) \Longrightarrow g(f(x)) \in \mathcal{U}_\varepsilon(B)$$

a jsme hotovi. □

Poznámka 3.1.47. Z důkazu a příkladů před větou můžeme vidět, co způsobilo neplatnost vzorečku (3.1.2) v obecném případě: definice limity nehlídá funkční hodnotu v bodě, pro který limitu počítáme. Pokud tedy dojde k tomu, že $f(x) = A$, nemůžeme říct, že $g(f(x)) = g(A)$ je blízko požadované hodnotě B. Ve větě jsme tomuto problému předešli tak, že jsme připustili jen případ, kdy k jevu $f(x) = A$ vůbec nedochází (stačí na malých prstencových okolích bodu x_0). Druhou možností je požadovat, aby $g(A) = B$. Odpovídající větu budeme mít v další kapitole.

Úloha 3.1.48. S využitím výsledku $\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x} = 1$ (získali jsme jej při řešení Úlohy 3.1.37) spočtěte

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x^3-x^2}.$$

Řešení: Použijeme Větu o limitě složené funkce I. Položme $f(x) = x^3 - x^2$ a $g(y) = \sqrt{1+y}$. Pomocí aritmetiky limit snadno ověříme, že $\lim_{x\to 0}(x^3-x^2) = 0$. Protože navíc víme, že $\lim_{y\to 0}\sqrt{1+y} = 1$, zbývá ověřit, že funkce f nenabývá limitní hodnoty 0 na jistém okolí počátku. K tomu si stačí přepsat

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

a vidíme, že

$$x \in \mathcal{P}_1(0) \quad\Longrightarrow\quad x^3 - x^2 \neq 0.$$

Můžeme tedy použít Větu o limitě složené funkce I (Větu 3.1.46) a dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x^3-x^2} = 1.$$

☆

Poznámka 3.1.49. Při používání aritmetiky limit jsme narazili na situaci, kdy neekvivalentní úprava požaduje předpoklad, o jehož splnění se dozvíme až na konci výpočtu. Při počítání limit složených funkcí se s předpokladem na nenabývání limitní hodnoty dostáváme do odlišné situace, kdy na jednu stranu s ověřením předpokladu nemusíme na nic čekat, na druhou stranu se jedná o jakýsi boční výpočet, na který je mnohem snazší zapomenout.

Vyřešme ještě jednu úlohu. Tentokrát neuvedeme přímo vzorové řešení, cestou budeme trošičku tápat, aby si čtenář mohl udělat představu, jaká úskalí musí překonat řešitel těžší úlohy. Příklady v různých skriptech totiž typicky vytváří jakýsi nereálný svět, v němž lze vždy na příklady použít právě probíranou látku a všechny potřebné předpoklady jsou splněny. Z ověřování předpokladů se pak stává rutina, kterou student provádí jen proto, že to učitel vyžaduje.

Úloha 3.1.50. Spočtěte $\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x\sin\frac{1}{x}}$.

Řešení: Přímo z definice limity se dá ukázat, že $\lim_{y\to 0}\sqrt[3]{y} = 0$. Protože už také víme, že $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$, jeví se jako přirozené použít Větu o limitě složené funkce I (Věta 3.1.46) k získání výsledku $\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x\sin\frac{1}{x}} = 0$. Tuto větu však použít nemůžeme, neboť

$$x\sin\Big(\frac{1}{x}\Big) = 0 \qquad \text{kdykoliv} \qquad x = \frac{1}{k\pi}, k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

a takových bodů je v každém prstencovém okolí počátku dokonce nekonečně mnoho. Jsme tedy zase na začátku (když nemůžeme použít nějakou větu, neznamená to, že neplatí dokazovaný výrok). Můžeme se ale pokusit využít toho, že

$$-|x| \le x\sin\frac{1}{x} \le |x| \qquad \text{na } \mathbb{R},$$

funkce $y\mapsto\sqrt[3]{y}$ je rostoucí (důkaz je lehké cvičení s vlastnostmi reálných čísel) a dále $\lim_{y\to 0}\sqrt[3]{y} = 0$. Pak máme

$$-|\sqrt[3]{x}| = -\sqrt[3]{|x|} \le \sqrt[3]{x\sin\frac{1}{x}} \le \sqrt[3]{|x|} = |\sqrt[3]{x}|.$$

Funkce nalevo a napravo mají nulovou limitu (stačí kombinovat $\lim_{y\to 0}\sqrt[3]{y} = 0$ s Větou o limitě absolutní hodnoty funkce, Věta 3.1.18) a proto díky Větě o dvou strážnících (Věta 3.1.36) máme i $\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x\sin\frac{1}{x}} = 0$. ☆

Poznámka 3.1.51. Snadno se dá nahlédnout, že Věta o aritmetice limit (Věta 3.1.24) či třeba Věta o dvou strážnících (Věta 3.1.36) platí i pro jednostranné limity. Situace je složitější u limity složené funkce, neboť v obecné situaci nekontrolujeme, zda vnitřní funkce zobrazuje jednostranná okolí bodu x_0 jen na jednu stranu od bodu A.

Poznámka 3.1.52. Některé „patologické“ jevy jsme demonstrovali pomocí poměrně exoticky vyhlížejících funkcí, jako je třeba Dirichletova funkce. Je tedy na místě se ptát, zda se tyto jevy a podobné exotické funkce skutečně vyskytují v aplikacích (na základních a středních školách se bohatě vystačí s takzvanými elementárními funkcemi, jako jsou třeba polynomy, goniometrické funkce, exponenciální funkce a podobně). Pravdou je, že s podobnými funkcemi se ve fyzikálních aplikacích nesetkáváme příliš často, ale ani moderní fyzika už nevystačí jen s elementárními funkcemi a polynomy. Používají se tak složité objekty, jako je třeba *Diracova delta „funkce“*, která vlastně, jak uvidíme později, ani funkcí není. Dirichletova a jí podobné funkce jsou pro nás tedy nástrojem, který nám umožňuje demonstrovat, že ne vše je jednoduché, ne každá funkce má limitu, a přesná formulace předpokladů ve větách je opravdu důležitá.

Poznámka 3.1.53 (Několik maličkostí k nevlastním limitám)**.** Přestože nevlastním limitám a limitám v nevlastních bodech se budeme věnovat v jedné z dalších kapitol, uvedeme zde několik poznámek, abychom s nimi mohli pracovat alespoň v nejjednodušších situacích. Konkrétně nás budou zajímat nevlastní limity ve vlastních bodech. Předně základní definice pracující s pojmem okolí je stejná jako v případě vlastní limity. Role ε je však u okolí nekonečna odlišná, nejdůležitější bývají velmi velká ε. Pokud $A = +\infty$, definiční vztah se obvykle přepisuje do tvaru (abychom nemátli čtenáře velkým ε)

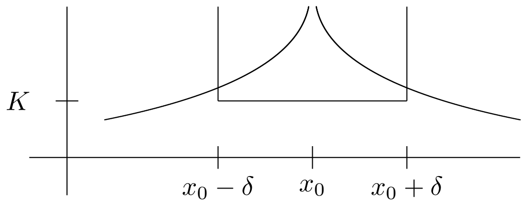
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\forall K > 0\, \exists \delta > 0 \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > K\Big).$$

I nevlastní limity se leckdy ověřují z definice. Uvážíme-li například funkci $f(x) = \frac{1}{|x|}$, definovanou pro $x \neq 0$, a $x_0 = 0$, platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty,$$

neboť k zafixovanému $K > 0$ stačí zvolit $\delta = \frac{1}{K}$ a pak máme

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad 0 < |x| < \frac{1}{K} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{|x|} > K.$$



Obrázek 3.4: Nevlastní limita funkce.

3.2 Spojitost funkce

Při studiu limit složených funkcí jsme zjistili, že je někdy výhodné pracovat s funkcemi splňujícími podmínku $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Pro tuto podmínku časem najdeme mnoho dalších uplatnění.

Definice 3.2.1 (Spojitost v bodě)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* x_0, jestliže $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Řekneme, že funkce f je *spojitá na* $M \subset \mathbb{R}$, jestliže je spojitá v x_0 pro každé $x_0 \in M$.

Poznámka 3.2.2. (i) Spojitost v bodě v sobě nese hned tři informace: funkce zde musí mít vlastní limitu, musí být v tomto bodě definována a pro obě hodnoty platí rovnost $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
(ii) Spojitost v bodě je velice vzácná vlastnost. I když má funkce v našem bodě limitu a je v něm definována, jako funkční hodnota připadají v úvahu všechna

reálná čísla a z nich jen jedno jediné se rovná limitě. Toto tvrzení se dá vyslovit pomocí pojmu mohutnosti i přesněji, což dělat nebudeme. Toto pozorování je v příkrém rozporu s tím, že většinou pracujeme s „pěknými“ funkcemi.

Definice 3.2.3 (Spojitost v bodě zprava/zleva)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* x_0 *zprava*, jestliže $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$. Analogicky pro spojitost zleva.

Platí následující analogie Věty o vztahu limity a jednostranných limit (Věta 3.1.16)

Cvičení 3.2.4. Dokažte: funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když je v bodě x_0 spojitá zprava i zleva.

Příklad 3.2.5. (i) Díky výsledkům minulé kapitoly víme, že polynomy jsou spojité ve všech bodech. Podobně racionální lomené funkce jsou spojité ve všech bodech, kde se jmenovatel nerovná nule (tam dokonce funkce není ani definována).
(ii) Definujme $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $x \neq 1$, a

$$g(x) = x + 1 = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{pro } x \neq 1 \\ 2 & \text{pro } x = 1. \end{cases}$$

Pak f je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ a g je spojitá na $\mathbb{R}$.
(iii) Dirichletova funkce není spojitá v žádném bodě, neboť v žádném bodě nemá limitu. Definujeme-li $f(x) = (x-x_0)D(x)$, získáme funkci, která je spojitá v bodě x_0, a nikde jinde spojitá není.
(iv) Funkce signum je spojitá všude kromě počátku.

Poznámka 3.2.6. Kvantifikátorový zápis definice spojitosti je následující

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \quad x \in \mathcal{U}_\delta(x_0) \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0)).$$

Důležitým rozdílem je, že tentokrát bereme klasické okolí bodu x_0, nikoliv redukované.

Poznámka 3.2.7. Není vhodné dělit funkce na spojité a nespojité, kdy do první skupiny patří funkce spojité na celém svém definičním oboru a do druhé skupiny ty ostatní. Spojitost je vlastnost, která nám umožňuje používat různé užitečné nástroje. Například u funkce signum by byla škoda se těchto nástrojů vzdát úplně, když je můžeme používat všude mimo počátek.

Pro práci se spojitostí jsou užitečné následující dvě věty.

Věta 3.2.8 (Aritmetika spojitosti)**.** *Nechť* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jsou spojité v* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Pak*
(i) $f + g$ *a* fg *jsou spojité v* x_0
(ii) *je-li* $g(x_0) \neq 0$, *je* $\frac{f}{g}$ *spojitá v* x_0.

Důkaz. Věta je důsledkem Věty o aritmetice limit (Věta 3.1.24). □

Věta 3.2.9 (Spojitost složené funkce)**.** *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f je spojitá v x_0 a g je spojitá v $f(x_0)$. Pak $g \circ f$ je spojitá v x_0.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože g je spojitá v $f(x_0)$, můžeme najít $\delta > 0$ takové, že

$$y \in \mathcal{U}_\delta(f(x_0)) \quad\Longrightarrow\quad g(y) \in \mathcal{U}_\varepsilon(g(f(x_0))).$$

Dále, protože f je spojitá v x_0, k výše zvolenému $\delta > 0$ můžeme najít $\tau > 0$ takové, že

$$x \in \mathcal{U}_\tau(x_0) \quad\Longrightarrow\quad f(x) \in \mathcal{U}_\delta(f(x_0)).$$

Celkově dostáváme

$$x \in \mathcal{U}_\tau(x_0) \quad\Longrightarrow\quad f(x) \in \mathcal{U}_\delta(f(x_0)) \quad\Longrightarrow\quad g(f(x)) \in \mathcal{U}_\varepsilon(g(f(x_0)))$$

a jsme hotovi. □

Úloha 3.2.10. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Ukažte, že funkce $f\colon x \mapsto \sqrt[k]{x}$ je pro k liché spojitá na celém $\mathbb{R}$ a pro k sudé je spojitá na $(0, \infty)$ a v počátku je spojitá zprava.

Řešení: Z předchozí sekce víme, že $\lim_{x\to 0} \sqrt[k]{1+x} = 1 = \sqrt[k]{1}$, neboli naše funkce je spojitá v bodě 1. Zvolme nyní $x_0 > 0$. Pišme

$$\sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{x_0 + x - x_0} = \sqrt[k]{x_0}\sqrt[k]{1 + \frac{x - x_0}{x_0}}.$$

Nyní vnitřní funkce $\varphi\colon x \mapsto \frac{x-x_0}{x_0}$ je spojitá v x_0 a platí $\varphi(x_0) = 0$. Dále vnější funkce $\psi\colon y \mapsto \sqrt[k]{1+y}$ je spojitá v počátku a proto podle Věty o spojitosti složené funkce je funkce $x \mapsto \sqrt[k]{1 + \frac{x-x_0}{x_0}}$ spojitá v x_0. Snadnou aplikací aritmetiky spojitosti konečně dostáváme, že f je spojitá v x_0. Pokud $x_0 < 0$ a k je liché, postupujeme analogicky. Pokud $x_0 = 0$ a k je liché, přímo z definice limity ukážeme, že $\lim_{x\to 0} \sqrt[k]{x} = 0$. Pokud $x_0 = 0$ a k je sudé, z definice spočítáme limitu zprava. ☆

Úloha 3.2.11. Nechť $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$ pro $x \neq 0$. Dodefinujte funkci f v počátku tak, aby byla spojitá na celém $\mathbb{R}$.

Řešení: V předchozí sekci jsme si ukázali, že $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{3}$. Proto položme

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ \frac{1}{3} & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

a ukažme, že $\tilde{f}$ je spojitá na $\mathbb{R}$. Předně $\tilde{f}$ je spojitá v počátku, neboť jsme ji definovali tak, aby $\tilde{f}(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$. Pokud $x \neq 0$, aplikací aritmetiky spojitosti a Věty o spojitosti složené funkce snadno dokážeme, že $x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$ je spojitá v x_0. Konečně, podle aritmetiky spojitosti je i $\tilde{f}$ spojitá v x_0. ☆

Úloha 3.2.12. Riemannova funkce je definována předpisem

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \{0\} \\ \frac{1}{q} & \text{pro } x = \frac{p}{q}, \text{kde } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ a } q \in \mathbb{N} \text{ jsou nesoudělná.} \end{cases}$$

Dokažte, že R je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \{0\}$ a nikde jinde spojitá není.

Řešení: Předně pokud $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, je $R(x_0) > 0$ a zároveň v každém prstencovém okolí bodu x_0 jsou obsažena iracionální čísla s nulovou funkční hodnotou. Snadno se proto nahlédne, že R není spojitá v x_0.

Nechť naopak $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \{0\}$. Zvolme $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Nutně pak existuje jen konečný počet bodů $x \in \mathcal{P}_1(x_0)$ ($\mathcal{P}_1(x_0)$ je první nástřel prstencového okolí) takových, že $|R(x) - 0| = R(x) \geq \varepsilon$. Skutečně, v takovém případě musí pro jmenovatel čísla $x = \frac{p}{q}$ platit $q \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Takových jmenovatelů je jen konečně mnoho a navíc pro jedno takové q připadá v úvahu jen konečný počet čitatelů. Žádný ze zmíněných bodů není roven x_0, a protože jich je jen konečný počet (navíc podmínka $\varepsilon < \frac{1}{2}$ zaručuje, že alespoň jeden zmíněný bod v $\mathcal{P}_1(x_0)$ existuje), můžeme mezi nimi zvolit bod s minimální vzdáleností od bodu x_0. Označme tento bod x_1. Stačí pak položit $\delta = |x_1 - x_0|$ a máme

$$|x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |R(x) - R(x_0)| = R(x) < \varepsilon.$$

☆

Sekci zakončíme druhou verzí věty o limitě složené funkce.

Věta 3.2.13 (O limitě složené funkce II)**.** *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, dále nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ a funkce g je spojitá v A. Pak*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(A).$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože g je spojitá v A, můžeme najít $\delta > 0$ takové, že

$$y \in \mathcal{U}_\delta(A) \quad \Longrightarrow \quad g(y) \in \mathcal{U}_\varepsilon(g(A)).$$

Dále protože $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, k výše zvolenému $\delta > 0$ můžeme najít $\tau > 0$ takové, že

$$x \in \mathcal{P}_\tau(x_0) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in \mathcal{U}_\delta(A).$$

Celkově pak dostáváme

$$x \in \mathcal{P}_\tau(x_0) \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\delta(A) \Longrightarrow g(f(x)) \in \mathcal{U}_\varepsilon(g(A))$$

a jsme hotovi. □

Poznámka 3.2.14. (i) Píšeme-li $\lim_{y\to A} g(y) = B$, ze spojitosti g v bodě A plyne, že $B = g(A)$. Závěr věty je tedy stejný jako u první verze Věty o limitě složené funkce (Věta 3.2.9).
(ii) Obě věty o limitě složené funkce tedy dávají, že pokud existují dílčí limity ve správných bodech a platí alespoň jedna z podmínek

(i) vnitřní funkce na jistém prstencovém okolí nenabývá své limitní hodnoty

(ii) vnější funkce je spojitá v A,

pak $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = B$.

Příklad 3.2.15. Nechť $f(x) = xD(x)$ a $g(y) = y^2$. Pak

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \qquad \lim_{y\to 0} g(y) = 0$$

a g je spojitá v počátku. Proto podle Věty o limitě složené funkce II (Věta 3.2.13) platí

$$\lim_{x\to 0} (xD(x))^2 = 0.$$

Verzi s nenabýváním limitní hodnoty nešlo použít, neboť $f(x) = 0$, kdykoliv $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3.3 Derivace funkce

Nyní si zavedeme další důležitý pojem, jímž je derivace funkce. Začněme stručnou motivací. Pracujeme-li s afinní funkcí $f(x) = ax + b$, reálné číslo a nám poskytuje důležitou informaci o chování této funkce (máme informaci o monotonii a přírůstcích). Podobnou informaci bychom rádi měli rovněž u funkcí nelineárních. Uvážíme-li například funkci $g(x) = x^2$, která klesá na $(-\infty, 0]$ a roste na $[0, \infty)$, nelze očekávat, že by se její chování dalo popsat jediným číslem na celém definičním oboru. Na druhou stranu, stále je jistá naděje, že by mohl existovat rozumný popis chování na malých okolích jednotlivých bodů definičního oboru.

K pojmu derivace dospěli nezávisle na sobě *Gottfried Wilhelm von Leibniz* a *Isaac Newton* v 17. století. Každý k němu dospěl z jiného úhlu pohledu, oba přístupy jsou z dnešního pohledu značně těžkopádné, takže se je pokusíme přiblížit v dnešní řeči matematické analýzy.

Isaac Newton vycházel z úlohy nalézt okamžitou rychlost pohybu hmotného bodu. Pokud se hmotný bod pohybuje ve směru osy x, jeho průměrnou rychlost na intervalu (t_0, t_1) můžeme nalézt jako

$$v_p(t_0) = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Jestliže se budeme blížit s t_1 k t_0, nebo-li přírůstek v čase (označovaný jako o) infinitizimálně malý, můžeme dostat (v dnešní řeči jako limitu pro t_1 jdoucí k t_0) okamžitou rychlost. Tu nazýval fluxí, fluentem pak infinitizimální přírůstek funkce x. Pokud uvažoval funkci $y = f(x)$, zavedl si potom čas jako pomocnou veličinu a derivaci $y'(x)$ pak chápal jako podíl fluxí $\dot{y}$ a $\dot{x}$, tedy v dnešní řeči něco jako derivaci parametricky zadané funkce, tedy pro

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

máme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

G.W. Leibniz vycházel z úlohy hledání tečny ke křivce. Uvažujeme-li křivku popsanou $y = f(x)$ a hledáme tečnu ke křivce procházející bodem $(x_0, f(x_0))$.

Potřebujeme nalézt její směrnici. Nahradíme si tečnu sečnou, procházející body $(x_0, f(x_0))$ a $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Její směrnice je

$$k_s = \frac{f((x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

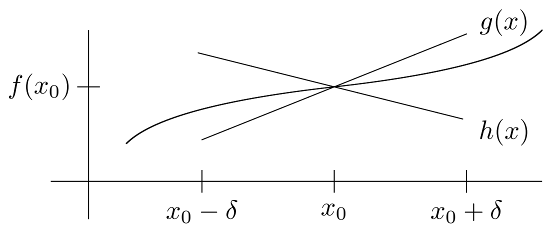
a směrnici tečny pak dostáváme, pokud je Δx infinitizimálně malé (označíme jako $\mathrm{d}x$). V řeči dnešní analýzy tedy provedeme limitu pro $\Delta x \to 0$, Leibniz ale o limitě nemluvil.

Dostáváme se tedy k následující definici.

Definice 3.3.1 (Derivace funkce)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *derivaci* rovnou A, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A.$$

V takovém případě píšeme $f'(x_0) = A$. Analogicky se pomocí jednostranných limit definují derivace zprava a zleva, které značíme $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$.



Obrázek 3.5: Derivace funkce: pro dané $\varepsilon > 0$ hledáme $\delta > 0$ tak, aby na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ byl graf funkce sevřen grafy lineárních funkcí $g\colon x \mapsto f(x_0) + (A + \varepsilon)(x - x_0)$ a $h\colon x \mapsto f(x_0) + (A - \varepsilon)(x - x_0)$.

Poznámka 3.3.2. (i) Někdy se derivace značí $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.
(ii) Díky jednoznačnosti limity je derivace určená jednoznačně (pokud existuje).
(iii) Definice derivace, na rozdíl od limity, pracuje i s hodnotou f v bodě x_0.
(iv) Limita z definice derivace se dá také přepsat do tvaru

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

(v) Derivace obecně existovat nemusí. Zvolme třeba $f(x) = |x|$ a $x_0 = 0$. Pak

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0_+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0_+} 1 = 1 \qquad \text{ale} \qquad f'_-(0) = \lim_{x \to 0_-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0_-} -1 = -1.$$

Poznámka 3.3.3. Vztah pro $f'(x_0) = A$, kde $A \in \mathbb{R}$, se také dá přepsat do tvaru

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0.$$

Označme $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$, což je afinní funkce. Pak můžeme učinit následující pozorování: Je-li funkce f spojitá, pak existuje nekonečně mnoho afinnních funkcí aproximujících f na okolí x_0 s přesností

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - L(x) = 0$$

(stačí, aby afinnní funkce splňovala $L(x_0) = f(x_0)$). Přísnější podmínku

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - L(x)}{x - x_0} = 0$$

splňuje nejvýše jedna afinní funkce a sice g. Derivaci tedy můžeme chápat jako směrnici afinní funkce, která nejlépe aproximuje f na okolí bodu x_0.

S předchozí poznámkou souvisí jeden důležitý pojem.

Definice 3.3.4 (Diferenciál funkce)**.** Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *diferenciál*, jestliže existuje lineární funkce L (požadujeme nulovou hodnotu v počátku) taková, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Lh}{h} = 0.$$

Snadno se dá ověřit, že existence diferenciálu je ekvivalentní existenci vlastní derivace a pak $Lh = f'(x_0)h$. To plyne přímo z předchozí poznámky.

Poznámka 3.3.5. Často se studuje zobrazení $x_0 \mapsto f'(x_0)$. Toto zobrazení se značí f', říká se mu derivace funkce f a jeho definičním oborem jsou jen body, kde $f'(x_0)$ existuje a je vlastní.

Příklad 3.3.6. (i) Uvažme konstantní funkci $f \equiv a \in \mathbb{R}$. Pak

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{a - a}{x - x_0} = 0.$$

(ii) Pokud f je identita, máme

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

(iii) Pokud $f(x) = x^2$, platí

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0.$$

Touto metodou bychom mohli zderivovat libovolný polynom. Brzy se však naučíme aritmetiku derivace, jejíž užití je pohodlnější.
(iv) Pokud $f(x) = \sqrt{x}$ pro $x \geq 0$ a $x_0 > 0$, platí

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Věta 3.3.7 (Vztah vlastní derivace a spojitosti)**.** *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$ *vlastní derivaci. Pak je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz. Protože vlastní limita implikuje omezenost na jistém prstencovém okolí, existují $K > 0$ a $\delta > 0$ taková, že

$$x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \le K.$$

Odtud máme na tomto okolí $0 \le |f(x) - f(x_0)| \le K|x - x_0|$ a aplikací Věty o dvou strážnících (Věta 3.1.36) dostáváme požadovaný výsledek. □

Poznámka 3.3.8. Obrácená implikace neplatí. Již jsme si ukázali funkci $x \mapsto |x|$, která je spojitá na celém $\mathbb{R}$, ale nemá derivaci v počátku. Dokonce jsou známy konstrukce spojitých funkcí, které derivaci nemají vůbec v žádném bodě.

Příklad 3.3.9. Má-li funkce v bodě nevlastní derivaci, spojitá zde být může i nemusí, jak nám ukáží následující příklady. Předně položme $f(x) = \sqrt[3]{x}$. O této funkci už víme, že je spojitá na celém $\mathbb{R}$. Dále máme

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = +\infty.$$

Volíme-li $g(x) = \operatorname{sign} x$, máme funkci, která není spojitá v počátku. Navíc

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sign} h}{|h| \operatorname{sign} h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{|h|} = +\infty.$$

Věta 3.3.10 (Aritmetika derivací)**.** *Nechť* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mají vlastní derivace v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Pak*
(i) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
(ii) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
(iii) *jestliže* $g(x_0) \neq 0$*, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Důkaz. (i) Tvrzení plyne přímo z aritmetiky limit, neboť

$$\begin{aligned}(f + g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).\end{aligned}$$

(ii) Definiční vztah si vhodně přepíšeme a pak použijeme aritmetiku limit spolu s tím, že vlastní derivace implikuje spojitost

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

(iii) Stačí nám ukázat, že

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

a pak použít výsledek pro derivaci součinu. Opět si definiční vztah vhodně přepíšeme a pak použijeme spojitost zaručenou existencí vlastní derivace

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \frac{-1}{g(x)g(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

□

Poznámka 3.3.11. Indukcí se dá snadno dokázat vzorec (existují-li vlastní derivace jednotlivých funkcí v bodě x_0)

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_0) \prod_{j\in\{1,\ldots,n\}, j\neq i} f_j(x_0). \tag{3.3.1}$$

Například pro tři funkce tedy máme

$$(f_1f_2f_3)'(x_0) = f_1'(x_0)f_2(x_0)f_3(x_0) + f_1(x_0)f_2'(x_0)f_3(x_0) + f_1(x_0)f_2(x_0)f_3'(x_0).$$

Cvičení 3.3.12. Dokažte indukcí vztah (3.3.1).

Poznámka 3.3.13. (i) Speciálně, volbou $g(x) = c$ (konstanta) dostáváme z Věty o aritmatice derivací (Věta 3.3.10) (ii)

$$(cf(x))' = cf'(x).$$

(ii) Pomocí stejné věty lze jednoduše dokázat vztah pro derivaci polynomu

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

Věta 3.3.14 (Derivace složené funkce)**.** *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ a $g'(f(x_0)) \in \mathbb{R}$. Pak*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Důkaz. Uvažme dva případy. Nejprve nechť $f'(x_0) \neq 0$. Nutně pak existuje prstencové okolí bodu x_0, na němž máme $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ odražené od nuly, proto také $f(x) \neq f(x_0)$. Zároveň máme $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, neboť f je spojitá. Zde pak má smysl následující výpočet, kde využíváme aritmetiku limit a Větu o limitě složené funkce II (Věta 3.2.13; vnější funkce je $y \mapsto \frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}$)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= g'(f(x_0))f'(x_0).
\end{aligned}
$$

Zabývejme se nyní zbývajícím případem $f'(x_0) = 0$. V tomto případě je pravá strana dokazované rovnosti nulová. Zbývá ukázat, že nulová je i limita na levé straně. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta_1 > 0$ takové, že

$$
x \in \mathcal{P}_{\delta_1}(x_0) \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| < \varepsilon.
$$

Dále díky spojitosti f, konečnosti $g'(f(x_0))$ a Větě o vztahu limity a omezenosti (Věta 3.1.21) existují $\delta_2 > 0$ a $K > 0$ taková, že

$$
x \in \mathcal{P}_{\delta_2}(x_0) \wedge f(x) \neq f(x_0) \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}\right| \leq K.
$$

Položíme-li $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, máme pro $x \in \mathcal{P}_\delta(x_0)$ splňující $f(x) \neq f(x_0)$

$$
\left|\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}\right| = \left|\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}\right| \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| < K\varepsilon.
$$

Na druhou stranu, pokud $x \in \mathcal{P}_\delta(x_0)$ splňuje $f(x) = f(x_0)$, triviálně platí

$$
\left|\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}\right| = \left|\frac{0}{x - x_0}\right| = 0 < K\varepsilon.
$$

Celkově tedy máme

$$
x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}\right| < K\varepsilon,
$$

tedy $(g \circ f)'(x_0) = 0$. □

Příklad 3.3.15. Platí

$$
\left(\sqrt{1 + x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},
$$

neboť

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + x^2) = 2x \quad \text{na } \mathbb{R} \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \text{na } \mathbb{R}.
$$

Věta 3.3.16 (Derivace inverzní funkce)**.** *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje:*
(i) *existují $\alpha, \beta_1, \beta_2 > 0$ taková, že f je prosté na $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ a zobazuje tento interval na $(f(x_0) - \beta_1, f(x_0) + \beta_2)$*
(ii) *existuje vlastní nenulová $f'(x_0)$*
(iii) *f^{-1} je spojitá v bodě $y_0 = f(x_0)$.*
Pak existuje derivace f^{-1} v bodě y_0 a platí

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \textit{neboli} \qquad (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$
$$\textit{neboli} \qquad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Důkaz. Protože $f'(x_0) \neq 0$, máme na jistém prstencovém okolí $\mathcal{P}_\delta(x_0)$ diferenční podíly nenulové (dokonce odražené od nuly) a proto lze definovat pomocnou funkci

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} & \text{pro } x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{pro } x = x_0. \end{cases}$$

Navíc podle aritmetiky limit a definice derivace je tato funkce spojitá v x_0. Nyní již jen stačí použít definici derivace, skutečnost, že f^{-1} existuje na jistém okolí bodu $f(x_0)$ (podle (ii)), a Větu o spojitosti složené funkce (Věta 3.2.9), v níž používáme (iii) a spojitost h v x_0,

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(f(x_0)) &= \lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} \\ &= \lim_{y \to f(x_0)} h(f^{-1}(y)) = h(f^{-1}(f(x_0))) = h(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

□

Poznámka 3.3.17. Tvrzení věty si lze dobře zapamatovat na základě následující úvahy:

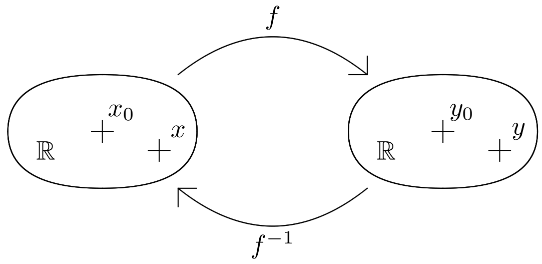
$$1 = x'|_{x=x_0} = (f^{-1}(f(x)))'|_{x=x_0} = (f^{-1})'(f(x_0))f'(x_0).$$

To ale není důkaz předchozí věty, protože obecně nevíme, zda je f^{-1} diferencovatelná.

Příklad 3.3.18. Funkce $y \mapsto \sqrt{y}$ je inverzní k $f(x) = x^2$. Funkce f je prostá na $(0, \infty)$ a zobrazuje jej prostě na $(0, \infty)$. Dále zde má nenulovou derivaci $f'(x) = 2x$ a už také víme, že odmocnina je spojitá. Proto díky vztahu $y = x^2$

$$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}.$$

Poznámka 3.3.19. Při aplikaci věty je nutné nezapomínat na to, že celý proces se sestává ze dvou kroků. V prvním kroku vezmeme převrácenou hodnotu čísla $f'(x_0)$ a ve druhém kroku přejdeme k proměnné y_0 (funkce f pracuje na prostoru $\mathbb{R}$, jehož prvky označujeme x a x_0, zatímco funkce f^{-1} pracuje na prostoru $\mathbb{R}$, jehož prvky označujeme y a y_0).



Obrázek 3.6: Schéma pro derivaci inverzní funkce.

Naše Věta o derivaci inverzní funkce (Věta 3.3.16) má jednu slabinu a tou je požadavek (iii). V aplikacích totiž většinou máme nějaké informace o funkci f, zatímco o funkci f^{-1} nevíme nic. Uveďme si zde pro ilustraci další dvě verze, v nichž jsou zakomponovány podmínky zaručující existenci a spojitost inverze. Tyto věty dokážeme později. V dalším výkladu vedoucím k jejich důkazu je nebudeme používat, nehrozí tedy důkaz kruhem.

První výsledek plyne z Věty o derivaci inverzní funkce (Věta 3.3.16) a následujícího lemmatu.

Připomeňme, že funkci nazýváme rostoucí na (a, b), jestliže $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$ pro všechna x, y z (a, b). Analogicky pro klesající funkci. Funkce rostoucí nebo klesající se nazývá ryze monotonní.

Lemma 3.3.20 (O spojitosti inverzní funkce)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ryze monotonní a spojitá na intervalu (a, b). Pak obrazem intervalu (a, b) je interval (c, d), kde*

$$c = \lim_{x \to a_+} f(x) \quad a \quad d = \lim_{x \to b_-} f(x) \qquad \text{je-li } f \text{ rostoucí}$$
$$c = \lim_{x \to b_-} f(x) \quad a \quad d = \lim_{x \to a_+} f(x) \qquad \text{je-li } f \text{ klesající}$$

(limity mohou být i nevlastní). Dále existuje funkce f^{-1}, je spojitá na intervalu (c, d) a zobrazuje jej na interval (a, b).

Důkaz tohoto lemmatu budeme zatím dlužit.

Věta 3.3.21 (O derivaci inverzní funkce II)**.** *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a ryze monotonní na jistém okolí bodu x_0. Nechť existuje vlastní nenulová $f'(x_0)$. Pak $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Druhý výsledek používá vztah monotonie a znaménka derivace, čemuž se budeme věnovat v jedné z dalších kapitol.

Věta 3.3.22 (O derivaci inverzní funkce III)**.** *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje jednu z podmínek:*
(i) *na jistém okolí bodu x_0 platí $f' > 0$*
(ii) *na jistém okolí bodu x_0 platí $f' < 0$.*
Pak $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Poznámka 3.3.23. Povšimněte si, že v našem příkladu s volbou $f(x) = x^2$, $x > 0$, bylo možné použít i obě nové věty.

3.4 Elementární funkce

Probranou teorii jsme až do této chvíle mohli demonstrovat jen na malém počtu příkladů, neboť jsme doposud znali jen velmi málo funkcí. V této sekci naší kolekci používaných funkcí obohatíme o elementární funkce, se kterými bývá zvykem pracovat již na střední škole. Zde však narážíme na jeden problém. Standardní definice těchto funkcí pracují s pojmem nekonečné řady a při odvozování jejich vlastností se pracuje s hlubšími větami z teorie nekonečných řad. Některé výsledky tedy zatím jen zformulujeme a důkaz zůstaneme dlužni. Rádi bychom čtenáře ubezpečili, že nedojde k důkazu kruhem. Další budování teorie se bez těchto funkcí obejde, naším cílem je tyto funkce čtenáři zpřístupnit, aby na ně mohl aplikovat čerstvě probrané teoretické výsledky a díky tomu těmto výsledkům lépe porozuměl. Hlubší výsledky, jejichž důkaz zůstaneme dlužni, zde budeme nazývat větami, dokazovaným jednodušším výsledkům, které z těchto vět plynou, budeme říkat tvrzení.

Věta 3.4.1 (O funkcích sin a cos)**.** *Existují právě dvě funkce* $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a jediné iracionální číslo* π *tak, že platí:*
(i) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
(ii) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
(iii) $\sin(-x) = -\sin x$ *a* $\cos(-x) = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
(iv) $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \frac{\pi}{2}]$
(v) $\sin(0) = 0$ *a* $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
(vi) $\sin'(0) = 1$.

Tvrzení 3.4.2. *Dále platí:*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.4.1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad a \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{3.4.2}$$

$$\sin' x = \cos x \qquad a \qquad \cos' x = -\sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.4.3}$$

(obě funkce jsou tedy spojité na $\mathbb{R}$*)*

$$\sin \text{ je rostoucí na intervalu } [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \text{ a zobrazuje tento interval na } [-1, 1] \tag{3.4.4}$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad a \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{3.4.5}$$

$$\cos \text{ je klesající na intervalu } [0, \pi] \text{ a zobrazuje tento interval na } [-1, 1]. \tag{3.4.6}$$

Důkaz. Identitu (3.4.1) získáme pomocí (v), (iii) a součtových vzorců

$$\begin{aligned} 1 &= \sin \tfrac{\pi}{2} = \sin(\tfrac{\pi}{2} + 0) = \sin \tfrac{\pi}{2} \cos 0 + \cos \tfrac{\pi}{2} \sin 0 = \cos 0 = \cos(x - x) \\ &= \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x). \end{aligned}$$

První část (3.4.2) plyne z (v), (vi) a definice derivace. Druhou část získáme z tohoto výsledku pomocí součtových vzorců a základních vět o limitách

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Identity (3.4.3) získáme z předchozích výsledků následovně

$$\begin{aligned}\sin' x &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\cos x\frac{\sin h}{h} + \lim_{h\to 0}\sin x\frac{\cos h-1}{h^2}h = \cos x\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\cos' x &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\cos x\frac{\cos h-1}{h^2}h - \lim_{h\to 0}\sin x\frac{\sin h}{h} = -\sin x.\end{aligned}$$

Vlastnost (3.4.4) plyne z (iii), (iv), (v) a z Lemmatu o spojitosti inverzní funkce (Lemma 3.3.20).

Dokažme identity (3.4.5). Předně díky (v) a (3.4.1) máme $\cos\frac{\pi}{2}=0$. Proto platí pro všechna $x\in\mathbb{R}$

$$\sin(\tfrac{\pi}{2}+x) = \sin\tfrac{\pi}{2}\cos x+\cos\tfrac{\pi}{2}\sin x = \sin\tfrac{\pi}{2}\cos(-x)+\cos\tfrac{\pi}{2}\sin(-x) = \sin(\tfrac{\pi}{2}-x).$$

Volíme-li v poslední identitě $x=\frac{\pi}{2}$ a pak $x=\frac{3\pi}{2}$, postupně dostáváme

$$\sin\pi = 0 \qquad \text{a} \qquad \sin(2\pi)=0.$$

Z výsledku $\cos\frac{\pi}{2}=0$ ještě získáme

$$\cos\pi = \cos(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{2}) = \cos^2\tfrac{\pi}{2}-\sin^2\tfrac{\pi}{2} = -1,$$

a proto

$$\cos(2\pi) = \cos(\pi+\pi) = \cos^2\pi-\sin^2\pi = 1-0=0.$$

Z dosavadních výsledků dále dostáváme

$$\sin(x+2\pi) = \sin x\cos(2\pi)+\cos x\sin(2\pi) = \sin x$$

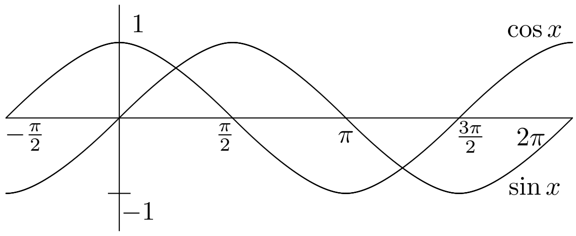
a

$$\cos(x+2\pi) = \cos x\cos(2\pi)-\sin x\sin(2\pi) = \cos x.$$

Poslední výsledek (3.4.6) plyne z (3.4.4), neboť

$$\cos x = \sin x\cos\tfrac{\pi}{2}+\sin\tfrac{\pi}{2}\cos x = \sin(x+\tfrac{\pi}{2}).$$

□



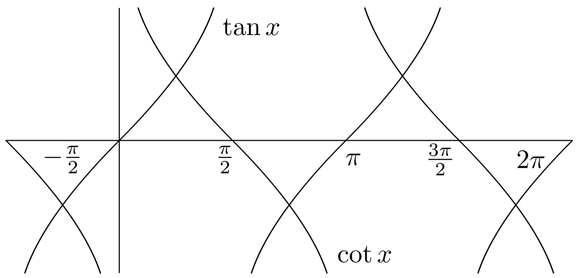
Obrázek 3.7: Náčrt části grafů funkcí sin a cos.

Když už máme zavedeny funkce sin a cos, můžeme zavést ještě funkce *tangens* a *kotangens* (použijeme mezinárodní značení)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\tfrac{\pi}{2} \colon k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}.$$

Snadno se nahlédne, že obě funkce jsou π-periodické, tangens je rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a kotangens je klesající na $(0, \pi)$. Na svých definičních oborech mají obě funkce vlastní derivaci, jak se snadno přesvědčíme výpočtem využívajícím aritmetiku derivace:

$$\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\cot' x = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$



Obrázek 3.8: Náčrt části grafů funkcí tan a cot.

Na intervalech, kde jsou předchozí goniometrické funkce ryze monotonní, existují jejich inverzní funkce. Vybíráme vždy interval monotonie obsahující $(0, \frac{\pi}{2})$ a s využitím lemmatu o spojitosti inverze dostáváme následující tabulku.

sin	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\to$	$[-1,1]$	arcsin	$[-1,1]$	$\to$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
cos	$[0,\pi]$	$\to$	$[-1,1]$	arccos	$[-1,1]$	$\to$	$[0,\pi]$
tan	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\to$	$\mathbb{R}$	arctan	$\mathbb{R}$	$\to$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
cot	$(0,\pi)$	$\to$	$\mathbb{R}$	arccot	$\mathbb{R}$	$\to$	$(0,\pi)$

Právě zavedené cyklometrické funkce umíme zderivovat.

Tvrzení 3.4.3. *Platí následující vztahy*

$$\begin{aligned} \arcsin' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && \textit{na } (-1,1) \\ \arccos' x &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} && \textit{na } (-1,1) \\ \arctan' x &= \frac{1}{1+x^2} && \textit{na } \mathbb{R} \\ \operatorname{arccot}' x &= \frac{-1}{1+x^2} && \textit{na } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Důkaz. Zabývejme se nejprve prvním výsledkem. Pro $x \in (-1,1)$ pišme $y = \arcsin x$, tedy $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a $x = \sin y$. Protože funkce sin má nenulovou vlastní derivaci na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, můžeme aplikovat Větu o derivaci inverzní funkce (Věta 3.3.14; pozor, prohodili jsme roli x a y) a dostáváme

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(třetí rovnost platí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, protože je zde $\cos y > 0$). Ve zbývajících případech postupujeme stejně. Uvedeme jen stručné odvození a podrobnosti přenecháme čtenáři.

Volba $y = \arccos x$ pro $x \in (-1,1)$ odpovídá $y \in (0,\pi)$ a $x = \cos y$. Proto

$$\arccos' x = \frac{1}{\cos' y} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(pozor na identitu $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$, která opět neplatí obecně).

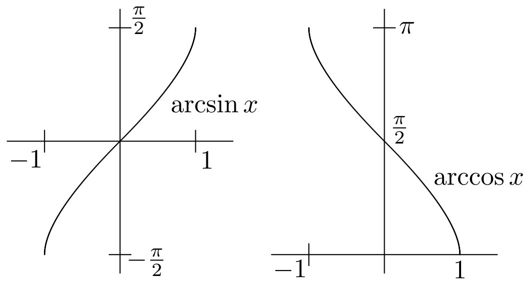
Volba $y = \arctan x$ pro $x \in \mathbb{R}$ odpovídá $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a $x = \tan y$. Proto

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan' y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

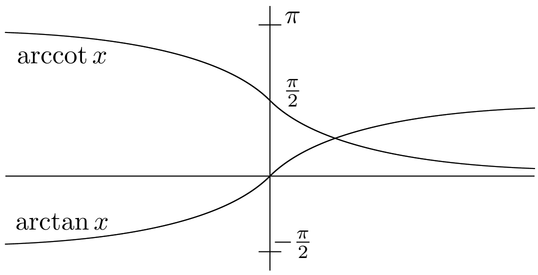
Volba $y = \operatorname{arccot} x$ pro $x \in \mathbb{R}$ odpovídá $y \in (0,\pi)$ a $x = \cot y$. Proto

$$\operatorname{arccot}' x = \frac{1}{\cot' y} = \frac{-1}{\frac{1}{\sin^2 y}} = \frac{-1}{\frac{\sin^2 y + \cot^2 y}{\sin^2 y}} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

□



Obrázek 3.9: Náčrt grafů funkcí arcsin a arccos.



Obrázek 3.10: Náčrt části grafů funkcí arctan a arccot.

Věta 3.4.4 (O exponenciále). *Existuje právě jedna funkce* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *taková, že:*
(i) $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2 \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
(ii) $\exp(x + iy) = \exp x(\cos y + i \sin y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
(iii) $\exp 0 = 1$
(iv) *restrikce funkce* $\exp$ *na* $\mathbb{R}$ *(reálná funkce) je rostoucí a jejím oborem hodnot je* $(0, \infty)$
(v) *restrikce funkce* $\exp$ *na* $\mathbb{R}$ *splňuje* $\exp' x = \exp x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

Odvodíme si ještě další důležité vlastnosti na $\mathbb{R}$.

Tvrzení 3.4.5. *Dále platí*

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.4.7}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1 \tag{3.4.8}$$

inverzní funkce $\log$ *zobrazuje* $(0, \infty)$ *na* $\mathbb{R}$, *je spojitá, rostoucí, záporná na* $(0, 1)$ *a kladná na* $(1, \infty)$ (3.4.9)

$$\log(xy) = \log x + \log y \qquad \forall x, y \in (0, \infty) \tag{3.4.10}$$

$$\log 1 = 0 \tag{3.4.11}$$

$$\log x^m = m \log x \qquad \forall x \in (0,\infty)\, \forall m \in \mathbb{Z} \tag{3.4.12}$$

$$\log' x = \frac{1}{x} \qquad \forall x \in (0,\infty) \tag{3.4.13}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1. \tag{3.4.14}$$

Důkaz. Vlastnost (3.4.7) plyne snadno z (i), kde položíme $0 = x + (-x)$.

Vlastnost (3.4.8) plyne z (v) a (iii). Z (iii) plyne také (3.4.11).

Část (3.4.9) se získá z (iii), (iv) a Lemmatu o spojitosti inverze (Lemma 3.3.20; využíváme (v)).

Dokažme (3.4.10). Pišme $u = \log x$, $v = \log y$. Aplikací (i) dostáváme

$$\log x + \log y = u + v = \log\bigl(\exp(u+v)\bigr) = \log\bigl(\exp u \exp v\bigr) = \log(xy).$$

Vlastnost (3.4.12) se pro $m \in \mathbb{N}$ snadno získá indukcí z (3.4.10). Pro $m = 0$ plyne z (3.4.11). Ve zbývajícím případě, kdy $-m \in \mathbb{N}$, stačí použít předešlé výsledky a

$$0 = \log 1 = \log(x^m x^{-m}) = \log(x^m) + \log(x^{-m}).$$

Dále podle druhé verze věty o derivaci inverzní funkce (Věta 3.3.16; předpoklady jsou splněny podle (iv) a (v)) máme

$$\log' x = \frac{1}{\exp' y} = \frac{1}{\exp y} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

Poslední dokazovaný vztah plyne z

$$1 = \lim_{y\to 0} \frac{\exp y - 1}{y} = \lim_{x\to 1} \frac{\exp(\log x) - 1}{\log x} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\log x},$$

kde jsme použili (3.4.8) a Větu o limitě složené funkce (Věta 3.1.46) s vnitřní funkcí $x \mapsto \log x$, která nenabývá své limitní hodnoty díky (3.4.7). □

Dále se budeme zabývat odmocninami. Nechť $m \in \mathbb{N}$. Snadno pomocí axiomů (O2) a (O3) z definice reálných čísel ověříme, že funkce $f\colon x \mapsto x^m$ je rostoucí na $[0,\infty)$ a je-li dokonce m liché, je rostoucí na celém $\mathbb{R}$. Můžeme tedy definovat

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}} := f^{-1}(x) \qquad \begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{pro } m \text{ liché} \\ x \in [0,\infty) & \text{pro } m \text{ sudé.} \end{cases}$$

Podle Lemmatu o spojitosti inverze (Lemma 3.3.20) dostáváme spojitou rostoucí funkci, která v prvním případě zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ a ve druhém $[0,\infty)$ na $[0,\infty)$.

Dále můžeme zavést

$$x^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{m}}},$$

kde definiční obor opět závisí na paritě m, navíc z něj vyjmeme počátek. Pro $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$ definujeme

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

a definiční obor závisí na znaménku p (je-li záporné, vyjmeme počátek) a paritě q (je-li liché, zúžíme definiční obor na $\mathbb{R}_0^+$ či $\mathbb{R}^+$; to ovšem platí jen pro nesoudělný tvar $\frac{p}{q}$, v obecném případě záleží i na paritě p). Protože jsme nepředpokládali nesoudělnost čísel p a q, definiční obor racionální mocniny závisí na reprezentaci exponentu pomocí zlomku. Nyní si dokážeme základní vlastnosti těchto funkcí.

Tvrzení 3.4.6. *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $p, r \in \mathbb{Z}$, $q, s \in \mathbb{N}$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Pak pro $x, y > 0$ platí*
(i) $\sqrt[m]{xy} = \sqrt[m]{x}\,\sqrt[m]{y}$
(ii) $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$
(iii) *jestliže* $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, *pak* $x^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{r}{s}}$
(iv) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
(v) $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$
(vi) $\log(x^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}\log x$ *a* $x^{\frac{p}{q}} = \exp(\frac{p}{q}\log x)$.

Důkaz. Část (i) se dokáže umocněním na m-tou, což je prosté zobrazení na nezáporných číslech. Vztah (ii) plyne indukcí z (i). Při důkazu (iii) položme $u = x^{\frac{p}{q}}$ a $v = x^{\frac{r}{s}}$. Pak

$$u^{qs} = x^{ps} = x^{rq} = v^{qs}.$$

Proto musí platit $u = v$, což jsme chtěli dokázat. V důkazu (iv) a (v) si přepišme $\alpha = \frac{k}{m}$ a $\beta = \frac{l}{m}$, kde $k, l \in \mathbb{Z}$ a $m \in \mathbb{N}$. Pak podle (i)

$$x^{\alpha+\beta} = x^{\frac{k+l}{m}} = \sqrt[m]{x^{k+l}} = \sqrt[m]{x^k x^l} = \sqrt[m]{x^k}\,\sqrt[m]{x^l} = x^{\frac{k}{m}} x^{\frac{l}{m}} = x^\alpha x^\beta.$$

Dále (jednotlivé rovnosti si vysvětlíme pod výpočtem)

$$x^{\alpha\beta} = x^{\frac{kl}{m^2}} = \sqrt[m^2]{x^{kl}} = \sqrt[m]{\sqrt[m]{x^{kl}}} = \sqrt[m]{\left(\sqrt[m]{x^k}\right)^l} = \left(\sqrt[m]{x^k}\right)^{\frac{l}{m}} = (x^\alpha)^\beta.$$

První dvě a poslední dvě rovnosti využívají zlomkový zápis čísel α a β a naši definici racionální mocniny. Platnost třetí identity se dokáže položením $y^m = x^{kl}$ a aplikací vlastnosti $\sqrt[m]{\sqrt[m]{y^m}} = \sqrt[m]{y} = \sqrt[m^2]{y^m}$, kde druhá rovnost plyne z (iii). Konečně pátá rovnost plyne z (ii).

Dokažme (vi). Předně podle (3.4.12) máme

$$\log x = \log(x^{\frac{q}{q}}) = \log(x^{\frac{1}{q}})^q = q\log(x^{\frac{1}{q}}).$$

Odtud získáváme $\log(x^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q}\log x$. Nyní stačí použít (3.4.12) a dostáváme první identitu. Z ní již snadno dokážeme druhou identitu. □

Poslední vztah z Tvrzení 3.4.6 nás inspiruje k definici *obecné* (reálné) *mocniny.*

Definice 3.4.7 (Obecná mocnina)**.** Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x \in (0, \infty)$. Pak definujeme

$$x^\alpha := \exp(\alpha \log x).$$

Tvrzení 3.4.8 (Vlastnosti obecné mocniny)**.** *Nechť* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Pak pro všechna* $x, y \in (0, \infty)$ *platí:*
(i) *zobrazení* $x \mapsto x^\alpha$ *je spojité na* $(0, \infty)$
(ii) *je-li* $\alpha > 0$, *je toto zobrazení rostoucí na* $(0, \infty)$, *je-li* $\alpha < 0$, *je toto zobrazení klesající na* $(0, \infty)$
(iii) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$ *a* $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$
(iv) *je-li* $\alpha \neq 0$, *pak* $R_{x^\alpha} = (0, \infty)$
(v) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Důkaz. Spojitost plyne ze spojitosti exponenciály, logaritmu a Věty o spojitosti složené funkce (Věta 3.2.9). Tvrzení o monotonii se snadno dokáží s využitím toho, že exponenciála i logaritmus jsou rostoucí. Dále

$$\begin{aligned} x^{\alpha+\beta} &= \exp((\alpha+\beta)\log x) = \exp(\alpha \log x + \beta \log x) \\ &= \exp(\alpha \log x)\exp(\beta \log x) = x^\alpha x^\beta, \end{aligned}$$

$$(x^\alpha)^\beta = \exp(\beta \log(x^\alpha)) = \exp(\beta \log(\exp(\alpha \log x))) = \exp(\beta\alpha \log x) = x^{\alpha\beta},$$

a

$$\begin{aligned} (xy)^\alpha &= \exp(\alpha \log(xy)) = \exp(\alpha \log x + \alpha \log y) \\ &= \exp(\alpha \log x)\exp(\alpha \log y) = x^\alpha y^\alpha. \end{aligned}$$

Nyní se věnujme oboru hodnot. Předně logaritmus má obor hodnot celé $\mathbb{R}$. Tentýž obor hodnot má zobrazení $x \mapsto \alpha \log x$ a protože funkce exp zobrazuje $\mathbb{R}$ na $(0, \infty)$, dostáváme $R_{x^\alpha} = (0, \infty)$.

Konečně podle věty o derivaci složené funkce máme

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' = (\exp(\alpha \log x))' = \exp'(\alpha \log x)\alpha \log' x \\ = \exp(\alpha \log x)\alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

□

Definice 3.4.9 (Exponenciála s obecným základem)**.** Nechť $a > 0$, $a \neq 1$. Pak pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$a^x := \exp(x \log a).$$

Poznámka 3.4.10. (i) Pokud bychom v předchozí definici připustili $a = 1$, dostali bychom dobře definovaný pojem $1^x \equiv 1$. Chování této funkce je odlišné od ostatních exponenciál (například není prostá a tudíž není invertovatelná), proto jsme tento případ vyloučili.
(ii) Definujeme-li číslo $\mathrm{e} > 1$ vlastností $\log \mathrm{e} = 1$, dostáváme $\mathrm{e}^x = \exp x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. V dalším budeme používat obě značení e^x a $\exp x$. Pokud bude $z \in \mathbb{C}$, zápisem e^z budeme vždy myslet $\exp z$.

Tvrzení 3.4.11 (Vlastnosti exponenciály s obecným základem)**.** *Mějme* $a > 0$, $a \neq 1$. *Pak:*
(i) *zobrazení* $x \mapsto a^x$ *je spojité na* $\mathbb{R}$
(ii) *je-li* $a > 1$, *je toto zobrazení rostoucí na* $\mathbb{R}$, *je-li* $a < 1$, *je toto zobrazení*

klesající na $\mathbb{R}$
(iii) $a^{x+y} = a^x a^y$ *a* $(ab)^x = a^x b^x$
(iv) $R_{a^x} = (0, \infty)$
(v) $(a^x)' = a^x \log a$.

Důkaz. První vlastnost se získá pomocí Věty o spojitosti složené funkce (Věta 3.2.9). Monotonie se získá z toho, že exp a log jsou rostoucí na svých definičních oborech. Část (iii) plyne z identit z důkazu Tvrzení o obecné mocnině (Tvrzení 3.4.8).

Obor hodnot funkce $x \mapsto x \log a$ je celé $\mathbb{R}$ a protože funkce exp zobrazuje $\mathbb{R}$ na $(0, \infty)$, celkově dostáváme $R_{a^x} = (0, \infty)$.

Konečně podle věty o derivaci složené funkce (Věta 3.3.14) máme

$$(a^x)' = (\exp(x \log a))' = \exp'(x \log a)(x \log a)' = \exp(x \log a) \log a = a^x \log a.$$

□

Podle předchozího tvrzení je funkce a^x invertovatelná. Inverzní funkce se nazývá *logaritmus se základem* a a značíme ji $\log_a$. Pokud $a = \mathrm{e}$, dostáváme nám dobře známý (přirozený) logaritmus.

Tvrzení 3.4.12 (Vlastnosti logaritmu s obecným základem)**.** *Nechť* $a > 0$, $a \neq 1$. *Potom:*
(i) *zobrazení* $\log_a$ *je spojité na* $(0, \infty)$
(ii) *pro* $a > 1$ *je toto zobrazení rostoucí na* $(0, \infty)$, *pro* $a < 1$ *je toto zobrazení klesající na* $(0, \infty)$
(iii) $R_{\log_a} = \mathbb{R}$
(iv) $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$
(v) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
(vi) $\log_a' x = \frac{1}{x} \log a$.

Důkaz. První tři vlastnosti lze snadno získat z Lemmatu o spojitosti inverze (Lemma 3.3.20) a vlastností exponenciály s obecným základem (Tvrzení 3.4.11). Dokažme vlastnost (iv). Pro pevné $x > 0$ označme $u = \log_a x$. Tedy

$$x = a^u = \exp(u \log a).$$

Aplikací funkce log na obě strany rovnosti dostáváme

$$\log x = u \log a = \log_a x \log a.$$

Odtud již snadno získáme (iv). Poslední dvě vlastnosti plynou ze (iv) a již dokázaných vlastností funkce log. □

Za pomoci exponenciály se dají definovat *hyperbolické funkce* a k nim inverzní *funkce hyperbolometrické*. Znalost těchto funkcí je užitečná například při počítání integrálů.

Definice 3.4.13 (Hyperbolické funkce)**.** Funkce *hyperbolický sinus*, *hyperbolický kosinus*, *hyperbolický tangens* a *hyperbolický kotangens* jsou definovány předpisy

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Poznámka 3.4.14. Definice je korektní. Skutečně, cosh je kladná funkce a sinh je nulový pouze v počátku, neboť je to rozdíl rostoucí a klesající funkce, tedy je rostoucí.

Tvrzení 3.4.15 (Vlastnosti hyperbolických funkcí)**.** *Platí:*
(i) *funkce* sinh *je spojitá, rostoucí, lichá, zobrazuje* $\mathbb{R}$ *na* $\mathbb{R}$ *a* $\sinh' x = \cosh x$
(ii) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ *na* $\mathbb{R}$
(iii) *funkce* cosh *je spojitá, sudá, roste na* $[0, \infty)$*, klesá na* $(-\infty, 0]$*, zobrazuje* $\mathbb{R}$ *na* $[1, \infty)$ *a* $\cosh' x = \sinh x$
(iv) *funkce* tanh *je spojitá, rostoucí, lichá, zobrazuje* $\mathbb{R}$ *na* $(-1, 1)$ *a* $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}$
(v) *funkce* coth *je spojitá na svém definičním oboru, klesající na* $(-\infty, 0)$*, klesající na* $(0, \infty)$*, lichá, zobrazuje* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *na* $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ *a* $\coth' x = \frac{-1}{\sinh^2 x}$.

Důkaz. Monotonii funkce sinh jsme si vysvětlili výše, lichost se snadno ověří z definice a spojitost plyne ze spojitosti dílčích funkcí. Z definice limity se dá snadno ukázat, že $\lim_{x\to\infty} \sinh x = \infty$ (e^{-x} je pro dostatečně velké hodnoty argumentu v intervalu $(0, 1)$) a $\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$. Podle Lemmatu o spojitosti inverze (Lemma 3.3.20) je tedy oborem hodnot celé $\mathbb{R}$. Derivaci získáme přímým výpočtem

$$\sinh' x = \Big(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\Big)' = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Identita v části (ii) plyne z definic obou funkcí

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \Big(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\Big)^2 \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} - \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} = 1.\end{aligned}$$

Dokažme (iii). Spojitost a sudost se odvodí snadno. Dále protože sinh je nezáporný a rostoucí na $[0, \infty)$, platí totéž pro $\sinh^2$. Podle (ii) je zde tedy $\cosh^2$ rostoucí a odtud i cosh je rostoucí na $[0, \infty)$, neboť je nezáporný. Na intervalu $(-\infty, 0]$ použijeme sudost. Navíc $\cosh 0 = 1$ a snadno ověříme, že

$$\lim_{x\to\infty} \cosh x = \lim_{x\to-\infty} \cosh x = \infty.$$

Lemma o spojitosti inverze (Lemma 3.3.20) proto dává $R_{\cosh} = [1, \infty)$. Pro derivaci máme

$$\cosh' x = \Big(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\Big)' = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sinh x.$$

Dokažme (iv). Spojitost a lichost se odvodí snadno. Dále

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}.$$

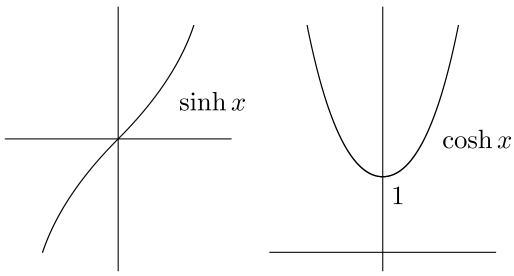
Odtud vidíme, že tanh je rostoucí. Dále snadno $\lim_{x\to\infty} \tanh x = 1$. Toto zkombinujeme s lichostí a monotonií a získáme požadovaný obor hodnot (díky Lemmatu o spojitosti inverze; Lemma 3.3.20). Derivaci spočítáme

$$\begin{aligned}\tanh' x = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\sinh' x \cosh x - \sinh x \cosh' x}{\cosh^2 x}& \\ = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}&.\end{aligned}$$

Dokažme (v). Všechny informace až na poslední získáme z toho, že coth je převrácená hodnota tanh. Zbývá spočítat derivaci

$$\coth' x = \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{\cosh' x \sinh x - \cosh x \sinh' x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x}.$$

□



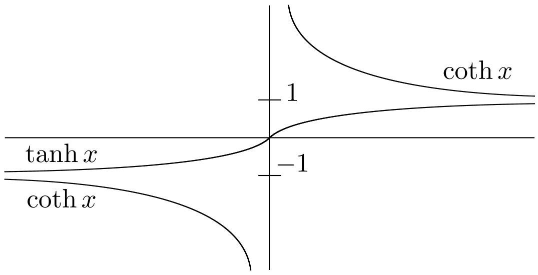
Obrázek 3.11: Náčrt části grafů funkcí sinh a cosh.

Poznámka 3.4.16. Povšimněte si, že coth je klesající na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, ale není klesající na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Na intervalech, kde jsou předchozí funkce ryze monotonní, existují jejich inverzní funkce. S využitím lemmatu o spojité inverzi dostáváme následující tabulku.

sinh	$\mathbb{R}$	$\to$	$\mathbb{R}$	argsinh	$\mathbb{R}$	$\to$	$\mathbb{R}$
cosh	$[0, \infty)$	$\to$	$[1, \infty)$	argcosh	$[1, \infty)$	$\to$	$[0, \infty)$
tanh	$\mathbb{R}$	$\to$	$(-1, 1)$	argtanh	$(-1, 1)$	$\to$	$\mathbb{R}$
coth	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\to$	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$	argcoth	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$	$\to$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Právě zavedené hyperbolometrické funkce umíme zderivovat.



Obrázek 3.12: Náčrt části grafů funkcí tanh a coth.

Tvrzení 3.4.17. *Platí následující vztahy*

$$\begin{aligned} \operatorname{argsinh}' x &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} && \text{na } \mathbb{R} \\ \operatorname{argcosh}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} && \text{na } (1,\infty) \\ \operatorname{argtanh}' x &= \frac{1}{1-x^2} && \text{na } (-1,1) \\ \operatorname{argcoth}' x &= \frac{1}{1-x^2} && \text{na } (-\infty,-1)\cup(1,\infty). \end{aligned}$$

Důkaz. Zabývejme se nejprve prvním výsledkem. Pro $x \in \mathbb{R}$ pišme $y = \operatorname{argsinh} x$, tedy $y \in \mathbb{R}$ a $x = \sinh y$. Protože funkce sinh má nenulovou vlastní derivaci na $\mathbb{R}$, můžeme aplikovat Větu o derivaci inverzní funkce (Věta 3.3.14; pozor, prohodili jsme roli x a y) a dostáváme

$$\operatorname{argsinh}' x = \frac{1}{\sinh'(y)} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ve zbývajících případech postupujeme stejně. Napíšeme jen stručné odvození a podrobnosti přenecháme čtenáři.

Volba $y = \operatorname{argcosh} x$ pro $x \in (1,\infty)$ odpovídá $y \in (0,\infty)$ a $x = \cosh y$. Proto

$$\operatorname{argcosh}' x = \frac{1}{\cosh'(y)} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(pozor na identitu $\sinh y = \sqrt{\cos^2 y - 1}$, která neplatí obecně).

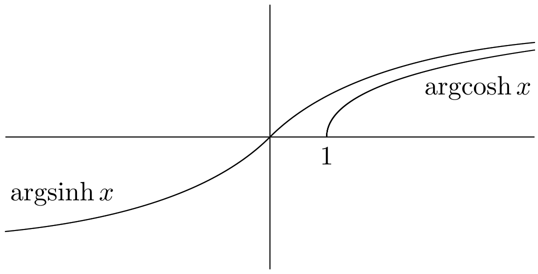
Volba $y = \operatorname{argtanh} x$ pro $x \in (-1,1)$ odpovídá $y \in \mathbb{R}$ a $x = \tanh y$. Proto

$$\operatorname{argtanh}' x = \frac{1}{\tanh' y} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-\tanh^2 y} = \frac{1}{1-x^2}.$$

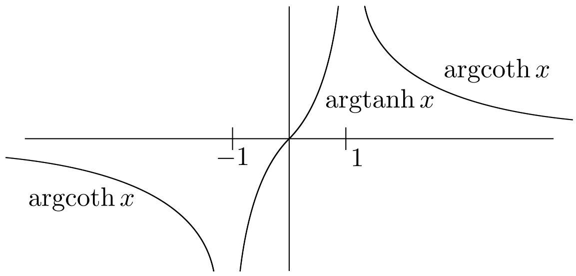
Volba $y = \operatorname{argcoth} x$ pro $x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]$ odpovídá $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ a $x = \coth y$. Proto

$$\operatorname{argcoth}' x = \frac{1}{\coth' y} = \frac{1}{\frac{-1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\sinh^2 y - \cosh^2 y}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{1-\coth^2 y} = \frac{1}{1-x^2}.$$

□



Obrázek 3.13: Náčrt části grafů funkcí argsinh a argcosh.



Obrázek 3.14: Náčrt části grafů funkcí argtanh a argcoth.

Poznámka 3.4.18. Hyperbolometrické funkce na svých definičních oborech splňují následující identity:

$$\begin{aligned} \operatorname{argsinh} x &= \log(x+\sqrt{x^2+1}) & \operatorname{argcosh} x &= \log(x+\sqrt{x^2-1}) \\ \operatorname{argtanh} x &= \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} & \operatorname{argcoth} x &= \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}. \end{aligned}$$

Až budeme vědět, že k rovnosti dvou funkcí stačí shodná derivace a rovnost v jednom bodě (lze také nahradit shodnou vlastní limitou v jednom z krajních bodů), budeme tyto identity umět lehce dokázat.

Příklad 3.4.19. Dokažme první identitu z předchozí poznámky použitím definice funkce $x \mapsto \sinh x$. Položme $x = \sinh y$, $t = \mathrm{e}^y$. Potom

$$x = \frac{t - \frac{1}{t}}{2}.$$

Odsud

$$t^2 - 2tx - 1 = 0,$$

tedy
$$t = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$
Protože $t = \mathrm{e}^y > 0$, máme
$$\operatorname{argsinh} x = y = \log(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Cvičení 3.4.20. Dokažte analogicky zbylé identity z Poznámky 3.4.18.

Elementární funkce často splňují různé symetrie (či periodičnost) a mohli jsme si všimnout, že jisté symetrie pak mají i jejich derivace. Obecně platí následující pravidla.

Tvrzení 3.4.21. *Derivace periodické funkce je periodická funkce se stejnou periodou, derivace liché funkce je sudá a derivace sudé funkce je lichá (pokud příslušné derivace existují).*

Důkaz. Důkaz je jen jednoduché cvičení s definicí derivace. Ukážeme si jej jen v případě liché funkce
$$\begin{aligned} f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} &= -\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{-h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = f'(x). \end{aligned}$$
□

Zmiňme se ještě o *parametricky zadaných* funkcích $y = f(x)$, kde
$$x = \varphi_1(t) \quad \text{a} \quad y = \varphi_2(t) \qquad t \in (a,b),$$
přičemž $\varphi_1, \varphi_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funkce φ_1 je prostá na (a,b).

Věta 3.4.22 (Derivace parametricky zadané funkce)**.** *Nechť $\varphi_1, \varphi_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mají vlastní derivaci na (a,b), navíc $\varphi_1' \neq 0$ na (a,b) a x, y jsou jako výše. Pak*
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)} \qquad \textit{pro } t \in (a,b).$$

Důkaz. Podle vět o derivaci inverzní funkce je φ_1 prostá na (a,b), $t = \varphi_1^{-1}(x)$ na $\varphi_1((a,b))$ a
$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi_2(\varphi_1^{-1}(x)) = \varphi_2'(\varphi_1^{-1}(x))\frac{1}{\varphi_1'(t)} = \frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}.$$
□

Příklad 3.4.23. Nechť $x = t^3 + t$ a $y = \sin t$ na $\mathbb{R}$. Pak
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos t}{3t^2+1} \qquad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

3.5 Derivace vyšších řádů, parciální derivace

Definice 3.5.1 (Derivace vyššího řádu)**.** Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ vlastní derivaci. Jestliže existuje

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}^*,$$

pak toto číslo nazveme *druhou derivací funkce f v bodě x_0* a značíme jej $f''(x_0)$, popřípadě $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$. Analogicky definujeme pro $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0).$$

Poznámka 3.5.2. Řád derivace označuje buď římská číslice nebo arabská číslice v kulaté závorce. Používá se konvence $f^{(0)} = f$.

Příklad 3.5.3. Pro funkci $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2x + 2 \\ f''(x) &= 6x + 2 \\ f'''(x) &= 6 \\ f^{IV}(x) &= f^{V}(x) = \cdots = 0. \end{aligned}$$

Příklad 3.5.4. Pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^x\sqrt{x}$ spočtěme první tři derivace na $(0, \infty)$. Máme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^x x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x x^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) &= \mathrm{e}^x x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^x x^{-\frac{3}{2}} \\ &= \mathrm{e}^x x^{\frac{1}{2}} + \mathrm{e}^x x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^x x^{-\frac{3}{2}} \\ f'''(x) &= \mathrm{e}^x x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x x^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{e}^x x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^x x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{8}\mathrm{e}^x x^{-\frac{5}{2}} \\ &= e^x x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^x x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\mathrm{e}^x x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{8}\mathrm{e}^x x^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

V předchozím výpočtu jsme narazili na několik dvojic členů, jejichž vysčítáním došlo ke zjednodušení výsledné formule. Následující výsledek založený na binomické větě nám přímo ohlídá, které členy je ve vyšší derivaci součinu dvou funkcí možné sečíst, a tím nám zrychlí výpočet.

Věta 3.5.5 (Leibnizovo pravidlo)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a existují vlastní $f^{(n)}(x_0)$ a $g^{(n)}(x_0)$. Pak*

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

Důkaz. Použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ se jedná přímo o vzoreček pro derivaci součinu. Nechť je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, existují vlastní $f^{(n)}(x_0)$ a $g^{(n)}(x_0)$ (tedy existují vlastní derivace všech nižších řádů) a vzoreček platí pro derivaci řádu $n-1$. Pak (pro přehlednost vynecháváme argument x_0)

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n)} &= ((fg)^{(n-1)})' = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)} g^{(n-1-k)}\Big)' \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k+1)} g^{(n-1-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k)} + f^{(n)} g + f g^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.
\end{aligned}
$$

□

Příklad 3.5.6. Spočtěme $(x^2 \mathrm{e}^x)^{\mathrm{L}}$. Podle Leibnizova pravidla máme (nenulové jsou jen tři členy)

$$
\begin{aligned}
(x^2\mathrm{e}^x)^{\mathrm{L}} &= (x^2)^{(0)} (\mathrm{e}^x)^{\mathrm{L}} + \binom{50}{1} (x^2)' (\mathrm{e}^x)^{\mathrm{XLIX}} + \binom{50}{2} (x^2)'' (\mathrm{e}^x)^{\mathrm{XLVIII}} \\
&= x^2 \mathrm{e}^x + 100 x \mathrm{e}^x + 50 \cdot 49 \mathrm{e}^x.
\end{aligned}
$$

Úloha 3.5.7. Spočtěte $(\mathrm{e}^x \sin x)^{\mathrm{X}}(0)$.

Řešení: Použijeme Leibnizovo pravidlo. Předně si uvědomme, že pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ platí $\exp^{(k)}(0) = \exp 0 = 1$. Dále, protože $\sin^{k+4} = \sin k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$, a

$$
\begin{aligned}
\sin 0 &= 0 \\
\sin' 0 &= \cos 0 = 1 \\
\sin'' 0 &= -\sin 0 = 0 \\
\sin''' 0 &= -\cos 0 = -1 \\
\sin^{\mathrm{IV}}(0) &= \sin 0 = 0.
\end{aligned}
$$

dostáváme díky Leibnizově formuli

$$\begin{aligned}
(\mathrm{e}^x \sin x)^{\mathrm{X}}(0) &= \binom{10}{0} \cdot 1 \cdot 0 + \binom{10}{1} \cdot 1 \cdot 1 + \binom{10}{2} \cdot 1 \cdot 0 + \binom{10}{3} \cdot 1 \cdot (-1) \\
&\quad + \binom{10}{4} \cdot 1 \cdot 0 + \binom{10}{5} \cdot 1 \cdot 1 + \binom{10}{6} \cdot 1 \cdot 0 + \binom{10}{7} \cdot 1 \cdot (-1) \\
&\quad + \binom{10}{8} \cdot 1 \cdot 0 + \binom{10}{9} \cdot 1 \cdot 1 + \binom{10}{10} \cdot 1 \cdot 0 \\
&= \binom{10}{1} - \binom{10}{3} + \binom{10}{5} - \binom{10}{7} + \binom{10}{9} \\
&= 10 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} - - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} + 10 \\
&= 2 \cdot 10 - 2 \cdot 120 + 252 = 32.
\end{aligned}$$

☆

Nyní uvážíme situaci, kdy $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Body v $\mathbb{R}^N$ zde budeme značit $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Definice 3.5.8 (Parciální derivace)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^N$, $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a dále nechť $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_N) - f(a)}{h},$$

řekneme, že funkce f má v bodě a *parciální derivaci* vzhledem k proměnné x_i a značíme ji $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Poznámka 3.5.9. (i) V definici jsme zafixovali všechny proměnné až na tu, podle níž derivujeme. Tím jsme přešli k funkci jedné proměnné a tak při výpočtu parciálních derivací můžeme používat techniky odvozené pro funkce jedné reálné proměnné.
(ii) U funkcí více proměnných bývá zvykem nepřipouštět nevlastní parciální derivace.
(iii) Často se používá kratší značení $f_{x_i}(a)$ nebo $\partial_i f(a)$.
(iv) Zobrazení $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ je opět funkce z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$. Má tedy smysl zkoumat její derivaci podle kterékoliv proměnné x_j (počítáme tedy $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$). Výsledná funkce se značí $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ nebo $f_{x_i x_j}$ a nazývá se druhou parciální derivací podle proměnných x_i a x_j. Pokud $i = j$, píše se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ nebo $f_{x_i x_i}$.

Příklad 3.5.10. Nechť $f(x, y) = x^2 + xy$. Pak

$$f_x = 2x + y \qquad f_y = x \qquad f_{xx} = 2 \qquad f_{yy} = 0 \qquad f_{xy} = 1 \qquad f_{yx} = 1$$

a všechny parciální derivace od třetího řádu výše jsou nulové.

Poznámka 3.5.11. (i) Polynomy stupně $n \in \mathbb{N}_0$ na $\mathbb{R}^2$ nazýváme funkce tvaru $\sum_{i,j \in \mathbb{N}_0, i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j$, kde a_{ij} jsou reálné koeficienty.
(ii) Rovnost $f_{xy} = f_{yx}$ neplatí obecně (ale třeba pro polynomy platí vždy).

Příklad 3.5.12. Nechť $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Pak pro $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

$$f_x = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Úloha 3.5.13. Nechť $N \in \mathbb{N}$. Pro vektor $x = (x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{R}^n$ definujeme velikost $|x| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_N^2}$. Pro $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definujeme *gradient* funkce f jako $\nabla f = (f_{x_1},\dots,f_{x_N})$ a *Laplaceův operátor* $\Delta f = f_{x_1x_1} + \cdots + f_{x_Nx_N}$.

Pro volbu $f(x) = |x|$ a $x \neq (0,\dots,0)$ spočtěte ∇f, $|\nabla f|$ a Δf.

Řešení: Analogicky jako v předchozím příkladu máme $f_{x_i} = \frac{x_i}{|x|}$, kdykoliv $i \in \{1,\dots,N\}$. Proto $\nabla f = \frac{x}{|x|}$ a $|\nabla f| = 1$.

Dále

$$f_{x_ix_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i}{|x|} = \frac{\frac{\partial x_i}{\partial x_i}|x| - \frac{\partial |x|}{\partial x_i}x_i}{|x|^2} = \frac{|x| - \frac{x_i}{|x|}x_i}{|x|^2}.$$

Odtud

$$\Delta f = \frac{N|x| - \frac{|x|^2}{|x|}}{|x|^2} = \frac{N-1}{|x|}.$$

☆

3.6 Limita a derivace komplexní funkce jedné reálné proměnné

V tomto případě používáme standardní definici limity, ovšem okolí v obraze je tentokrát bráno v komplexní rovině.

Definice 3.6.1 (Limita komplexní funkce)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{C}$. Řekneme, že A je *limitou* funkce f pro x jdoucí k x_0, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \quad\Longrightarrow\quad f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A).$$

V takovém případě píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ nebo $f(x) \to A$ pro $x \to x_0$.

Následující charakterizace nám umožňuje používat výsledky získané pro reálný případ.

Věta 3.6.2 (Limita komplexní funkce jako limity reálných funkcí)**.** *Nechť funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{C}$. Pak*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad\Longleftrightarrow\qquad \lim_{x\to x_0} \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} A \ \text{ a } \lim_{x\to x_0} \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im} A.$$

Důkaz. Pro jednoduchost značení zaveďme $A_1 = \operatorname{Re} A$, $A_2 = \operatorname{Im} A$, $f_1 = \operatorname{Re} f$ a $f_2 = \operatorname{Im} f$.

„⇒" Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje prstencové okolí bodu x_0, na kterém platí $|f(x) - A| < \varepsilon$. Nutně pak zde platí i $|f_1(x) - A_1| < \varepsilon$ a $|f_2(x) - A_2| < \varepsilon$, neboť na $\mathbb{C}$ vždy máme $|\operatorname{Re} z|_{\mathbb{R}} \leq |z|_{\mathbb{C}}$ a $|\operatorname{Re} z|_{\mathbb{R}} \leq |z|_{\mathbb{C}}$.

„⇐" Ke zvolenému $\varepsilon > 0$ umíme najít takové prstencové okolí, že pro x z něj máme

$$|f_1(x) - A_1| < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad |f_2(x) - A_2| < \varepsilon.$$

Odtud

$$|f(x) - A| = \sqrt{|f_1(x) - A_1|^2 + |f_2(x) - A_2|^2} \leq \sqrt{2}\varepsilon.$$

□

Máme-li definovanou limitu komplexních funkcí reálné proměnné, lze zavést i jejich derivaci.

Definice 3.6.3 (Derivace komplexní funkce)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *derivaci* rovnou A, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A.$$

Potom píšeme $f'(x_0) = A$. Analogicky jako pro reálné funkce také definujeme jednostranné derivace.

Všimněme si, že definice je téměř stejná jako u reálných funkcí, pouze nepřipouštíme nevlastní derivace, protože pro komplexní funkce nemají žádný smysl. Předchozí věta nám opět umožňuje používat většinu technik odvozených pro reálné funkce. Abychom si toto ilustrovali, dokažme si, že Věta o aritmetice derivací (Věta 3.3.10) platí i pro komplexní funkce.

Věta 3.6.4 (Aritmetika derivací pro komplexní funkce)**.** *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mají vlastní derivace v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak*
(i) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
(ii) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
(iii) *jestliže $g(x_0) \neq 0$, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Důkaz. Označme $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$, $g = g_1 + \mathrm{i} g_2$, kde f_j, g_j, $j = 1, 2$, jsou reálné funkce. Potom máme

(i)

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= (f_1+\mathrm{i}f_2+g_1+\mathrm{i}g_2)'(x_0)\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{(f_1+\mathrm{i}f_2+g_1+\mathrm{i}g_2)(x)-(f_1+\mathrm{i}f_2+g_1+\mathrm{i}g_2)(x_0)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\Big[\frac{(f_1+g_1)(x)-(f_1+g_1)(x_0)}{x-x_0}+\mathrm{i}\frac{(f_2+g_2)(x)-(f_2+g_2)(x_0)}{x-x_0}\Big]\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{(f_1+g_1)(x)-(f_1+g_1)(x_0)}{x-x_0}\\
&\quad+\mathrm{i}\lim_{x\to x_0}\frac{(f_2+g_2)(x)-(f_2+g_2)(x_0)}{x-x_0}\\
&=(f_1+g_1)'(x_0)+\mathrm{i}(f_2+g_2)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).
\end{aligned}
$$

(ii) Analogicky, s využitím bodu (i) a aritmetiky derivací pro reálné funkce

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &=\Big((f_1+\mathrm{i}f_2)(g_1+\mathrm{i}g_2)\Big)'(x_0)=\Big(f_1g_1-f_2g_2+\mathrm{i}(f_1g_2+f_2g_1)\Big)'(x_0)\\
&=(f_1g_1-f_2g_2)'(x_0)+\mathrm{i}(f_1g_2+f_2g_1)'(x_0)\\
&=f_1'(x_0)g_1(x_0)+f_1(x_0)g_1'(x_0)-f_2'(x_0)g_2(x_0)-f_2(x_0)g_2'(x_0)\\
&\quad+\mathrm{i}\big(f_1'(x_0)g_2(x_0)+f_1(x_0)g_2'(x_0)+f_2'(x_0)g_1(x_0)+f_2(x_0)g_1'(x_0)\big)\\
&=(f_1+\mathrm{i}f_2)'(x_0)(g_1+\mathrm{i}g_2)(x_0)+(f_1+\mathrm{i}f_2)(x_0)(g_1+\mathrm{i}g_2)'(x_0)\\
&=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}
$$

(iii) Stejně jako u reálných funkcí stačí dokázat, že platí

$$\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Máme, použitím bodu (i) a aritmetiky derivací pro reálné funkce

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x_0) &=\Big(\frac{1}{g_1+\mathrm{i}g_2}\Big)'(x_0)=\Big(\frac{g_1-\mathrm{i}g_2}{g_1^2+g_2^2}\Big)'(x_0)\\
&=\Big(\frac{g_1}{g_1^2+g_2^2}\Big)'(x_0)-\mathrm{i}\Big(\frac{g_2}{g_1^2+g_2^2}\Big)'(x_0)\\
&=\frac{g_1'(x_0)(g_1^2+g_2^2)(x_0)-2g_1(x_0)\big(g_1(x_0)g_1'(x_0)+g_2(x_0)g_2'(x_0)\big)}{\big(g_1^2+g_2^2\big)^2(x_0)}\\
&\quad-\mathrm{i}\frac{g_2'(x_0)(g_1^2+g_2^2)(x_0)-2g_2(x_0)\big(g_1(x_0)g_1'(x_0)+g_2(x_0)g_2'(x_0)\big)}{\big(g_1^2+g_2^2\big)^2(x_0)}\\
&=\frac{g_1'(x_0)(-g_1^2+g_2^2-2\mathrm{i}g_1g_2)(x_0)}{\big(g_1^2+g_2^2\big)^2(x_0)}+\frac{g_2'(x_0)(-\mathrm{i}g_1^2+\mathrm{i}g_2^2+2g_1g_2)(x_0)}{\big(g_1^2+g_2^2\big)^2(x_0)}\\
&=-\frac{(g_1+\mathrm{i}g_2)'(x_0)(g_1-\mathrm{i}g_2)^2(x_0)}{\big(g_1^2+g_2^2\big)^2(x_0)}=-\frac{(g_1+\mathrm{i}g_2)'(x_0)}{(g_1+\mathrm{i}g_2)^2(x_0)}=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.
\end{aligned}
$$

Důkaz je hotov. $\square$

Příklad 3.6.5. (i) Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $f(x) = \alpha x + \beta$. Pak

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f)'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + \mathrm{i}(\operatorname{Im} f)'(x) \\ &= (\operatorname{Re} \alpha x + \operatorname{Re} \beta)' + \mathrm{i}(\operatorname{Im} \alpha x + \operatorname{Im} \beta)' = \operatorname{Re} \alpha + \mathrm{i} \operatorname{Im} \alpha = \alpha. \end{aligned}$$

Analogicky se pro polynom s komplexními koeficienty získá

$$\Big(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j\Big)' = \sum_{j=1}^{n} j \alpha_j x^{j-1}.$$

(ii) Nechť $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ a $f(x) = (x+\alpha)^n$. Pak několikanásobnou aplikací Věty o aritmetice derivací pro komplexní funkce (Věta 3.6.4) dostáváme

$$f'(x) = n(x+\alpha)^{n-1}.$$

(Větu o derivaci složené funkce (Věta 3.3.14) použít nemůžeme, neboť vnitřní funkce je komplexní a její rozklad na reálnou a imaginární složku nám nijak nepomůže.)
(iii) Pokud $\alpha \in \mathbb{C}$, platí

$$\Big(\frac{1}{x+\alpha}\Big)' = \frac{-1}{(x+\alpha)^2}.$$

Skutečně, píšeme-li $\alpha = \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2$,

$$\frac{1}{x+\alpha} = \frac{1}{x+\alpha} \frac{\overline{x+\alpha}}{\overline{x+\alpha}} = \frac{x+\alpha_1 - \mathrm{i}\alpha_2}{(x+\alpha_1)^2 + \alpha_2^2},$$

a proto

$$\begin{aligned} \Big(\frac{1}{x+\alpha}\Big)' &= \frac{(x+\alpha_1)^2 + \alpha_2^2 - (x+\alpha_1 - \mathrm{i}\alpha_2)(2x+2\alpha_1)}{((x+\alpha_1)^2+\alpha_2^2)^2} \\ &= \frac{\alpha_2^2 - (x+\alpha_1)^2 - \mathrm{i}2\alpha_2(x+\alpha_1)}{((x+\alpha_1)^2+\alpha_2^2)^2} \\ &= -\frac{(x+\alpha_1-\mathrm{i}\alpha_2)^2}{((x+\alpha_1)^2+\alpha_2^2)^2} = \frac{-1}{(x+\alpha)^2}. \end{aligned}$$

Aplikací Věty o aritmetice derivací pro komplexní funkce (Věta 3.6.4) dostáváme pro $n \in \mathbb{N}$

$$\Big((x+\alpha)^{-n}\Big)' = -n(x+\alpha)^{-n-1}.$$

(iv) Nechť $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak $(\mathrm{e}^{\alpha x})' = \alpha \mathrm{e}^{\alpha x}$, neboť (opět píšeme $\alpha = \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2$)

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^{\alpha x})' &= (\mathrm{e}^{\alpha_1 x}\cos(\alpha_2 x) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\alpha_1 x}\sin(\alpha_2 x))' \\ &= \mathrm{e}^{\alpha_1 x}(\alpha_1 \cos(\alpha_2 x) - \alpha_2 \sin(\alpha_2 x)) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\alpha_1 x}(\alpha_1 \sin(\alpha_2 x) + \alpha_2 \cos(\alpha_2 x)) \\ &= e^{\alpha_1 x}(\alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2)(\cos(\alpha_2 x) + \mathrm{i}\sin(\alpha_2 x)) = \alpha \mathrm{e}^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Pokud se podíváme zpět na věty, které jsme dokázali dříve pro reálné funkce, pak nemá smysl přeformulovávat věty, ve kterých hraje roli uspořádání reálných čísel. Tedy konkrétně Věta o zachování nerovnosti při limitním přechodu (Věta 3.1.34) a Věta o dvou strážnících (Věta 3.1.36) nemají rozumnou analogii pro komplexní funkce. U vět o složených zobrazeních musíme předpokládat, že vnitřní funkce musí být reálná. To se týká Vět o limitě a spojitosti složené funkce (Věty 3.1.46, 3.2.9, 3.2.13) a Věty o derivaci složené funkce (Věta 3.3.14). Dále nemá zatím smysl mluvit o inverzní funkci pro komplexní funkce, tedy Věty 3.3.16, 3.3.21, 3.3.22 a Lemma 3.3.20 nemají pro komplexní funkce svoji analogii. Ostatní věty lze pro komplexní funkce jednoduše přeformulovat.

Cvičení 3.6.6. Přeformulujte (případně mírně modifikujte) ty věty z celé kapitoly, které mají smysl pro komplexní funkce, a proveďte jejich důkaz.

Shrnutí a závěrečné poznámky. V této kapitole jsme se seznámili s pojmem limita funkce, přičemž jsme se soustředili na vlastní limity ve vlastních bodech. Dále jsme si zavedli pojem spojitost funkce (v bodě či na intervalu) a studovali jsme různé důsledky existence limit a spojitosti funkce. Seznámili jsme se i s pojmem derivace funkce a ukázali jsme si různé důsledky existence (vlastní) derivace funkce. Zavedli jsme si třídu elementárních funkcí (i když dvě základní věty si dokážeme později, v kapitole věnované mocninným řadám) a ukázali si jejich základní vlastnosti. Kapitola se věnovala především reálným funkcím, na závěr jsme si proto uvedli základní rozdíly pro funkce komplexní.

Kapitola 4

Primitivní funkce

V první části této kapitoly se budeme zabývat hledáním primitivních funkcí, což je přesně opačný proces, než je derivování. Nejjednodušší metody budou založeny na zkušenostech z derivování. Ukážeme si ale i pokročilejší metody. Na úlohu hledání primitivní funkce lze také pohlížet jako na velmi jednoduchý typ diferenciální rovnice. Toto téma lehce rozšíříme ve druhé části kapitoly, kde se naučíme řešit dva základní typy diferenciálních rovnic a řekneme si i něco málo o rovnicích diferenčních.

4.1 Základní pojmy a příklady

Definice 4.1.1. Nechť $f, F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že F je *primitivní funkcí* k f na (a, b), jestliže $F' = f$ na (a, b). Pak píšeme $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka 4.1.2. Vzhledem k tomu, že primitivní funkce k součtu funkcí je součet primitivních funkcí (dokážeme si níže), zřejmě pro komplexní funkci $f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f$ platí

$$\int f\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{Re} f\,\mathrm{d}x + \mathrm{i} \int \operatorname{Im} f\,\mathrm{d}x. \tag{4.1.1}$$

Proto není třeba primitivní funkce pro komplexní funkce studovat zvlášť, stačí dle vztahu (4.1.1) použít výsledky pro reálné funkce.

Poznámka 4.1.3. (i) Někdy se zavádí primitivní funkce na uzavřeném či polouzavřeném intervalu. Pak se navíc kontrolují odpovídající jednostranné derivace v hraničních bodech.
(ii) V definici primitivní funkce je důležité, že pracujeme na intervalu. Pak totiž dostáváme rozumné výsledky ohledně jednoznačnosti primitivní funkce, které jsou kompatibilní s teorií diferenciálních rovnic.
(iii) Daná funkce mít obecně primitivní funkci nemusí (třeba $x \mapsto \operatorname{sign} x$, zatím to ale neumíme dokázat).
(iv) I když primitivní funkce existuje, nemusí být vyjádřitelná pomocí elementárních funkcí (toto je známo například o funkci $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$).

(v) Symbol pro primitivní funkci se často zkracuje na $\int f\,\mathrm{d}x$ nebo jen $\int f$. Tyto zkrácené tvary je však nutné používat opatrně, neboť například u vícerozměrné integrace musí čtenář poznat, podle kterých proměnných se právě integruje.
(vi) Někdy se místo primitivní funkce mluví o (neurčitém) integrálu. My se tomuto termínu budeme snažit vyhýbat a budeme důsledně mluvit o primitivní funkci. Nicméně funkci za $\int$ budeme nazývat *integrand*. O integrálu budeme mluvit v dalších kapitolách (Riemannově, Newtonově a Lebesgueově), výsledek dané operace nebude (na rozdíl od primitivní funkce) funkce, ale číslo.

Věta 4.1.4 (O nejednoznačnosti primitivní funkce)**.** (i) *Je-li F primitivní funkce k f na (a,b) a $C \in \mathbb{R}$, pak $F + C$ je také primitivní funkce k f na (a,b).*
(ii) *Jsou-li F a G primitivní funkce k f na (a,b), pak existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že $G = F + C$.*

Důkaz. První část se dokáže zderivováním. Důkaz druhé části zatím odložíme (z předpokladů plyne, že $(F - G)' = 0$. My ale zatím nevíme, že nulovou derivaci mají pouze konstanty). $\square$

Poznámka 4.1.5. Dodáme-li počáteční podmínku tvaru $F(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in (a,b)$ a $y_0 \in \mathbb{R}$, primitivní funkce je určena jednoznačně.

Příklad 4.1.6. Nalezněme primitivní funkci k $f(x) = \sqrt{x}$ na $(0,\infty)$, která splňuje $F(1) = 4$. Předně máme $(x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Odtud $(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})' = \sqrt{x}$. Tedy $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ je jednou z možných primitivní funkcí. Splňuje $G(1) = \frac{2}{3}$. Stačí tedy položit

$$F(x) = G(x) + 4 - G(1) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{10}{3}.$$

Věta 4.1.7 (Spojitost primitivní funkce)**.** *Je-li F primitivní funkce k f na (a,b), pak je na (a,b) spojitá.*

Důkaz. Primitivní funkce má ve všech bodech vlastní derivaci, a proto je v nich spojitá. $\square$

Následující věta plyne z výsledků v předchozí kapitole (sekce věnované derivaci a elementárním funkcím).

Věta 4.1.8 (Přehled základních primitivních funkcí)**.** *Platí*
(i) *nechť $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Pak $\int (x+a)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + C$ pro*

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} & \textit{pokud } a \notin \mathbb{R} \textit{ nebo } a \in \mathbb{R}, n \geq 0 \\ x \in (-\infty,-a) \textit{ nebo } x \in (-a,\infty) & \textit{pokud } a \in \mathbb{R}, n \leq -2 \end{cases}$$

(ii) *nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, pak $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ na $(0,\infty)$*
(iii) *nechť $a \in \mathbb{R}$, pak $\int \frac{1}{x+a}\,\mathrm{d}x = \log|x+a| + C$ na $(-\infty,-a)$ nebo na $(-a,\infty)$*
(iv) $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$ *na* $\mathbb{R}$
(v) $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$ *na* $\mathbb{R}$
(vi) $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$ *na* $\mathbb{R}$

(vii) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C_1 = \operatorname{arccot} x + C_2$ *na* $\mathbb{R}$
(viii) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$ *na* $(-1,1)$
(ix)$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsinh} x + C = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + C$ *na* $\mathbb{R}$
(x) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argcosh} x \cdot \operatorname{sign} x + C = \log(|x| + \sqrt{x^2-1}) \operatorname{sign} x + C$ *na* $(-\infty,-1)$ *nebo na* $(1,\infty)$
(xi) $\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + C$ *na* $\mathbb{R}$
(xii) $\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x + C$ *na* $\mathbb{R}$
(xiii) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$ *na* $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ *s* $k \in \mathbb{Z}$ *pevným*
(xiv) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \cot x + C$ *na* $(k\pi, (k+1)\pi)$ *s* $k \in \mathbb{Z}$ *pevným.*

Poznámka 4.1.9. Do první části věty spadá například $\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Věta nám nabízí primitivní funkci $F_1(x) = -\frac{1}{x} + C_1$ na $(-\infty,0)$ nebo $F_2(x) = -\frac{1}{x} + C_2$ na $(0,\infty)$. Primitivní funkce na celém $\mathbb{R}$ nemůže existovat už jenom proto, že integrand není definován v počátku. Funkce

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1 & \text{na } (-\infty,0) \\ -\frac{1}{x} + C_2 & \text{na } (0,\infty) \end{cases}$$

není primitivní funkcí na $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, neboť uvažovaná množina není interval. Na tomto případě je také vidět, proč se nám situace, kdy nepracujeme na intervalu, nelíbí. Máme zde dvě aditivní konstanty a případná počáteční podmínka nám pomůže určit jen jednu z nich.

Uvažme situaci, kdy $f\colon (a,c) \to \mathbb{R}$, umíme najít primitivní funkce na podintervalech (a,b), (b,c) a integrand je definován v bodě b. Pak máme naději (nikoliv jistotu), že existuje primitivní funkce pro celý interval (a,c), která se získá takzvaným slepením dílčích primitivních funkcí. Věta o spojitosti primitivní funkce (Věta 4.1.7) nám říká, jak si mají odpovídat aditivní konstanty.

Úloha 4.1.10. Spočtěte $\int |x|\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Uvážíme dva případy. Na $(-\infty,0)$ máme

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = \int -x\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + C_1 =: F_1(x)$$

a na $(0,\infty)$ platí

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C_2 =: F_2(x).$$

Snadno spočteme, že

$$\lim_{x\to 0_-} F_1(x) = C_1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 0_+} F_2(x) = C_2.$$

Ponechme tedy konstantu C_1 jako libovolnou, položme $C_2 = C_1$, abychom měli shodné jednostranné limity v počátku (primitivní funkce je spojitá), a definujme

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + C_1 & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \\ C_1 & \text{pro } x = 0 \\ \frac{x^2}{2} + C_1 & \text{pro } x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Zbývá ověřit, že $F'(x) = |x|$ na celém $\mathbb{R}$. Z dosavadní konstrukce to máme zajištěno ve všech bodech mimo počátek. V počátku spočtěme jednostranné derivace

$$F'_-(0) = \lim_{h \to 0_-} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h \to 0_-} \frac{-\frac{h^2}{2} + C_1 - C_1}{h} = 0$$

a

$$F'_+(0) = \lim_{h \to 0_+} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{\frac{h^2}{2} + C_1 - C_1}{h} = 0.$$

Proto $F'(0) = |0|$ a jsme hotovi. ☆

Poznámka 4.1.11. Pokud bychom neuhlídali podmínku

$$\lim_{x \to 0_-} F(x) = F(0) = \lim_{x \to 0_+} F(x),$$

jedna nebo obě jednostranné derivace by byly nevlastní.

Úloha 4.1.12. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x < 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

Nalezněte primitivní funkci.

Řešení: Na $(-\infty, 0)$ máme

$$\int f(x)\, dx = \int 1 \,\mathrm{d}x = x + C_1$$

a na $(0, \infty)$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C_2.$$

Dále

$$\lim_{x \to 0_-} x + C_1 = C_1 \qquad \text{a} \lim_{x \to 0_+} \mathrm{e}^x + C_2 = 1 + C_2.$$

Proto je funkce

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1 & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \\ C_1 & \text{pro } x = 0 \\ \mathrm{e}^x + C_1 - 1 & \text{pro } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

spojitá na $\mathbb{R}$ a splňuje $F'(x) = f(x)$ pro $x \neq 0$. Navíc

$$F'_-(0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{h + C_1 - C_1}{h} = 1$$

a

$$F'_+(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{\mathrm{e}^h + C_1 - 1 - C_1}{h} = 1.$$

Odtud $F'(0) = 1 = f(0)$ a celkově jsme ukázali, že F je hledanou primitivní funkcí na celém $\mathbb{R}$. ☆

Úloha 4.1.13. Nechť $f(x) = \operatorname{sign} x$. Ukažte, že funkce f má primitivní funkce na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, ale nemá primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$.

Řešení: Snadno ověříme, že

$$\int \operatorname{sign} x \,\mathrm{d}x = \int -1 \,\mathrm{d}x = -x + C_1 \qquad \text{na } (-\infty, 0)$$

a

$$\int \operatorname{sign} x \,\mathrm{d}x = \int 1 \,\mathrm{d}x = x + C_2 \qquad \text{na } (0, \infty).$$

Nyní pro spor předpokládejme, že existuje primitivní funkce na celém $\mathbb{R}$ a označme ji F. Protože je zároveň primitivní funkcí na $(-\infty, 0)$, podle Věty o nejednoznačnosti primitivní funkce (Věta 4.1.4) musí platit $F(x) = -x + C$ na $(-\infty, 0)$. Použijme tutéž úvahu na $(0, \infty)$, dále Větu o spojitosti primitivní funkce (Věta 4.1.7) a celkově dostáváme $F(x) = |x| + C$ na $\mathbb{R}$. Funkce napravo ale nemá derivaci v počátku a to je spor. ☆

V dalším se budeme zabývat pokročilejšími metodami hledání primitivních funkcí. V některých případech tyto metody vedou k cíli pro celou uvažovanou třídu funkcí (budeme mít metodu pro integraci racionálních lomených funkcí, která funguje, kdykoliv polynomy vyskytující se ve výpočtu umíme rozložit na kořenové činitele), jiné metody v sobě zahrnují tápání s nejistým výsledkem. Následující dvě pokročilejší věty nám v některých případech dávají alespoň naději, že řešení existuje, případně nás ujišťují, že šance na nalezení primitivní funkce není. Na jejich důkaz zatím nejsme vybaveni.

Věta 4.1.14 (Primitivní funkce ke spojité funkci)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na (a, b). Pak zde má primitivní funkci.*

Věta 4.1.15 (Darbouxova vlastnost derivace)**.** *Nechť $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má vlastní derivaci f na (a, b). Pak f zde má Darbouxovu vlastnost.*

Definice 4.1.16 (Darbouxova vlastnost)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f má na (a, b) *Darbouxovu vlastnost*, jestliže platí

$$a < x < y < b \quad \wedge \quad c \in (\min\{f(x), f(y)\}, \max\{f(x), f(y)\}) \\ \implies \quad \exists\, z \in (x, y) \quad f(z) = c.$$

Poznámka 4.1.17. (i) V Úloze 4.1.10 jsme měli integrand spojitý na celém $\mathbb{R}$. Proto jsme podle Věty o primitivní funkci ke spojité funkci (Věta 4.1.14) věděli, že se nemáme spokojit pouze s primitivními funkcemi na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
(ii) V Úloze 4.1.13 integrand skutečně nemá Darbouxovu vlastnost. Volíme-li $x = 0$ a $y = 1$, máme $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ a například pro mezihodnotu $c = \frac{1}{2}$ nenajdeme bod intervalu (x, y), kde by se této hodnoty nabývalo. Snadno se dá ukázat, že funkce sign má na intervalu (a, b) Darbouxovu vlastnost právě tehdy, když tento interval neobsahuje počátek.
(iii) Později se dozvíme, že spojitost implikuje Darbouxovu vlastnost.
(iv) Darbouxova vlastnost spojitost nezaručuje. Stačí vzít funkci $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ a v počátku ji dodefinovat libovolnou hodnotou z intervalu $[-1, 1]$.

Dokonce se dá ukázat, že pro spojitou funkci je metoda lepení vždy úspěšná.

Tvrzení 4.1.18. *Nechť $a < b < c$, f je spojitá na (a, c), F_1 je primitivní funkce k f na (a, b) a F_2 je primitivní funkce k f na (b, c). Pak existují vlastní limity $\lim_{x\to b_-} F_1(x)$ a $\lim_{x\to b_+} F_2(x)$, a funkce*

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) & \textit{pro } x \in (a, b) \\ \lim_{x\to b_-} F_1(x) & \textit{pro } x = b \\ F_2(x) - \lim_{x\to b_+} F_2(x) + \lim_{x\to b_-} F_1(x) & \textit{pro } x \in (b, c) \end{cases}$$

je primitivní funkcí k f na (a, c).

Důkaz. Protože f je spojitá na (a, c), má zde primitivní funkci G (samozřejmě jich je nekonečně mnoho, jednu jsme si vybrali a budeme s ní pracovat). Ta je zároveň primitivní funkcí na intervalu (a, b) a podle Věty o nejednoznačnosti primitivní funkce (Věta 4.1.4) existuje $C_1 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$G(x) = F_1(x) + C_1 \qquad \text{na } (a, b).$$

Odtud (připomeňme, že G je primitivní na celém (a, c) a tudíž je spojitá v b)

$$\lim_{x\to b_-} F_1(x) = \lim_{x\to b_-} G(x) - C_1 = G(b) - C_1 \in \mathbb{R}.$$

Analogicky dostaneme

$$G(x) = F_2(x) + C_2 \qquad \text{na } (b, c)$$

a

$$\lim_{x\to b_+} F_2(x) = \lim_{x\to b_+} G(x) - C_2 = G(b) - C_2 \in \mathbb{R}.$$

Přepsáním předchozích výsledků za použití definice funkce F dostáváme

$$F(x) = F_1(x) = G(x) - C_1 \qquad \text{na } (a, b),$$

$$F(b) = \lim_{x\to b_-} F_1(x) = G(b) - C_1$$

a

$$\begin{aligned}F(x) &= F_2(x) - \lim_{x\to b_+} F_2(x) + \lim_{x\to b_-} F_1(x)\\ &= G(x) - C_2 - (G(b) - C_2) + (G(b) - C_1) = G(x) - C_1 \qquad \text{na } (b,c).\end{aligned}$$

Celkově $F(x) = G(x) - C_1$ na (a,c), a proto i F je primitivní funkcí k f na celém (a,c). □

Poznámka 4.1.19. Jednou z častých aplikací primitivní funkce pro nás bude výpočet *Newtonova* (určitého) *integrálu*, který je definovaný jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Pokud bychom při lepení neuhlídali aditivní konstanty (tedy spojitost výsledné primitivní funkce), hodnota Newtonova integrálu by nám vyšla špatně. Na druhou stranu, u Newtonova integrálu se lepení používá minimálně, spíše se volí jiné metody výpočtu, které se naučíme později.

Aritmetika derivace má za důsledek následující dva nástroje pro hledání primitivních funkcí.

Věta 4.1.20 (Primitivní funkce součtu a násobku konstantou)**.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce k g na (a,b). Pak αF je primitivní funkce k αf na (a,b) a $F+G$ je primitivní funkce k $f+g$ na (a,b).*

Důkaz. Oba výsledky obdržíme zderivováním. □

Úloha 4.1.21. Spočtěte $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$.

Řešení: Integrand má definiční obor $[1,\infty)$. Pokusíme se tedy primitivní funkci hledat na $(1,\infty)$ (na této množině je integrand dokonce spojitý, primitivní funkci zde tedy určitě má). Po rozšíření a aplikaci Věty o primitivní funkci součtu a násobku (Věta 4.1.20) máme

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} &= \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C \text{ pro } x \in (1,\infty).\end{aligned}$$

☆

Poznámka 4.1.22. První rovnost v závěrečném výpočtu jsme byli oprávněni napsat teprve v momentě, kdy jsme měli tu druhou (nebo v momentě, kdy jsme věděli, že na pravé straně této rovnosti jsou dva spojité integrandy).

Následující věta vyjadřuje v řeči primitivních funkcí vztah pro derivaci součinu.

Věta 4.1.23 (Metoda per partes)**.** *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mají na (a, b) vlastní derivace. Pak*

$$\int f'g \,\mathrm{d}x = fg - \int fg' \,\mathrm{d}x,$$

jestliže alespoň jedna z primitivních funkcí existuje.

Důkaz. Nechť existuje primitivní funkce na levé straně. Označme ji H (tedy $H' = f'g$). Pak

$$(fg - H)' = f'g + fg' - f'g = fg'.$$

Funkce $fg - H$ je tedy primitivní k fg' a navíc platí dokazovaná rovnost. Druhý případ je analogický. $\square$

Příklad 4.1.24.

$$\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} f = \mathrm{e}^x & f' = \mathrm{e}^x \\ g = x & g' = 1 \end{bmatrix} = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

Příklad 4.1.25.

$$\int \arcsin x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \arcsin x \,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} f = x & f' = 1 \\ g = \arcsin x & g' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{bmatrix}$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \text{ pro } x \in (-1, 1).$$

Příklad 4.1.26. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ označme $I_n := \int \sin^n x \,\mathrm{d}x$. Pak $I_0 = x + C$, $I_1 = -\cos x + C$ a pro $n \geq 2$ máme

$$\begin{aligned} I_n = \int \sin^n x \,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} f = -\cos x & f' = \sin x \\ g = \sin^{n-1} x & g' = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \end{bmatrix} \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \,\mathrm{d}x \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x - (n-1) \int \sin^n x \,\mathrm{d}x \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n. \end{aligned}$$

Odtud

$$I_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Příklad 4.1.27. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $J_n := \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \,dx$. Pak $J_1 = x \arctan x + C$ a pro $n \geq 2$ máme

$$\begin{aligned} J_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} f = x & f' = 1 \\ g = \frac{1}{(1+x^2)^n} & g' = \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}} \,\mathrm{d}x = \frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{2n + 2nx^2 - 2n}{(1+x^2)^{n+1}} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nJ_n - 2nJ_{n+1}. \end{aligned}$$

Proto
$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n + \frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Další technikou je substituce, která je odvozena od vztahu pro derivaci složené funkce. Rozlišujeme dvě situace. První je ta, kdy známe $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, a potřebujeme najít $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Máme tedy

$$x = \varphi(t) \qquad \text{spolu s} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$$

a dostáváme

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C = F(\varphi(t)) + C.$$

Korektnost této úpravy nám zaručí následující věta.

Věta 4.1.28 (První substituční metoda)**.** *Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a,b) a $\varphi\colon (\alpha,\beta) \to (a,b)$ má všude v (α,β) vlastní derivaci. Pak $F \circ \varphi$ je primitivní funkce k $(f \circ \varphi)\varphi'$ na (α,β).*

Důkaz. Podle Věty o derivaci složené funkce (Věta 3.3.14) máme na (α,β)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

□

Poznámka 4.1.29. (i) Vzhledem k předpokladu o vlastní derivaci je definičním oborem φ celý interval (α,β).
(ii) Povšimněte si, že nepotřebujeme, aby zobrazení φ bylo na.
(iii) Vztah $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ se při počítání příkladů často nahrazuje zápisem $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, který opticky lépe koresponduje s tím, co se pod integrálem při substituci děje. Tento zápis není ale matematicky korektní, neboť $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}t$ nemají samostatně žádný význam. Vhodnější je psát "$\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$".

Příklad 4.1.30. Chceme najít $\int \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Položme $f(x) = \cos x$ na $\mathbb{R}$ a $\varphi(t) = \sqrt{t}$ na $(0,\infty)$. Pak $F(x) = \sin x$ je primitivní funkce k f na $(a,b) = \mathbb{R}$ a φ zobrazuje $(\alpha,\beta) = (0,\infty)$ na $(0,\infty) \subset (a,b)$ (inkluze $\varphi((\alpha,\beta)) \subset (a,b)$ nám zaručí, že $F \circ \varphi$ bude dobře definováno na celém (α,β)). Proto máme

$$\begin{aligned} \int \cos(\sqrt{t}) \tfrac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &\overset{\text{1.s.m}}{=} \begin{bmatrix} x = \sqrt{t} \\ \text{"}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\text{"} \end{bmatrix} = \int \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \sin x + C = \sin\sqrt{t} + C \qquad \text{pro } t \in (0,\infty) \end{aligned}$$

U druhé možnosti užití substituční metody známe $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(t) + C$ a potřebujeme najít $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Máme tedy

$$x = \varphi(t) \qquad \text{spolu s} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$$

a dostáváme
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(t) + C.$$
Tím ovšem naše práce nekončí. Na pravé straně potřbujeme přejít k proměnné x. K tomu využijeme funkci φ^{-1} (potřebujeme proto navíc existenci inverze k $\varphi(t)$) a přepíšeme si $\Phi(t) = \Phi(\varphi^{-1}(x))$. Korektnost předchozích úprav nám zaručí následující věta.

Věta 4.1.31 (Druhá substituční metoda)**.** *Nechť $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ a nechť funkce $\varphi\colon (\alpha,\beta) \to (a,b)$ je bijekce, která má všude v (α,β) nenulovou vlastní derivaci, a Φ je primitivní funkce k $(f\circ\varphi)\varphi'$ na (α,β). Pak $\Phi\circ\varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f na (a,b).*

Důkaz. Použijeme Větu o derivaci složené funkce (Věta 3.3.14) a třetí verzi Věty o derivaci inverzní funkce (Věta 3.3.22). Potřebujeme, aby φ' neměnila znaménko. Protože φ' existuje všude na (α,β) a dle Věty o Darbouxově vlastnosti derivace (Věta 4.1.15) má φ' Darbouxovu vlastnost, nemůže tedy měnit znaménko (jinak by na (α,β) existoval bod, ve kterém je φ' nulová). Dostáváme
$$\begin{aligned}(\Phi\circ\varphi^{-1})'(x) &= \Phi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = (f\circ\varphi)(\varphi^{-1}(x))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}\\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = f(x) \qquad \text{pro } x\in(a,b).\end{aligned}$$
□

Poznámka 4.1.32. (i) Rozdíl mezi oběma substitučními metodami je v tom, že při první substituční metodě vyjadřujeme novou proměnnou pomocí proměnné původní, zatímco při druhé substituční metodě vyjadřujeme původní proměnnou pomocí proměnné nové.
(ii) Druhá substituční metoda má více předpokladů než první substituční metoda, neboť obsahuje navíc podmínky zaručující existenci inverze.
(iii) V jedné z dalších kapitol se budeme zabývat vztahem monotonie a znaménka derivace. Získáme výsledky, podle nichž prostota φ ve druhé substituční metodě již plyne z vhodných podmínek na derivaci.
(iv) V některých situacích je možné použít obě substituční metody. Bývá zvykem upřednostnit první substituční metodu, neboť nás čeká méně práce s ověřováním předpokladů a je i menší nebezpečí, že předpoklady nebudou splněny.
(v) Dají-li se použít obě substituční metody, ze zápisu nemusí být ihned vidět, kterou z nich jsme použili (například situaci $x = t^3$ odpovídá $t = \sqrt[3]{x}$ a při přepočítávání proměnných je úplně jedno, se kterou z těchto formulí pracujeme). Na druhou stranu, ve výpočtu se bude vyskytovat právě jeden z výrazů $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ a $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$, což již podává informaci o použité substituční metodě.
(vi) Poměrně často se stává, že při aplikaci substitučních metod nejsou v několika bodech splněny podmínky na derivaci funkce φ. V takovém případě použijeme substituční metodu na vzniklých podintervalech a pak se pokusíme použít lepení.

Příklad 4.1.33. Nalezněme $\int \frac{3x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$. Provedeme substutuci $t = x^3$, což je totéž jako $t = \sqrt[3]{x}$. Použijeme-li první substituční metodu, máme

$$\int \frac{3x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}x \overset{1.\text{s.m}}{=} \begin{bmatrix} t = x^3 & x \in \mathbb{R} \\ \text{"}\mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x\text{"} & t \in \mathbb{R} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan t + C$$
$$= \arctan x^3 + C \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Druhá substituční metoda se aplikuje následovně

$$\int \frac{3x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}x \overset{2.\text{s.m}}{=} \begin{bmatrix} x = \sqrt[3]{t} & t \in \mathbb{R} \\ \text{"}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t\text{"} & x \in \mathbb{R} \end{bmatrix} = \int \frac{3t^{\frac{2}{3}}}{1+t^2}\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \arctan t + C = \arctan x^3 + C \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Příklad 4.1.34. Určeme primitivní funkci $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ za pomoci substituce $t = \tan x$. Použijeme první substituční metodu. Funkce tan však není definovaná v bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, budeme tedy pracovat jen na intervalech mezi těmito body a výslednou primitivní funkci získáme lepením. Pro pevné $k \in \mathbb{Z}$ máme

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{1.\text{s.m}}{=} \begin{bmatrix} t = \tan x & \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \\ \text{"}\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\text{"} & \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} & t \in \mathbb{R} \end{bmatrix}$$
$$= \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t) + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x) + C.$$

Při vyjadřování $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ jsme si uvědomili, že

$$1 + t^2 = 1 + \tan^2 x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Primitivní funkci $\int \frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t$ jsme určili tak, že jsme si zderivovali $A\arctan(\sqrt{2}t)$ a koeficient A dopočítali podle výsledku.

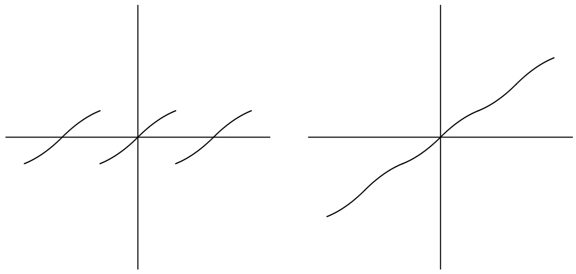
Nyní přejděme k lepení. Funkce $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)$ je π-periodická, v bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, není definovaná, na intervalech mezi těmito body je rostoucí. Skok funkčních hodnot v bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je vždy (vzpomeňte si na limitní hodnoty funkce arctan)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}_+} \Phi(x) - \lim_{x \to \frac{\pi}{2}_-} \Phi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi.$$

Proto

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \Phi(x) + C + k\frac{1}{\sqrt{2}}\pi & \text{pro } x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \\ C + (k + \frac{1}{2})\frac{1}{\sqrt{2}}\pi & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$, je hledaná primitivní funkce na $\mathbb{R}$ (používáme tvrzení o korektnosti lepení pro spojitý integrand).



Obrázek 4.1: Náčrt části grafu funkce Φ a části grafu skutečné primitivní funkce získané lepením

Poznámka 4.1.35. Primitivní funkce $\int \frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t$ se dala spočítat také substitucí, ale přístup přes derivování má tu výhodu, že nemusíme ověřovat žádné předpoklady substitučních metod. Navíc je výpočet rychlejší a lépe se dělá zpaměti.

Příklad 4.1.36.

$$\int \sin^n x \cos x \,\mathrm{d}x \overset{\text{1.s.m.}}{=} \begin{bmatrix} t = \sin x \\ \text{"}\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x\text{"} \end{bmatrix} = \int t^n \,\mathrm{d}t = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$$
$$= \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

Poznámka 4.1.37. Obecně platí $\int f^n(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$, je-li f „rozumná“.

Příklad 4.1.38.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} \overset{\text{2.s.m.}}{=} \begin{bmatrix} x = t^2 & t \in (0,\infty) \\ \text{"}\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t\text{"} & x \in (0,\infty) \end{bmatrix} = \int \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int 2\,\mathrm{d}t - \int \frac{2}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2t - 2\log|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 2\log(1+\sqrt{x}) + C \qquad \text{na } (0,\infty).$$

Příklad 4.1.39.

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x \overset{\text{1.s.m.}}{=} \begin{bmatrix} t = ax^2+bx+c \\ \text{"}\mathrm{d}t = 2ax+b\,\mathrm{d}x\text{"} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \log|t| + C$$
$$= \log|ax^2+bx+c| + C$$

na intervalech, kde je jmenovatel nenulový.

Poznámka 4.1.40. Obecně platí $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \log|f(x)| + C$, je-li f „rozumná“.

Příklad 4.1.41. Nechť polynom x^2+bx+c nemá reálný kořen (neboli $b^2-4c<0$). Pak

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+bx+c} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{b}{2})^2+c-\frac{b^2}{4}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(\frac{2x+b}{2})^2+\frac{4c-b^2}{4}} \\ &= \frac{4}{4c-b^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}})^2+1} \stackrel{\text{1.s.m.}}{=} \begin{bmatrix} t=\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} \\ \text{"}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\,\mathrm{d}t\text{"}\end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan t + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\Big(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\Big)+C \qquad \text{na } \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Poznámka 4.1.42. Pokud $p,q\in\mathbb{R}$ a $b^2-4c<0$, z dosavadních výsledků máme pro $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int \frac{px+q}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{p}{2}(2x+b)+q-\frac{bp}{2}}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{p}{2}\log(x^2+bx+c)+\frac{2q-bp}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\Big(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\Big)+C.\end{aligned}$$

Poznámka 4.1.43. (i) V předchozích příkladech jsme aplikovali několik substitucí, které integrand zjednodušily natolik, že primitivní funkce šla již snadno spočítat. Nicméně čtenáře jsme nepoučili, jak takové substituce hledat. Věc se má tak, že obecný návod na výpočet primitivní funkce pomocí substituce či metody per partes neexistuje a tyto postupy nám nabízejí jen větší počet pokusů, jak postupně přecházíme k jiným integrandům. Na druhou stranu je známa celá řada standardních situací (které se často vyskytují v aplikacích, a proto byly důkladně prozkoumány), v nichž je znám úspěšný postup. Těmto situacím se budeme věnovat v následující části textu.
(ii) S hledáním primitivních funkcí se setkáme ještě v kapitolách o Riemannově a Lebesgueově integrálu. V tomto okamžiku si jen řekněme, výsledkem výpočtu těchto integrálů je číslo, na rozdíl od hledání primitivních funkcí, kde určujeme funkci. K určení výše zmíněných integrálů se nám nicméně znalosti primitivní funkce může hodit; srovnejte s Poznámkou 4.1.19.
(iii) Znalost standardních situací je užitečná i při počítání v obecném případě. Pak nám totiž postačí nalézt nejen úpravu, díky níž primitivní funkci vypočteme, ale i úpravu, která vede na některou ze standardních situací.

4.2 Rozklad na parciální zlomky, primitivní funkce pro racionální lomené funkce

Jednou ze tříd funkcí, pro kterou je znám algoritmus jak nalézt jejich primitivní funkci, jsou racionální lomené funkce. Odpovídající algoritmus si zde představíme.

Dopředu můžeme prozradit, že výpočet bude úspěšný, kdykoliv se nám podaří nalézt všechny kořeny polynomu ve jmenovateli.

Postup se bude skládat ze tří částí. Nejprve nás čeká úprava racionální lomené funkce do tvaru vhodného pro rozklad na parciální zlomky. Druhým krokem je rozklad na parciální zlomky a třetím je určení primitivní funkce pro vzniklé zlomky. Zde budeme rozlišovat šest typů zlomků a postupně si ukážeme, jak pro jednotlivé typy určit primitivní funkce.

V dalším bude

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P, Q jsou polynomy (s reálnými koeficienty).

4.2.1 Přípravné práce

Nejprve za pomoci částečného podělení dosáhneme tvaru

$$R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)},$$

kde P_1, P_2 jsou polynomy a $\operatorname{st} P_2 < \operatorname{st} Q$.

Příklad 4.2.1.

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}.$$

Pro polynom P_1 umíme nalézt primitivní funkci a zbývá se postarat o $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$. Bez újmy na obecnosti v dalším tedy předpokládejme, že $P_1 = 0$, $P_2 = P$.

Nyní ještě rozložíme polynom Q na ireducibilní polynomy. Budeme rozlišovat případy reálných a komplexních kořenů. Použijeme následující výsledek.

Lemma 4.2.2. *Nechť Q je polynom s reálnými koeficienty a $a+\mathrm{i}b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, je jeho komplexní kořen. Pak $a-\mathrm{i}b$ je také jeho kořenem a navíc má stejnou násobnost jako $a + \mathrm{i}b$.*

Důkaz. Nechť polynom Q má stupeň $n \in \mathbb{N}$ a koeficienty $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Označme $z = a + \mathrm{i}b$. Protože z je kořenem, dostáváme

$$\begin{aligned} 0 = \overline{0} = \overline{Q(z)} &= \overline{c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0} = \overline{c_n z^n} + \cdots + \overline{c_1 z} + \overline{c_0} \\ &= c_n \overline{z^n} + \cdots + c_1 \overline{z} + c_0 = c_n \overline{z}^n + \cdots + c_1 \overline{z} + c_0 = Q(\overline{z}). \end{aligned}$$

Proto $a-\mathrm{i}b$ je také kořenem. V takové situaci lze z polynomu Q vytknout $x-a-\mathrm{i}b$ a také $x - a + \mathrm{i}b$. Můžeme tedy vytknout polynom

$$Q_1(x) = (x - a - \mathrm{i}b)(x - a + \mathrm{i}b) = (x - a)^2 + b^2.$$

To je polynom s reálnými koeficienty, proto $\frac{Q(x)}{Q_1(x)}$ je rovněž polynom s reálnými koeficienty. Výše uvedený proces tedy můžeme provést tolikrát, kolik je násobnost kořenu $a + \mathrm{i}b$. $\square$

Díky předchozímu lemmatu dostáváme, že můžeme napsat

$$Q(x) = c(x-\alpha_1)^{r_1}\dots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\dots(x^2+p_lx+q_l)^{s_l}, \quad (4.2.1)$$

kde $c \in \mathbb{R}$, α_i jsou reálné kořeny, r_i je jejich násobnost, $x^2+p_jx+q_j$ jsou ireducibilní polynomy vzniklé z dvojic komplexně sdružených kořenů a s_j je jejich násobnost.

Poznámka 4.2.3. Tento krok je ono jediné místo, kde může náš postup selhat. Nalezení kořenů polynomů vyšších stupňů totiž obecně není možné.

4.2.2 Rozklad na parciální zlomky

Nyní jsme již připraveni provést hlavní krok. Důkaz následujícího tvrzení je možno nalézt například v [Ja IPI].

Věta 4.2.4 (O rozkladu na parciální zlomky)**.** *Nechť P, Q jsou dva polynomy s reálnými koeficienty,* $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ *a platí* (4.2.1)*. Pak existují sady reálných konstant A_i^m, B_j^n a C_j^n takové, že platí*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x-\alpha_1} &+ \frac{A_1^2}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_1^{r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}} + \frac{A_2^1}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_2^{r_2}}{(x-\alpha_2)^{r_2}} \\ &+ \dots + \frac{A_k^{r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}} + \frac{B_1^1x+C_1^1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_1^2x+C_1^2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots \\ &+ \frac{B_1^{s_1}x+C_1^{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \dots + \frac{B_l^1x+C_l^1}{x^2+p_lx+q_l} + \dots + \frac{B_l^{s_l}x+C_l^{s_l}}{(x^2+p_lx+q_l)^{s_l}}.\end{aligned}$$

Poznámka 4.2.5. (i) Na kurzech matematické analýzy bývá zvykem důkaz této věty vynechávat. Není sice vyloženě obtížný, ale rozlišuje mnoho případů, což jej činí velice dlouhým.
(ii) Důkaz se dá oželet ještě z jednoho důvodu. Kdykoliv nalezneme koeficienty A_i^m, B_j^n a C_j^n, ukázali jsme, že rozklad na parciální zlomky funguje v právě řešeném příkladu, což stačí ke zdůvodnění korektnosti úpravy.

Příklad 4.2.6. Jmenovatel funkce $\frac{2x+1}{x(x+1)}$ je součinem ireducibilních polynomů stupně jedna. Proto hledáme rozklad ve tvaru

$$\frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

Odtud

$$2x+1 = A(x+1) + Bx \quad (4.2.2)$$

pro $x \notin \{-1, 0\}$. Protože jsou funkce na obou stranách polynomy, jsou spojité na celém $\mathbb{R}$ a předchozí identita tedy platí na celém $\mathbb{R}$. Nyní se dá postupovat dvěma způsoby. Jednak si můžeme uvědomit, že rovnost dvou polynomů implikuje rovnost jejich koeficientů (skutečně, pokud by tomu tak nebylo, odečtením bychom dostali polynom, který je identicky nulový, ale má alespoň jeden nenulový koeficient, což není možné). Dostáváme

$$2x+1 = (A+B)x + A \implies A+B = 2 \wedge A = 1 \implies A = 1 \wedge B = 1.$$

Druhou možností je dosazení vhodných bodů, které zjednoduší zápis identity (4.2.2). Volíme-li $x = -1$, dostáváme

$$-2 + 1 = -B \quad \Longrightarrow \quad B = 1.$$

Volba $x = 0$, dává

$$1 = A.$$

Poznámka 4.2.7. (i) První metoda vždy vede na jednoznačně řešitelnou soustavu rovnic.
(ii) Druhá metoda bývá příjemnější na použití. V případě ireducibilních polynomů druhého řádu ve jmenovateli je nutné dosazovat odpovídající komplexní kořeny. V případě vícenásobných kořenů druhá metoda nedodá dostatečné množství informací. Tento problém se dá řešit například kombinováním obou metod, dosazováním dalších bodů nebo derivováním obou stran rovnosti a dosazováním vícenásobných kořenů polynomu.

Příklad 4.2.8. Uvažme funkci $\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$. Rozklad hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Odtud

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + Cx(x+1)^2 + D(x+1)^2.$$

Volba $x = -1$ dává $B = \frac{1}{2}$. Volba $x = i$ dává hned dvě informace, neboť

$$1 = Ci(1+i)^2 + D(1+i)^2 = Ci(2i) + 2Di = -2C + 2Di \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{-1}{2} \wedge D = 0.$$

Položíme-li nyní například $x = 0$ (je to totéž jako porovnávání koeficientů u nulté mocniny), dostáváme z dosavadních výsledků

$$1 = A + B \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

a jsme hotovi. Jinou možností bylo obě strany rovnosti zderivovat a dosadit bod $x = -1$. Máme

$$0 = A(x^2+1)|_{x=-1} + A \cdot 0 + B2x|_{x=-1} + C \cdot 0 + D \cdot 0,$$

tedy

$$A = B = \frac{1}{2}.$$

Nyní se věnujme hledání primitivních funkcí pro integrandy vzniklé po rozkladu na parciální zlomky. Reálné kořeny jmenovatele vedou na dva typy úloh, které umíme snadno řešit:

$$\int \frac{A}{x-\alpha_i}\,\mathrm{d}x = A\log|x-\alpha_i| + C \quad \text{a} \quad \int \frac{A}{(x-\alpha_i)^m}\mathrm{d}x = \frac{-A}{m-1}\frac{1}{(x-\alpha_i)^{m-1}} + C$$

pro $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $x \in (-\infty, \alpha_i)$ nebo $x \in (\alpha_i, \infty)$.

Komplexní kořeny vedou na hledání primitivních funkcí dvou typů

$$\int \frac{Bx + D}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad \int \frac{Bx + D}{(x^2 + px + q)^k}\,\mathrm{d}x.$$

První případ umíme spočítat podle Poznámky 4.1.42 (za pomoci rozdělení na část dávající logaritmus a část dávající arkustangens). Druhý integrand se přepíše do tvaru

$$\int \frac{Bx + D}{(x^2 + px + q)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n}\,\mathrm{d}x + \Big(D - \frac{Bp}{2}\Big)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Zde na první část použijeme postup z Poznámky 4.1.37 a dostaneme

$$\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{n-1}\frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + C.$$

Konečně, na druhou část aplikujeme převod na čtverec jako v Příkladu 4.1.41 a po substituci máme

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)^n} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\big((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}\big)^n} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\big((\frac{2x+p}{2})^2 + \frac{4q-p^2}{4}\big)^n}\\ &= \Big(\frac{4}{4q - p^2}\Big)^n \int \frac{\mathrm{d}x}{\big((\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})^2 + 1\big)^n} \overset{\text{1.s.m.}}{=} \left[\begin{array}{c} t = \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} \\ \text{„}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\,\mathrm{d}t\text{"}\end{array}\right]\\ &= \Big(\frac{4}{4q - p^2}\Big)^{n-\frac{1}{2}} \int \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t^2)^n}.\end{aligned}$$

Primitivní funkci úplně napravo umíme určit použitím rekurentní formule získané v Příkladu 4.1.27 pomocí metody per partes. Umíme tedy vyřešit všechny typy racionálních lomených funkcí, které se vyskytují na pravé straně formule z Věty o rozkladu na parciální zlomky (Věta 4.2.4).

Úloha 4.2.9. Spočtěte $\int \frac{2x^5+5x^4+7x^3+11x^2+7x+4}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Protože stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele, můžeme použít Větu o rozkladu na parciální zlomky (Věta 4.2.4). Rozklad hledáme ve tvaru

$$\frac{2x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 11x^2 + 7x + 4}{(x + 1)^2(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 1)^2}.$$

Odtud máme na celém $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}2x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 11x^2 + 7x + 4 &= A(x + 1)(x^2 + 1)^2 + B(x^2 + 1)^2\\ &\quad + (Cx + D)(x + 1)^2(x^2 + 1) + (Ex + F)(x + 1)^2.\end{aligned}$$

Nejprve položme $x = \mathrm{i}$. Pak

$$2\mathrm{i} + 5 - 7\mathrm{i} - 11 + 7\mathrm{i} + 4 = -2 + 2\mathrm{i} = (E\mathrm{i} + F)(1 + \mathrm{i})^2 = (E\mathrm{i} + F)2\mathrm{i} = -2E + 2F\mathrm{i}.$$

Proto
$$E = 1 \qquad \text{a} \qquad F = 1.$$
Volba $x = -1$ dává
$$-2 + 5 - 7 + 11 - 7 + 4 = 4 = 4B \qquad \Longrightarrow \qquad B = 1.$$
Položme $x = 0$, pak
$$4 = A + B + D + F = A + 1 + D + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad A + D = 2.$$
Porovnání koeficientů u x^5 dává
$$2 = A + C \qquad \Longrightarrow \qquad D = C.$$
Konečně porovnání koeficientů u x dává
$$7 = A + C + 2D + E + 2F = 2 - C + C + 2C + 3 \quad \Longrightarrow \quad C = 1, D = 1 \text{ a } A = 1.$$
Celkově máme
$$\frac{2x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 11x^2 + 7x + 4}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2}.$$
Zbývá nalézt primitivní funkce na pravé straně.
$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 11x^2 + 7x + 4}{(x+1)^2(x^2+1)^2} \, dx \\
&\quad = \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx + \int \frac{1}{x^2+1} \, dx \\
&\qquad + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} \, dx + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \\
&\quad = \log|x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + \arctan x - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} + J_2
\end{aligned}$$
kde (používáme rekurentní vzorec z Příkladu 4.1.27)
$$J_2 = \frac{1}{2} J_1 + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + C.$$
Primitivní funkci máme buď na intervalu $(-\infty, -1)$ nebo $(-1, \infty)$. ☆

Úloha 4.2.10. Spočtěte $\int \frac{dx}{1+x^4}$.

Řešení: Jmenovatel má čtyři komplexní kořeny
$$\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Spočítejme si (připomeňme, že v případě komplexních kořenů každé dvojici komplexně sdružených kořenů odpovídá ireducibilní polynom stupně dva získaný jako součin jejich kořenových činitelů)

$$\Big(x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\Big(x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$$

a

$$\Big(x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\Big(x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = x^2 + \sqrt{2}x + 1.$$

Rozklad na parciální zlomky má proto tvar

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$

Odtud

$$1 = (Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1) \qquad \text{na } \mathbb{C}.$$

Volba $x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$ implikuje $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$, a proto

$$\begin{aligned} 1 &= \Big(A\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) + B\Big)\Big(\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2 + 1 + \mathrm{i} + 1\Big) \\ &= \Big(A\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) + B\Big)(2+2\mathrm{i}) = A2\sqrt{2}\mathrm{i} + 2B + 2B\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Odtud $B = \frac{1}{2}$ a $A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Položíme-li $x = 0$, máme $1 = B + D$, a proto $D = \frac{1}{2}$. Konečně, porovnání koeficientů u x^3 dává $C = -A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Máme tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Nyní se již příklad snadno dopočítá pomocí vzorců z Poznámky 4.1.42. ☆

Poznámka 4.2.11. Předchozí metoda se dá snadno modifikovat na libovolný příklad typu $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$.

Poznámka 4.2.12. Těžko lze očekávat, že si studenti budou dlouhodobě pamatovat třeba vztah z Poznámky 4.1.42. Čtenáři tedy doporučujeme, aby si zapamatoval spíše postup hledání primitivních funkcí pro racionální funkce:
Nejprve se provede částečné podělení polynomů, abychom v případě potřeby snížili stupeň čitatele, pak rozložíme jmenovatele na ireducibilní polynomy.
Druhy krok je rozklad na parciální zlomky.
Zlomky, kde je jmenovatelem polynom stupně jedna, umíme snadno vyřešit.
U zlomků typu $\frac{Bx+D}{x^2+px+q}$ si algebraickou úpravou vytvoříme v čitateli derivaci jmenovatele, čímž dostaneme zlomek, pro který již umíme nalézt primitivní funkci (dostaneme logaritmus). Ve jmenovateli případného zbytkového členu provedeme převod na čtverec a po substituci dostáváme arkustangens.

U zlomků typu $\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^k}$ si algebraickou úpravou vytvoříme v čitateli derivaci polynomu x^2+px+q, čímž dostaneme zlomek, pro který již umíme nalézt primitivní funkci (dostaneme násobek $\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}$). Ve zbytkovém členu provedeme převod na čtverec a po substituci dostaneme násobek $\frac{1}{(1+t^2)^k}$. Nyní si již stačí pamatovat, že primitivní funkce typu $\int \frac{1}{(1+t^2)^k}\,\mathrm{d}t$ se řeší metodou per partes aplikovanou na tvar $\int 1\cdot\frac{1}{(1+t^2)^k}\,\mathrm{d}t$, a vyjde rekurentní vzorec.

4.3 Substituce vedoucí na racionální lomené funkce

Budeme se zabývat dalšími případy, kdy je znám postup pro hledání primitivní funkce. Jednak budeme pracovat s racionálními lomenými funkcemi jedné reálné proměnné, tedy

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},\qquad \text{kde } P,Q \text{ jsou polynomy,}$$

budeme však také uvažovat racionální lomené funkce dvou reálných proměnných

$$R(u,v)=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)},\qquad \text{kde } P,Q \text{ jsou polynomy dvou proměnných } u \text{ a } v.$$

Polynom dvou proměných stupně n definujeme jako

$$P(u,v)=\sum_{0\le i+j\le n} a_{ij}u^iv^j,\qquad \text{kde } a_{ij} \text{ jsou reálné koeficienty.}$$

Příklad 4.3.1. Racionální lomenou funkcí dvou proměnných (stupně 5) je například

$$R(u,v)=\frac{u^4+v^2+3u^2v^3+1}{uv+1}.$$

4.3.1 Exponenciální substituce

Primitivní funkce typu

$$\int R(\mathrm{e}^{\alpha x})\,\mathrm{d}x,$$

kde $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, řešíme substitucí $t=\mathrm{e}^{\alpha x}$

$$\int R(\mathrm{e}^{\alpha x})\,\mathrm{d}x \overset{\text{1.s.m.}}{=} \begin{bmatrix} t=\mathrm{e}^{\alpha x} \\ \text{„}\mathrm{d}t=\alpha\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x\text{"} \end{bmatrix} = \int R(t)\frac{1}{\alpha t}\,\mathrm{d}t.$$

Integrand na pravé straně je zřejmě racionální lomená funkce v proměnné t, čehož jsme chtěli dosáhnout. Povšimněme si ještě, že $\mathrm{e}^{\alpha x}$ má všude vlastní derivaci (jedna z klíčových podmínek První substituční metody, tedy Věty 4.1.28).

Příklad 4.3.2. Uvažme $\int \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}+1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Položíme-li $\alpha = \frac{1}{6}$, snadno nahlédneme, že se jedná o právě studovaný typ úlohy. Použijeme tedy substituci $t = \mathrm{e}^{\frac{x}{6}}$

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}+1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{1.s.m.}}{=} \begin{bmatrix} t = e^{\frac{x}{6}} \\ \text{"}\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{\frac{x}{6}}\,\mathrm{d}x\text{"} \end{bmatrix} = \int \frac{t^2+1}{t^3+1}\frac{1}{t^6}\frac{6}{t}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2+1}{t^7(t^3+1)}\,\mathrm{d}t$$

a primitivní funkci napravo již umíme určit.

4.3.2 Logaritmická substituce

Primitivní funkce typu

$$\int \frac{1}{x}R(\log x)\,\mathrm{d}x$$

hledáme pomocí substituce $t = \log x$

$$\int \frac{1}{x}R(\log x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{1.s.m.}}{=} \begin{bmatrix} t = \log x \\ \text{"}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\text{"} \end{bmatrix} = \int R(t)\,\mathrm{d}t.$$

Integrand na pravé straně je racionální lomená funkce v proměnné t, čehož jsme chtěli dosáhnout. Povšimněme si ještě, že $\log x$ má všude vlastní derivaci na $(0,\infty)$ (jedna z klíčových podmínek První substituční metody, tedy Věty 4.1.28).

Příklad 4.3.3.

$$\begin{aligned}\int \frac{\log^2 x+1}{x\log x}\,\mathrm{d}x &\overset{\text{1.s.m.}}{=} \begin{bmatrix} t = \log x \\ \text{"}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\text{"} \end{bmatrix} = \int \frac{t^2+1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + \log|t| + C \\ &= \frac{\log^2 x}{2} + \log|\log x| + C \qquad \text{na } (0,1) \text{ nebo } (1,\infty).\end{aligned}$$

4.3.3 Odmocninová substituce

Nechť $s \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ a $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ splňují $ad-bc \neq 0$. Primitivní funkce typu

$$\int R\Big(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\,\mathrm{d}x$$

řešíme substitucí $t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Máme pak totiž

$$x = \frac{b-dt^s}{ct^s-a}$$

a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{s}\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{\frac{1}{s}-1}\frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{1}{s}\frac{1}{t^{s-1}}\frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \\ &= \frac{ad-bc}{st^{s-1}}\frac{1}{(\frac{cb-cdt^s+cdt^s-ad}{ct^s-a})^2} = \frac{(ct^s-a)^2}{(ad-bc)st^{s-1}}.\end{aligned}$$

Proto

$$\int R\Big(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\,\mathrm{d}x \overset{\text{1.s.m.}}{=} \left[t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right] = \int R\Big(\frac{b-dt^s}{ct^s-a}, t\Big)\frac{(ad-bc)st^{s-1}}{(ct^s-a)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Jednoduše je vidět, že integrand napravo je racionální lomená funkce v proměnné t. Je-li s liché, za definiční obor bereme intervaly, kde $cx-d \neq 0$. Pro sudé s máme navíc podmínku $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$.

Poznámka 4.3.4. Ve vyloučeném případě $s = 1$ je integrand přímo racionální lomená funkce v proměnné x, žádnou substituci tedy nepotřebujeme. Podobně pokud $ad - bc = 0$, pod odmocninou je konstanta a opět je integrand racionální lomená funkce v proměnné x.

Příklad 4.3.5. Na intervalu $(-1, \infty)$ spočtěme $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$. Provedeme substituci $t = \sqrt[6]{x+1}$. Platí

$$x = t^6 - 1 \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{6}(x+1)^{-5} = \frac{1}{6t^5}.$$

Proto

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x \overset{\text{1.s.m.}}{=} \left[t = \sqrt[6]{x+1}\right] &= \int \frac{1-t^3}{1+t^2}6t^5\,\mathrm{d}t \\ &= 6\int \frac{t^5-t^8}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 6\int \Big(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{t^2+1}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 + 6t + 3\log(t^2+1) - 6\arctan t + C\end{aligned}$$

a nyní již stačí jen všude přepsat t na $\sqrt[6]{x+1}$ a uvědomit si, že výpočet výše má smysl pro $x \in (-1, \infty)$.

4.3.4 Eulerovy substituce

Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$. Budeme studovat primitivní funkce typu

$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Poradíme si v následujících případech (vzájemně se nevylučují):
(i) polynom $ax^2 + bx + c$ má dva reálné kořeny (nemusí být různé)
(ii) platí $a > 0$
(iii) platí $c > 0$.

Ukážeme si, že první případ se dá převést na odmocninovou substituci, pro zbylé dva se naučíme nové substituce.

Poznámka 4.3.6. Máme pokryté všechny rozumné případy. Pokud totiž nenastává ani první ani druhá možnost, máme buď polynom stupně jedna (a můžeme použít odmocninovou substituci), nebo ireducibilní polynom stupně dva, který má pouze záporné hodnoty, a proto má integrand prázdný definiční obor.

Poznámka 4.3.7. Ve světle předchozí poznámky se může zdát, že studium případu, kdy $c > 0$, a jemu odpovídající substituce, je zbytečné. Volba substituce ale často značně ovlivní délku a náročnost výpočtu.

Věnujme se nyní případu dvou reálných kořenů $x_1 \le x_2$. Předně, pokud $x_1 = x_2$, platí

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)^2} = \sqrt{a}|x-x_1|.$$

Integrand má neprázdný definiční obor jen pokud $a > 0$. V tom případě se na intervalech $(-\infty, x_1)$ a (x_1, ∞) jedná o racionální lomenné funkce a tuto situaci umíme řešit (v bodě x_1 bude možná nutné použít lepení).

V dalším tedy stačí uvažovat jen zajímavější případ $x_1 < x_2$. Máme

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

a pro $a > 0$ je odmocnina definována na intervalu $[x_1, x_2]$, zatímco pro $a < 0$ na $(-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$. Přepis pro aplikaci odmocninové substituce vypadá následovně

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \begin{cases} -\sqrt{a}\sqrt{\frac{x-x_1}{x-x_2}}(x-x_2) & \text{pro } a > 0 \text{ a } x \in (-\infty, x_1) \\ \sqrt{a}\sqrt{\frac{x-x_1}{x-x_2}}(x-x_2) & \text{pro } a > 0 \text{ a } x \in (x_2, +\infty) \\ \sqrt{-a}\sqrt{\frac{x-x_1}{x_2-x}}(x_2-x) & \text{pro } a < 0 \text{ a } x \in (x_1, x_2). \end{cases}$$

Přejděme nyní k případu $a > 0$. Použijeme *první Eulerovu substituci*, kde novou proměnnou zavádíme předpisem

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$$

(máme dvě možnosti, přičemž zvolíme tu, která nám dá jednodušší zápis). Po umocnění máme

$$ax^2+bx+c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}xt + t^2$$

(umocňujeme dva nezáporné výrazy, jedná se tedy o ekvivalentní úpravu). Odtud

$$x = \frac{t^2-c}{b \mp 2\sqrt{a}t}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2t(b \mp 2\sqrt{a}t) \pm 2\sqrt{a}(t^2-c)}{(b \mp 2\sqrt{a}t)^2}.$$

Tento přístup odpovídá druhé substituční metodě. Umíme tedy x vyjádřit jako racionální lomenou funkci v proměnné t, díky tomu lze také $\sqrt{ax^2+bx+c}$ napsat jako racionální lomenou funkci v proměnné t a konečně i $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ je racionální lomená funkce v proměnné t. Proto bude po úpravě celý integrand racionální lomená funkce v proměnné t.

Poznámka 4.3.8. Proměnnou t lze zavést dokonce čtyřmi způsoby

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t.$$

Přechod k opačnému znaménku úplně napravo má však jen minimální dopad (jako bychom ve výsledné racionální lomené funkci provedli ještě substituci $y = -t$).

Zbývá nám studium případu $c > 0$. Ve *druhé Eulerově substituci* novou proměnnou zavádíme předpisem

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} \pm xt.$$

Po umocnění

$$ax^2 + bx + c = c \pm 2\sqrt{c}xt + x^2t^2.$$

Od obou stran odečteme c a výslednou rovnost podělíme x (od této chvíle pracujeme na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$ zvlášť a výsledné primitivní funkce v počátku musíme většinou lepit). Dostáváme

$$x = \frac{\pm 2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\pm 2\sqrt{c}(a - t^2) + 2t(\pm 2\sqrt{c}t - b)}{(a - t^2)^2}.$$

Opět se jedná o druhou substituční metodu a opět se dá snadno nahlédnout, že získáme racionální lomenou funkci v proměnné t.

Úloha 4.3.9. Spočtěte $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Řešení: Definiční obor integrandu je $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Na jednotlivých intervalech použijeme první Eulerovu substituci v podobě

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t$$

(tato volba nám převede jmenovatel zadaného integrandu na t, zatímco volba $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$ by vedla na složitější výraz). Potom máme

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t} \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2t(1 + 2t) - 2(t^2 - 1)}{(1 + 2t)^2} = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2} > 0.$$

Případu $x \in (-\infty, -1)$ odpovídá $t \in (-\frac{1}{2}, 0)$ a případu $x \in (-1, +\infty)$ odpovídá $t \in (0, +\infty)$ (již také víme, že po substituci získáme racionální lomenou funkci, kterou umíme integrovat, budou tedy splněny všechny předpoklady druhé substituční metody). Dostáváme

$$I := \int \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} \overset{2.s.m.}{=} \int \frac{2t^2 + 2t + 2}{t(1 + 2t)^2} \,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{1 + 2t} + \frac{C}{(1 + 2t)^2}\right) \mathrm{d}t.$$

Při hledání koeficientů vycházíme z identity

$$2t^2 + 2t + 2 = A(1 + 2t)^2 + Bt(1 + 2t) + Ct.$$

Volba $t = 0$ dává $A = 2$ a z volby $t = -\frac{1}{2}$ plyne $C = -3$. Porovnejme ještě koeficienty u x^2

$$2 = 4A + 2B = 8 + 2B \qquad \Longrightarrow \qquad B = -3.$$

Odtud

$$I = \int \Big(\frac{2}{t} - \frac{3}{1+2t} - \frac{3}{(1+2t)^2}\Big)\,\mathrm{d}t = 2\log|t| - \frac{3}{2}\log|2t+1| + \frac{3}{2}\frac{1}{2t+1} + C.$$

Stačí již jen položit $t = \sqrt{x^2+x+1} + x$ a máme primitivní funkci na $(-\infty, -1)$ nebo na $(-1, +\infty)$. ☆

Úloha 4.3.10. Spočtěte $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x-x^2}+1}$.

Řešení: Definiční obor integrandu je $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$. Použijeme druhou Eulerovu substituci v podobě

$$\sqrt{1-2x-x^2} = 1 + xt.$$

Dostáváme

$$x = -2\frac{t+1}{t^2+1}, \qquad t = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2\frac{t^2+1-2t(t+1)}{(t^2+1)^2} = \frac{2t^2+4t-2}{(t^2+1)^2}.$$

Druhou substituční metodu budeme aplikovat zvlášť na intervalech $(-1-\sqrt{2}, 0)$ a $(0, -1+\sqrt{2})$, přičemž v prvním případě $t \in (-1, -1+\sqrt{2})$ a ve druhém $t \in (-1-\sqrt{2}, -1)$. Dostáváme

$$\begin{aligned} I :&= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x-x^2}+1} = \int \frac{1}{2 - 2\frac{t^2+t}{t^2+1}} \frac{2t^2+4t-2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int \frac{t^2+2t-1}{(t-1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = \int \Big(\frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+1}\Big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Při hledání koeficientů vycházíme z identity

$$-t^2 - 2t + 1 = A(t^2+1) + Bt(t-1) + C(t-1).$$

Volba $t = 1$ dává $A = -1$. Pak volby $t = 0$ plyne $C = -2$. Porovnáním koeficientů u t^2 konečně dostáváme $B = 0$. Odtud (na uvažovaných intervalech platí $1-t > 0$)

$$\begin{aligned} I &= \int \Big(\frac{-1}{t-1} + \frac{-2}{t^2+1}\Big)\,\mathrm{d}t = -\log(1-t) - 2\arctan t + C \\ &= -\log\Big(1 - \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}\Big) - 2\arctan\Big(\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}\Big) + C =: F(x) \end{aligned}$$

na intervalech $(-1-\sqrt{2}, 0)$ a $(0, -1+\sqrt{2})$. Zbývá ještě zkonstruovat primitivní funkci pro celý interval $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$ pomocí lepení. Povšimněme si, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x} = -1.$$

Odtud vidíme, že funkce F je spojitá v počátku, pokud ji pro $x = 0$ dodefinujeme $\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}$ hodnotou -1. Lze tedy položit

$$I = F(x) \qquad \text{na } (-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}).$$

☆

4.3.5 Goniometrické substituce

Budeme studovat primitivní funkce typu

$$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x.$$

Na tyto primitivní funkce se používají čtyři substituce v kombinaci s první substituční metodou:
(i) $t = \sin x$, pokud $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$
(ii) $t = \cos x$, pokud $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$
(iii) $t = \tan x$, pokud $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$
(iv) $t = \tan \frac{x}{2}$, vždy.

Poslední uvedená substituce se sice dá použít vždy, ale často vede ke komplikovaným výpočtům. Bývá tedy vhodné přednostně ověřit, zda nelze použít některou z předchozích substitucí. Všechny čtyři substituce si nejprve lehce představíme a pak je porovnáme.

Nejprve uvažme substituci $t = \sin x$. Pak máme

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \cos x.$$

V předpisu pro $R(\cos x, \sin x)$ tedy umíme nahradit libovolnou mocninu sinu a sudé mocniny kosinu díky identitě $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Identity typu $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ používat nebudeme. Jednak totiž platí jen na částech definičního oboru, navíc bychom po substituci nedostali racionální lomenou funkci. Ze vztahu pro $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$ vidíme, že ze zlomku musíme být schopni vytknout lichou mocninu kosinu, aby kompenzovala příspěvek $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$.

Příklad 4.3.11. Uvažme integrál $\int \frac{\sin^3 x + \cos^2 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$. Skutečně platí

$$R(-\cos x, \sin x) = \frac{\sin^3 x + (-1)^2\cos^2 x}{(-1)^3\cos^3 x} = \frac{\sin^3 x + \cos^2 x}{-\cos^3 x} = -R(\cos x, \sin x).$$

Po substituci dostáváme

$$\int \frac{\sin^3 x + \cos^2 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x + \cos^2 x}{\cos^4 x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^3 + (1-t^2)}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

což už umíme jednoduše dopočítat.

Při substituci $t = \cos x$ máme

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\sin x.$$

Umíme nahrazovat libovolnou mocninu kosinu, sudé mocniny sinu a jednu lichou mocninu sinu musíme mít připravenu jako kompenzaci pro $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$.

Při substituci $t = \tan x$ se dají nahrazovat jen sudé mocniny sinu a kosinu, případně výrazy jako $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ či $\sin x \cos x = \cos^2 x \tan x$. Najít vyjádření pro $\cos^2 x$ a $\sin^2 x$ dá trochu práce. Trikem je si pamatovat, že vhodným vodítkem je výraz $1 + t^2$. Platí totiž

$$1 + t^2 = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Odtud

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \qquad \text{a} \qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Po přepisu $x = \arctan t$ máme ještě

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Příklad 4.3.12. Substituci $t = \tan x$ lze užít například na $\int \frac{\sin^3 x \cos x}{\cos^4 x + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$. Po substituci dostáváme

$$\int \frac{t^3}{(1+t^2)(1+t^2+t^4)}\,\mathrm{d}t,$$

což umíme řešit (i když to dá trochu práce).

Poslední substitucí je $t = \tan \frac{x}{2}$. Zde dokážeme přímo nahradit sinus i kosinus. Při odvozování odpovídajících vzorců je opět výhodné začít výrazem $1+t^2$. Máme

$$1 + t^2 = 1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Nyní již stačí jen použít součtové vzorce

$$\sin x = 2 \sin \tfrac{x}{2} \cos \tfrac{x}{2} = \tan \tfrac{x}{2} \cos^2 \tfrac{x}{2} = \frac{t}{1+t^2}$$

a

$$\cos x = \cos^2 \tfrac{x}{2} - \sin^2 \tfrac{x}{2} = 2\cos^2 \tfrac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Konečně, podobně jako výše, $x = 2 \arctan t$, tedy

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Poznámka 4.3.13. (i) Čtenář se možná ptá, proč jsme nehovořili o substitucích $t = \cot x$ a $t = \cot \frac{x}{2}$. Snadno se dá rozmyslet, že tyto substituce mají velice podobný efekt jako $t = \tan x$ a $t = \tan \frac{x}{2}$.
(ii) Substituce $t = \tan x$ a $t = \tan \frac{x}{2}$ zpravidla vedou na lepení.

V následujícím příkladu budeme zkoumat efektivitu jednotlivých substitucí.

Příklad 4.3.14. Uvažme $\int \frac{\sin x \cos x}{3+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. Snadno se nahlédne, že je možné použít všechny čtyři substituce. Začněme substitucí $t = \sin x$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{3+\cos^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x &\overset{\text{1.s.m.}}{=} \int \frac{t}{4-t^2}\,\mathrm{d}t = \int \Big(\frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int \Big(\frac{-\frac{1}{2}}{t+2} + \frac{-\frac{1}{2}}{t-2}\Big)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\log|(t+2)(t-2)| + C \\ &= -\frac{1}{2}\log(4-\sin^2 x) + C \text{ pro } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Nyní použijeme $t = \cos x$

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{3+\cos^2 x}\sin x\,\mathrm{d}x &\overset{\text{1.s.m.}}{=} -\int \frac{t}{3+t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\log(3+t^2) + C \\ &= -\frac{1}{2}\log(3+\cos^2 x) + C \text{ pro } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Druhá substituce vedla na o něco jednodušší postup. Nicméně se nedá očekávat, že by to mělo být pravidlem.

Uvažme $t = \tan x$. Na intervalech typu $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, dostáváme

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan x \cos^4 x}{3+\cos^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &\overset{\text{1.s.m.}}{=} \int \frac{\frac{t}{(1+t^2)^2}}{3+\frac{1}{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{t}{(4+3t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \Big(\frac{At+B}{4+3t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int \Big(\frac{t}{1+t^2} - \frac{3t}{4+3t^2}\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\log\Big(\frac{1+t^2}{4+3t^2}\Big) + C \\ &= \frac{1}{2}\log\Big(\frac{1+\tan^2 x}{4+3\tan^2 x}\Big) + C.\end{aligned}$$

Poslední výraz si před lepením zjednodušíme

$$\frac{1}{2}\log\Big(\frac{1+\tan^2 x}{4+3\tan^2 x}\Big) + C = \frac{1}{2}\log\Big(\frac{1}{3+\cos^2 x}\Big) + C.$$

V tomto případě jsme dokonce dostali spojitou funkci a tím se lepení vyřešilo samo. Substituce $t = \tan x$ má oproti předchozím nevýhodu v nutnosti použití lepení. Nedává však o mnoho složitější zápis. Například vyjádření $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ možná na první pohled působí složitějším dojmem, než je vyjádření v případě sinové substituce. Uvědomme si však, že se zde jedná o vyjádření druhé mocniny goniometrické funkce a navíc se činitel $\frac{1}{1+t^2}$ vyskytuje ve všech vyjádřeních, a proto se nakonec do značné míry vykrátí.

Přistoupíme nyní k poslední substituci $t = \tan\frac{x}{2}$. Máme

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin x \cos x}{3+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &\overset{\text{1.s.m.}}{=} \int \frac{\frac{t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}}{3+(\frac{1-t^2}{1+t^2})^2}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= \int \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)(3(1+t^2)^2+(1-t^2)^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)(4t^4+4t^2+4)}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Tento postup nebudeme dokončovat. Dostali jsme racionální lomenou funkci s polynomem stupně šest ve jmenovateli, který by navíc vyžadoval značné úsilí při rozkladu na ireducibilní polynomy.

Poznámka 4.3.15. (i) Při rozkladu na parciální zlomky je počet hledaných koeficientů roven stupni polynomu ve jmenovateli. V situacích, jako je třeba

$$\int \frac{t}{(t^2+1)(t^2+3)(t^2+5)}\,\mathrm{d}t$$

se proto vyplatí nejprve provést substituci $y = t^2$.

(ii) Máme-li rozložit například $\frac{1}{(t^2+1)(t^2+2)}$, podle Věty o rozkladu na parciální zlomky (Věta 4.2.4) bychom měli hledat rozklad ve tvaru

$$\frac{1}{(t^2+1)(t^2+2)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+2}.$$

Pokud bychom však větu aplikovali na $\frac{1}{(z+1)(z+2)}$, rozklad by měl tvar

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{\alpha}{z+1} + \frac{\beta}{z+2}.$$

Odtud vidíme, že v původní úloze vyjde $A = C = 0$.

(iii) I ve standardních situacích lze někdy nalézt další substituce, které vedou k cíli podstatně rychleji než standardní substituce. Týká se to například následujících integrálů.

integrál	rychlá substituce
$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$	$x = \sin t$ nebo $x = \cos t$
$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$	$x = \cosh t$
$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$	$x = \sinh t$

Na závěr ukažme ještě jeden užitečný příklad, který je lépe řešit jinak než standardní goniometrickou substitucí.

Příklad 4.3.16. Hledáme $\int \sin^4 x \, \mathrm{d}x$. Samozřejmě lze použít dvě standardní substituce, ale mnohem rychlejší je použít vlastnosti goniometrických funkcí. Máme $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, pak

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \big(1-\cos(2x)\big)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \big(1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)\big)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\int \big(1+\cos(4x)\big)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C, \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

4.4 Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic

Hledání primitivní funkce splňující danou počáteční podmínku je jednou z možných úloh z teorie obyčejných diferenciálních rovnic (protipólem jsou parciální diferenciální rovnice, v nichž se vyskytují parciální derivace). Obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu je zadána předpisem

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \qquad \text{na } (a,b).$$

My budeme pracovat jen s menší třídou rovnic, které jsou rozřešené vzhledem k nejvyšší derivaci. To znamená, že je lze přepsat do tvaru

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \qquad \text{na } (a,b). \tag{4.4.1}$$

Definice 4.4.1. Nechť $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}_0$. Řekneme, že f je *k-krát spojitě diferencovatelná* na (a,b), jestliže $f^{(k)}$ je spojitá na (a,b). V takovém případě píšeme $f \in C^k((a,b))$.

Poznámka 4.4.2. (i) Jestliže $f \in C^k((a,b))$, pak má spojité i derivace všech nižších řádů.
(ii) Zavádí se také $C^k([a,b])$ za pomoci jednostranných derivací na krajích intervalu.
(iii) Později budeme často pracovat s prostorem

$$C^\infty((a,b)) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k((a,b)).$$

Jeho prvky se nazývají *nekonečněkrát spojitě diferencovatelné funkce*, ale jak vidíme, pravá strana definice s nekonečným řádem derivace vůbec nepracuje (přesnější název by byl: funkce mající spojité derivace všech řádů).

Definice 4.4.3. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $y \in C^n((a,b))$. Funkci y nazveme *řešením obyčejné diferenciální rovnice* (4.4.1) na (a,b), jestliže je rovnost (4.4.1) splněna pro všechna $x \in (a,b)$.

Poznámka 4.4.4. Zatím může být řešení nekonečně mnoho. Jednoznačnost nám zaručí až vhodná sada počátečních podmínek odpovídajících typu studované rovnice.

V tuto chvíli si představíme jen dva základní typy obyčejných diferenciálních rovnic.

4.4.1 Lineární obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu

Budeme uvažovat úlohu

$$\begin{aligned} y'(x) + p(x)y(x) &= f(x) \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

Předpokládáme, že $p, f \in C((a,b))$, $x_0 \in (a,b)$ a $y_0 \in \mathbb{R}$. Ukážeme si postup, jemuž se říká *metoda integračního faktoru*. Několikrát využijeme faktu, že spojitá funkce má primitivní funkci (už jsme se o něm zmiňovali, důkaz bude v kapitole o Riemannově a Newtonově integrálu).

Podle předpokladů existuje primitivní funkce $P(x) = \int p(x)\,dx$ (zafixujme si jednu z nekonečně mnoha možných). Přenásobíme původní rovnici výrazem $\mathrm{e}^{P(x)}$ a povšimneme si, že levou stranu je pak možné napsat jako derivaci součinu

$$(y(x)\mathrm{e}^{P(x)})' = y'(x)\mathrm{e}^{P(x)} + p(x)y(x)\mathrm{e}^{P(x)} = f(x)\mathrm{e}^{P(x)}.$$

Odtud

$$y(x)\mathrm{e}^{P(x)} = \int f(x)\mathrm{e}^{P(x)}\,\mathrm{d}x =: Q(x) + C.$$

Primitivní funkce k $f(x)\mathrm{e}^{P(x)}$ existuje díky spojitosti. Celkově dostáváme takzvané *obecné řešení* na (a,b)

$$y(x) = Q(x)\mathrm{e}^{-P(x)} + C\mathrm{e}^{-P(x)}.$$

Díky počáteční podmínce nyní určíme jednoznačné $C \in \mathbb{R}$ (neboť $\mathrm{e}^{-P(x)} > 0$ na (a,b)), aby platilo $y(x_0) = y_0$.

Poznámka 4.4.5. (i) Uvedený postup není jen návodem k řešení, ale i důkazem jeho existence.
(ii) Integrační faktor není určen jednoznačně. Funkce $\mathrm{e}^{P(x)+C_1} = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{P(x)}$, kde $C_1 \in \mathbb{R}$, je také integračním faktorem. Dá se snadno nahlédnout, že konstanta C_1 nehraje žádnou roli (na začátku postupu násobíme $\mathrm{e}^{P(x)}$, na konci dělíme $\mathrm{e}^{P(x)}$, případná multiplikativní konstanta se proto vyruší).
(iii) *Obecné řešení* je řešení diferenciální rovnice bez zadání počáteční podmínky. Přesněji řečeno, jedná se o třídu řešení, neboť jde o všechna řešení dané diferenciální rovnice. Parametrem bývají konstanty, které lze určit (u jednoduchých typů rovnic, kterými se budeme v této sekci zabývat, jednoznačně), pokud přidáme odpovídající počáteční podmínky. V takovém případě hovoříme o *počáteční úloze* (nebo též o *Cauchyově úloze*) a *řešení počáteční úlohy.*

Tvrzení 4.4.6 (Jednoznačnost řešení)**.** *Nechť funkce y, z řeší* (4.4.2)*. Pak $y \equiv z$.*

Důkaz. Definujme funkci $w := y - z$. Pak w řeší

$$w'(x) + p(x)w(x) = 0 \qquad \text{a} \qquad w(x_0) = 0.$$

Tuto rovnici přenásobíme $\mathrm{e}^{P(x)}$, kde $P(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x$ (jedna pevně zvolená primitivní funkce), a dostáváme

$$\left(\mathrm{e}^{P(x)}w(x)\right)' = \mathrm{e}^{P(x)}w'(x) + \mathrm{e}^{P(x)}p(x)w(x) = 0.$$

Odtud podle věty o nejednoznačnosti primitivní funkce musí být $\mathrm{e}^{P(x)}w(x)$ konstantní. Zároveň

$$\mathrm{e}^{P(x_0)}w(x_0) = \mathrm{e}^{P(x_0)} \cdot 0 = 0.$$

Proto $\mathrm{e}^{P(x)}w(x) \equiv 0$. Protože navíc exponenciála je vždy kladná, máme $w(x) \equiv 0$ a jsme hotovi. □

Příklad 4.4.7. Řešme $y' + xy = x$, $y(0) = 2$. Integrační faktor má tvar (o aditivní konstantu při určování primitivní funkce se nestaráme)

$$\mathrm{e}^{\int x\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.$$

Odtud

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}y\right)' = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}y' + \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}xy = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}x.$$

Proto

$$\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}y = \int \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + C \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = 1 + C\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Máme obecné řešení na $\mathbb{R}$. Podmínka $y(0) = 2$ dává $C = 1$, a proto řešením počáteční úlohy je

$$y(x) = 1 + \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

Příklad 4.4.8. Řešme $y' + \frac{1}{x}y = \sin x$, $y(\pi) = 7$. Integrační faktor hledáme ve tvaru

$$\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\log|x|} = |x|.$$

Protože lze integrační faktor násobit konstantou a protože již zadání úlohy vylučuje intervaly obsahující počátek, za integrační faktor můžeme vzít identitu. Odtud

$$(xy)' = xy' + y = x\sin x.$$

Proto nám integrace per partes dává

$$xy = \int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C.$$

Obecné řešení má tedy tvar

$$y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x} \qquad \text{na } (-\infty, 0) \text{ nebo na } (0, \infty).$$

Počáteční podmínka dává

$$7 = 1 + 0 + \frac{C}{\pi} \qquad \Longrightarrow \qquad C = 6\pi.$$

Řešení počáteční úlohy má proto tvar

$$y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{6\pi}{x} \qquad \text{na } (0, \infty).$$

4.4.2 Lineární obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

Budeme zde uvažovat úlohu

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_0 y &= f(x) \\ y(x_0) = y_0 \quad \text{a} \quad y'(x_0) &= y_1. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Předpokládáme, že $f \in C((a,b))$, $x_0 \in (a,b)$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ a $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Povšimněme si, že diferenciální operátor na levé straně (4.4.3) je lineární. Proto je-li y_p libovolné řešení úlohy (4.4.3) a je-li y_h obecné řešení homogenní úlohy

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{4.4.4}$$

pak $y = y_h + y_p$ je opět obecné řešení úlohy (4.4.3). Tohoto pozorování nyní využijeme. Namísto hledání obecného řešení (4.4.3) budeme hledat obecné řešení jednodušší úlohy (4.4.4) a k nim pak přičteme libovolné pevné řešení (4.4.3). Určitě tím žádná řešení neztratíme, neboť rozdíl dvou obecných řešení (4.4.2) zřejmě řeší (4.4.3).

Přistupme k hledání všech řešení homogenní rovnice (4.4.3). Zkusíme položit $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$. Pak (4.4.4) dává

$$\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + a_1 \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} + a_0 \mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0.$$

Protože $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$, zbývá nalézt kořeny *charakteristického polynomu*

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0.$$

Rozlišujeme tři případy.

Pokud má charakteristický polynom dva různé reálné kořeny λ_1, λ_2, máme dvojici funkcí $\{\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\}$ řešících (4.4.4). Proto je řešením rovněž

$$y_h = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x},$$

kdykoliv $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Pokud má charakteristický polynom kořeny $\lambda_1 = a + \mathrm{i}b$ a $\lambda_2 = a - \mathrm{i}b$ (připomeňme, že má-li polynom s reálnými koeficienty komplexní kořen, kořenem je i číslo komplexně sdružené), vyjdou nám jako řešení (4.4.4) dvě komplexní funkce reálné proměnné

$$\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} = \mathrm{e}^{ax}\big(\cos(bx) + \mathrm{i}\sin(bx)\big) \qquad \text{a} \qquad \mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}b)x} = \mathrm{e}^{ax}\big(\cos(bx) - \mathrm{i}\sin(bx)\big).$$

Rovnici (4.4.4) řeší také jejich lineární kombinace, speciálně

$$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} + \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}) = \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$$

a

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} - \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}) = \mathrm{e}^{ax}\sin(bx).$$

Tím jsme přešli ke dvojici reálných řešení a můžeme položit

$$y_h = C_1\mathrm{e}^{ax}\cos(bx) + C_2\mathrm{e}^{ax}\sin(bx).$$

Zbývá už jen případ s dvojnásobným reálným kořenem λ. Zatím máme jedno řešení $\mathrm{e}^{\lambda x}$. Ukažme, že v tomto případě je rovněž řešením funkce $x \mapsto x\mathrm{e}^{\lambda x}$. Skutečně, v našem případě má rovnice tvar

$$y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y = 0.$$

Dosaďme do ní našeho kandidáta na řešení (při derivování používáme Leibnizovo pravidlo)

$$\begin{aligned}&(x\mathrm{e}^{\lambda x})'' - 2\lambda(x\mathrm{e}^{\lambda x})' + \lambda^2 x\mathrm{e}^{\lambda x}\\ &\qquad = (2\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda^2 x\mathrm{e}^{\lambda x}) - 2\lambda(\mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda x\mathrm{e}^{\lambda x}) + \lambda^2 x\mathrm{e}^{\lambda x} = 0.\end{aligned}$$

Opět máme dvojici reálných řešení a z nich dostáváme

$$y_h = C_1\mathrm{e}^{\lambda x} + C_2 x\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Poznámka 4.4.9. (i) K tomuto typu diferenciálních rovnic se vrátíme později a provedeme jeho důkladnější studium. Zjistíme, že prostor řešení rovnice (4.4.4) je vždy dvoudimenzionální podprostor prostoru spojitých funkcí a že námi získané dvojice řešení, z nichž jsme konstruovali obecné řešení, jsou jeho bází.
(ii) Chceme-li používat pojem báze, je nutné zavést pojem lineární nezávislost dvou funkcí f_1, f_2. Ten se definuje tak, že neexistuje netriviální dvojice $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (tedy $|C_1| + |C_2| \neq 0$) tak, že

$$C_1 f_1 + C_2 f_2 = 0 \qquad \text{na } (a,b). \tag{4.4.5}$$

Dá se ukázat, že pro řešení naší rovnice je toto ekvivalentní podmínce

$$f_1 f_2' - f_1' f_2 \neq 0 \qquad \text{na celém } (a,b). \tag{4.4.6}$$

Snadno se dá přímým výpočtem ověřit, že jsme ve všech třech případech tuto podmínku splnili.
(iii) Výše zmíněné dvojici řešení se říká *fundamentální systém.*

Přistupme nyní k hledání partikulárního řešení y_p. Používají se následující tři postupy:
(i) uhodnutí

(ii) metoda neurčitých koeficientů při speciálním tvaru pravé strany
(iii) variace konstant (v obecném případě).

Uhodnutí partikulárního řešení se většinou realizuje tak, že máme-li například důvod se domnívat, že řešením by měl být polynom stupně dva, položíme $y_p = ax^2 + bx + c$, kde a, b, c jsou neurčité koeficienty. Funkci dosadíme do diferenciální rovnice a tím získáme podmínky na hledané koeficienty. Pokud jsme správný tvar řešení neuhodli, dostaneme podmínky, které se nedají splnit. V opačném případě získáme hledané koeficienty.

Případ se speciální pravou stranou je velice podobný metodě uhodnutí, jen je zaručen výsledek.

Tvrzení 4.4.10 (O speciální pravé straně)**.** *Nechť*

$$f(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\big(P_1(x)\cos(\nu x) + P_2(x)\sin(\nu x)\big),$$

kde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ a P_1, P_2 jsou polynomy. Pak existují polynomy Q_1, Q_2 stupně nejvýše $\max\{\operatorname{st} P_1, \operatorname{st} P_2\}$ *takové, že funkce*

$$y_p = \mathrm{e}^{\mu x} x^k \big(Q_1(x)\cos(\nu x) + Q_2(x)\sin(\nu x)\big),$$

kde $k \in \mathbb{N}_0$ je násobnost čísla $\mu + \mathrm{i}\nu$ jakožto kořene charakteristického polynomu, řeší nehomogenní rovnici $(4.4.3)_1$.

Poznámka 4.4.11. (i) Polynomy Q_1, Q_2 se hledají metodou neurčitých koeficientů.
(ii) V tvrzení připouštíme, že $\mu + \mathrm{i}\nu$ není kořenem charakteristického polynomu a v tom případě je $k = 0$.
(iii) Pozor, i když je jeden z polynomů P_1, P_2 nulový, nemůžeme obecně předpokládat nulovost kteréhokoliv z polynomů Q_1, Q_2.
(iv) Tvrzení o speciální pravé straně nyní dokazovat nebudeme.

Příklad 4.4.12. Uvažme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ a nalezněme její obecné řešení. Charakteristický polynom má tvar

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1).$$

Odtud dostáváme řešení homogenní rovnice

$$y_h = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

Pokud bychom nyní zkoušeli uhodnout řešení například ve tvaru $y_p = ax + b$, dostali bychom

$$3a + 2ax + b = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{na } \mathbb{R},$$

což je podmínka, kterou není možné splnit. Pokusíme se použít Tvrzení o speciální pravé straně (Tvrzení 4.4.10). To se nedá použít přímo, neboť pravá strana nemá požadovaný tvar. Pokud bychom ale našli

$$y_{p_1} \qquad \text{řešící} \qquad y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$$

a

$$y_{p_2} \qquad \text{řešící} \qquad y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x},$$

zřejmě bude $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ hledané partikulární řešení a navíc obě podúlohy už splňují předpoklady Tvrzení o speciální pravé straně (Tvrzení 4.4.10).

Hledejme tedy partikulární řešení úlohy $y'' + 3y' + 2y = e^x$. Zde máme $\mu + \mathrm{i}\nu = 1 + \mathrm{i}0$. Toto číslo není kořenem charakteristického polynomu, proto $k = 0$. Dále máme $P_1(x) \equiv 1$ a můžeme psát $P_2(x) \equiv 0$. Polynomy Q_1, Q_2 mají tedy nulový stupeň, a proto

$$y_{p_1} = \mathrm{e}^{-1 \cdot x} x^0 (A \cos 0 \cdot x + B \sin 0 \cdot x) = A\mathrm{e}^x.$$

Po dosazení

$$A\mathrm{e}^x + 3A\mathrm{e}^x + 2A\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{1}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad y_{p_1} = \frac{1}{6}\mathrm{e}^x.$$

Zabývejme se úlohou $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}$. Zde máme $\mu + \mathrm{i}\nu = -1 + \mathrm{i}0$. Toto číslo je jednonásobným kořenem charakteristického polynomu, proto $k = 1$. Dále máme $P_1(x) \equiv 1$ a můžeme psát $P_2(x) \equiv 0$. Polynomy Q_1, Q_2 mají tedy nulový stupeň, a proto

$$y_{p_2} = \mathrm{e}^{1 \cdot x} x + (C \cos 0 \cdot x + D \sin 0 \cdot x) = Cx\mathrm{e}^x.$$

Po dosazení

$$-2C\mathrm{e}^{-x} + Cx\mathrm{e}^{-x} + 3C\mathrm{e}^{-x} - 3Cx\mathrm{e}^{-x} + 2Cx\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}.$$

Odtud

$$C = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad y_{p_2} = x\mathrm{e}^{-x}.$$

Celkově jsme dostali obecné řešení ve tvaru

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1 e^{-2x} + C_2 \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^x + xe^{-x},$$

kde C_1, C_2 jsou reálné konstanty, a definičním oborem je $\mathbb{R}$.

Všimněme si, že bylo možné (i když při úvodním seznámení s problematikou mírně méně přehledné) brát řešení přímo ve tvaru $A\mathrm{e}^x + Cx\mathrm{e}^{-x}$ a rovnou uvažovat pravou stranu ve tvaru $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

Konečně, ukažme si metodu hledání partikulárního řešení, která se nazývá *variace konstant*. Předpokládejme, že již máme nalezen fundamentální systém $\{f_1, f_2\}$. Připomeňme, že platí

$$y_h = C_1 f_1 + C_2 f_2.$$

Metoda variace konstant spočívá v tom, že konstanty C_1, C_2 nahradíme funkcemi c_1, c_2 a tyto funkce budeme hledat dosazením do diferenciální rovnice. Máme tedy

$$y_p(x) = c_1(x) f_1(x) + c_2(x) f_2(x).$$

Toto vyjádření dvakrát zderivujeme, přičemž ještě po první derivaci si vytvoříme druhou podmínku tím, že budeme požadovat, aby byl součet členů obsahujících c_1', c_2' roven nule (pro přehlednost již nepíšeme závislost na proměnné x)

$$\begin{aligned} y_p' &= c_1 f_1' + c_2 f_2' + \underbrace{c_1' f_1 + c_2' f_2}_{:=0} \\ y_p'' &= c_1 f_1'' + c_2 f_2'' + c_1' f_1' + c_2' f_2'. \end{aligned}$$

Získané formule dosadíme do (4.4.3), výsledný výraz přeskupíme a využijeme toho, že f_1, f_2 řeší homogenní úlohu (4.4.4)

$$\begin{aligned} f &= y_p'' + a_1 y_p' + a_0 y_p \\ &= c_1 f_1'' + c_2 f_2'' + c_1' f_1' + c_1' f_1' + a_1(c_1 f_1' + c_2 f_2') + a_0(c_1 f_1 + c_2 f_2) \\ &= c_1(f_1'' + a_1 f_1' + a_0 f_1) + c_2(f_2'' + a_1 f_2' + a_0 f_2) + c_1' f_1' + c_2' f_2' \\ &= c_1' f_1' + c_2' f_2'. \end{aligned}$$

Celkově máme soustavu

$$\begin{aligned} c_1' f_1 + c_2' f_2 &= 0 \\ c_1' f_1' + c_2' f_2' &= f. \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Zbývá již jen vyjádřit c_1', c_2' a poté nalézt c_1, c_2.

Poznámka 4.4.13. (i) Připomeňme, že fundamentální systém splňuje (4.4.6). To zaručuje, že soustava má v každém bodě jednoznačné řešení.
(ii) Toto řešení lze získat pomocí Cramerova pravidla (jmenovatel bude vždy nenulový díky (4.4.6))

$$c_1' = \frac{-f f_2}{f_1 f_2' - f_1' f_2} \qquad \text{a} \qquad c_2' = \frac{f f_1}{f_1 f_2' - f_1' f_2}.$$

(iii) Námi vytvořená podmínka $c_1' f_1 + c_2' f_2 = 0$ k získání druhé rovnice do soustavy dvou rovnic pro dvě neznámé nebyla zvolena vůbec náhodně. Za touto volbou se skrývá hlubší teorie.
(iv) Povšimněme si, že výrazy získané z Cramerova pravidla jsou spojité, proto příslušné primitivní funkce existují (ale nemusíme je umět najít).
(v) Při hledání primitivních funkcí pro c_1', c_2' nehraje aditivní konstanta žádnou roli. Odpovídající členy jsou již totiž zastoupeny v y_h.

Poznámka 4.4.14. Čtenáři doporučujeme, aby si zapamatoval buď soustavu rovnic (4.4.7), nebo k ní vedoucí postup pracující s funkcemi f_1, f_2. Naopak nedoporučujeme odvozovat soustavu po dosazení konkrétních funkcí za f_1, f_2, neboť jejich derivace mohou být složité a těžko se pak hledají členy, které se mají vyrušit při získávání rovnice $c_1' f_1' + c_2' f_2' = f$.

Tvrzení 4.4.15 (Existence a jednoznačnost)**.** *Počáteční úloha* (4.4.2) *za předpokladu $f \in C((a, b))$, $x_0 \in (a, b)$, a_0, a_1, y_0, $y_1 \in \mathbb{R}$ má vždy jednoznačné řešení.*

Důkaz. Nejprve dokažme existenci. Postup vedoucí k y_h funguje vždy a získáme fundamentální systém $\{f_1, f_2\}$, pro který platí (4.4.6). Dále podle variace konstant (včetně kroku s Cramerovým pravidlem) existuje partikulární řešení y_p. Máme tedy obecná řešení ve tvaru

$$y = C_1 f_1 + C_2 f_2 + y_p,$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ jsou zatím libovolné. Počáteční podmínky dále dávají

$$\begin{aligned} C_1 f_1(x_0) + C_2 f_2(x_0) &= \quad y(x_0) - y_p(x_0) = \quad y_0 - y_p(x_0) \\ C_1 f_1'(x_0) + C_2 f_2'(x_0) &= \quad y'(x_0) - y_p'(x_0) = \quad y_1 - y_p'(x_0). \end{aligned}$$

To je soustava dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé C_1, C_2. Podle podmínky (4.4.6) má příslušná matice této soustavy na levé straně nenulový determinant a proto existuje řešení (dokonce jednoznačné). Tím je dokázána existence.

Dokažme jednoznačnost. Nechť y_1, y_2 jsou dvě řešení. Pak $z = y_1 - y_2$ řeší úlohu (4.4.3) s počátečními podmínkami $z(x_0) = 0$ a $z'(x_0) = 0$. Protože prostor obecných řešení (4.4.2) je dvoudimenzionální a $\{f_1, f_2\}$ je jeho báze, existují pevná $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$z = C_1 f_1 + C_2 f_2.$$

Aplikací počátečních podmínek dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} C_1 f_1(x_0) + C_2 f_2(x_0) &= z(x_0) = 0 \\ C_1 f_1'(x_0) + C_2 f_2'(x_0) &= z'(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Matice reprezentující levou stranu je regulární, proto musí platit $C_1 = C_2 = 0$. Tedy $z \equiv 0$. □

Poznámka 4.4.16. Uvědomme si, že jsme při důkazu této věty (v části věnované jednoznačnosti) vycházeli z toho, že prostor řešení dané homogenní rovnice je dvoudimenzionální. Toto jsme zatím nedokazovali. Přesný důkaz tohoto tvrzení (v mnohem obecnější situaci) provedeme v kapitole věnované obyčejným diferenciálním rovnicím.

Úloha 4.4.17. Nalezněte obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{1+x^2}$.

Řešení: Charakteristický polynom má tvar

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Fundamentální systém je tedy $\{\mathrm{e}^{2x}, x\mathrm{e}^{2x}\}$. Odtud

$$y_h = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2 x\mathrm{e}^{2x}.$$

Partikulární řešení hledáme metodou variace konstant, tedy ve tvaru

$$y_p = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2 x\mathrm{e}^{2x}.$$

Soustava (4.4.7) má v našem případě tvar

$$\begin{aligned} c_1'\mathrm{e}^{2x} + c_2' x\mathrm{e}^{2x} &= 0 \\ 2c_1'\mathrm{e}^{2x} + 2c_2' x\mathrm{e}^{2x} + c_2'\mathrm{e}^{2x} &= \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Odtud máme

$$\begin{aligned} c_1' + c_2' x &= 0 \\ 2c_1' + 2c_2' x + c_2' &= \frac{2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned} c_1' &= \frac{-2x}{1+x^2} & \implies \quad c_1 &= -\log(1+x^2) \\ c_2' &= \frac{2}{1+x^2} & \implies \quad c_2 &= 2\arctan x. \end{aligned}$$

Celkově

$$y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2 x\mathrm{e}^{2x} - \log(1+x^2)\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x}\arctan x \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

☆

Úloha 4.4.18. Nalezněte řešení rovnice $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x$ splňující počáteční podmínky $y(0) = 2$ a $y'(0) = 3$.

Řešení: Charakteristická rovnice má tvar $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, a proto má řešení

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \mathrm{i}.$$

Fundamentální systém je tedy $\{\mathrm{e}^x\cos x, \mathrm{e}^x\sin x\}$ a

$$y_h = C_1\mathrm{e}^x\cos x + C_2\mathrm{e}^x\sin x.$$

Partikulární řešení hledáme za pomoci Tvrzení o speciální pravé straně (Tvrzení 4.4.10) ve tvaru $y_p = A\mathrm{e}^x$. Po dosazení dostáváme $A = 1$. Obecné řešení má tedy tvar

$$y = C_1\mathrm{e}^x\cos x + C_2\mathrm{e}^x\sin x + \mathrm{e}^x.$$

Počáteční podmínky dávají

$$\begin{aligned} 2 &= y(0) = C_1 + 1 \\ 3 &= y'(0) = C_1 + C_2 + 1 \end{aligned} \quad \implies \quad C_1 = 1, C_2 = 1.$$

Proto je hledaným řešením počáteční úlohy

$$y = \mathrm{e}^x\cos x + \mathrm{e}^x\sin x + \mathrm{e}^x \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

☆

Poznámka 4.4.19. Na závěr ještě poznamenejme, že obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu $(4.4.2)_1$ jsme mohli řešit obdobně jako rovnici druhého řádu, pomocí obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení s pravou stranou. Můžeme tedy uvažovat

$$y = y_h + y_p,$$

kde y_h je obecné řešení rovnice

$$y_h'(x) + p(x)y_h(x) = 0 \tag{4.4.8}$$

a y_p je libovolné řešení rovnice (4.4.2). Rovnici (4.4.8) můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{y_h'}{y_h} = -p(x),$$

což lze formálně přepsat jako

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int -p(x)\mathrm{d}x,$$

a dostáváme

$$\log|y_h(x)| = -P(x), \quad \text{tedy } y_h(x) = K\mathrm{e}^{-P(x)},$$

kde $P(x)$ je libovolná primitivní funkce k $p(x)$. Partikulární řešení pak můžeme řešit například metodou variace konstant či můžeme řešení uhodnout. Rovnice (4.4.8) je speciálním případem tzv. rovnic ve tvaru separovaných proměnných. Jejich řešení přes zdánlivou jednoduchost skrývá hodně záludností, a proto si ho ponecháme až do kapitoly věnované obyčejným diferenciálním rovnicím.

Cvičení 4.4.20. Nalezněte partikulární řešení rovnice (4.4.2) pomocí metody variace konstant, tj. hledejte ho ve tvaru

$$y_p(x) = c(x)\mathrm{e}^{-P(x)}.$$

4.4.3 Poznámka o lineárních diferenčních rovnicích

V ekonomických a biologických aplikacích se někdy nehledá funkce, ale posloupnost řešící daný problém. K podobným úlohám se můžeme dostat i u některých numerických metod řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Nejčastěji se řeší dva typy *diferenčních rovnic*. Jednak je to *lineární diferenční rovnice prvního řádu*

$$y_{n+1} + p_n y_n = f_n,$$

kde $\{p_n\}$ a $\{f_n\}$ jsou dané posloupnosti, a je dána počáteční hodnota y_1. Dále se studuje *lineární diferenční rovnice k-tého řádu s konstantními koeficienty*

$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = f_n, \tag{4.4.9}$$

kde $\{f_n\}$ je daná posloupnost, $a_0, \ldots, a_{k-1}$ jsou reálné koeficienty a máme zadány počáteční hodnoty $y_1, y_2, \ldots, y_k \in \mathbb{R}$.

U obou typů diferenčních rovnic se dá osamostatnit člen úplně nalevo. Okamžitě vidíme, že posloupnost je zadaná rekurentně a automaticky máme její existenci a jednoznačnost. Otázkou zůstává, je-li možné získat formuli, která by dala přímo vzorec pro y_n. U uvedených dvou typů diferenčních rovnic jsou známy postupy řešení. Pro nás je zajímavá zejména diferenční rovnice (4.4.9), kde postup řešení velice připomíná postup, s nímž jsme se již setkali při řešení obyčejných diferenciálních rovnic.

Tento postup si ukážeme podrobně. Pro jednoduchost uvážíme případ $k = 2$, tedy rovnici

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = f_n. \tag{4.4.10}$$

Začneme řešením homogenní úlohy

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0. \tag{4.4.11}$$

Řešení budeme nejprve hledat ve tvaru $y_n = \lambda^n$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$. Tento tvar dosadíme a po vykrácení činitele λ^n dostáváme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

V dalším se nebudeme zabývat situací, kdy má charakteristická rovnice nulový kořen (pak je $a_0 = 0$ a diferenční rovnice je nižšího řadu).

Připomeňme, že polynom stupně dva s reálnými koeficienty má buď dva reálné kořeny, nebo jeden dvojnásobný reálný dvojnásobný kořen, nebo dvojici komplexně sdružených čísel.

Tvrzení 4.4.21. *Nechť $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ a $a_0 \neq 0$. Pak všechna obecná řešení diferenční rovnice* (4.4.11) *jsou vyjádřena v závislosti na kořenech charakteristické rovnice následovně*

$$y_n = \begin{cases} C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n & \textit{pro dva různé kořeny } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n & \textit{pro dvojnásobný kořen } \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ C_1 r^n\cos(n\varphi) + C_2 r^n \sin(n\varphi) & \textit{pro komplexní kořeny } r(\cos\varphi \pm \mathrm{i}\sin\varphi). \end{cases}$$

Důkaz. Postupně uvážíme všechny tři případy a ukážeme, že navrhovaná řešení skutečně řeší diferenční rovnici (4.4.11). Budeme-li navíc ke každé dvojici počátečních podmínek $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ umět najít odpovídající koeficienty $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, budeme vědět, že jsme našli skutečně všechna řešení (připomeňme, že u diferenčních rovnic máme existenci a jednoznačnost řešení automaticky).

Nejprve uvažme případ dvou reálných kořenů $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Díky konstrukci charakteristické rovnice a linearitě úlohy (4.4.11) je

$$y_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$$

zřejmě řešením. Jsou-li dále dané počáteční hodnoty $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, dostáváme soustavu (pro neznámé $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 &= y_1 \\ C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 &= y_2. \end{aligned}$$

Determinant matice soustavy na levé straně má hodnotu (uvědomme si, že jde o variantu tzv. Vandermondova determinantu)

$$\lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1^2 = \lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0.$$

Ke každé sadě počátečních podmínek tedy existují odpovídající $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Máme tedy jistotu, že umíme nalézt všechna možná řešení.

Nechť je dále $\lambda \neq 0$ dvojnásobný reálný kořen. Potřebujeme ověřit, že $y_n := n\lambda^n$ řeší rovnici

$$y_{n+2} - 2\lambda y_{n+1} + \lambda^2 y_n = 0.$$

To dostáváme okamžitě po dosazení

$$y_{n+2} - 2\lambda y_{n+1} + \lambda^2 y_n = (n+2)\lambda^{n+2} - 2\lambda(n+1)\lambda^{n+1} + \lambda^2 n\lambda^n = 0.$$

Nechť jsou dané počáteční hodnoty $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Soustava rovnic má tentokrát tvar

$$\begin{aligned} C_1\lambda + C_2\lambda &= y_1 \\ C_1\lambda^2 + 2C_2\lambda^2 &= y_2. \end{aligned}$$

Determinant matice na levé straně má hodnotu

$$2\lambda^3 - \lambda^3 = \lambda^3 \neq 0,$$

jsme tedy hotovi i ve druhém případě.

Konečně, nechť má charakteristický polynom kořeny $r(\cos\varphi \pm \mathrm{i}\sin\varphi)$. Díky linearitě (4.4.11) a Moivreově větě je řešením také

$$\begin{aligned} &C_3 r^n\big(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)\big) + C_4 r^n\big(\cos(n\varphi) - \mathrm{i}\sin(n\varphi)\big) \\ &\qquad = (C_3 + C_4)r^n\cos(n\varphi) + \mathrm{i}(C_3 - C_4)r^n\sin(n\varphi), \end{aligned}$$

kdykoliv $C_3, C_4 \in \mathbb{C}$. Volba $C_3 = C_4 = \frac{1}{2}$ nám dává řešení $r^n\cos(n\varphi)$ a volbou $C_3 = -C_4 = -\frac{\mathrm{i}}{2}$ dostáváme řešení $r^n\sin(n\varphi)$. Odtud také

$$C_1 r^n\cos(n\varphi) + C_2 r^n\sin(n\varphi)$$

řeší (4.4.11). Jsou-li dále dané počáteční hodnoty $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} C_1 r\cos\varphi + C_2 r\sin\varphi &= y_1 \\ C_1 r^2\cos(2\varphi) + C_2 r^2\sin(2\varphi) &= y_2. \end{aligned}$$

Determinant soustavy má tvar

$$\begin{aligned} &r^3\big(\cos\varphi\sin(2\varphi) - \sin\varphi\cos(2\varphi)\big) \\ &\quad = r^3(2\cos^2\varphi\sin\varphi - (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\sin\varphi) \\ &\quad = r^3(\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin^3\varphi) = r^3\sin\varphi \neq 0 \end{aligned}$$

(protože vždy uvažujeme netriviální kořeny, máme $r > 0$, a protože v tomto případě uvažujeme kořeny, které nejsou reálné, máme $\sin\varphi \neq 0$) a jsme hotovi i v posledním případě. □

Příklad 4.4.22. (i) Uvažme diferenční rovnici

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0.$$

Charakteristická rovnice má tvar

$$0 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2),$$

a proto je obecným řešením posloupnost

$$y_n = C_1 1^n + C_2 2^n = C_1 + C_2 2^n.$$

(ii) Uvažme diferenční rovnici

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0.$$

Charakteristická rovnice má tvar

$$0 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2,$$

a proto je obecným řešením posloupnost

$$y_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n.$$

(iii) Uvažme diferenční rovnici $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 0$. Charakteristická rovnice má tvar $0 = \lambda^2 - 2\lambda + 4$. Jejími kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i} = 2\Big(\cos\frac{\pi}{3} \pm \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\Big)$$

a proto je obecným řešením posloupnost

$$y_n = C_1 2^n \cos\frac{\pi n}{3} + C_2 2^n \sin\frac{\pi n}{3}.$$

Nehomomogenní diferenční rovnice (4.4.10) se často řeší uhodnutím a následným sečtením s řešením homogenní rovnice. Můžeme použít následující tvrzení (v literatuře se dokazuje jen málokdy, bývá používáno jen jako inspirace pro uhodnutí řešení).

Tvrzení 4.4.23 (O speciální pravé straně)**.** *Nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$f_n = \mu^n \big(P_1(n)\cos(\nu n) + P_2(n)\sin(\nu n)\big),$$

kde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ a P_1, P_2 jsou polynomy. Pak existují polynomy Q_1, Q_2 stupně nejvýše $\max\{\operatorname{st} P_1, \operatorname{st} P_2\}$ *takové, že posloupnost*

$$y_n = \mu^n n^k \big(Q_1(n)\cos(\nu n) + Q_2(n)\sin(\nu n)\big),$$

kde $k \in \mathbb{N}_0$ je násobnost čísla $\mu + \mathrm{i}\nu$ jakožto kořene charakteristického polynomu, řeší nehomogenní rovnici.

Příklad 4.4.24. Řešme úlohu

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = n2^n \qquad \text{s podmínkami } y_1 = 2, y_2 = 0.$$

Charakteristická rovnice má tvar

$$0 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2),$$

a proto má homogenní úloha řešení

$$z_n = C_1 + C_2 2^n.$$

Partikulární řešení hledáme ve tvaru (pravá strana $f_n = n2^n$ má speciální tvar s volbou $\mu = 2$, $\nu = 0$, $k = 1$ a $\operatorname{st} P_1 = 1$)

$$w_n = (An^2 + Bn)2^n.$$

Po dosazení a vykrácení činitele 2^n dostáváme

$$\begin{aligned} n &= 4\big(A(n+2)^2 + B(n+2)\big) - 6\big(A(n+1)^2 + B(n+1)\big) + 2(An^2 + Bn) \\ &= 0n^2 + \big(16A + 4B - 12A - 6B + 2B\big)n + \big(16A + 8B - 6A - 6B\big) \\ &= 4An + (10A + 2B). \end{aligned}$$

Odtud $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{5}{4}$ a máme partikulární řešení

$$w_n = \frac{1}{4}n^2 2^n - \frac{5}{4}n2^n.$$

Obecné řešení má proto tvar

$$z_n + w_n = C_1 + C_2 2^n + \frac{1}{4}n^2 2^n - \frac{5}{4}n2^n.$$

Počáteční podmínky dále dávají

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 + 2C_2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} &&\Longrightarrow\quad C_1 + 2C_2 = 4 \\ 0 &= C_1 + 4C_2 + 4 - 10 &&\Longrightarrow\quad C_1 + 4C_2 = 6. \end{aligned}$$

Odtud $C_2 = 1$, $C_1 = 2$ a hledaná posloupnost je dána předpisem

$$y_n = 2 + 2^n + \frac{1}{4}n^2 2^n - \frac{5}{4}n2^n.$$

Poznámka 4.4.25. Problematika diferenčních rovnic je podstatně více prozkoumána, než jsme si zde ukázali. My jsme se zaměřili jen na tu část, kde se postupy řešení velmi podobají našim postupům z řešení obyčejných diferenciálních rovnic.

Shrnutí a závěrečné poznámky. Seznámili jsme se s pojmem primitivní funkce k dané funkce. Ukázali jsme si základní obecné techniky hledání primitivních funkcí (metoda per partes a substituční metoda) a pak jsme se seznámili s jistými třídami funkcí, pro něž v principu umíme primitivní funkce nalézt (racionální lomené funkce). Dále jsme se seznámili s některými třídami funkcí, pro něž vhodnou substitucí převedeme hledání primitivní funkce k nim na hledání primitivní funkce racionální lomené funkce. Poté jsme se seznámili s některými jednoduchými typy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic a naučili jsme se je řešit. Nakonec jsme si ukázali souvislost těchto úloh s hledáním řešení lineárních diferenčních rovnic.

Kapitola 5

Limity podruhé

V této kapitole bude naším hlavním cílem doplnit látku k limitám nevlastním a limitám v nevlastních bodech. Budeme se také zabývat limitami posloupností.

5.1 Limity nevlastní, limity v nevlastních bodech, limity posloupností

Připomeňme si základní definici limity pracující s pojmy okolí a prstencové okolí, která se používá v situaci, že funkce je definovaná na jistém prstencovém okolí bodu x_0.

Definice 5.1.1. Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \quad f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A).$$

S touto definicí se většinou pracuje tak, že se okolí přepíší pomocí absolutních hodnot. V případě, že nepočítáme vlastní limitu ve vlastním bodě, již neplatí, že nejdůležitější jsou okolí $\mathcal{P}_\delta(x_0)$ a $\mathcal{U}_\varepsilon(A)$, kde δ a ε jsou velice blízká nule. Bývá proto zvykem používat odlišné značení.

Příklad 5.1.2. (i) Vlastní limita $A \in \mathbb{R}$ v nevlastním bodě $+\infty$ má ekvivalentní definici

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists K > 0\, \forall x > K \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

(ii) Pro $A \in \mathbb{R}$ a $x_0 = -\infty$ máme

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists K > 0\, \forall x < -K \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

(iii) Pro $A = +\infty$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ máme

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall K > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \quad f(x) > K.$$

(iv) Pro $A = +\infty$ a $x_0 = +\infty$ máme

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall K > 0\, \exists L > 0\, \forall x > L \quad f(x) > K.$$

V ostatních případech se postupuje analogicky.

Poznámka 5.1.3. Mezi vlastními limitami reálných funkcí a komplexních funkcí je úzký vztah. V případě nevlastních limit se však projeví značná odlišnost v zavedení $\infty \in \mathbb{C}^*$ a $\pm\infty \in \mathbb{R}^*$.

Dalším důležitým pojmem je posloupnost.

Definice 5.1.4 (Posloupnost)**.** *Posloupnost* je zobrazení $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Hodnota $\varphi(n)$ se nazývá *n-tý člen posloupnosti.* Obvykle se $\varphi(n)$ zkráceně značí φ_n a posloupnost φ bývá zvykem značit $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$, nebo zkráceně $\{\varphi_n\}$.

Definice 5.1.5 (Limita posloupnosti)**.** Nechť $\{\varphi_n\} \subset \mathbb{R}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že A je *limitou posloupnosti pro n jdoucí do nekonečna*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n > n_0 \quad \varphi_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(A).$$

V takovém případě píšeme $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n = A$, $\varphi_n \to A$ pro $n \to +\infty$, nebo také $\varphi_n \overset{n \to +\infty}{\to} A$.

Poznámka 5.1.6. Lze mluvit samozřejmě i o *komplexních posloupnostech*, tedy zobrazeních $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Pak by Definice 5.1.4 odpovídala *reálné posloupnosti.* Protože většina vět (v případě vlastních limit) platí ve stejném znění pro reálné a komplexní posloupnosti a situace, kdy se věty pro reálné a komplexní funkce liší, jsme probrali v Kapitole 3, budeme nadále mluvit většinou o reálných posloupnostech, aniž bychom slovo reálné zdůrazňovali, a pouze v případě, kdy nastane pro komplexní posloupnosti specifická situace, zmíníme i je. Pozor ale na rozdíly v případě nevlastních limit, srovnejte též s Poznámkou 5.1.3.

Příklad 5.1.7. (i) Platí $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Skutečně, ke zvolenému $\varepsilon > 0$ stačí položit $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, kde $[x]$ značí celou část čísla x.
(ii) Platí $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$. Stačí si totiž uvědomit, že

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall K > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n > n_0 \quad \varphi_n > K.$$

V našem případě stačí volit $n_0 = [K] + 1$.
(iii) Později si ukážeme, že $\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \exp 1 = \mathrm{e}$.

Posloupnost je vlastně funkce, jejíž definiční obor obsahuje velmi málo bodů. Definice limity funkce a limity posloupnosti se dá sloučit do jedné obecné definice, která již nepožaduje, aby jisté prstencové okolí bodu x_0 leželo v definičním oboru.

Definice 5.1.8 (Obecná definice limity)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $A \in \mathbb{R}^*$. Nechť pro každé $\eta > 0$ je $\mathcal{P}_\eta(x_0) \cap D_f \neq \emptyset$. Pak

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f \quad f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A).$$

Poznámka 5.1.9. (i) Naše nová definice v sobě zahrnuje jak naši původní definici limity funkce tak definici limity posloupnosti. Navíc připouští třeba funkce, které jsou definovány jen na $\mathbb{Q}$.
(ii) Podmínka o neprázdnosti průniku definičního oboru s libovolným prstencovým okolím bodu x_0 byla přidána kvůli jednoznačnosti limity, jak uvidíme níže.

Následující věta nám v mnoha situacích umožňuje vyhnout se práci s nevlastními limitami. Budeme v ní používat značení

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0_+ \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \wedge f > 0 \text{ na } \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f \text{ pro jisté } \delta > 0.$$

Věta 5.1.10 (Vztahy mezi vlastními a nevlastními limitami)**.** *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $x_0 \in \mathbb{R}^*$. *Pak*
(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0_+$
(ii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0_-$
(iii) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{y\to 0_+} f(\frac{1}{y})$
(iv) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{y\to 0_-} f(\frac{1}{y})$
(přičemž části (iii) a (iv) chápeme navíc tak, že limita na levé straně existuje právě tehdy, když existuje limita na straně pravé).

Důkaz. Dokažme (i). Máme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty &\Longleftrightarrow \forall K > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f \quad f(x) \in (K, +\infty) \\
&\Longleftrightarrow \forall K > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f \quad \tfrac{1}{f(x)} \in (0, \tfrac{1}{K}) \\
&\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f \quad f(x) \in (0, \varepsilon) \\
&\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0_+.
\end{aligned}$$

Část (ii) se dokáže podobně.

Dokažme (iii). Pro $A \in \mathbb{R}^*$ platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} f(x) = A &\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists K > 0\, \forall x \in (K, +\infty) \cap D_f \quad f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A) \\
&\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists K > 0\, \forall \tfrac{1}{y} \in (K, +\infty) \cap D_f \quad f(\tfrac{1}{y}) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A) \\
&\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists K > 0\, \forall y \in (0, \tfrac{1}{K}) \cap D_f \quad f(\tfrac{1}{y}) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A) \\
&\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in (0, \delta) \cap D_f \quad f(\tfrac{1}{y}) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A) \\
&\Longleftrightarrow \lim_{y\to 0_+} f(\tfrac{1}{y}) = A.
\end{aligned}$$

Část (iv) se dokáže podobně. □

Poznámka 5.1.11. (i) Části (i) a (ii) předchozí věty, pro $x_0 = +\infty$, se týkají také posloupností.
(ii) Pokud $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, snadno se dá dokázat, že platí

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

V dalším se budeme věnovat rozšíření nám dosud známých výsledků do nových případů. Protože se v důkazech používá velmi podobný přístup jako v situaci s vlastní limitou ve vlastním bodě, dokážeme jen některá tvrzení a zbytek přenecháme čtenáři jako užitečná cvičení. Ve všech tvrzeních automaticky předpokládáme podmínku, že pro každé $\eta > 0$ platí $\mathcal{P}_\eta(x_0) \cap D_f \neq \emptyset$. Budeme také uvádět příslušnou větu, kterou jsme dokázali v kapitole věnované limitám funkcí.

Věta 5.1.12 (Jednoznačnost limity; Věta 3.1.12)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}^*$. Pak je tato limita určena jednoznačně.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = B \in \mathbb{R}^*$ a $A \neq B$. Obecně $A, B \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ a rozlišujeme celkem sedm případů. Případ $A, B \in \mathbb{R}$ se vyřídí podobně jako v kapitole o vlastních limitách ve vlastních bodech. Nechť dále $A \in \mathbb{R}$ a $B = +\infty$. Díky $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, máme (volíme $\varepsilon := 1$) $\delta_1 > 0$ takové, že

$$|f(x) - A| < 1 \qquad \text{na } \mathcal{P}_{\delta_1}(x_0) \cap D_f.$$

Dále díky $\lim_{x\to x_0} f(x) = B = +\infty$ existuje $\delta_2 > 0$ takové, že

$$f(x) > |A| + 1 \qquad \text{na } \mathcal{P}_{\delta_2}(x_0) \cap D_f.$$

Na neprázdné množině $\mathcal{P}_{\delta_1}(x_0) \cap \mathcal{P}_{\delta_2}(x_0) \cap D_f$ tedy platí obě nerovnosti, a proto

$$f(x) = A + f(x) - A \leq |A| + |f(x) - A| < |A| + 1 < f(x),$$

čímž dostáváme spor. V ostatních případech se postupuje podobně. □

Cvičení 5.1.13. Dokažte ostatní případy z Věty 5.1.12.

Věta 5.1.14 (Vztah k jednostranným limitám; Věta 3.1.16)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^*$. Nechť navíc pro všechna $\eta > 0$ jsou obě množiny $(x_0-\eta, x_0) \cap D_f$ a $(x_0, x_0 + \eta) \cap D_f$ neprázdné. Pak*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to x_{0-}} f(x) = A \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_{0+}} f(x) = A.$$

Cvičení 5.1.15. Dokažte Větu 5.1.14.

V dalším tvrzení používáme značení $|-\infty| = |+\infty| = +\infty$.

Věta 5.1.16 (Limita absolutní hodnoty; Věta 3.1.18)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$.*

Cvičení 5.1.17. Dokažte Větu 5.1.16.

Věta 5.1.18 (Limity a chování na okolí; Věty 3.1.21 a 3.1.23)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$.*
(i) *Je-li A vlastní, pak je f na průniku D_f a jistého prstencového okolí omezená.*
(ii) *Je-li $A \neq 0$, pak je f na průniku D_f a jistého prstencového okolí odražená od nuly.*

Důkaz. Jestliže $A \in \mathbb{R}$, lze použít postup z důkazů podobných výsledků z kapitoly o vlastních limitách ve vlastních bodech. Situace, kdy $A = \pm\infty$, je dokonce jednodušší. $\square$

Připomeňme, že jsme při zavedení $\mathbb{R}^*$ dodefinovali aritmetiku pro počítání s $+\infty$ a $-\infty$ (například $+\infty + 6 = +\infty$), některé operace jsme však nedefinovali (například $\frac{+\infty}{+\infty}$).

Věta 5.1.19 (Aritmetika limit; Věta 3.1.24)**.** *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $D_f = D_g$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to x_0} f(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak*
(i) $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = A + B$, *má-li pravá strana smysl*
(ii) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB$, *má-li pravá strana smysl*
(iii) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, *má-li pravá strana smysl.*

Důkaz. Jestliže $A, B \in \mathbb{R}$, lze použít postup z důkazu aritmetiky limit z kapitoly o vlastních limitách ve vlastních bodech. V ostatních případech výsledky plynou z následující věty (Věta 5.1.23) a Věty o vztazích mezi vlastními a nevlastními limitami (Věta 5.1.10). $\square$

Poznámka 5.1.20. Uvědomme si, že v případě (iii) v předchozí větě to, že má pravá strana smysl, implikuje, že $B \neq 0$.

Příklad 5.1.21. Počítejme $\lim_{x\to 0_+}(\log x + \cos x)$. Abychom mohli použít Větu 5.1.19 (i), zúžíme definiční obor druhé funkce na $(0, +\infty)$. Pak není problém ukázat, že platí

$$\lim_{x\to 0_+}(\log x + \cos x) = \lim_{x\to 0_+} \log x + \lim_{x\to 0_+} \cos x = -\infty + 1 = -\infty.$$

Cvičení 5.1.22. Dokažte, že Věta 5.1.19 plyne z následující věty (Věta 5.1.23).

Věta 5.1.23 (Zesílená aritmetika nevlastních limit)**.** *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $D_f = D_g$, $\Delta > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta > 0$.*
(i) *Je-li* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *a* $g \geq \alpha$ *na* $\mathcal{P}_\Delta(x_0) \cap D_g$, *pak* $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = +\infty$.
(ii) *Je-li* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *a* $g \leq \alpha$ *na* $\mathcal{P}_\Delta(x_0) \cap D_g$, *pak* $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = -\infty$.
(iii) *Je-li* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ *a* $g \geq \beta$ *na* $\mathcal{P}_\Delta(x_0) \cap D_g$, *pak* $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \pm\infty$.
(iv) *Je-li* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ *a* $g \leq -\beta$ *na* $\mathcal{P}_\Delta(x_0) \cap D_g$, *pak* $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \mp\infty$.

Důkaz. Dokažme (i). Z předpokladů plyne

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \\
&\quad\iff \forall K > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f \quad f(x) > K \\
&\quad\iff \forall K > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f \quad f(x) + \alpha > K \\
&\quad\implies \forall K > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap \mathcal{P}_\Delta(x_0) \cap D_f \cap D_g \quad f(x) + g(x) > K \\
&\quad\iff \lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = +\infty.
\end{aligned}$$

Část (ii) se dokazuje podobně.

Dokažme ještě (iii) v situaci, kdy $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Máme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \\
&\qquad\iff \forall K > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f \quad f(x) > K \\
&\qquad\iff \forall K > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f \quad \beta f(x) > K \\
&\qquad\implies \forall K > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap \mathcal{P}_\Delta(x_0) \cap D_f \cap D_g \quad f(x)g(x) > K \\
&\qquad\iff \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty.
\end{aligned}$$

Zbylá tvrzení se dokazují podobně. □

Cvičení 5.1.24. Dokažte zbylá tvrzení z předešlé věty.

Věta 5.1.25 (Zachování nerovnosti při limitním přechodu; Věta 3.1.34)**.** *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$. Jestliže $D_f = D_g$ a $f \le g$ na jistém prstencovém okolí bodu x_0 proniknutém D_f, pak $A \le B$.*

Důkaz. Lze použít postup z kapitoly o vlastních limitách ve vlastních bodech, přesněji Větu 3.1.34. □

Cvičení 5.1.26. Proveďte důkaz Věty 5.1.25 podrobně.

Věta 5.1.27 (O dvou strážnících; Věta 3.1.36)**.** *Nechť $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ a $\lim_{x\to x_0} h(x) = A$. Jestliže $D_f = D_g = D_h$ a $f \le g \le h$ na jistém prstencovém okolí bodu x_0 proniknutém D_f, pak $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$.*

Důkaz. Lze použít snadný důkaz z kapitoly o vlastních limitách ve vlastních bodech. □

Cvičení 5.1.28. Proveďte důkaz podrobně.

V případě nevlastní limity je možné předchozí větu zjednodušit.

Věta 5.1.29 (O jednom strážníkovi)**.** *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $D_f = D_g$.*
(i) Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ a $f \le g$ na jistém prstencovém okolí bodu x_0 proniknutém D_f, pak $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.
(ii) Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ a $g \le f$ na jistém prstencovém okolí bodu x_0 proniknutém D_f, pak $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$.

Důkaz. Důkaz je podobný důkazu předchozí věty. □

Cvičení 5.1.30. Proveďte důkaz podrobně.

Poznámka 5.1.31. V předchozích větách jsme převážně pracovali se dvěma funkcemi a požadovali jsme, aby obě funkce měly stejný definiční obor. Tato podmínka je splněna v situaci, kterou jsme probírali v původní kapitole o limitách, kde jsme uvažovali jen funkce definované na jistém prstencovém okolí bodu x_0 (oběma funkcím můžeme definiční obor zmenšit na stejné prstencové okolí). Dalším často používaným případem bude dvojice posloupností (ty lze vždy přeznačit, aby definičním oborem bylo $\mathbb{N}$).

Pokud bychom chtěli předchozí věty formulovat i v situaci $D_f \neq D_g$, je potřeba značná opatrnost. Například aritmetika limit bude platit v situaci, kdy $D_f \cap D_g \cap \mathcal{P}_\eta(x_0) \neq \emptyset$ pro každé $\eta > 0$ (například součet funkcí je pak definován na $D_f \cap D_g$). Na druhou stranu, podobný typ podmínek nemůže stačit u Věty o dvou strážnících (Věta 5.1.27), jak ukazuje příklad, kdy za g volíme Dirichletovu funkci a f, h se rovnají nule na iracionálních číslech a pro racionální čísla f, h nedefinujeme.

Věta 5.1.32 (O limitě složené funkce; Věta 3.1.46)**.** *Nechť funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $f(D_f) \subset D_g$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{y\to A} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Nechť platí alespoň jedna z podmínek*
(i) *vnitřní funkce na jistém prstencovém okolí bodu x_0 nenabývá své limitní hodnoty v bodě x_0*
(ii) *vnější funkce je spojitá v A. Pak*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = B.$$

Důkaz. Lze použít důkaz z kapitoly o vlastních limitách ve vlastních bodech. □

Cvičení 5.1.33. Proveďte důkaz podrobně.

Poznámka 5.1.34. (i) V případě, že $A \notin \mathbb{R}$, vnější funkce nemůže být spojitá v A, a proto o použitelnosti věty rozhoduje podmínka o nenabývání limitní hodnoty.
(ii) Je-li například $g = \mathrm{e}^x$, lze Větu o limitě složené funkce (Věta 3.2.8) aplikovat, kdykoliv existuje $A := \lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}^*$. Skutečně, je-li $A \in \mathbb{R}$, pak máme splněnu podmínku o spojitosti vnější funkce v A. Je-li $A = \pm\infty$, máme zase splněnu podmínku o nenabývání limitní hodnoty.

Užitečným nástrojem při počítání mnohých typů limit je následující věta.

Věta 5.1.35 (L'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť dále*
a) *na jistém prstencovém okolí bodu x_0 existují vlastní f', g' a platí zde $g' \neq 0$*
b) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$
c) *platí jedna z podmínek*

$$\text{(i)} \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$
$$\text{(ii)} \lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty.$$

Pak $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Důkaz. Důkaz zatím odložíme. □

Poznámka 5.1.36. (i) V cizojazyčné literatuře bývá podmínka $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$ často ještě doplněna podmínkou $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$. Druhá podmínka však

není nutná. Na tento jev poprvé upozornil známý český matematik Vojtěch Jarník. Na druhou stranu vypuštění podmínky $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$ má jen minimální význam v aplikacích. Pokud totiž platí $\lim_{x\to x_0} |f(x)| \in \mathbb{R}$, zlomek má nulovou limitu a L'Hospitalovo pravidlo vůbec nemusíme použít.
(ii) L'Hospitalovo pravidlo je možné postupně iterovat.
(iii) L'Hospitalovo pravidlo bývá vyučováno již na střední skole, kde si rychle získá oblibu jako mocný nástroj při počítání nejrůznějších limit. Není to však nástroj všemocný, v příkladech si ukážeme jeho slabiny.

Příklad 5.1.37 (Iterace L'Hospitalova pravidla)**.** Snadno lze ověřit, že L'Hospitalovo pravidlo je možné použít v následující situaci

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{\mathrm{e}^x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{\mathrm{e}^x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{\mathrm{e}^x} = 0$$

(všechny rovnosti byly oprávněné teprve ve chvíli, kdy jsme znali limitu úplně napravo).

Příklad 5.1.38 (Vzdalování se od cíle)**.** V následující situaci je pokus o derivování na škodu a snahou o aplikaci L'Hospitalova pravidla si zadanou úlohu jen komplikujeme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^3}}{\mathrm{e}^{x^2}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2\mathrm{e}^{x^3}}{2x\mathrm{e}^{x^2}}$$

(snadno lze nahlédnout, že obě limity mají hodnotu $+\infty$, rovnost tedy platí, ale užitek z toho nemáme žádný).

Příklad 5.1.39 (Podíl derivací nemá limitu)**.** L'Hospitalovo pravidlo nám nijak nepomůže v následující situaci

$$1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} \neq \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1}$$

(limita napravo neexistuje).

Příklad 5.1.40 (Pozor na dodržení předpokladů)**.** Pokud máme $f(x) = \sin x$ a $g(x) = 1 + x$, platí $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ ale $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 1$, a proto nepřekvapí

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+x} \neq \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Příklad 5.1.41 (L'Hospitalovo pravidlo a limity elementárních funkcí)**.** Uveďme některé naše dosavadní výsledky a rozšiřme je o několik dalších výsledků, které plynou ze základních vlastností elementárních funkcí, a dokazují se pomocí L'Hospitalova pravidla.
(i) $\lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$
(ii) $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
(iii) $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$
(iv) $\lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$
(v) $\lim_{x\to 0_+} \log(x) = -\infty$

(vi) $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ (pro $n \in \mathbb{N}$)

(vii) $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ sudé} \\ -\infty & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ liché} \end{cases}$

(viii) $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \lim_{x\to+\infty} \exp(\alpha \log x) = \begin{cases} +\infty & \text{pro } \alpha > 0 \\ 1 & \text{pro } \alpha = 0 \\ 0 & \text{pro } \alpha < 0 \end{cases}$

(ix) jestliže $n \in \mathbb{N}$ a $a_n \neq 0$, pak

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) &= \lim_{x\to+\infty} x^n\big(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\big) \\ &= \operatorname{sign} a_n \cdot (+\infty) \end{aligned}$$

(x) jestliže $n, m \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ a $b_m \neq 0$, pak

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^{n-m} + \cdots + a_1 x^{1-m} + a_0 x^{-m}}{b_m + \cdots + b_1 x^{1-m} + b_0 x^{-m}} \\ &= \begin{cases} \operatorname{sign}(a_n b_m)\cdot(+\infty) & \text{pro } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{pro } n = m \\ 0 & \text{pro } n < m \end{cases} \end{aligned}$$

(xi) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = 0$ (pro $\alpha \leq 0$ zřejmé, pro $\alpha > 0$ aplikujeme L'Hospitalovo pravidlo tolikrát, až bude bude mocnina ve jmenovateli záporná)

(xii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \alpha x^\alpha = +\infty$ pro $\alpha > 0$ (pro $\alpha \leq 0$ je úloha snadná)

(xiii) $\lim_{x\to 0_+} x^\alpha \log x = \lim_{x\to 0_+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0$ pro $\alpha > 0$.

Poznámka 5.1.42. (i) Pokud bychom situaci $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ značili $g \ll f$, pak předchozí příklady nám dávají pro $0 < \alpha < \beta$ schéma

$$e^{-x} \ll x^{-\beta} \ll x^{-\alpha} \ll \frac{1}{\log x} \ll 1 \ll \log x \ll x^\alpha \ll x^\beta \ll e^x.$$

(ii) Uvažujeme-li konvergenci $x \to 0_+$, $0 < \alpha < \beta$, dostáváme schéma (uvědomme si, že $\log(\frac{1}{x}) = -\log x > 0$ na $(0,1)$)

$$x^\beta \ll x^\alpha \ll \frac{1}{\log(\frac{1}{x})} \ll 1 \ll \log(\tfrac{1}{x}) \ll x^{-\alpha} \ll x^{-\beta}.$$

5.2 Klasifikace nekonečně malých a nekonečně velkých veličin, symboly o a O

V matematice se často používá následující terminologie. O funkci f, která splňuje $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, říkáme, že je v x_0 *nekonečně malá*, a o funkci f, která splňuje

$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$, říkáme, že je v x_0 *nekonečně velká.* V aplikacích se často hodí porovnávat studovanou funkci s nějakou elementární funkcí, jejíž chování dobře známe.

Definice 5.2.1 (Symboly o a O, silná a slabá ekvivalence)**.** Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}^*$.
(i) Píšeme $f = \mathrm{o}(g)$ pro $x \to x_0$, jestliže $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
(ii) Píšeme $f = \mathrm{O}(g)$ pro $x \to x_0$, jestliže existují $K, \delta > 0$ taková, že $|f(x)| \leq K|g(x)|$ na $\mathcal{P}_\delta(x_0)$.
(iii) Řekneme, že f je *silně ekvivalentní* s g pro $x \to x_0$, jestliže $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. V takovém případě píšeme $f \cong g$ pro $x \to x_0$.
(iv) Řekneme, že f je *slabě ekvivalentní* s g pro $x \to x_0$, jestliže $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. V takovém případě píšeme $f \sim g$ pro $x \to x_0$.

Poznámka 5.2.2. Snadno se dá nahlédnout, že

$$f = \mathrm{o}(g) \qquad \Longrightarrow \qquad f = \mathrm{O}(g)$$

a

$$f \cong g \qquad \Longrightarrow \qquad f \sim g \qquad \Longrightarrow \qquad f = \mathrm{O}(g) \wedge g = \mathrm{O}(f).$$

Navíc se z těchto implikací žádná obecně nedá otočit. Pro posledně uvedenou implikaci uvažte příklad

$$f \equiv 1 \quad \text{a} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad \text{nebo} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ 2 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Poznámka 5.2.3. Za funkci g bývají v aplikacích nejčastěji voleny funkce z Poznámky 5.1.42.

Cvičení 5.2.4. V následujících příkladech máme vždy situaci $x \to x_0$. Dokažte si následující tvrzení.
(i) Jestliže $f_1 = \mathrm{O}(g)$ a $f_2 = \mathrm{O}(g)$, pak $f_1 + f_2 = \mathrm{O}(g)$. (Ale pozor, samozřejmě není obecně pravda, že $f_1 - f_2 = \mathrm{o}(g)$.)
(ii) Jestliže $f_1 = \mathrm{o}(g)$ a $f_2 = \mathrm{o}(g)$, pak $f_1 + f_2 = \mathrm{o}(g)$.
(iii) Jestliže $f_1 = \mathrm{O}(g)$ a $f_2 = \mathrm{o}(g)$, pak $f_1 + f_2 = \mathrm{O}(g)$. Obecně neplatí $f_1 + f_2 = \mathrm{o}(g)$.
(iv) Jestliže $f = \mathrm{O}(g)$ a $g = \mathrm{O}(h)$, pak $f = \mathrm{O}(h)$.
(v) Jestliže $f = \mathrm{o}(g)$ a $g = \mathrm{o}(h)$, pak $f = \mathrm{o}(h)$.
(vi) Jestliže $f = \mathrm{o}(g)$ a $g = \mathrm{O}(h)$, pak $f = \mathrm{o}(h)$.
(vii) Jestliže $f = \mathrm{O}(g)$ a $g = \mathrm{o}(h)$, pak $f = \mathrm{o}(h)$.
(viii) Podmínka $f = \mathrm{O}(1)$ je totéž, co omezenost na nějakém prstencovém okolí.
V dalších příkladech máme situaci $x = 0$.
(ix) Jestliže $f = \mathrm{o}(x^2)$, pak $f = \mathrm{o}(x)$.
(x) Jestliže $f = \mathrm{o}(x)$ a $g = \mathrm{o}(x^2)$, pak $fg \in \mathrm{o}(x^3)$.
(xi) Jestliže $f = \mathrm{o}(x^2)$, pak $\frac{f(x)}{x} \in \mathrm{o}(x)$.
(xii) Jestliže $f = \mathrm{o}(x^2)$ a $g = \mathrm{O}(x)$, obecně nemusí platit $\frac{f}{g} \in \mathrm{o}(x)$.

Příklad 5.2.5. Uvažme funkci $f(x) = \sin x - x$ a $\alpha, \beta \geq 0$. Pomocí L'Hospitalova pravidla se dá ukázat, že

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Odtud

$$f = \mathrm{o}(x^\alpha) \iff \alpha < 3 \qquad \text{a} \qquad f = \mathrm{O}(x^\beta) \iff \beta \leq 3,$$

vše pro $x \to 0$.

5.3 Limity monotonních funkcí a posloupností

Věta 5.3.1 (Existence limity pro monotonní funkci)**.** *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $(a, b) \subset D_f \subset \mathbb{R}$.
(i) *Je-li f neklesající na (a, b), pak*

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = \inf_{x \in (a,b)} f(x) \qquad a \qquad \lim_{x \to b_-} f(x) = \sup_{x \in (a,b)} f(x).$$

(ii) *Je-li f nerostoucí na (a, b), pak*

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = \sup_{x \in (a,b)} f(x) \qquad a \qquad \lim_{x \to b_-} f(x) = \inf_{x \in (a,b)} f(x).$$

Důkaz. Nechť f je neklesající a platí $S := \sup_{x \in (a,b)} f(x) \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak podle druhé vlastnosti suprema musí existovat $x_0 \in (a, b)$ takové, že $S - \varepsilon < f(x_0)$. Díky monotonii tedy máme

$$S - \varepsilon < f(x) \leq S \qquad \text{na } [x_0, b).$$

Odtud již plyne $\lim_{x \to b_-} f(x) = S$. Je-li $S = +\infty$, důkaz založíme na nerovnosti $K < f(x_0)$.

Výsledek pro $\lim_{x \to a_+} f(x)$ se dokáže analogicky. Podobně se postupuje pro nerostoucí funkci. □

Poznámka 5.3.2. Nebylo nutné, aby $(a, b) \subset D_f$. Stačí, když pro oba krajní body platí, že každé jejich jednostranné okolí (strana mířící do intervalu) obsahuje bod z definičního oboru.

Poznámka 5.3.3. Je-li $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$, vždy se dá najít (obecně neprostá) posloupnost $\{x_n\} \subset M$ tak, že $x_n \to S := \sup M$. Skutečně, podle definice suprema v každém levém okolí bodu S musí být alespoň jeden prvek z M. Stačí pak zvolit posloupnost levých okolí, která má prázdný průnik (tedy je-li $S \in \mathbb{R}$, pracujeme s intervaly $(S - \frac{1}{n}, S)$, je-li $S = +\infty$, pracujeme s intervaly $(n, +\infty)$) a z každého z těchto okolí vybírat po jednom bodu.

Není žádným překvapením, že jen drobnou modifikací důkazu předchozí věty lze získat podobný výsledek pro posloupnosti.

Věta 5.3.4 (Existence limity pro monotonní posloupnost)**.** *Nechť* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *je monotonní posloupnost. Pak* $\{a_n\}$ *má limitu a platí pro ni*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n & \textit{pokud je } \{a_n\} \textit{ neklesající} \\ \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n & \textit{pokud je } \{a_n\} \textit{ nerostoucí.} \end{cases}$$

Cvičení 5.3.5. Dokažte podrobně předchozí větu.

Příklad 5.3.6 (Numerická aproximace druhé odmocniny)**.** V prvním století Hérón Alexandrijský exaktně zformuloval konstrukci posloupnosti, jejíž limitou je druhá odmocnina z daného kladného čísla. Tuto konstrukci, kterou již patrně znali Babyloňané, si zde podrobně představíme.

Nechť $x > 0$. Zvolme libovolné $a_0 \in \mathbb{R}$ a definujme $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})$ pro $n \in \mathbb{N}_0$. Ukažme si, že pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}$.

Definujme si pomocnou posloupnost $b_n := \frac{a_n}{\sqrt{x}}$. Pak platí

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(b_n\sqrt{x} + \frac{x}{b_n\sqrt{x}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(b_n + \frac{1}{b_n}\Big).$$

Podle Youngovy nerovnosti dále máme

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(b_n + \frac{1}{b_n}\Big) = \frac{1}{b_n}\frac{b_n^2+1}{2} \geq \frac{1}{b_n}b_n = 1 \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0,$$

a proto

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(b_n + \frac{1}{b_n}\Big) \leq \frac{1}{2}(b_n + b_n) = b_n \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je tedy nerostoucí a omezená. Má tedy limitu. Označme ji B. Nutně pak podle podle aritmetiky limit platí

$$B = \frac{1}{2}\Big(B + \frac{1}{B}\Big),$$

odkud snadnou algebraickou úpravou dostáváme $B^2 = 1$, a proto $B = 1$ ($b_n \geq 0$ pro $n \in \mathbb{N}$). Odtud již snadno

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}B = \sqrt{x}.$$

Poznámka 5.3.7. Numerické aproximace by byly bezcenné, pokud bychom nebyly schopni odhadnout rozdíl mezi aproximující a skutečnou hodnotou zkoumané veličiny (nejlepší je informace o počtu kroků metody k dosažení požadované přesnosti). U Hérónovy metody lze chybu odhadnout následovně (využijeme toho, že posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí)

$$\sigma_n := a_n - \sqrt{x} = \frac{a_n^2 - x}{a_n + \sqrt{x}} \leq \frac{a_n^2 - x}{2\sqrt{x}} \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Užití tohoto odhadu si ukažme na praktickém příkladu. Budeme se snažit aproximovat $\sqrt{5}$. Položme třeba $a_0 := 3$ (víme, že $\sqrt{5} \in (2,3)$, pokud bychom za a_0

zvolili číslo velice vzdálené od $\sqrt{5}$, zbytečně bychom čekali mnoho kroků, než se nám posloupnost dostatečně přiblíží). Pak

$$a_1 = \frac{1}{2}\Big(3 + \frac{5}{3}\Big) = \frac{7}{3}$$

a

$$a_2 = \frac{1}{2}\Big(\frac{7}{3} + \frac{5\cdot 3}{7}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{49}{21} + \frac{45}{21}\Big) = \frac{47}{21}.$$

Pokud by nás nyní zajímala chyba σ_2, máme třeba odhad

$$\sigma_2 \leq \frac{a_2^2 - x}{2\sqrt{x}} \leq \frac{(2+\frac{5}{21})^2 - 5}{2\sqrt{5}} \leq \frac{(2+\frac{5}{20})^2 - 5}{4} = \frac{4 + 2\cdot 2\cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - 5}{4} = \frac{1}{64}.$$

Příklad 5.3.8. Ukažme, že $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ existuje. Počítejme

$$\begin{aligned}
a_n =& \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\\
=& 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!}\frac{1}{n^i}\\
&+\cdots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}\\
=& 2 + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{i!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{i-1}{n}\Big)\\
&+\cdots + \frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big).
\end{aligned}$$

Máme také

$$\begin{aligned}
a_{n+1} =& 2 + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big) + \cdots + \frac{1}{i!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{n+1}\Big)\dots\Big(1-\frac{i-1}{n+1}\Big)\\
&+\cdots + \frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{n+1}\Big)\dots\Big(1-\frac{n-1}{n+1}\Big)\\
&+ \frac{1}{(n+1)!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{n+1}\Big)\dots\Big(1-\frac{n}{n+1}\Big).
\end{aligned}$$

Proto

$$2 \leq a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dále

$$a_n \leq \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!} \leq 1 + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i} \leq 1 + \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i} = 3,$$

neboť $n! \geq 2^{n-1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (lze dokázat například matematickou indukcí).

Tedy posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, neklesající posloupnost, má tedy dle Věty o existenci limity pro monotonní posloupnosti (Věta 5.3.4) vlastní limitu $L \in [2,3]$. Všimněme si, že

$$L \leq \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}.$$

Posloupnost napravo je též omezená, neklesající posloupnost, má proto limitu $\widetilde{L} \in [2,3]$. Na druhou stranu pro pevné $k \in \mathbb{N}$ a libovolné $n \geq k$ máme

$$a_n \geq 2 + \frac{1}{2!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big),$$

proto po provedení limity $n \to +\infty$ máme

$$L \geq \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Proto $L \geq \widetilde{L}$, a tedy

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \in [2,3].$$

Ukažme ještě, že číslo L je iracionální. Předpokládejme, že $L = \frac{m}{n}$, kde m, $n \in \mathbb{N}$. Protože pro libovolné $p > n+1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{p!} &= \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots p}\Big) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{p-n-1}} + \ldots\Big) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!}\frac{n+2}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{nn!},\end{aligned}$$

dostáváme, že

$$0 < L - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!}. \tag{5.3.1}$$

Násobme nyní (5.3.1) číslem $nn!$. Pak

$$mn! - \sum_{k=0}^{n} \frac{nn!}{k!} \in (0,1),$$

což dává spor, neboť na levé straně máme rozdíl celých čísel. Číslo L (jak uvidíme dále, je rovno $\exp 1 = \mathrm{e}$) je tedy iracionální.

5.4 Heineho věta

Nyní si ukážeme vztah limity funkce a limit jistých posloupností.

Věta 5.4.1 (Heineho věta). *Nechť funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a existuje $\delta_0 > 0$ takové, že $\mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f \neq \emptyset$ pro $0 < \delta \leq \delta_0$. Potom $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ právě tehdy, když platí $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A$ pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D_f \setminus \{x_0\}$ splňující $x_n \to x_0$.*

Důkaz. „⇒“ Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A).$$

Pokud nyní uvážíme posloupnost $\{x_n\} \subset D_f \setminus \{x_0\}$ splňující $x_n \to x_0$, od jistého indexu máme $x_n \in \mathcal{P}_\delta(x_0)$ a odtud plyne požadované.

„⇐“ Předpokládejme, že neplatí $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A$. V tom případě existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $x_\delta \in \mathcal{P}_\delta(x_0)$ tak, že $f(x_\delta) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(A)$. Zvolíme-li vhodně posloupnost okolí $\mathcal{P}_{\delta_n}(x_0)$ (pro $x_0 \in \mathbb{R}$ stačí uvážit $\mathcal{P}_{\frac{1}{n}}(x_0)$, pro $x_0 = +\infty$ bereme $(n, +\infty)$, atd.), máme posloupnost x_{δ_n}, která splňuje $x_{\delta_n} \in D_f \setminus \{x_0\}$ pro dostatečně velká n, $x_{\delta_n} \to x_0$, ale $f(x_{\delta_n})$ nekonverguje k A. To dává spor. □

Poznámka 5.4.2. (i) Ve znění věty je velice důležitý požadavek $x_n \neq x_0$ (připomeňme, že definice limity funkce ignoruje hodnotu f v bodě x_0).
(ii) Častou aplikací Heineho věty je nahrazení limity posloupnosti limitou funkce, abychom mohli použít L'Hospitalovo pravidlo.
(iii) Heineho věta se také používá k rychlému důkazu, že limita funkce neexistuje; sestrojíme dvě vhodné posloupnosti s rozdílnými limitami.
(iv) Uvedené dvě aplikace používají v Heineho větě jen implikaci „⇒“.
(v) Důkaz implikace „⇒“ byla jen lehká práce s definicí limity. Důkaz implikace „⇐“ se tak jednoduše získat nedá. Náš důkaz je krátký a elegantní především díky tomu, že jsme použili nekonstruktivní přístup, kdy jsme se vůbec nesnažili vyjádřit vztah mezi ε a δ v definici limity.

Příklad 5.4.3. Ukažme, že $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ neexistuje. Nejprve uvažme volbu $x_n = 2n\pi$. Pak $\sin x_n = 0 \to 0$. Pokud položíme $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, máme $\sin y_n = 1 \to 1$. Podle Heineho věty tedy $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ neexistuje (skutečně, pokud by tato limita existovala, musela by se podle Heineho věty zároveň rovnat nule i jedné).

Příklad 5.4.4. Ukažme, že $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = \mathrm{e} = \exp 1$. Zkusíme nejprve spočítat

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \exp\Big(\frac{\log(1+x)}{x}\Big) = \exp\Big(\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}\Big) = \exp 1$$

(druhá rovnost plyne z věty o limitě složené funkce, vnější funkce je spojitá v bodě 1). Použijeme-li Heineho větu s volbou $x_n = \frac{1}{n}$, dostáváme požadovaný výsledek.

Příklad 5.4.5. Nalezněme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}$. Zkusíme nejprve spočítat

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1 - \frac{1}{\cos x})}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\frac{\cos x - 1}{x^2} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot (-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Použijeme Heineho větu s volbou $x_n = \frac{1}{n}$, dostáváme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = -\frac{1}{2}$.

Heineho věta se dá zesílit.

Věta 5.4.6 (Zesílená Heineho věta)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathcal{P}_\delta(x_0) \subset D_f$. Pak $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje právě tehdy, když existuje $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D_f \setminus \{x_0\}$ splňující $x_n \to x_0$.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Pokud existuje limita na levé straně, z Heineho věty víme, že existují i limity na pravé straně (a mají stejnou hodnotu).

„$\Leftarrow$“ Pokud existují limity na pravé straně, mají stejnou hodnotu (pokud by tomu tak nebylo, tedy uměli bychom najít $f(x_n) \to A$ a $f(y_n) \to B$, $A \neq B$, pak by posloupnost $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), f(x_3), f(y_3), \dots$ neměla limitu a to je spor). Nyní stačí aplikovat Heineho větu (Větu 5.4.1). $\square$

Důsledek 5.4.7 (Heineho definice spojitosti)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathcal{P}_\delta(x_0) \subset D_f$. Pak f je spojitá v x_0 právě tehdy, když $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$ pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D_f \setminus \{x_0\}$ splňující $x_n \to x_0$.*

Důkaz. Stačí vzít Heineho větu a definici spojitosti. $\square$

5.5 Podposloupnosti

Nyní navážeme na výsledek, že každá monotonní posloupnost má limitu. U obecné posloupnosti dostaneme podobný výsledek poté, co odstraníme nepohodlné členy. K tomu potřebujeme následující definici (připomeňme naši úmluvu, že pod pojmem posloupnost vždy myslíme nekonečnou posloupnost).

Definice 5.5.1 (Podposloupnost)**.** Nechť $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ je posloupnost a $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Posloupnost $\{a_{n_k}\}$ nazveme *podposloupností* $\{a_n\}$ (nebo *posloupností vybranou* z $\{a_n\}$). Tento vztah se často značí $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$.

Příklad 5.5.2. Máme $\{\frac{1}{2n}\} \subset \{\frac{1}{n}\}$, $\{\frac{1}{n!}\} \subset \{\frac{1}{n}\}$, $\{1\} \subset \{(-1)^n\}$.

Poznámka 5.5.3. Snadno se nahlédne, že má-li $\{a_n\}$ limitu, tutéž limitu má kterákoliv její podposloupnost. Obrácené, pokud má každá podposloupnost dané posloupnosti stejnou limitu, pak má původní posloupnost limitu (rovnou limitě všech možných vybraných podposloupností). Jak ukazuje příklad $\{1\} \subset \{(-1)^n\}$, limitu mohou mít i vybrané podposloupnosti takových posloupností, které sami limitu nemají.

V dalším si ukážeme, že z každé posloupnosti lze vybrat podposloupnost, která má limitu. U posloupností se často používá terminologie, že posloupnost, která má vlastní limitu, je *konvergentní*, posloupnost s nevlastní limitou je *divergentní* a nemá-li limitu, říkáme, že *osciluje*.

Věta 5.5.4 (Weierstrassova věta)**.** *Z každé omezené posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Důkaz je založen na použití Věty o dvou strážnících (Věta 5.1.27), tyto strážníky musíme nejprve zkonstruovat. Označme naši posloupnost $\{a_n\}$. Z její omezenosti plyne, že můžeme najít $A_0, B_0 \in \mathbb{R}$ tak, že $A_0 \le a_n \le B_0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dále budeme konstruovat posloupnosti (strážníky) $\{A_n\}$ a $\{B_n\}$ indukcí.

Pro $n \in \mathbb{N}$ postupně definujeme $C_n = \frac{A_{n-1}+B_{n-1}}{2}$. Nyní rozlišujeme dva případy.

Obsahuje-li interval $[A_{n-1}, C_n]$ nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, definujeme $A_n := A_{n-1}$ a $B_n := C_n$. V opačném případě (díky předchozí konstrukci musí v tomto případě interval $[C_n, B_{n-1}]$ obsahovat nekonečně mnoho členů), volíme $A_n := C_n$ a $B_n := B_{n-1}$. Získané posloupnosti $\{A_n\}$ a $\{B_n\}$ jsou zřejmě monotonní a omezené (jejich členy leží v intervalu $[A_0, B_0]$). Mají tedy vlastní limity, pišme $A := \lim_{n\to+\infty} A_n$ a $B := \lim_{n\to+\infty} B_n$. Protože

$$B - A \leftarrow B_n - A_n = 2^{-n}(B_0 - A_0) \to 0,$$

máme $A = B$. Zbývá už jen zkonstruovat podposloupnost požadovaných vlastností. To provedeme opět indukcí. Nejprve vybereme libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$. Zřejmě pak máme $a_{n_0} \in [A_0, B_0]$. Máme-li již zadefinováno n_{k-1}, číslo n_k definujeme tak, aby splňovalo a $n_{k-1} < n_k$ a $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$ (to se nám určitě povede, neboť interval $[A_k, B_k]$ obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti a my máme zakázaných nejvýše n_{k-1} z nich). Tím je zkonstruována podposloupnost, která je konvergentní, neboť

$$A \leftarrow A_k \le a_{n_k} \le B_k \to A.$$

□

Poznámka 5.5.5. (i) Weierstrassova věta se dá snadno rozšířit do $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}^N$ (připomeňme, že jsme definovali vzdálenost $\|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2}$). Konvergence posloupnosti $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^N$ k $A \in \mathbb{R}^N$ se definuje předpisem $\|a_n - A\| \to 0$, což je ekvivalentní tomu, že jednotlivé souřadnice bodů a_n konvergují k odpovídající souřadnici bodu A. Více si o těchto věcech řekneme v kapitole věnované metrickým prostorům. Omezenost ($\|a_n\| \le K \quad \forall n \in \mathbb{N}$) je ekvivalentní omezenosti všech souřadnic. Weierstrassova věta se v této situaci dokazuje tak, že nejprve přejdeme k podposloupnosti, aby konvergovala první souřadnice. Z této podposloupnosti vybereme další podposloupnost, aby konvergovala druhá složka (teď už konvergujeme v prvních dvou složkách) a takto pokračujeme až do N-té složky.
(ii) Nekonečnědimenzionální varianta Weierstrassovy věty neplatí, jak uvidíme také v kapitole o metrických prostorech.

I z neomezené posloupnosti se dá vybrat podposloupnost, která má limitu.

Věta 5.5.6 (O vybírání z neomezené posloupnosti)**.** (i) *Jestliže není reálná posloupnost omezená shora, obsahuje podposloupnost, která diverguje do* $+\infty$.
(ii) *Jestliže není reálná posloupnost omezená zdola, obsahuje podposloupnost, která diverguje do* $-\infty$.

Důkaz. Není-li posloupnost $\{a_n\}$ omezená shora, každá z množin $M_k := \{n \in \mathbb{N}\colon a_n \geq k\}$ obsahuje nekonečně mnoho indexů. Hledanou podposloupnost konstruujeme tak, že bereme $n_k \in M_k$ tak, aby $n_k > n_{k-1}$. Navíc máme $a_{n_k} \geq k$. Proto podle Věty o jednom strážníkovi (Věta 5.1.29) dostáváme podposloupnost s limitou $+\infty$. Případ s posloupností, která není omezená zdola, se dokazuje analogicky. □

Poznámka 5.5.7. (i) V komplexním případě (nemáme uspořádání) má neomezená posloupnost svou podposloupnost s limitou ∞. V důkazu stačí volit $M_k := \{n \in \mathbb{N}\colon |a_n| \geq k\}$.
(ii) V případě neomezené $\{a_n\} \subset R^N$ lze získat $|a_{n_k}| \to +\infty$ (volíme $M_k := \{n \in \mathbb{N}\colon \|a_n\| \geq k\}$). Není zde zaveden žádný nevlastní bod, nemá tedy smysl hovořit o tom, že by a_{n_k} k něčemu divergovala.

V dalším budeme pro danou posloupnost studovat množinu limit jejich podposloupností.

Definice 5.5.8 (Hromadný bod)**.** Nechť $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ je posloupnost. Číslo $A \in \mathbb{R}^*$ nazveme *hromadným bodem*, má-li $\{a_n\}$ podposloupnost, která má za limitu A.

Poznámka 5.5.9. Podle předešlých vět má každá posloupnost alespoň jeden hromadný bod.

Příklad 5.5.10. (i) Snadno se nahlédne, že posloupnost $\{(-1)^n\}$ má množinu hromadných bodů $\{-1, 1\}$.
(ii) Je možné zkonstruovat posloupnost, jejímiž hromadnými body jsou všechna reálná čísla. Stačí vzít

$$-1, 0, 1, -2, -\tfrac{3}{2}, -1, -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \ldots$$

(postupně uvažujeme intervaly tvaru $[-2^k, 2^k]$ a z nich vybíráme body s krokem délky 2^{-k}).

Nyní si představíme ještě jednu konstrukci hromadných bodů posloupnosti $\{a_n\}$, kterou v dalším mějme pevně danou. Položme

$$b_n := \sup\{a_k\colon k \geq n\} \qquad \text{a} \qquad c_n := \inf\{a_k\colon k \geq n\}.$$

Je-li $\{a_n\}$ shora omezená, je $\{b_n\}$ rovněž shora omezená a navíc je nerostoucí. Proto má limitu (z intervalu $[-\infty, +\infty)$). Pokud $\{a_n\}$ není shora omezená, všechny členy $\{b_n\}$ jsou rovny $+\infty$ a tuto hodnotu nazveme jejich limitou. Analogicky je $\{c_n\}$ buď neklesající posloupnost reálných čísel, která má klasickou limitu, nebo je konstantně rovna hodnotě $-\infty$ a tuto hodnotu nazveme její limitou. Definujeme

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} b_n \qquad \text{a} \qquad \liminf_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} c_n.$$

Poznámka 5.5.11. Posloupnost $\{a_n\}$ obecně nemusí mít limitu, ale obě veličiny $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to+\infty} a_n$ existují vždy.

Definice 5.5.12 (Limes superior a limes inferior)**.** Nechť $\{a_n\}$ je reálná posloupnost. Veličina $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ se nazývá *limes superior* a veličina $\liminf_{n\to+\infty} a_n$ se nazývá *limes inferior*.

Označení 5.5.13. V literatuře se někdy používá značení

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n := \limsup_{n\to+\infty} a_n \qquad \text{a} \qquad \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n := \liminf_{n\to+\infty} a_n.$$

Ukažme si ještě dvě důležité vlastnosti limes superior a limes inferior.

Věta 5.5.14 (Vztah lim sup a lim inf k hromadným bodům)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je reálná posloupnost. Pak její limes superior a limes inferior jsou jejími hromadnými body. Navíc pro její libovolný hromadný bod A platí*

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \le A \le \limsup_{n\to+\infty} a_n. \tag{5.5.1}$$

Důkaz. Nejprve dokažme vztah $A \le \limsup_{n\to+\infty} a_n$. Nechť $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$ je taková podposloupnost, že $a_{n_k} \to A$. Nechť A a $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ jsou konečné. Pak máme

$$A \leftarrow a_{n_k} \le \sup\{a_{n_m} : m \ge k\} \le \sup\{a_n : n \ge k\} = b_n \to \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

(supremum více napravo je bráno přes nadmnožinu) a požadovaná nerovnost plyne z Věty o zachování nerovnosti při limitním přechodu (Věta 3.1.34). Modifikaci důkazu pro ostatní případy přenecháváme na rozmyšlení čtenáři.

Příslušnost $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ do množiny hromadných bodů dokážeme konstrukcí vhodné podposloupnosti. Označme $B := \limsup_{n\to+\infty} a_n$ a nejprve předpokládejme, že $B \in \mathbb{R}$. Protože $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \to B$, lze najít $m_1 \in \mathbb{N}$ tak, $b_{m_1} \in [B, B+1]$. Dále $b_{m_1} = \sup\{a_k : k \ge m_1\}$, proto můžeme najít $n_1 \ge m_1$ tak, že $a_{n_1} \in [b_{m_1} - 1, b_{m_1}]$. Celkově

$$a_{n_1} \in [b_{m_1} - 1, b_{m_1}] \subset [B-1, B+1] \qquad \Longrightarrow \qquad |a_{n_1} - B| \le 1.$$

Pokračujeme indukcí. Předpokládejme, že už máme $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_{j-1}}$. Tentokrát vezmeme $m_j \in \mathbb{N}$ tak, že $m_j > n_{j-1}$ a $b_{m_j} \in [B, B+\frac{1}{j}]$. Protože $b_{m_j} := \sup\{a_k : k \ge m_j\}$, můžeme najít $n_j \ge m_j$ tak, že $a_{n_j} \in [b_{m_1} - \frac{1}{j}, b_{m_1}]$. Odtud

$$|a_{n_j} - B| \le \frac{1}{j} \qquad \Longrightarrow \qquad a_{n_j} \overset{j\to+\infty}{\to} B.$$

Modifikace důkazu pro případy $B = -\infty$ a $B = +\infty$ jsou snadným cvičením.

Pro limes inferior je důkaz analogický. □

Věta 5.5.15 (Vztah lim sup a lim inf k limitě)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \text{ existuje} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \limsup_{n\to+\infty} a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n.$$

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Existuje-li limita, je nutně jediným hromadným bodem a proto

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

„$\Leftarrow$“ Důkaz plyne z nerovnosti (5.5.1), neboť z toho, že se $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to+\infty} a_n$ sobě rovnají, plyne, že množina hromadných bodů je jednoprvková a stačí použít Poznámku 5.5.3. □

Poznámka 5.5.16. Pojmy limes superior a limes inferior se dají zavést také pro spojitou proměnnou, případně se zavádějí jejich jednostranné verze. Používají se však podstatně méně často než v případě posloupností. Definice je následující

$$\limsup_{x\to x_0+} f(x) := \lim_{x\to x_0+} \sup\{f(y)\colon y \in (x_0, x)\}$$

a

$$\liminf_{x\to x_0+} f(x) := \lim_{x\to x_0+} \inf\{f(y)\colon y \in (x_0, x)\}.$$

U oboustranné konvergence se bere supremum (či infimum) přes interval s krajními body x_0, x (což se špatně zapisuje, neboť x může ležet od x_0 jak nalevo, tak napravo).

5.6 Bolzano-Cauchyova podmínka

Budeme se zde zabývat ekvivalentní podmínkou pro existenci vlastní limity, která zkoumá oscilace funkčních hodnot na okolí bodu x_0.

Věta 5.6.1 (O B-C podmínce)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a pro každé $\eta > 0$ platí $\mathcal{P}_\eta(x_0) \cap D_f \neq \emptyset$. Pak vlastní $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje právě tehdy, když je splněna Bolzano–Cauchyova podmínka*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$z \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Pro $x, y \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f$ tedy máme

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - A| + |A - f(y)| < 2\varepsilon.$$

„$\Leftarrow$“ Nejprve v B-C podmínce položme $\varepsilon = 1$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$x, y \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < 1.$$

Zafixujeme-li jedno $y \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f$, dostáváme, že f je omezená na $\mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažme dále volbu $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, které podle B-C podmínky odpovídá nějaké $\mathcal{P}_{\delta_n}(x_0)$, a zafixujme nějaké $x_n \in \mathcal{P}_{\delta_n}(x_0) \cap D_f$. Pak máme

$$x \in \mathcal{P}_{\delta_n}(x_0) \cap D_f \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_n)| < \frac{1}{n}. \tag{5.6.1}$$

Už také víme, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ je omezená. Podle Weierstrassovy věty lze proto najít $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ tak, že $f(x_{n_k}) \to A \in \mathbb{R}$.

Nyní už jen zbývá ověřit, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky vlastnosti $f(x_{n_k}) \to A$ umíme najít $k \in \mathbb{N}$ tak velké, že $|f(x_{n_k}) - A| < \varepsilon$ a $\frac{1}{n_k} < \varepsilon$. Proto podle (5.6.1) máme

$$x \in \mathcal{P}_{\delta_{n_k}}(x_0) \cap D_f \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-A| \le |f(x)-f(x_{n_k})|+|f(x_{n_k})-A| < \varepsilon + \frac{1}{n_k} \le 2\varepsilon$$

a jsme hotovi. □

Poznámka 5.6.2. (i) Hlavním významem B.-C. podmínky je, že dává charakterizaci existence vlastní limity, aniž bychom hodnotu limity museli znát.
(ii) B-C podmínka se také někdy používá k rychlému důkazu, že limita neexistuje. Budeme s ní později pracovat v různých verzích pro číselné i funkční řady, pro stejnoměrnou konvergenci, ale i v obecných metrických prostorech.
(iii) Naše věta v sobě zahrnuje i případ posloupnosti.
(iv) Pro posloupnost $\{a_n\}$ se často B-C podmínka přepisuje do tvaru

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n, m > n_0 \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Příklad 5.6.3. Ukažme, že $D(x)$ nemá vlastní limitu v počátku (D označuje Dirichletovu funkci). Pro spor předpokládejme, že vlastní limita v počátku existuje. Podle Věty o B-C podmínce pak při volbě $\varepsilon = 1$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$x, y \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\} \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < 1.$$

Volíme-li však v tomto prstencovém okolí x racionální a y iracionální, máme $|f(x) - f(y)| = 1$ a to je spor.

Poznámka 5.6.4. B-C podmínka pro posloupnosti nemůže být zeslabena na

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n > n_0 \quad |a_n - a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Takovou podmínku totiž zřejmě splňují částečné součty harmonické řady, tedy $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, platí však $a_n \to +\infty$.

Definice 5.6.5. Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *cauchyovská posloupnost*, jestliže splňuje Bolzano–Cauchyovu podmínku, tj.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n, m \ge n_0 \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Dle Věty o B-C podmínce (Věta 5.6.1) je reálná (komplexní) posloupnost cauchyovská právě tehdy když má vlastní limitu. Uvidíme později v kapitole věnované metrickým prostorům, že situace ve složitějších prostorech může být podstatně komplikovanější.

Shrnutí a závěrečné poznámky. V této kapitole jsme si rozšířili znalosti o limitách. Zavedli jsme si limity v nevlastních bodech a nevlastní limity a přeformulovali jsme věty z kapitoly věnované vlastním limitám ve vlastních bodech na tyto případy. Zobecnili jsme definici limity a jako speciální případ jsme získali pojem limity posloupnosti. Naučili jsme se porovnávat funkce, jestli jdou k nule či nekonečnu rychleji či stejně rychle jako jiné funkce. Dokázali jsme si důležité věty o limitách: větu o limitě monotonní funkce či posloupnosti, Heineho větu a Bolzano–Cauchyovu ekvivalentní charakterizaci existence vlastní limity. Seznámili jsme se také s podposloupnostmi a zavedli si pojmy limes superior a limes inferior.

Kapitola 6

Hlubší vlastnosti spojitých a diferencovatelných funkcí

V této kapitole se budeme zabývat situací, kdy $f\colon D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Budeme-li hovořit o vlastnostech f v $x_0 \in D_f$, budeme předpokládat, že f je definovaná na jistém okolí bodu x_0 (nebude-li řečeno jinak). V takové situaci x_0 nazýváme *vnitřním bodem* D_f.

Kdykoliv budeme hovořit o tom, že funkce je spojitá na $[a, b]$, myslíme tím, že je spojitá na (a, b) a v bodech a, b je spojitá jednostranně z vnitřní strany intervalu (často funkce nebude vůbec definovaná mimo $[a, b]$).

6.1 Lokální a globální extrémy

Definice 6.1.1 (Lokální extrém)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in D_f$.
Řekneme, že f má v x_0 *lokální maximum*, existuje-li $\delta > 0$ takové, že

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \text{na } \mathcal{U}_\delta(x_0).$$

Řekneme, že f má v x_0 *ostré lokální maximum*, existuje-li $\delta > 0$ takové, že

$$f(x) < f(x_0) \qquad \text{na } \mathcal{P}_\delta(x_0).$$

Analogicky se definuje *lokální minimum* a *ostré lokální minimum.* Lokální maximum a lokální minimum se souhrnně nazývají *lokální extrémy.* Ostré lokální maximum a ostré lokální minimum se souhrnně nazývají *ostré lokální extrémy.*

Při vyšetřování extrémů funkce nám často pomáhá znalost její derivace. Nejzákladnějším nástrojem je následující věta.

Věta 6.1.2 (Nutná podmínka lokálního extrému)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 je vnitřním bodem jejího definičního oboru a existuje $f'(x_0)$ (lze i nevlastní). Má-li f v bodě x_0 lokální extrém, platí $f'(x_0) = 0$.*

Důkaz. Pokud by například platilo $f'(x_0) > 0$, existovalo by z definice derivace $\delta > 0$ takové, že bychom na $\mathcal{P}_\delta(x_0)$ měli

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f(x)-f(x_0) > 0 & \text{na } (x_0, x_0+\delta) \\ f(x)-f(x_0) < 0 & \text{na } (x_0-\delta, x_0). \end{cases}$$

V bodě x_0 proto nemůže být lokální extrém.

Podobně se vyloučí případy $f'(x_0) \in (-\infty, 0)$ a $f'(x_0) = \pm\infty$. □

Poznámka 6.1.3. (i) Implikace ve větě se nedá obrátit. Například funkce $f(x) = x^3$ má v počátku nulovou derivaci, přesto v něm nemá lokální extrém.
(ii) Funkce nemusí mít extrémy jen v bodech s nulovou derivací. Mohou to být i body, kde derivace neexistuje (například $f(x) = |x|$ má v počátku ostré lokální minimum), a body, které nejsou vnitřními body definičního oboru (kupříkladu arcsin má lokální extrémy v bodech ± 1).
(iii) Nutná podmínka se při hledání extrému používá k rychlému vyloučení velkého množství bodů, kde lokální extrém být nemůže. Na dokončení klasifikace chování ve zbývajících bodech už musíme použít jiné nástroje.
(iv) Věta se dá různě modifikovat při zachování myšlenky důkazu. Kupříkladu je-li f definována na nějakém pravém okolí bodu x_0 a platí-li $f'_+(x_0) > 0$, nemůže být v x_0 lokální maximum.

Příklad 6.1.4. Funkce $f(x) = x^2$ splňuje $f'(x) = 2x$. Protože je diferencovatelná na celém $\mathbb{R}$, nemůže mít lokální extrém mimo počátek. V počátku má ostré lokální minimum, neboť $f(0) = 0$ a všude jinde je naše funkce kladná.

Definice 6.1.5 (Globální extrém)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in M \subset D_f$.
Řekneme, že f má v x_0 *globální maximum* na množině M, jestliže

$$f(x) \le f(x_0) \qquad \text{na } M.$$

Analogicky se definuje *globální minimum.* Globální maximum a globální minimum se souhrně nazývají *globální extrémy.*

Poznámka 6.1.6. (i) Velice často bývá $M = D_f$ a tuto situaci budeme mít v dalším vždy na mysli, nebude-li řečeno jinak.
(ii) Dají se zavést i ostré globální extrémy. Tento pojem se však používá jen málokdy.
(iii) U globálních extrémů se často slovo „globální“ vynechává.
(iv) Funkce nemusí mít ani globální, ani lokální extrémy. Stačí uvážit identitu na $\mathbb{R}$.

Věta 6.1.7 (Existence extrémů)**.** *Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a, b]$. Pak zde nabývá svého maxima a minima.*

Důkaz. Označme $S = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Z definice suprema existuje posloupnost $\{x_n\} \subset [a, b]$ taková, že $f(x_n) \to S$. Dále podle Weierstrassovy věty (Věta 5.5.4) existuje $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ taková, že $x_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$. Celkově

$$x_{n_k} \to x_0 \qquad \text{a} \qquad f(x_{n_k}) \to S.$$

Ze spojitosti f v bodě x_0 dostáváme, že $S = f(x_0) \in \mathbb{R}$.

Nabývání minima se dokáže podobně. □

Poznámka 6.1.8. (i) Nabývá-li funkce na nějaké množině svého maxima a minima, pak je tam omezená.
(ii) Ve větě není možné nahradit uzavřený interval otevřeným či polouzavřeným; uvažte identitu na $(0, 1)$.
(iii) Porušení spojitosti i v jediném bodě může ohrozit platnost věty (vezměte identitu na $[0, 1]$ a v počátku změňte funkční hodnotu na jakékoliv větší číslo).

Příklad 6.1.9. Hledejme globální extrémy funkce $f(x) = x^3+3x^2+1$ na intervalu $[-3, 3]$. Předně platí

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2).$$

Podle nutné podmínky pro lokální extrém (Věta 6.1.2), nemohou být lokální extrémy (tedy ani globální extrémy) v žádném bodě vyjma $-3, -2, 0, 3$. Dále máme

$$f(-3) = 1, \quad f(-2) = 5, \quad f(0) = 1, \quad f(3) = 55.$$

Podle Věty o existenci extrémů (Věta 6.1.7) se obou extrémů musí nabývat. Proto $\max_{[-3,3]} f = 55$ a nabývá se ho v bodě 3, $\min_{[-3,3]} f = 1$ a nabývá se ho v bodech -3 a 0.

Poznámka 6.1.10. Povšimněte si, že v předchozím příkladu nebylo vůbec potřeba zkoumat typ lokálního extrému (lokální maximum či minimum), například pomocí znaménka druhých derivací, protože pokud víme, že extrémy existují, stačí jen porovnat hodnoty v podezřelých bodech.

Příklad 6.1.11. Hledejme globální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 6|x|$ na intervalu $[-2, 2]$. Funkce je spojitá na uzavřeném omezeném intervalu, proto musí mít maximum a minimum. Máme

$$f'(x) = 3x^2 - 6 \operatorname{sign} x \qquad \text{pro } x \neq 0.$$

Podle nutné podmínky mohou být extrémy jen v bodech $\sqrt{2}$ (bod s nulovou derivací), 0 (bod, kde derivace neexistuje), $-2, 2$ (krajní body intervalu, neboli body, které nemají nějaké oboustranné okolí ve zkoumané množině). Platí

$$f(-2) = -20, \qquad f(0) = 0, \qquad f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} \qquad \text{a} \qquad f(2) = -4.$$

Proto

$$\min_{[-2,2]} f = -20 \qquad \text{a} \qquad \max_{[-2,2]} f = 0.$$

Věta o existenci extrémů (Věta 6.1.7) se dá často nepřímo využít i v situacích, kdy nejsou splněny její předpoklady, ale máme nějaké další informace o zkoumané funkci. Typickým příkladem je spojitá funkce na otevřeném intervalu, která má vlastní limity na krajích tohoto intervalu.

Příklad 6.1.12 (důležitý)**.** Zkoumejme globální extrémy funkce $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad a \qquad f'(x) = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Ještě si povšimněme, že nulové body derivace mají funkční hodnoty $f(-1) = -1$ a $f(1) = 1$ (v dalším pro nás bude důležité, že jsme získali alespoň jednu hodnotu, která je větší než limity na krajích a alespoň jednu hodnotu, která je menší než limity na krajích). Nyní z definice limity můžeme najít $K > 0$ tak velké (provádíme pro obě krajní limity současně), že

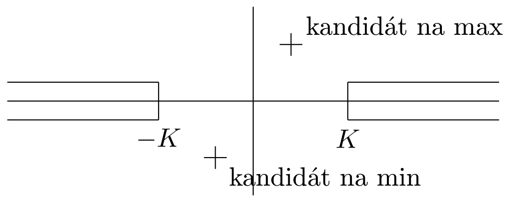
$$|f(x)| \le \frac{1}{2} \qquad \text{na } \mathbb{R} \setminus (-K, K). \tag{6.1.1}$$

Dále budeme pracovat na oříznutém intervalu $[-K, K]$, kde již máme splněny předpoklady Věty o existenci extrémů (Věta 6.1.7). Podle této věty globální extrémy existují a podle nutné podmínky mohou být jen v bodech $-K, -1, 1, K$. S přihlédnutím k (6.1.1) dostáváme

$$\max_{[-K,K]} f = 1 \qquad \text{a} \qquad \min_{[-K,K]} f = -1.$$

Potřebujeme se ještě vrátit k původní množině $\mathbb{R}$. Kombinací výsledku na $[-K, K]$ a (6.1.1) konečně dostáváme

$$\max_{\mathbb{R}} f = 1 \qquad \text{a} \qquad \min_{\mathbb{R}} f = -1.$$



Obrázek 6.1: Metoda oříznutí: ořezáváme taková okolí krajních bodů, že na nich funkční hodnoty nemohou kandidovat na extrém.

Poznámka 6.1.13. (i) Někdy se hodí odříznout okolí bodu s nevlastní limitou, jindy se naopak k množině body přidávají (pokud bychom v našem příkladu měli stejnou funkci na intervalu $(-2, 2)$, mohli bychom pohodlně pracovat na $[-2, 2]$ a na konci výpočtu prozkoumat, co se změní odstraněním krajních bodů).
(ii) Různé varianty tohoto postupu budeme občas používat při zkoumání extrémů funkcí více proměnných.

Úloha 6.1.14. Zkoumejte existenci globálních extrémů funkce $f(x) = \frac{2-x^2}{(x-1)^2}$ na množině $M = D_f \cap (-2, \infty)$.

Řešení: Nejprve si povšimněme, že $M = (-2,1)\cup(1,\infty)$, f je spojitá na $\mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1.$$

Díky předposlední z uvedených vlastností platí $\sup_M f = +\infty$ a maximum neexistuje. Dále máme

$$f'(x) = \frac{-2x(x-1)^2 - 2(2-x^2)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-2)}{(x-1)^3} \qquad a \qquad f(2) = -2.$$

Z poslední vlastnosti a hodnot výše uvedených limit vyplývá, že lze volit $\delta \in (0,1)$ a $K > 2$ tak, že

$$f(x) > -\frac{3}{2} \quad \text{na } (1-\delta, 1+\delta) \cup [K,\infty).$$

Nyní budeme zvlášť zkoumat existenci globálního minima funkce f na množinách $M_1 = (-2, 1-\delta]$ a $M_2 = [1+\delta, K]$. Protože f je spojitá na $[-2, 1-\delta]$, můžeme nahradit množinu M_1 množinou $\widetilde{M_1} = [-2, 1-\delta]$. Na množině $\widetilde{M_1}$ mohou být podle nutné podmínky globální extrémy jen v bodech -2 a $1-\delta$. V těchto bodech máme

$$f(-2) = -\frac{2}{9} \qquad \text{a} \qquad f(1-\delta) > -\frac{3}{2}.$$

Na množině M_2 mohou být podle nutné podmínky globální extrémy jen v bodech $1+\delta$, 2 a K. V těchto bodech máme

$$f(1+\delta) > -\frac{3}{2}, \qquad f(2) = -2 \qquad \text{a} \qquad f(K) > -\frac{3}{2}.$$

Díky spojitosti f na $\widetilde{M_1}$ a díky tomu, že $f(-2) > f(2)$, celkově dostáváme

$$\min_M f = \min_{M_1\cup M_2} f = \min_{\widetilde{M_1}\cup M_2} f = \min\{\min_{\widetilde{M_1}} f, \min_{M_2} f\} = \min_{M_2} f = f(2) = -2.$$

☆

Příklad 6.1.15. Hledejme globální extrémy funkce $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$ na intervalu $(0,+\infty)$. Nejprve si povšimněme, že f je spojitá na $\mathbb{R}$ a platí

$$f(0) = 0, \qquad f > 0 \quad \text{na } (0,+\infty), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Okamžitě dostáváme, že $\inf_{(0,+\infty)} f = 0$ a $\min_{(0,+\infty)} f$ neexistuje. Dále

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)(x^2+1) - 2(x^2+x)x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

a $f(1+\sqrt{2}) = \frac{4+3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} > 1$. Použijeme-li tedy Větu o existenci extrémů (Věta 6.1.7) spolu s nutnou podmínkou na intervalu $[0,K]$ (Věta 6.1.2), kde K je dostatečně velké, dostáváme

$$\max_{(0,+\infty)} f = \max_{[0,K]} f = f(1+\sqrt{2}) = \frac{4+3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}.$$

Předchozí úvahy můžeme zobecnit do následujícího tvrzení

Tvrzení 6.1.16. *Nechť f je spojitá na (a,b) a nechť existují* $\lim_{x\to a_+} f(x) = A$ *a* $\lim_{x\to b_-} f(x) = B$, *kde* $-\infty \le a < b \le +\infty$, A, $B \in \mathbb{R}^*$. *Označme* $K = \max\{A,B\}$ *a* $P = \{x \in (a,b)\colon f'(x) = 0 \vee f'(x)$ *neexistuje*$\}$. *Nechť existuje* $H = \max_{x\in P} f(x)$. *Potom*

$$\max_{x\in(a,b)} f(x) \ \exists \text{ a rovná se } H \iff H \ge K.$$

Důkaz. „$\Rightarrow$" Víme, že $f(x) \le H$ pro všechna $x \in (a,b)$, proto i $\lim_{x\to a_+} f(x)$ a $\lim_{x\to b_-} f(x) \le H$, tedy $K \le H$.

„$\Leftarrow$" Nechť $H \ge K$ a současně $H \ne \max_{x\in(a,b)} f(x)$, tedy buď $\max_{x\in(a,b)} f(x)$ neexistuje, nebo je větší než H. V obou případech existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0) > H$ ($P \subset (a,b)$). Stejně tak je $f(x_0) > K$, a proto $x_0 \in [a+\delta, b-\delta]$ pro vhodné $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$. Připomeňme, že $f(x) \le K + \Delta < f(x_0)$ na $(a, a+\delta)$ a na $(b-\delta, b)$. Funkce f je na $[a+\delta, b-\delta]$ spojitá, a proto dle Věty 6.1.7 zde nabývá svého maxima. Označme tento bod z. Tento bod je nutně bodem lokálního extrému funkce f, tedy buď $f'(z) = 0$ nebo $f'(z)$ neexistuje. Proto $z \in P$. Ale $f(z) \ge f(x_0) > H$, což je spor s definicí H. □

6.2 Globální vlastnosti spojitých funkcí

Věta 6.2.1 (Darbouxova věta o nabývání mezihodnot). *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* $[a,b] \subset \mathbb{R}$. *Pak na* $[a,b]$ *nabývá všech hodnot mezi* $f(a)$ *a* $f(b)$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f(a) < f(b)$ (pokud $f(a) = f(b)$, nemusíme nic dokazovat, pokud $f(a) > f(b)$, přejdeme k $-f$). Zvolme $A \in (f(a), f(b))$. Označme

$$M := \{x \in [a,b]\colon f(x) < A\} \qquad \text{a} \qquad c = \sup M.$$

Zřejmě $M \ne \emptyset$ ($a \in M$), a proto $c \in [a,b]$. Ze spojitosti f v bodě b plyne, že $c \ne b$ (skutečně, protože $A < f(b)$, umíme najít levé okolí bodu b, kde jsou funkční hodnoty odraženy od A). Podobně dostáváme $c \ne a$. Tedy $c \in (a,b)$. Dále nemůže platit $f(c) < A$, protože pak by ze spojitosti existovalo okolí bodu c, které by celé leželo v M, a proto by nemohlo být $c = \sup M$. Naopak, nemůže ani platit $f(c) < A$, protože pak bychom zase ze spojitosti dostali okolí bodu c, které je celé mimo M a opět by nemohlo platit $c = \sup M$. Nutně proto $f(c) = A$ a hodnoty A se tudíž nabývá. □

Poznámka 6.2.2. (i) Funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1,2]$ ukazuje, že mezihodnot se obecně může nabývat i vícekrát. Navíc se na intervalu může nabývat i jiných hodnot, než jsou mezihodnoty.
(ii) Darbouxova věta je pěkným příkladem nástroje k vytváření nekonstruktivních důkazů.
(iii) Darbouxova věta je klíčovým nástrojem při vyšetřování oborů hodnot. Připomeňme, že do této chvíle jsme příslušnost bodu do oboru hodnot mohli ověřovat jen explicitním vyjádřením bodu ve vzoru, který se na náš bod zobrazí.

Úloha 6.2.3. Nechť $f\colon [0,1] \to [0,1]$ je spojitá na $[0,1]$. Dokažte, že zde má pevný bod (bod, kde platí $f(x) = x$).

Řešení: Pokud platí $f(0) = 0$, nebo $f(1) = 1$, jsme hotovi. Nechť tedy $f(0) > 0$ a $f(1) < 1$. Definujme $g(x) := x - f(x)$. Pak g je spojitá na $[0,1]$,

$$g(0) = 0 - f(0) < 0 \qquad \text{a} \qquad g(1) = 1 - f(1) > 0.$$

Podle Darbouxovy věty pak existuje $x_0 \in (0,1)$ takové, že $g(x_0) = 0$. To znamená $x_0 = f(x_0)$ a jsme hotovi. ☆

Úloha 6.2.4. Určete obor hodnot funkce $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Řešení: Aplikací Youngovy nerovnosti snadno dostáváme $-1 \leq f \leq 1$ na $\mathbb{R}$. Proto $H_f \subset [-1,1]$. Dále máme $f(-1) = -1$ a $f(1) = 1$. Použijeme-li Darbouxovu větu na intervalu $[-1,1]$, dostáváme $H_f \supset [-1,1]$. Proto celkově $H_f = [-1,1]$. ☆

Darbouxova věta nepracuje s otevřenými intervaly. Chceme-li určovat obor hodnot na otevřeném intervalu, musíme si pomoci drobným trikem.

Úloha 6.2.5. Určete obor hodnot funkce $f(x) = x^3 - x$.

Řešení: Snadno se ověří, že

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Pro každé $K > 0$ proto existuje $L > 0$ takové, že

$$f(x) < -K \quad \text{na } (-\infty, -L) \qquad \text{a} \qquad f(x) > K \quad \text{na } (L, +\infty).$$

Aplikací Darbouxovy věty na intervalu $[-L, L]$ dostáváme

$$H_f \supset [f(-L), f(L)] \supset [-K, K].$$

Protože $K > 0$ bylo libovolné, máme $H_f = \mathbb{R}$. ☆

Nyní se budeme věnovat Darbouxově vlastnosti derivace, kterou jsme zmínili v kapitole o primitivních funkcích, a jejíž důkaz jsme zůstali dlužni. Nejprve si připomeňme základní pojmy a znění dokazovaného výsledku.

Definice 6.2.6 (Darbouxova vlastnost)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f má na (a,b) *Darbouxovu vlastnost*, jestliže platí

$$\begin{aligned} a < \alpha < \beta < b \quad \wedge \quad & A \in (\min\{f(\alpha), f(\beta)\}, \max\{f(\alpha), f(\beta)\}) \\ & \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\, \gamma \in (\alpha, \beta) \quad f(\gamma) = A. \end{aligned}$$

Věta 6.2.7 (Darbouxova vlastnost derivace)**.** *Nechť $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má vlastní derivaci f na (a,b). Pak f zde má Darbouxovu vlastnost.*

Důkaz. Zafixujme α, β splňující $a < \alpha < \beta < b$ a $A \in (f(\alpha), f(\beta))$ (bez újmy na obecnosti předpokládáme $f(\alpha) < f(\beta)$). Položme

$$\varphi(x) = F(x) - Ax.$$

Pak φ je spojitá na $[\alpha, \beta]$, a proto zde nabývá svého minima v nějakém bodě x_0. Protože $\varphi'(\alpha) = f(\alpha) - A < 0$, nemůže platit $x_0 = \alpha$. Analogicky $\varphi'(\beta) = f(\beta) - A > 0$ implikuje $x_0 \neq \beta$. Proto $x_0 \in (\alpha, \beta)$, odtud $\varphi'(x_0) = 0$, a proto $f(x_0) = A$. □

Poznámka 6.2.8. Připomeňme, že podle Darbouxovy věty spojitost implikuje Darbouxovu vlastnost. Obrácená implikace neplatí, jak ukazuje funkce $\sin \frac{1}{x}$, kterou v počátku dodefinujeme libovolnou hodnotou z intervalu $[-1, 1]$.

V dalším si vybudujeme aparát, který nám umožní dokázat Lemma o spojitosti inverzní funkce (Lemma 3.3.20), jehož důkaz jsme zatím také dlužni.

Věta 6.2.9 (O vztahu spojitosti a tvaru obrazu pro monotonní funkci)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotonní na $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $f((a, b))$ je interval. Pak je f spojitá na (a, b).*

Důkaz. Budeme uvažovat jen případ neklesající funkce (pro nerostoucí stačí přejít k $-f$). Budeme postupovat sporem. Nechť existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že f není spojitá v x_0. Podle Věty o existenci limity pro monotonní funkci (Věta 5.3.1) máme dobře definována následující čísla

$$\alpha := \lim_{x \to a_+} f(x) = \inf_{(a,b)} f, \qquad \beta := \lim_{x \to b_-} f(x) = \sup_{(a,b)} f$$
$$\gamma := \lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \sup_{(a,x_0)} f, \qquad \delta := \lim_{x \to x_{0+}} f(x) = \inf_{(x_0,b)} f$$

a musí pro ně platit $\alpha \leq \gamma < \delta \leq \beta$, neboť f není spojitá v x_0. Navíc $f((a, b))$ je interval, tedy

$$(\alpha, \beta) \subset f((a, b)).$$

Tím ale dostáváme spor, neboť interval $(\gamma, \delta) \subset (\alpha, \beta)$ není obsažen v $f((a, b))$. □

Dokažme nyní Lemma 3.3.20.

Věta 6.2.10 (O existenci spojité inverze)**.** *Nechť $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ je ryze monotonní a spojitá na (a, b). Pak existuje spojitá f^{-1} na $f((a, b))$ (a má stejný typ monotonie jako f).*

Důkaz. Budeme uvažovat jen případ rostoucí funkce (pro neklesající stačí přejít k $-f$). Podle Věty o existenci limity pro monotonní funkci (Věta 5.1.12) máme dobře definována čísla

$$\alpha := \lim_{x \to a_+} f(x) = \inf_{(a,b)} f \qquad \text{a} \qquad \beta := \lim_{x \to b_-} f(x) = \sup_{(a,b)} f.$$

Díky ryzí monotonii platí $\alpha < \beta$. Nyní se budeme zabývat případem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (komentář k ostatním případům je na konci důkazu). V tomto případě můžeme spojitě (jednostranně) dodefinovat $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ (snadno se ověří, že jsme tím neztratili ryzí monotonii). Zřejmě pak f zobrazuje $[a, b]$ prostě do $[\alpha, \beta]$. Navíc je díky spojitosti f a Darbouxově větě (Věta 6.2.1) toto zobrazení na. Proto existuje inverze f^{-1} a je spojitá díky Větě o vztahu spojitosti a tvaru obrazu pro monotonní funkci (Věta 6.2.9).

Pokud by platilo například $\alpha = -\infty$, předchozí proces bychom prováděli na intervalech typu $(-K, b)$ pro dostatečně velká $K > 0$. Podrobnosti přenecháváme čtenáři na rozmyšlenou.

Analogicky postupujeme, pokud druhá limita není vlastní, případně pokud jsou nevlastní obě limity. □

Poznámka 6.2.11. Pro spojitou funkci $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ není těžké dokázat, že je prostá právě tehdy, když je ryze monotonní.

Nyní si představíme pojem, který se nám bude hodit například v teorii Riemannova integrálu.

Definice 6.2.12 (Stejnoměrná spojitost)**.** Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$, kde I je interval. Řekneme, že f je *stejnoměrně spojitá* na I, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \quad x, y \in I \wedge |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Poznámka 6.2.13. Připomeňme, že spojitost f na I jsme definovali podmínkou

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in I\, \exists \delta > 0 \quad y \in I \wedge |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Číslo δ v této podmínce závisí nejen na ε, ale i na x (v matematice závislost často znázorňujeme zápisem $\delta = \delta(\varepsilon, x)$). V definici stejnoměrné spojitosti δ závisí pouze na ε.

Snadno se dá nahlédnout, že stejnoměrná spojitost implikuje spojitost klasickou. Obrácená implikace obecně neplatí.

Příklad 6.2.14. (i) Uvažme funkci $f(x) = x$ na $(0, 1)$. Ukažme, že f je stejnoměrně spojitá na $(0, 1)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom stačí brát $\delta = \varepsilon$, tedy δ nezávislé na ε, a bude platit

$$|x - y| < \delta = \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(y)| = |x - y| < \varepsilon.$$

(ii) Uvažme funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ na $(0, 1)$. Z aritmetiky spojitosti víme, že f je spojitá na $(0, 1)$. Protože pro jakékoliv $x \in (0, 1)$ platí

$$f\Big(\frac{x}{2}\Big) - f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} > 1,$$

k volbě $\varepsilon = 1$ není možné nalézt $\delta > 0$ s vlastností, kterou požaduje definice stejnoměrné spojitosti.

V některých situacích však klasická spojitost stejnoměrnou spojitost zaručuje.

Věta 6.2.15 (Cantorova věta o stejnoměrné spojitosti)**.** *Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a,b]$. Pak je zde dokonce stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a,b]$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že k němu nenajdeme $\delta > 0$ s vlastností z definice stejnoměrné spojitosti. Tedy pro každé $\delta_n := \frac{1}{n}$ existuje dvojice bodů $x_n, y_n \in [a,b]$ splňující

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{a} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou omezené. Dvojím přechodem k podposloupnosti (za pomoci Weierstrassovy věty; Věta 5.5.4) dostáváme (připomeňme $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$)

$$x_{n_k} \to x \qquad a \qquad y_{n_k} \to x.$$

Ze spojitosti proto plyne

$$f(x_{n_k}) \to f(x) \leftarrow f(y_{n_k}),$$

což je ve sporu s tím, že $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. □

Poznámka 6.2.16. Přechody k podposloupnostem (i vícenásobné) se v důkazech používají velice často. Značení x_{n_k} je poměrně nepohodlné (při druhém přechodu k podposloupnosti bychom už pracovali s $x_{n_{k_m}}$). Proto se občas v literatuře píše, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že už naše původní posloupnost má požadovanou vlastnost, jinak přejdeme k podposloupnosti. Případně se napíše, že přechodem k podposloupnosti lze dosáhnout požadované vlastnosti. To nám umožňuje používat stále značení x_n.

6.3 Věty o střední hodnotě a L'Hospitalovo pravidlo

Afinní funkce mají tu příjemnou vlastnost, že rozdíl funkčních hodnot ve dvou bodech se dá spočítat jako součin derivace (která je konstantní) a vzdálenosti těchto bodů. Diferencovatelné funkce mají jen velmi slabou verzi této vlastnosti, přesto má takový výsledek v budování matematické analýzy velký význam. Začneme jeho jednodušší verzí.

Věta 6.3.1 (Rolleova věta)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a,b]$ a f' existuje (může být i nevlastní) na (a,b). Nechť $f(a) = f(b)$. Pak existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že $f'(\xi) = 0$.*

Důkaz. Uvážíme dva případy. Nechť je nejprve f konstantní na $[a,b]$, pak je důkaz triviální. Nechť naopak f není konstantní na $[a,b]$. Ze spojitosti na $[a,b]$ pak plyne, ža má maximum a minimum na $[a,b]$. Z nekonstantnosti plyne, že alespoň jedna z těchto hodnot musí být odlišná od $f(a) = f(b)$. Odpovídající bod ξ pak splňuje $\xi \in (a,b)$, funkce f v něm nabývá extrému, a protože $f'(\xi)$ existuje, musí být nulová. □

Poznámka 6.3.2. (i) V aplikacích pro nás bude velmi důležité, že nám stačí existence derivace jen na (a, b) a že $\xi \in (a, b)$.
(ii) Spojitost na $[a, b]$ nelze nahradit spojitostí na (a, b), jak ukazuje příklad

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0 \\ x & \text{pro } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

(iii) Z požadavku na existenci derivace nelze slevit ani v jediném bodě, jak vidíme z příkladu $f(x) := |x|$ na $[-1, 1]$.
(iv) Věta neplatí pro komplexní funkce reálné proměnné. Stačí uvážit $f(x) = \cos x + \mathrm{i} \sin x$ na intervalu $[0, 2\pi]$.
(v) Věta samozřejmě platí pro jednotlivé složky komplexní funkce. Důvod, proč nám věta neplatí pro předchozí funkci jako celek, je ten, že pro funkci kosinus nalezneme pomocí Rolleovy věty (Věta 6.3.1) jisté $\xi_1 \in (0, 2\pi)$, zatímco pro funkci sinus obecně jiné $\xi_2 \in (0, 2\pi)$. Proto

$$\frac{(\cos 2\pi + \mathrm{i} \sin 2\pi) - (\cos 0 + \mathrm{i} \sin 0)}{2\pi - 0} = \cos' \xi_1 + \mathrm{i} \sin' \xi_2.$$

Rolleova věta se dá snadno zobecnit na hlavní výsledek této kapitoly.

Věta 6.3.3 (Lagrangeova věta o přírůstku funkce)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a, b]$ a f' existuje (může být i nevlastní) na (a, b). Pak existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Uvažme funkci

$$F(x) = f(x) - \Big[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\Big].$$

Pak F je spojitá na $[a, b]$, na (a, b) má derivaci a $F(b) = F(a) = 0$. Na F tedy můžeme aplikovat Rolleovu větu (Věta 6.3.1) a dostáváme existenci $\xi \in (a, b)$ splňujícího

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{neboli} \qquad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Poznámka 6.3.4. (i) Rolleova věta je zřejmě speciálním případem Lagrangeovy věty. Naopak, Lagrangeova věta se z Rolleovy získala tak, že se k funkci splňující Rolleovu větu přičetla vhodná afinní funkce (pro ně je splněn vzoreček z Lagrangeovy věty automaticky, ať bereme derivaci v jakémkoliv bodě) a pak už vše vyšlo z aritmetiky derivace.
(ii) V důkazu bylo možno volit „jednodušší“ funkci F; $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$. Výhodou je, že odečítáme od f pouze lineární funkci (nikoliv afinní), ale výpočet $F(a)$ a $F(b)$ je mírně komplikovanější. Na druhou stranu není až tak těžké vidět, že $F(b) - F(a) = 0$. Totéž pak platí i pro důkaz níže uvedené Cauchyovy věty o přírůstku funkce (Věta 6.3.13).

Nyní si budeme užitečnost Lagrangeovy věty demonstrovat na příkladech a důkazech.

Příklad 6.3.5. Funkce sinus zřejmě splňuje Lagrangeovu větu na jakémkoliv uzavřeném intervalu a dostáváme

$$\frac{\sin b - \sin a}{b-a} = \sin' \xi = \cos \xi \in [-1,1], \quad \text{a proto} \quad |\sin b - \sin a| \leq |b-a| \,\forall a,b \in \mathbb{R}.$$

V předchozím příkladu jsme narazili na důležitou vlastnost.

Definice 6.3.6 (Lipschitzovská spojitost)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je *lipschitzovsky spojitá* (nebo stručně *lipschitzovská*) na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, jestliže existuje $K \geq 0$ takové, že

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y| \qquad \text{kdykoliv } x, y \in I.$$

Je-li $K \leq 1$, říkáme, že f je *neexpanzivní.* Je-li $K < 1$, říkáme, že f je *kontrakce.*

Poznámka 6.3.7. (i) Lipschitzovskost se definuje analogicky pro funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$, z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^N$ a tak dále.
(ii) Číslu K z definice se říká *konstanta lipschitzovskosti.* Ve většině aplikací toto číslo znát nepotřebujeme, stačí nám, že existuje. Pokud však studujeme problém, v němž je konstanta lipschitzovskosti důležitá, používáme ještě termín *K-lipschitzovská funkce.*
(iii) Lipschitzovskost zřejmě implikuje stejnoměrnou spojitost. Obrácená implikace neplatí, stačí uvážit $f(x) = \sqrt{x}$ na $(0,1)$.
(iv) Z Lagrangeovy věty vidíme, že omezenost derivace implikuje lipschitzovskost.
(v) Lipschitzovská funkce mít derivaci nemusí, stačí vzít $f(x) = |x|$.
(vi) Je-li funkce K-lipschitzovská, v žádném bodě nemůže absolutní hodnota její derivace přesáhnout číslo K (to plyne z toho, že hodnotu derivace umíme libovolně přesně aproximovat diferenčním podílem).
(vii) Lipschitzovská spojitost bude hrát důležitou roli v teorii obyčejných diferenciálních rovnic.

U následující věty (připomeňme Větu 4.1.4) dlužíme důkaz druhé části.

Věta 6.3.8 (O nejednoznačnosti primitivní funkce)**.** (i) *Je-li F primitivní funkce k f na (a,b) a $C \in \mathbb{R}$, pak $F + C$ je také primitivní funkce k f na (a,b).*
(ii) *Jsou-li F a G primitivní funkce k f na (a,b), pak existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že $G = F + C$.*

Důkaz. První část jsme již dokázali (snadno zderivováním). Dokažme druhou část. Označme $H = F - G$. Pak $H' \equiv 0$ na (a,b). Zafixujme $x_0 \in (a,b)$. Pro libovolné $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ pak můžeme aplikovat Lagrangeovu větu na intervalu s krajními body x a x_0. Dostáváme $f(x) = f(x_0)$. Protože x bylo libovolné, jsme hotovi. $\square$

Další výsledek, k jehož získání nám poslouží Lagrangeova věta, se hodí k počítání derivací. Připomeňme, že při počítání derivací jsme přednostně používali přístup založený na aritmetice derivací (Věta 3.3.10) a Větě o derivaci složené funkce (Věta 3.3.14), zatímco v problematických bodech jsme počítali přímo z definice. Nyní budeme mít pro výpočet derivace v problematických bodech ještě další nástroj.

Věta 6.3.9 (O limitě derivací)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}$. Nechť*
(i) *f je zprava spojitá v x_0*
(ii) *na jistém pravém prstencovém okolí bodu x_0 existuje vlastní f'*
(iii) *existuje $A := \lim_{x\to x_0+} f'(x) \in \mathbb{R}^*$.*
Pak $f'_+(x_0) = A$.

Důkaz. Podle předpokladů lze najít $\delta > 0$ takové, že f je spojitá na $[x_0, x_0 + \delta]$. Pro libovolné $x \in (x_0, x_0 + \delta]$ lze pak použít Lagrangeovu větu a dostáváme

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi_x), \qquad \text{kde } \xi_x \in (x_0, x).$$

Nyní lze již snadno nahlédnout, že platí

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0+} f'(\xi_x) = \lim_{\xi_x\to x_0+} f'(\xi_x) = A.$$

□

Poznámka 6.3.10. (i) Pokud bychom navíc předpokládali spojitost na nějakém pravém prstencovém okolí bodu x_0, nevadily by nám nevlastní derivace.
(ii) Předpoklad spojitosti zprava v bodě x_0 se nedá vypustit, jak ukazuje funkce sign a nespojitost její derivace v počátku.
(iii) Věta se dá přeformulovat pro limitu derivací zleva i pro oboustrannou limitu derivací.

Příklad 6.3.11. (i) Funkce arcsin je zprava spojitá v bodě -1 a napravo od tohoto bodu platí $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Proto

$$\arcsin'_+(-1) = \lim_{x\to -1+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

Tento výsledek neumíme získat žádnou jinou z námi dosud používaných metod.
(ii) Funkce $x \mapsto |x|$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a snadno se spočítá, že všude mimo počátek platí $(|x|)' = \operatorname{sign} x$. Proto

$$(|x|)'_-(0)- = \lim_{x\to 0_-} \operatorname{sign} x = \lim_{x\to 0_-} -1 = -1,\ (|x|)'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} \operatorname{sign} x = \lim_{x\to 0_+} 1 = 1$$

a $(|x|)'$ v bodě 0 neexistuje.

Poznámka 6.3.12. Za pomoci Věty o limitě derivací (Věta 6.3.9) se dá snadno dokázat, že metoda lepení primitivních funkcí vždy funguje, je-li integrand spojitý.

Existuje ještě jedna silnější věta o přírůstku funkce. Nepoužívá se příliš často, ale má některé důležité aplikace (třeba důkaz L'Hospitalova pravidla nebo tvar zbytku Taylorova polynomu).

Věta 6.3.13 (Cauchyova věta o přírůstku funkce)**.** *Nechť* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jsou spojité na* $[a, b]$, f', g' *existují (mohou být i nevlastní) na* (a, b) *a* $g(b) \neq g(a)$. *Pak existuje* $\xi \in (a, b)$ *takové, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi).$$

Důkaz. Uvažme funkci

$$F(x) = f(x) - \Big[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \big(g(x) - g(a)\big)\Big].$$

Pak F je spojitá na $[a, b]$, má derivaci na (a, b) a $F(a) = F(b) = 0$. Na F tedy můžeme aplikovat Rolleovu větu (Větu 6.3.1) a dostáváme existenci $\xi \in (a, b)$ splňujícího

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi), \qquad \text{neboli} \qquad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi).$$

□

Poznámka 6.3.14. Pokud platí $g'(\xi) \neq 0$, lze psát

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Formulka pak vypadá, jako bychom podělili výsledky Lagrangeovy věty získané zvlášť pro f a zvlášť pro g. Takto se však postupovat nedá, neboť bychom na levé straně dostali dva body ξ_1 a ξ_2, které nemusí být stejné.

Důležitou aplikací Cauchyovy věty je důkaz L'Hospitalova pravidla (připomeňme Větu 5.1.35).

Věta 6.3.15 (L'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$. *Nechť dále*
(i) *na jistém prstencovém okolí bodu* x_0 *existují vlastní* f', g' *a platí zde* $g' \neq 0$
(ii) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$
(iii) *platí jedna z podmínek*

$$\text{a) } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$
$$\text{b) } \lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty.$$

Pak $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Důkaz. Začneme situací $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Zabývejme se nejprve případem $x_0 \in \mathbb{R}$ a pravostranné limity $\lim_{x\to x_0+}$ (obecný případ včetně přechodu k oboustranné limitě si vysvětlíme níže).

Funkce f, g dodefinujme v bodě x_0 hodnotou 0. Pak podle předpokladů existuje $\delta > 0$ takové, že kdykoliv je $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, na $[x_0, x]$ máme splněny předpoklady

Cauchyovy věty. Ke každému $x \in (x_0, x_0+\delta)$ proto existuje $\xi_x \in (x_0, x)$ takové, že máme
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$
Limitním přechodem $x \to x_{0+}$ dostaneme požadovaný výsledek.

Nyní si vysvětlíme, jak se obecný případ převede na pravostrannou limitu ve vlastním bodě. Pokud platí $x_0 = +\infty$, stačí přechod $x = \frac{1}{y}$, neboť
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0_+} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})}$$
a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{y\to 0_+} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{y\to 0_+} \frac{f'(\frac{1}{y})\frac{-1}{y^2}}{g'(\frac{1}{y})\frac{-1}{y^2}} = \lim_{y\to 0_+} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(\frac{1}{y})}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g(\frac{1}{y})}.$$
Oboustrannou limitu ve vlastním bodě rozložíme na dvě jednostranné, přičemž levostranná se převede na pravostrannou pomocí $x = -y$, kde
$$\lim_{x\to x_{0-}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to -x_{0+}} \frac{f(-y)}{g(-y)}$$
a
$$\lim_{x\to x_{0-}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to -x_{0+}} \frac{f'(-y)}{g'(-y)} = \lim_{x\to -x_{0+}} \frac{-f'(-y)}{-g'(-y)} = \lim_{x\to -x_{0+}} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(-y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g(-y)}.$$
Tím je případ $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ vyřešen.

Uvažme nyní druhý případ $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$. Opět můžeme předpokládat, že počítáme pravostrannou limitu ve vlastním bodě. Nyní existuje $\delta > 0$ takové, že podmínky Cauchyovy věty jsou splněny na $[x, y]$, kdykoliv $[x, y] \subset (x_0, x_0+\delta)$. Máme
$$\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} = \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}$$
a po úpravě dostáváme (klíčovou) identitu
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \Big(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\Big) \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}.$$
Pokud je nyní $A = 0$ (připomeňme, že $A := \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$), zafixujme libovolné $\varepsilon > 0$. Je-li dále y dostatečně blízko k x_0, máme $|\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}| < \varepsilon$. Zafixujeme-li takové $y > x_0$, dostáváme pro všechna $x \in (x_0, y)$, která jsou dostatečně blízko k x_0, odhady $|\frac{f(y)}{g(x)}| < \varepsilon$ a $|1 - \frac{g(y)}{g(x)}| < 2$ (využíváme předpoklad $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$). Pro taková x platí
$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)}\Big| \le \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon.$$
Protože ε bylo libovolné, dostáváme $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Je-li nyní $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, položme $F(x) = f(x) - Ag(x)$. Potom

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0+} \Big(\frac{f'(x)}{g'(x)} - A \Big) = 0,$$

čímž jsme přešli k předchozímu případu. Zřejmě pak

$$0 = \lim_{x \to x_0+} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} - A.$$

Zbývá vyšetřit situaci $|A| = +\infty$. Nechť například $A = +\infty$. Potom pro $K > 0$ a pro z dosti blízko x_0 máme $\frac{f'(z)}{g'(z)} > 2(K+1)$. Po případném zmenšení tohoto okolí máme pro pevné y a libovolné x z této množiny

$$\Big| \frac{f(y)}{g(x)} \Big| < 1 \qquad \text{a} \qquad 1 - \frac{g(y)}{g(x)} > \frac{1}{2}.$$

Na tomto okolí bodu x_0 je $\frac{f(x)}{g(x)} \geq -1 + (K+1) = K$, tedy $\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. Analogicky se vyřeší případ $A = -\infty$. $\square$

6.4 Vztah znaménka první derivace a monotonie funkce

Další aplikací Lagrangeovy věty o přírůstku funkce (Věta 6.3.3) jsou elegantní důkazy vět o vztahu znaménka derivace a monotonie funkce. Nejprve se budeme zabývat tím, jak ovlivní znaménko derivace funkce v jednom bodě chování této funkce na malých okolích. Později budeme studovat případy, kdy je znaménko neměnné na nějakém intervalu.

V prvním případě potřebujeme novou definici.

Definice 6.4.1 (Monotonie v bodě)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je *rostoucí v bodě* x_0, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{pro } x \in (x_0 - \delta, x_0) \qquad \text{a} \qquad f(x) > f(x_0) \quad \text{pro } x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Analogicky se definují vlastnosti *klesající v bodě*, *neklesající v bodě* a *nerostoucí v bodě*.

Poznámka 6.4.2. Právě zavedené vlastnosti jsou slabší než monotonie na jistém okolí. Například funkce $x + x\sin(\frac{1}{x})$ dodefinovaná nulou v počátku je zřejmě neklesající v počátku, zároveň však na žádném jeho okolí neklesající není (v každém okolí počátku má spočetně mnoho bodů s nulovou funkční hodnotou, v ostatních bodech má funkční hodnota stejné znaménko jako argument).

Pokud se nám podaří ohlídat monotonii ve všech bodech uvažovaného intervalu, dostáváme na něm klasickou monotonii, kterou jsme si zavedli na začátku skript.

Věta 6.4.3 (O vztahu monotonie na intervalu a v jednotlivých bodech)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Pak f je rostoucí na (a,b) právě tehdy, když f je rostoucí v každém bodě intervalu (a,b).*
Analogické výsledky platí pro funkce klesající, neklesající a nerostoucí.

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Tato implikace je zřejmá.
„$\Leftarrow$“ Pro spor předpokládejme, že f je rostoucí ve všech bodech a máme $a < x_1 < x_2 < b$ a $f(x_1) \geq f(x_2)$. Označme

$$x_0 := \sup\{x \in [x_1, x_2]\colon f(x) > f(x_1)\}.$$

Zřejmě nemůže platit $x_0 = x_1$, neboť f je v x_1 rostoucí. Ze stejného důvodu nemůže ani platit $x_0 = x_2$, protože navíc $f(x_1) \geq f(x_2)$. Máme tedy $x_0 \in (x_1, x_2)$. Protože však f je rostoucí rovněž v x_0, máme na jistém pravém okolí x_0 větší funkční hodnoty než $f(x_1)$. To je spor s tím, jak jsme zavedli x_0.

Důkazy pro klesající, neklesající a nerostoucí funkce se dělají podobně. $\square$

Věta 6.4.4 (O vztahu monotonie v bodě a znaménka derivace)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje $f'(x_0)$ (nemusí být vlastní). Je-li $f'(x_0) > 0$, je f v x_0 rostoucí. Je-li $f'(x_0) < 0$, je f v x_0 klesající.*

Důkaz. Je-li $f'(x_0) > 0$, na jistém prstencovém okolí máme

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Z toho již snadno plyne požadovaný výsledek. Pokud platí $f'(x_0) < 0$, postupujeme stejně. $\square$

Poznámka 6.4.5. (i) Neplatí verze věty, která by dávala do souvislosti podmínky $f'(x_0) \geq 0$ a $f'(x_0) \leq 0$ s pojmy neklesající a nerostoucí v bodě. Stačí třeba uvážit funkci $x \mapsto x^3$, která splňuje $f'(0) = 0$ (tedy i $f'(0) \leq 0$), ale je rostoucí na celém $\mathbb{R}$.
(ii) Rostoucí funkce nemusí mít kladnou derivaci ve zvoleném bodě (jak ukázal příklad s $x \mapsto x^3$). Dokonce derivace v některých bodech nemusí vůbec existovat (definujme $f(x) = x$ pro $x \leq 0$ a $f(x) = 2x$ pro $x > 0$).

Největší užitek budeme mít ze studia globálních vlastností znaménka derivace.

Věta 6.4.6 (O vztahu monotonie na intervalu a znaménka derivace)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, je spojitá na intervalu (a,b) a ve všech jeho bodech má derivaci (nemusí být vlastní). Pak*
(i) *$f' \geq 0$ na $(a,b) \iff f$ je neklesající na (a,b)*
(ii) *$f' \leq 0$ na $(a,b) \iff f$ je nerostoucí na (a,b)*
(iii) *$f' > 0$ na $(a,b) \implies f$ je rostoucí na (a,b)*
(iv) *$f' < 0$ na $(a,b) \implies f$ je klesající na (a,b).*

Důkaz. Dokažme implikaci „$\Rightarrow$“ v (i). Zvolme $x, y \in (a, b)$, $x < y$. Snadno nahlédneme, že na $[x, y]$ jsou splněny předpoklady Lagrangeovy věty (Věta 6.3.3). Existuje $\xi \in (x, y)$ takové, že platí

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \geq 0,$$

odtud již plyne $f(x) \leq f(y)$. Protože x, y byly zvoleny libovolně, máme dokázán požadovaný typ monotonie. Stejným způsobem lze dokázat zbývající tři implikace typu „$\Rightarrow$“.

Implikace „$\Leftarrow$“ v (i) snadno plyne z toho, že pro neklesající funkci jsou všechny diferenční podíly nezáporné. Podobně získáme důkaz implikace „$\Leftarrow$“ v (ii). □

Poznámka 6.4.7. (i) V částech (iii) a (iv) neplatí implikace „$\Leftarrow$“. Opět lze užít funkce typu $x \mapsto x^3$.
(ii) Povšimněte si, že výsledky z předchozí věty jsou silnější, než kdybychom kombinovali předcházející dva výsledky o monotonii v bodě. Tam bychom byli schopni o monotonii něco říci, jen pokud $f' > 0$ nebo $f' < 0$ na (a, b).

Poznámka 6.4.8. (i) Na předchozí větě není cenné jen její znění, ale i důkaz, který vybízí k různým drobným zobecněním. Například mějme $a < b < c$, f spojitou na (a, c) a $f' > 0$ na (a, b) a (b, c) (oproti větě nám chybí diferencovatelnost v bodě b). Pak f je rostoucí na (a, c). Skutečně, kdykoliv $a < x < b < y < c$, použijeme Lagrangeovu větu (Věta 6.3.3) zvlášť na intervalech $[x, b]$ a $[b, y]$. Dostáváme $f(x) < f(b) < f(y)$.

Je zřejmé, že podobně lze postupovat i v případě, že máme spojitou funkci na intervalu a její derivaci kontrolujeme ve všech bodech až na konečně mnoho.
(ii) Pro zvídavého čtenáře ještě uveďme, že bodů, kde nekontrolujeme derivaci, je možno připustit dokonce spočetně mnoho, ale v případě nespočetně mnoha takových bodů už výsledek obecně neplatí. Podrobnosti se dají nalézt v dodatku na konci této kapitoly.

V dalším ještě obohatíme naši sbírku nástrojů pro vyšetřování lokálních a globálních extrémů.

Věta 6.4.9 (Postačující podmínky pro lokální extrémy I)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že*

(i) f *je* $\left\{\begin{matrix} \textit{rostoucí} \\ \textit{klesající} \\ \textit{neklesající} \\ \textit{nerostoucí} \end{matrix}\right\}$ *na* $(x_0 - \delta, x_0)$ *a* $\left\{\begin{matrix} \textit{klesající} \\ \textit{rostoucí} \\ \textit{nerostoucí} \\ \textit{neklesající} \end{matrix}\right\}$ *na* $(x_0, x_0 + \delta)$, *pak* f *má*

v x_0 $\left\{\begin{matrix} \textit{ostré lokální maximum} \\ \textit{ostré lokální minimum} \\ \textit{lokální maximum} \\ \textit{lokální minimum} \end{matrix}\right\}$

(ii) *je-li* $\left\{\begin{matrix} f' > 0 \\ f' < 0 \\ f' \geq 0 \\ f' \leq 0 \end{matrix}\right\}$ *na* $(x_0-\delta, x_0)$ *a* $\left\{\begin{matrix} f' < 0 \\ f' > 0 \\ f' \leq 0 \\ f' \geq 0 \end{matrix}\right\}$ *na* $(x_0, x_0+\delta)$*, pak* f *má v bodě* x_0

$\left\{\begin{matrix} \text{ostré lokální maximum} \\ \text{ostré lokální minimum} \\ \text{lokální maximum} \\ \text{lokální minimum} \end{matrix}\right\}.$

Důkaz. Pokud f roste na $(x_0 - \delta, x_0)$, díky díky spojitosti v x_0 a Větě o existenci limity pro monotonní funkce (Věta 5.3.1) máme

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_{0-}} f(x) = \sup_{(x_0-\delta,x_0)} f.$$

Odtud již snadno odvodíme, že f roste na $(x_0 - \delta, x_0]$. Analogicky zpracujeme zbývajících sedm případů v (i) a ze získaných výsledků již (i) plyne. Část (ii) plyne z (i) díky Větě o vztahu monotonie a znaménka derivace (Věta 6.4.3). □

Příklad 6.4.10. Funkce $f(x) = x^3 - 12x + 9$ je diferencovatelná na celém $\mathbb{R}$ a platí $f'(x) = 3(x^2 - 4)$. Odtud dostáváme následující informace.

na $(-\infty, -2)$	na $(-2, 2)$	na $(2, \infty)$
$f' > 0$	$f' < 0$	$f' > 0$
f roste	f klesá	f roste

Z tabulky dále plyne, že v bodě -2 je ostré lokální maximum a v 2 je ostré lokální minimum. Žádný z těchto extrémů není globální, neboť $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Pro úplnost si ještě uvedeme výsledek, který umožňuje klasifikovat lokální extrémy pomocí znaménka druhé (případně i vyšší derivace). Tento přístup bývá většinou vyučován na střední škole. V praxi se však takřka výhradně používá přístup přes znaménko derivace (který jsme si ukázali výše), neboť je elegantnější, přehlednější a dodá nám více informací. Na druhou stranu, přístup s vyššími derivacemi se dá (na rozdíl od předešlého) zobecnit pro funkce více proměnných.

Věta 6.4.11 (Postačující podmínky pro lokální extrémy II)**.** *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, bod* $x_0 \in \mathbb{R}$ *a pro jisté* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad a \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Pak
(i) *je-li* n *sudé a* $f^{(n)}(x_0) > 0$*, má* f *v* x_0 *ostré lokální minimum*
(ii) *je-li* n *sudé a* $f^{(n)}(x_0) < 0$*, má* f *v* x_0 *ostré lokální maximum*
(iii) *je-li* n *liché a* $f^{(n)}(x_0) > 0$*, je* f *v* x_0 *rostoucí*
(iv) *je-li* n *liché a* $f^{(n)}(x_0) < 0$*, je* f *v* x_0 *klesající.*

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle n. Případ $n = 1$ už byl vyšetřen ve Větě o vztahu monotonie v bodě a znaménka první derivace.

Nechť $n = 2$. Uvažujme případ (i), tedy $f''(x_0) > 0$. Podle Věty o vztahu monotonie v bodě a znaménka první derivace (Věta 6.4.4), je f' rostoucí v bodě x_0. Zároveň však máme $f'(x_0) = 0$. Na jistém levém prstencovém okolí bodu x_0 proto máme $f' < 0$ a napravo zase $f' > 0$. Proto má f v x_0 ostré lokální minimum (podle Postačující podmínky pro lokální extrémy I; Věta 6.4.9). V případě (ii) postupujeme analogicky.

Přistupme nyní k indukčnímu kroku. Předpokládejme, že věta platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Zabývejme se případem, že $n + 1$ je liché a

$$f^{(n+1)}(x_0) = (f')^{(n)}(x_0) > 0.$$

Z indukčního kroku dostáváme, že f' má v x_0 ostré lokální minimum. Zároveň víme, že $f'(x_0) = 0$. Proto $f' > 0$ na jistém prstencovém okolí x_0 a odtud (f je spojitá) plyne, že f je v x_0 rostoucí.

V ostatních případech se postupuje analogicky (znaménko $f^{(n+1)}(x_0)$ nám dá informaci o chování f' na prstencovém okolí x_0, pak z vlastností f' odvodíme požadované vlastnosti f). □

Někdy je užitečné i následující kritérium, na jehož důkaz zatím nejsme vybaveni (ale brzy budeme).

Věta 6.4.12 (Postačující podmínka pro globální extrém)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Jestliže $f'' \in [0, +\infty)$ na (a, b) a $f'(x_0) = 0$, pak f má v x_0 globální minimum.*

Podobně pro $f'' \leq 0$ a globální maximum.

Příklad 6.4.13. Funkce $f(x) = x^4$ splňuje $f'(0) = 0$ a $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ na $\mathbb{R}$. Proto má v počátku globální minimum.

Metody pro zkoumání monotonie a extrémů se dají mnohdy využít i v situacích, které s touto problematikou zdánlivě nesouvisí.

Příklad 6.4.14. Dokažme si obecnější verzi Youngovy nerovnosti

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \qquad \text{pro } x, y \geq 0, \quad 1 < p < \infty \text{ a } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(tuto nerovnost jsme zatím dokazovali jen pro $p = 2$).

Pokud $x = 0$ nebo $y = 0$, nerovnost je zřejmě splněna. Zafixujme $y > 0$ libovolné. Nyní nám stačí ukázat, že funkce

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$$

je nezáporná na $(0, +\infty)$. Platí

$$f'(x) = x^{p-1} - y.$$

Proto f klesá na $[0, y^{\frac{1}{p-1}}]$ a roste na $[y^{\frac{1}{p-1}}, +\infty)$. Globální minimum na $[0, +\infty)$ má proto hodnotu (připomeňme, že $q = \frac{p}{p-1}$)

$$f\Big(y^{\frac{1}{p-1}}\Big) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{q} - y^{\frac{1}{p-1}}y = \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\Big)y^{\frac{p}{p-1}} = 0,$$

odkud již plyne požadované.

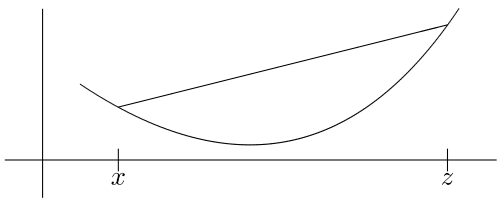
6.5 Konvexita, konkávnost a inflexní body

Definice 6.5.1. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že f je *konvexní* na I, jestliže pro všechna $x, y, z \in I$ splňující $x < y < z$ platí

$$f(y) \leq f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x}(y - x).$$

Je-li nerovnost ostrá, hovoříme o *ryzí konvexitě*. Pojmy *konkávnost* a *ryzí konkávnost* se definují obrácením nerovností.

Poznámka 6.5.2. (i) V definici se při pevně zvolených x, z pracuje s funkcí $\varphi\colon y \mapsto \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y - x)$. Funkce φ je afinní a splňuje $\varphi(x) = f(x)$ a $\varphi(z) = f(z)$. Konvexitu na I lze tedy geometricky interpretovat tak, že funkční hodnoty na libovolném podintervalu $(x, z) \subset I$ leží pod úsečkou spojující body $(x, f(x))$ a $(z, f(z))$.
(ii) Snadno se nahlédne, že f je konvexní právě tehdy, když $-f$ je konkávní. Podobně pro ryzí konvexitu.



Obrázek 6.2: Geometrická interpretace konvexity.

Poznámka 6.5.3. (i) Pokud si při zadaných x, y, z definujeme $\lambda := \frac{z-y}{z-x}$, dostáváme

$$1 - \lambda = \frac{z - x}{z - x} - \frac{z - y}{z - x} = \frac{y - x}{z - x}$$

a

$$\lambda x + (1 - \lambda)z = \frac{z - y}{z - x}x + \frac{y - x}{z - x}z = y.$$

Proto je podmínka z definice konvexity ekvivalentní s

$$f(\lambda x + (1-\lambda)z) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z) \qquad \forall x, z \in I\, \forall \lambda \in [0,1].$$

(ii) Jsou-li x, z pevně zvolené, všechny prvky tvaru $\lambda x + (1-\lambda)z$, kde $\lambda \in [0,1]$, nazýváme *konvexními kombinacemi* prvků x a z.

Posledně zapsaná podmínka v předchozí poznámce se dá napsat do tvaru

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \tag{6.5.1}$$

pro všechna $x_1, x_2 \in I$, pro všechna $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ splňující $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Poslední podmínka se dá zobecnit, aniž bychom ovlivnili námi definovaný pojem konvexity.

Věta 6.5.4 (Jensenova nerovnost)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Pak funkce f je konvexní na I právě tehdy, když*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \text{ kdykoliv } x_1, \dots, x_n \in I,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1] \text{ a } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Důkaz. „$\Leftarrow$“ Tato implikace je pro $n = 2$ zřejmá. Pro $n > 2$ stačí uvážit případ

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \qquad \text{a} \qquad \lambda_3 = \lambda_4 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

který dává podmínku (6.5.1), o níž už víme, že je s konvexitou ekvivalentní.
„$\Rightarrow$“ Budeme postupovat indukcí. Pro $n = 2$ už víme, že dokazovaná nerovnost plyne z konvexity. Nechť f je konvexní na I, nerovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, a máme dány

$$x_1, \dots, x_{n+1} \in I,\ \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0,1] \text{ splňující } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1.$$

Postupnou aplikací nerovnosti pro n prvků a později pro dva prvky dostáváme

$$\begin{aligned}
f\Big(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\Big) &= f\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}\Big) \\
&= f\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + (\lambda_n + \lambda_{n+1})\Big(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_{n+1}\Big)\Big) \\
&\le \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(x_i) + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) f\Big(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_{n+1}\Big) \\
&\le \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(x_i) + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).
\end{aligned}$$

□

Poznámka 6.5.5. Analogické tvrzení platí i pro konkávnost, jen se otočí nerovnost.

Věta 6.5.6 (Charakterizace konvexity směrnicemi)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.*
(i) *f je konvexní na I*
(ii) $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ $\forall x, y, z \in I, x < y < z$
(iii) $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ $\forall x, y, z \in I, x < y < z$
(iv) $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ $\forall x, y, z \in I, x < y < z.$
Podobná charakterizace platí pro ryzí konvexitu, stačí nahradit neostré nerovnosti ostrými.
Analogické charakterizace s obrácenými nerovnostmi platí pro konkávnost.

Důkaz. Použijeme-li definici konvexity, jednoduchou úpravou dostáváme

$$f(y) \le f(x) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x},$$

tedy (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Dále

$$\begin{aligned} f(x) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x) &= f(x) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(z-x+y-z) \\ &= f(z) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-z), \end{aligned}$$

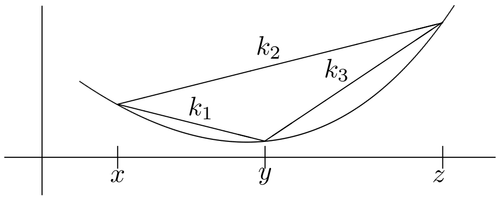
a proto

$$\begin{aligned} f(y) \le f(x) + \frac{f(z)-f(x)}{z-y}(y-x) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(y) \le f(z) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-z) \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}, \end{aligned}$$

tedy (i) $\Leftrightarrow$ (iv). Konečně,

$$\begin{aligned} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-x} + \frac{f(y)-f(x)}{z-x} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) - (f(y)-f(x)) \le f(z)-f(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x-(y-x)) \le f(z)-f(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}, \end{aligned}$$

tedy (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Charakterizace pro ryzí konvexitu se obdrží stejně, jen pracujeme s ostrými nerovnostmi. Konkávnost se vyšetří analogicky (s opačnými nerovnostmi) nebo přechodem k $-f$. $\square$



Obrázek 6.3: Charakterizace konvexity směrnicemi: $k_1 \leq k_2 \leq k_3$.

Věta 6.5.7 (Charakterizace konvexity pomocí druhé derivace)**.** *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, *$f$ je spojitá na $[a, b]$ a dvakrát diferencovatelná na (a, b). Pak*
(i) *f je konvexní na $[a, b]$ právě tehdy, když $f'' \geq 0$ na (a, b)*
(ii) *jestliže $f'' > 0$ na (a, b), pak f je ryze konvexní na $[a, b]$.*
Analogická charakterizace s obrácenými nerovnostmi platí pro konkávnost.

Důkaz. Dokažme implikaci „$\Rightarrow$“ v (i). Nechť f je konvexní na $[a, b]$ a máme $a < \alpha < x < y < \beta < b$. Podle Charakterizace konvexity směrnicemi (Věta 6.5.6) platí

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(\beta) - f(y)}{\beta - y}.$$

Provedeme-li v krajních výrazech limitní přechody $x \to \alpha_+$ a $y \to \beta_-$, díky existenci f' na (a, b) dostáváme

$$f'(\alpha) \leq f'(\beta).$$

Protože dvojici α, β jsme mohli zvolit libovolně, f' musí být neklesající na (a, b) a odtud $f'' \geq 0$ na (a, b).

Dokažme implikaci „$\Leftarrow$“ v (i). Protože $f'' \geq 0$ na (a, b), je f' neklesající na (a, b). Zvolíme-li $x < y < z$ v $[a, b]$ a použijeme-li Lagrangeovu větu o přírůstku funkce (Věta 6.3.3) na jednotlivých intervalech $[x, y]$ a $[y, z]$, máme ($\xi_1 \in (x, y)$, $\xi_2 \in (y, z)$)

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

a konvexita plyne z Charakterizace konvexity směrnicemi (Věta 6.5.6).

Pokud $f'' > 0$ na (a, b), f' je dokonce rostoucí na (a, b) a po aplikaci Lagrangeovy věty dostáváme ostrou nerovnost mezi směrnicemi.

Charakterizace konkávnosti se dokazují například přechodem k $-f$. $\square$

Poznámka 6.5.8. Implikaci ve druhé části předchozí věty není možné otočit. Například funkce $x \mapsto x^4$ je ryze konvexní na $\mathbb{R}$ (dokažte si sami), ale v počátku má nulovou druhou derivaci.

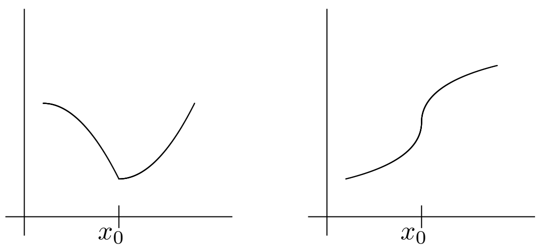
Příklad 6.5.9. Pro $x > 0$ máme $\log'' x = -\frac{1}{x^2} < 0$. Funkce log je tedy konkávní na $(0, +\infty)$. Aplikujeme-li odpovídající verzi Jensenovy nerovnosti na $a_1, \ldots, a_n > 0$, dostáváme

$$\log\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log a_i \leq \log\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_i\Big) = \log\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\Big).$$

Protože funkce log je rostoucí, získáváme okamžitě A-G nerovnost (ta ve standardním znění pracuje s nezápornými čísly, ovšem nerovnost je zřejmě splněna, je-li alespoň jedno z čísel nulové).

Definice 6.5.10 (Inflexní bod)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že x_0 je *inflexní bod* funkce f, jestliže f je diferencovatelná v x_0 a f v bodě x_0 přechází z konvexity do konkávnosti (přesněji: existuje $\delta > 0$ takové, že f je konvexní na $(x_0 - \delta, x_0)$ a konkávní na $(x_0, x_0 + \delta)$, nebo f je konkávní na $(x_0 - \delta, x_0)$ a konvexní na $(x_0, x_0 + \delta)$).

Příklad 6.5.11. (i) Funkce $x \mapsto x^3$ má inflexi v počátku.
(ii) Afinní funkce má inflexi všude na $\mathbb{R}$.
(iii) Funkce $x \mapsto |x|$ má inflexi všude na $\mathbb{R}$ kromě počátku (v počátku derivace neexistuje).
(iv) Funkce $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ a sign nemají v počátku inflexi, neboť zde mají nevlastní derivaci.



Obrázek 6.4: Ilustrace k porušení první podmínky inflexe.

Věta 6.5.12 (Nutná podmínka pro inflexní bod)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ je inflexní bod a f je dvakrát diferencovatelná v x_0. Pak $f''(x_0) = 0$.*

Důkaz. Uvažme například situaci, že f je konvexní na $(x_0 - \delta, x_0)$ a konkávní na $(x_0, x_0 + \delta)$ (v opačném případě se postupuje analogicky). Protože $f''(x_0)$ existuje, případným zmenšením δ lze docílit toho, že navíc $f' \in \mathbb{R}$ na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Použijeme-li Lagrangeovu větu (Věta 6.3.3) stejným způsobem jako v důkazu Charakterizace konvexity podle druhé derivace (Věta 6.5.7), z konvexity dostaneme, že f' je neklesající na $(x_0 - \delta, x_0)$ a nerostoucí na $(x_0, x_0 + \delta)$. Proto má f' v x_0 lokální extrém. Protože navíc existuje $(f')' = f''$ v x_0, musí platit $f''(x_0) = 0$ podle nutné podmínky pro lokální extrém (Věta 6.1.2). $\square$

6.6 Asymptoty

Definice 6.6.1 (Vertikální asymptota)**.** Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě b *vertikální asymptotu*, jestliže má nevlastní limitu pro $x \to b_-$. Analogicky se definuje vertikální asymptota v levém krajním bodě.

Definice 6.6.2 (Asymptota v nekonečnu)**.** Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na intervalu $(a, +\infty) \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je *asymptotou* funkce f pro $x \to +\infty$, jestliže $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + q)) = 0$. Analogicky definujeme asymptotu pro $x \to -\infty$.

Věta 6.6.3 (O asymptotě)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na $(a, +\infty) \subset \mathbb{R}$. Přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f pro $x \to +\infty$ právě tehdy, když platí následující podmínky*
(i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$
(ii) $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = q$.
Analogicky pro $x \to -\infty$.

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Je-li y asymptota, z definice snadno dostaneme (ii). Navíc zřejmě platí $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = 0$, odtud přímo plyne (i).
„$\Leftarrow$“ Podmínka (ii) okamžitě dává, že y je asymptota. $\square$

Příklad 6.6.4. (i) Funkce $x \mapsto x^2$ a $x \mapsto \sqrt{x}$ nemají asymptotu pro $x \to +\infty$.
(ii) Pokud f je definovaná na $(a, +\infty)$ a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, je $y \equiv A$ asymptota f pro $x \to +\infty$.

6.7 Průběh funkce

Cílem této části textu je podat přehled informací, které lze získat z předpisu $y = f(x)$ námi dosud probranými nástroji. Kromě tohoto přehledu ukážeme také několik podrobně řešených příkladů. Standardní průběh funkce obsahuje následující výsledky:
(i) definiční obor
(ii) obor spojitosti
(iii) limity v krajních bodech definičního oboru (či jeho podintervalů) a v bodech nespojitosti
(iv) speciální vlastnosti, jako jsou sudost, lichost, periodicita a jiné symetrie
(v) přehled významných bodů a jejich funkčních hodnot (často se studují průsečíky s osami)
(vi) první derivace a její vyhodnocení: množiny monotonie, lokální a globální extrémy, obor hodnot, omezenost, zkoumání jednostranných derivací v bodech, které derivaci nemají (nebo alespoň limit derivací)
(vii) druhá derivace a její vyhodnocení: konvexita a konkávnost, inflexní body
(viii) asymptoty
(ix) náčrt grafu (důkladnou péči si zaslouží body, kde f nemá vlastní derivaci).

Poznámka 6.7.1. Někdy se nám například nepovede určit nulové body druhé derivace. Pak se alespoň snažíme zjistit jejich počet a přibližnou polohu.

Úloha 6.7.2. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arcsin(\frac{2x}{1+x^2})$.

Řešení: Protože $D_{\arcsin} = [-1, 1]$, s využitím Youngovy nerovnosti dostáváme

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}\colon -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1\right\} = \mathbb{R}.$$

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$, neboť vznikla složením dvou spojitých funkcí (opatrně ale na okolí 1 a -1).

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Naše funkce je lichá (stačí tedy ji vyšetřovat jen na intervalu $[0, +\infty)$). Významným bodem je počátek, platí $f(0) = 0$, jiné průsečíky s osami nejsou.

Počítejme první derivaci (a rovnou ji upravíme do tvaru, ze kterého půjde co nejsnáze vyčíst její znaménko)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}} \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2}{1+x^2} \operatorname{sign}(1-x^2) \qquad \text{pro } x \neq \pm 1. \end{aligned}$$

Pomocí Věty o limitě derivací (Věta 6.3.9) dostáváme

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1_-} f'(x) = 1 \qquad \text{a} \qquad f'_+(1) = \lim_{x\to 1_+} f'(x) = -1$$

($f'(1)$ tedy neexistuje, informace o řádek výše jsou však výstižnější). Vyhodnocením znaménka první derivace a limitního chování dostáváme další informace.

v 0	na $(0,1)$	v 1	na $(1,+\infty)$	v $+\infty$
$f'(0) = 2$	$f' > 0$	$f'_-(1) = 1, f'_+(1) = -1$	$f' < 0$	
$f(0) = 0$	f roste	lokální maximum, $f(1) = \frac{\pi}{2}$	f klesá	$f(x) \overset{x\to+\infty}{\to} 0$

Protože $f < 0$ na $(-\infty, 0)$ a $f > 0$ na $(0, +\infty)$, snadno odvodíme, že $\frac{\pi}{2}$ je dokonce globální maximum. Díky lichosti je $-\frac{\pi}{2}$ globální minimum. Aplikací Darbouxovy věty na $[-1, 1]$ získáváme $H_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Spočítejme druhou derivaci

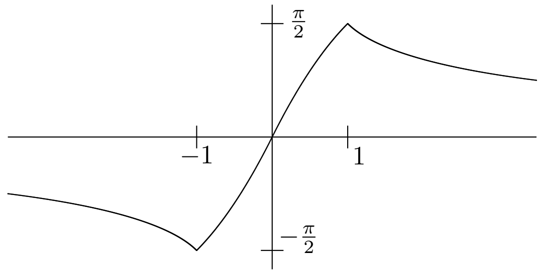
$$f''(x) = \frac{-4x \operatorname{sign}(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \qquad \text{pro } x \neq \pm 1.$$

V bodech ± 1 druhá derivace nemůže existovat už jen díky tomu, že v nich neexistuje první derivace. Vyhodnoťme druhou derivaci.

v 0	na $(0,1)$	v 1	na $(1,+\infty)$
$f''(0) = 0$	$f'' < 0$	$f''(1)$ neexistuje	$f'' > 0$
inflexní bod	f je ryze konkávní		f je ryze konvexní

Asymptotou pro $x \to -\infty$ a $x \to +\infty$ je zřejmě $y \equiv 0$ (neboť $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$).

Nyní již také můžeme načrtnout graf.



Obrázek 6.5: Náčrt části grafu.

☆

Poznámka 6.7.3. Pokud bychom vyšetřovali průběh funkce $f(x) = (x-1)\exp((x-1)^2)$, bylo by pro nás výhodné využít její lichost vůči bodu 1. Tuto symetrii můžeme použít buď přímo, nebo vyšetřit funkci $y \mapsto y\exp(y^2)$ a nakonec z jejích vlastností odvodit vlastnosti funkce f.

Důležitou technikou je provedení částečného průběhu pomocné funkce. Tuto techniku si ukážeme na následujícím příkladu, který zpracujeme poněkud stručně, a až nová technika bude provedena podrobně.

Příklad 6.7.4. Uvažme funkci $f(x) = x\exp(x^2+4x+1)$. Klíčovými kroky průběhu funkce jsou výpočet limit v $\pm\infty$ a určení znaménka první a druhé derivace. Máme

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

a

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^2+4x+1)\exp(x^2+4x+1) \\ &= 2(x-(-1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}))(x-(-1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}))\exp(x^2+4x+1). \end{aligned}$$

O znaménku derivace rozhoduje výraz $(x-(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}))(x-(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}))$, z něhož již vyčteme informace o monotonii. Počítejme druhou derivaci

$$f''(x) = 2(2x^3+8x^2+11x+4)\exp(x^2+4x+1).$$

O znaménku druhé derivace tedy rozhoduje znaménko funkce

$$g(x) = 2x^3+8x^2+11x+4.$$

Rozklad na kořenové činitele, který by nám dodal plnohodnotnou informaci, neumíme jednoduše udělat (i když, pomocí Viètových vzorců, to principiálně možné je). Můžeme se alespoň pokusit použít některé nástroje z průběhu funkce k určení počtu kořenů této funkce a jejich přibližné polohy (důležitá je jejich pozice vůči bodům $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ a $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}$). Máme

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty.$$

Dále

$$g'(x) = 6x^2 + 16x + 11 > 0 \qquad \text{na } \mathbb{R}$$

(díky zápornému diskriminantu). Tedy g je rostoucí funkce a má právě jeden nulový bod x_0. Zkusme dosazovat

$$g(0) = 11, \qquad g(-1) = -1, \qquad g(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}.$$

Tedy $x_0 \in (-1, -\frac{1}{2}) \subset (-1-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1+\frac{1}{\sqrt{2}})$. Výsledky můžeme shrnout do tabulky.

na $(-\infty, -1-\frac{1}{\sqrt{2}})$	na $(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}, x_0)$	na $(x_0, -1+\frac{1}{\sqrt{2}})$	na $(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$
$f'' < 0$ $f' > 0$ f roste f ryze konkávní	$f'' < 0$ $f' < 0$ f klesá f ryze konkávní	$f'' > 0$ $f' < 0$ f klesá f ryze konvexní	$f'' > 0$ $f' > 0$ f roste f ryze konvexní

Z těchto informací (po doplnění alespoň přibližných hodnot funkce ve význačných bodech) už umíme načrtnut graf funkce.

6.8 Taylorův polynom

Cílem této kapitoly je studium aproximovatelnosti diferencovatelných funkcí pomocí polynomů. Dosud jsme zmiňovali jen aproximaci afinními funkcemi, která úzce souvisí s pojmem derivace. Nyní si od bohatší třídy aproximujících funkcí slibujeme, že získáme přesnější aproximace. Zároveň budeme k aproximacím stále používat funkce, s nimiž se dobře pracuje.

Definice 6.8.1 (Taylorův polynom)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}_0$ a nechť $f^{(n)}(x_0)\in\mathbb{R}$. Pak se polynom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

nazývá *Taylorův polynom* stupně n příslušející funkci f v bodě x_0.

Poznámka 6.8.2. V literatuře je možné narazit na různá značení Taylorova polynomu. Používá se například $T^f_{x_0,n}$. Nám však bude vždy jasné, s jakou funkcí a v jakém bodě pracujeme, můžeme si tedy dovolit používat naše stručné značení.

Příklad 6.8.3. (i) Nechť $f(x) = x^2$. Volme $x_0 = 0$, pak

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 2, \qquad f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \geq 3.$$

Proto

$$P_0(x) = 0, \qquad P_1(x) = 0 + 0 \cdot x = 0, \qquad P_2(x) = 0 + 0 \cdot x + \frac{2}{2}x^2 = x^2$$

a

$$P_n(x) = x^2 \quad \forall n \geq 3.$$

(ii) Obecněji pro $f(x) = x^2$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ máme

$$f(x_0) = x_0^2, \qquad f'(x_0) = 2x_0, \qquad f''(x_0) = 2, \qquad f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall k \geq 3.$$

Odtud

$$P_0(x) = x_0^2, \qquad P_1(x) = x_0^2 + \frac{2x_0}{1}(x - x_0) = 2x_0x - x_0^2$$

a

$$P_n(x) = x_0^2 + \frac{2x_0}{1}(x - x_0) + \frac{2}{2}(x - x_0)^2 = 2x_0x - x_0^2 + (x - x_0)^2 = x^2 \quad \forall n \geq 2.$$

(iii) Uvažme funkci $f(x) = \exp x$ a $x_0 = 0$. Protože $\exp^{(k)} 0 = \exp 0 = 1$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$, platí $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}x^k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.
(iv) Pro funkci $f(x) = x|x|$ platí

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0 \qquad \text{a} \qquad f''(0) \text{ neexistuje.}$$

V počátku můžeme tedy zkonstruovat jen Taylorovy polynomy P_0 a P_1. Ve všech ostatních bodech je naše funkce nekonečněkrát diferencovatelná, můžeme v nich tedy sestrojit Taylorův polynom libovolného stupně.

Taylorův polynom má mezi polynomy daného stupně nejlepší aproximační vlastnosti.

Věta 6.8.4 (Peanova)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jeden polynom Q_n stupně nejvýše n takový, že*

$$f(x) - Q_n(x) = \mathrm{o}((x - x_0)^n).$$

Navíc $Q_n = P_n$.

Důkaz. Krok 1: aproximační vlastnost Taylorova polynomu
Nejprve nechť $n = 1$. Protože $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, dokazovaná vlastnost

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_1(x)}{x - x_0} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

plyne z existence vlastní $f'(x_0)$.

Nyní uvažujme $n \geq 2$. Použijeme $(n-1)$-krát L'Hospitalovo pravidlo (verze s nulovými limitami čitatele a jmenovatele, předpoklady prověřujeme průběžně) a dostáváme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}\\
&\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}\\
&\overset{\text{L'H}}{=}\dots\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-\sum_{k=n-1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(k-1)\dots(k-n+2)(x-x_0)^{k-n+1}}{n(n-1)\dots 2(x-x_0)}\\
&=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)}\\
&=\frac{1}{n!}(f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0))=0.
\end{aligned}$$

Krok 2: jednoznačnost
Předpokládejme, že požadovanou aproximační vlastnost má ještě polynom Q_n se stupněm nejvýše n. Polynom $Q_n - P_n$ má stupeň nejvýše n, a proto jej můžeme přepsat (metodou postupného dělení se zbytkem) do tvaru

$$Q_n(x)-P_n(x)=a_n(x-x_0)^n+a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+\dots+a_1(x-x_0)+a_0,$$

kde $a_i\in\mathbb{R}$. Zároveň nám aproximační vlastnost dává

$$\lim_{x\to x_0}\frac{Q_n(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{Q_n(x)-f(x)}{(x-x_0)^n}+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

Proto musí být všechny koeficienty a_i nulové a dostáváme $Q_n\equiv P_n$. □

Poznámka 6.8.5. (i) Pro jednoznačnost je podstatný předpoklad o stupni polynomu. Požadovanou aproximační vlastnost mají všechny Taylorovy polynomy P_m, pro $m\geq n$ (jsou-li takové Taylorovy polynomy definovány).
(ii) Nejčastěji budeme pracovat s funkcemi z $C^\infty((a,b))$.
(iii) V důkazu aproximační vlastnosti jsme nemohli použít L'Hospitalovo pravidlo n-krát, neboť k tomu bychom potřebovali, aby f byla n-krát diferencovatelná na nějakém okolí bodu x_0.

Aproximační vlastnost Taylorova polynomu nám umožňuje využívat Taylorův polynom při počítání limit. Často bývá srovnatelně efektivní jako L'Hospitalovo pravidlo. Taylorovy polynomy odpovídající elementárním funkcím vykazují jisté symetrie koeficientů (podrobněji se tím budeme zabývat níže), proto bývá aplikace typicky elegantnější než užití L'Hospitalova pravidla.

Úloha 6.8.6. Spočtěte $\lim_{x\to 0}\frac{\exp x-1-x}{x^2}$.

Řešení: Protože $\exp\in C^\infty(\mathbb{R})\supset C^2(\mathbb{R})$, máme podle Peanovy věty

$$\exp x = P_2(x)+\mathrm{o}(x^2)=1+x+\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)\qquad\text{pro } x\to 0.$$

Proto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}+0 = \frac{1}{2}.$$

☆

Poznámka 6.8.7. Úloha by se dala řešit také dvojí aplikací L'Hospitalova pravidla.

Taylorův polynom lze občas získat i jinak než z definice. Tato skutečnost činí v některých situací naši novou metodu podstatně rychlejší, než je L'Hospitalovo pravidlo.

Úloha 6.8.8. Spočtěte $\lim_{x\to 0}\frac{\exp x^2 - \exp\frac{x^4}{2} - x^2}{x^6}$.

Řešení: Předně máme (podobně jako v minulé úloze) $\exp t = 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)$ pro $t\to 0$. Díky Větě o limitě složené funkce II (Věta 3.2.13) máme

$$\lim_{t\to 0}\frac{\exp t - (1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6})}{t^3} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{\exp x^2 - (1+x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6})}{x^6} = 0.$$

Proto

$$\exp x^2 = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \mathrm{o}(x^6).$$

Stejným postupem dostaneme

$$\exp\frac{x^4}{2} = 1 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{8} + \mathrm{o}(x^8) = 1 + \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}(x^6).$$

Odtud

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\exp x^2 - \exp\frac{x^4}{2} - x^2}{x^6}\\
&\quad = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}+\mathrm{o}(x^6)) - (1+\frac{x^4}{2}+\mathrm{o}(x^6)) - x^2}{x^6}\\
&\quad = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^6}{6}+\mathrm{o}(x^6)}{x^6} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

☆

Poznámka 6.8.9. (i) Díky jednoznačnosti z Peanovy věty (Věta 6.8.4) jsme vlastně zjistili, že $1+x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}$ a $1+\frac{x^4}{2}$ jsou Taylorovy polynomy příslušných funkcí.
(ii) Úloha šla také řešit šestinásobnou aplikací L'Hospitalova pravidla. Takový postup by však byl mnohem pomalejší. Kupříkladu funkce $\exp x^4$ má v Taylorově polynomu mnoho nulových koeficientů, proto se s tímto polynomem pracuje ještě příjemněji než Taylorovým polynomem odpovídajícím funkci exp. Na druhou stranu, počítání vyšších derivací funkce $\exp x^4$ (což by vyžadoval postup s L'Hospitalovým pravidlem) je podstatně zdlouhavější než počítání derivací funkce exp.

Taylorův polynom není jen silným konkurentem L'Hospitalova pravidla při počítání limit. Dají se totiž pro něj získat odhady pro $R_{n+1}(x) := f(x) - P_n(x)$, což jej činí důležitým nástrojem v numerické matematice. Taylorův polynom je také klíčem k teorii funkcí komplexní proměnné. Poznamenejme, že pro $n = 0$ už vyjadřovat zbytek R_{n+1} umíme, neboť nám Lagrangeova věta (Věta 6.3.3) pro f diferencovatelnou na okolí x_0 dává

$$R_1(x) = f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

kde x bereme z uvedeného okolí a ξ leží mezi body x_0 a x.

Věta 6.8.10 (Odhad chyby Taylorova polynomu)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 < x$, $n \in \mathbb{N}$ a f má na $[x_0, x]$ spojitou n-tou derivaci a na (x_0, x) má derivaci řádu $n+1$ (nemusí být vlastní). Nechť $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v (x_0, x) nenulovou vlastní derivaci a je spojitá na $[x_0, x]$. Pak existuje $\xi \in (x_0, x)$ takové, že*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{\Phi'(x)} f^{(n+1)}(\xi).$$

Speciálně pro $\Phi(t) = (x - t)^{n+1}$ platí

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \textit{(Lagrangeův tvar zbytku)}$$

a pro $\Phi(t) = t$ platí

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{n!}(1-\Theta)^n (x - x_0)^{n+1}, \ \textit{kde } \Theta := \frac{\xi - x_0}{x - x_0} \in (0,1)$$

(Cauchyův tvar zbytku).

Pro případ $x < x_0$ platí obdobný výsledek, v němž všechny formule mají stejný tvar jako výše až na zápis intervalů.

Důkaz. Definujme pomocnou funkci

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k \qquad \text{na } [x_0, x].$$

Máme

$$F(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \text{a} \qquad F(x_0) = f(x) - P_n(x) = R_{n+1}(x).$$

Dále na intervalu (x_0, x) můžeme F derivovat a dostáváme

$$\begin{aligned}
F'(t) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \\
&= -\frac{f'(t)}{0!}(x-t)^0 - \left(\frac{f''(t)}{1!}(x-t)^1 - \frac{f'(t)}{1!}1(x-t)^0\right) \\
&\qquad - \left(\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f''(t)}{2!}2(x-t)^1\right) \\
&\qquad - \ldots - \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^n(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}\right) \\
&= f'(t) - \Big(f''(t)(x-t) - f'(t)\Big) - \left(\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - f''(t)(x-t)\right) \\
&\qquad - \ldots - \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^n(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right) \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.
\end{aligned}$$

Podle předpokladů můžeme použít Cauchyovu větu o přírůstku funkce (Věta 6.3.13) a dostáváme $\xi \in (x_0, x)$ takové, že

$$F(x_0) - F(x) = \frac{F'(\xi)}{\Phi'(\xi)}(\Phi(x_0) - \Phi(x)).$$

Tedy

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{\Phi'(\xi)},$$

čímž jsme získali tvar zbytku pro obecný případ.

Při volbě $\Phi(t) = (x-t)^{n+1}$ dostáváme

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{\Phi'(\xi)} = \frac{-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi)^n}$$

a obecný tvar zbytku přechází na Lagrangeův tvar zbytku.

Pokud $\Phi(t) = t$ a $\Theta = \frac{\xi - x_0}{x - x_0}$ (tedy $\xi = x_0 + \Theta(x - x_0)$), dostáváme

$$\begin{aligned}
R_{n+1}(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0) \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x-x_0))}{n!}(x - x_0 - \Theta(x-x_0))^n(x-x_0),
\end{aligned}$$

což je totéž jako Cauchyův tvar zbytku. □

Nyní již můžeme dokázat větu o globálních extrémech, kterou jsme zatím jen vyslovili (Věta 6.4.12).

Věta 6.8.11 (Postačující podmínka pro globální extrém)**.** *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $x_0 \in (a,b) \subset \mathbb{R}$*. Jestliže* $f'' \in [0,+\infty)$ *na* (a,b) *a* $f'(x_0) = 0$*, pak* f *má v* x_0 *globální minimum.*

Podobně pro $f'' \leq 0$ *a globální maximum.*

Důkaz. Předpokládejme, že $f'' \in [0,+\infty)$ na (a,b) a $f'(x_0) = 0$. Pak můžeme použít Větu o odhadu chyby Taylorova polynomu (Věta 6.8.10) s Lagrangeovým tvarem zbytku kdykoliv $x \in (a,b)$. Dostáváme ξ_x ležící mezi body x_0 a x, a splňující

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi_x)}{2}(x - x_0)^2 \geq f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0)$$

(využili jsme $f'(x_0) = 0$ a $f''(\xi_x) \geq 0$). Proto má f v x_0 globální minimum. Druhá část věty se dokazuje analogicky. □

Důležitou aplikací našich výsledků o Taylorově polynomu jsou numerické aproximace, v nichž se často uplatní Lagrangeův tvar zbytku k získání odhadu chyby či určení stupně Taylorova polynomu, který zajistí požadovanou přesnost.

Úloha 6.8.12. Numericky aproximujte e^2 s přesností 10^{-2}.

Řešení: Použijeme Taylorův polynom se středem $x_0 = 0$. Protože $\exp^{(j)} x = \exp x$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$, máme pro $n \in \mathbb{N}$

$$P_n(2) = \frac{\mathrm{e}^0}{0!}2^0 + \frac{\mathrm{e}^0}{1!}2^1 + \frac{\mathrm{e}^0}{2!}2^2 + \cdots + \frac{\mathrm{e}^0}{n!}2^n = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}.$$

Zbývá tedy určit $n \in \mathbb{N}$ tak, abychom dosáhli požadované přesnosti. Použijeme Lagrangeův tvar zbytku a dostáváme $\xi \in (0,2)$ takové, že platí (zřejmě $e^\xi < 3^2 = 9$)

$$R_{n+1}(2) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}2^{n+1} \leq \frac{9}{(n+1)!}2^{n+1}.$$

Položíme-li $n = 9$, máme

$$|R_{10}(2)| \leq \frac{9}{10!}2^{10} = \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5} < \frac{1}{100}.$$

Nyní už jen stačí vysčítat zlomky v $P_9(2)$ a dostáváme $\mathrm{e}^2 \cong 7{,}3887$. Porovnáním s „přesnou“ hodnotou (například pomocí kalkulačky) zjišťujeme, že chyba je zhruba $4 \cdot 10^{-4}$, tedy o řád nižší, než činil náš (pesimistický) odhad. ☆

Poznámka 6.8.13. V předchozí úloze lze dosáhnout libovolné přesnosti. Pokud totiž máme pevná x_0, x a existuje $K > 0$ takové, že

$$|f^{(j)}(y)| \leq K \qquad \text{pro všechna } y \in (x_0, x) \text{ a všechna } n \in \mathbb{N},$$

pak

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{K(x - x_0)^n}{n!} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Poznámka 6.8.14. V aplikacích většinou máme zadáno x a x_0 si volíme tak, aby se nám s ním dobře počítalo. Ukažme si, jak může volba x_0 ovlivnit přesnost aproximace. Budeme pracovat s $n = 2$ a budeme aproximovat $\sqrt{10}$. Máme tedy funkci $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ a použijeme

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \text{a} \quad f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \qquad \text{na } (0, +\infty).$$

a) Volba $x_0 = 0$ je nepoužitelná, neboť v počátku neexistuje druhá derivace.
b) Položme $x_0 = 1$ a $x = 10$. Pak

$$P_2(10) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x)(x - x_0)^2 = 1 + \frac{9}{2} - \frac{81}{8}$$

a máme $\xi \in (1, 10)$ takové, že

$$|R_3(10)| = \frac{1}{6}\frac{3}{8}\xi^{-\frac{5}{2}}9^3 < \frac{729}{16},$$

což není nijak oslnivý odhad.
c) Zajímavější je volba $x_0 = 9$ a $x = 10$, pro níž už mocniny výrazu $(x - x_0)$ tolik neškodí přesnosti odhadu. Pak

$$P_2(10) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x)(x - x_0)^2 = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\frac{1}{27}$$

a máme $\xi \in (9, 10)$ takové, že

$$|R_3(10)| = \frac{1}{6}\frac{3}{8}\xi^{-\frac{5}{2}}1^3 < \frac{1}{6}\frac{3}{8}\frac{1}{9^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{16}\frac{1}{243} = \frac{1}{3888}.$$

d) Činitel $x - x_0$ se často dá také snižovat využitím speciálních vlastností studované funkce. Máme například

$$\sqrt{10} = \sqrt{9 + 1} = 3\sqrt{1 + \frac{1}{9}}.$$

Zde při volbě $x_0 = 1$ a $x = 1 + \frac{1}{9}$ dostáváme

$$3P_2(1 + \tfrac{1}{9}) = 3\Big(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{9} - \frac{1}{8}\frac{1}{81}\Big)$$

a

$$3|R_3(1 + \tfrac{1}{9})| \le \frac{3}{6}\frac{3}{8}\frac{1}{729} = \frac{1}{3888}.$$

V dalším nás bude zajímat vlastnost $|R_{n+1}(x)| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ pro danou funkci $f \in C^\infty(\mathcal{U}_\delta(x_0))$, kde δ je nějaké kladné číslo. Budeme pracovat s nekonečnými řadami. Jejich součet je definován jako limita jejich částečných součtů (pokud tato limita existuje)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Potřebujeme ještě jedno pomocné tvrzení.

Lemma 6.8.15. *Nechť posloupnost* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *splňuje* $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$. *Pak* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Důkaz. Podle definice limity existují $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$|a_{n+1}| \leq q|a_n| \qquad \text{pro } n \geq n_0.$$

Odtud pro $n > n_0$

$$0 \leq |a_n| \leq q|a_{n-1}| \leq q^2|a_{n-2}| \leq \cdots \leq q^{n-n_0}|a_{n_0}| \overset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

□

Věta 6.8.16 (Základní Taylorovy rozvoje v počátku)**.** *Platí (v levém sloupci vždy uvažujeme* $x \to 0$*):*

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n) \quad a \quad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \quad a \quad \cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) \quad a \quad \sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \quad a \quad \cosh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) \quad a \quad \sinh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n) \quad a \quad \log(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad \forall x \in (-1,1]$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=1}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathrm{o}(x^n) \quad a \quad (1+x)^\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \forall x \in (-1,1),$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *a zobecněné kombinační číslo* $\binom{\alpha}{k}$ *je definováno předpisem*

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Důkaz. Výpočet derivací a dosazení $x_0 = 0$ pro získání Taylorových polynomů je jednoduchým cvičením. Budeme se zabývat jen odhadem velikosti zbytku a jeho konvergencí k nule pro $n \to +\infty$ na uvedených množinách.

Nejprve uvažme $f(x) = \mathrm{e}^x$. Pak pro Lagrangeův tvar zbytku máme

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{e^\xi |x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{\max\{\mathrm{e}^x, 1\}|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Odtud snadno za pomoci Lemmatu 6.8.15 dostáváme požadovanou konvergenci nekonečného rozvoje pro kterékoliv zafixované $x \in \mathbb{R}$. Navíc pro $x \in (-1, 1)$ máme

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^1}{(n+1)!}|x|^{n+1} = \mathrm{o}(x^n).$$

Dále uvažme případ $f(x) = \sin x$. Zde máme

$$|f^{(k)}(x)| \leq 1 \qquad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N}_0 \text{ a } x \in \mathbb{R}.$$

Proto pro Lagrangeův tvar zbytku máme

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

a požadované vlastnosti dokážeme jako výše. Podobně pro kosinus.

Pokud $f = \sinh$ a ξ leží mezi x a x_0, platí

$$|f^{(k)}(\xi)| = \Big|\frac{\mathrm{e}^{\xi} + (-1)^{k+1}\mathrm{e}^{-\xi}}{2}\Big| \leq \frac{\mathrm{e}^{\xi} + \mathrm{e}^{-\xi}}{2} \leq \mathrm{e}^{|x|}$$

a můžeme postupovat podobně jako v případě funkce exp. Podobně pro hyperbolický kosinus.

Uvažme funkci $f(x) = \log(1 + x)$. Pak

$$f^{(k)}(\xi) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+\xi)^k}.$$

Nejprve nechť $x \in (-1, 1)$. Cauchyův tvar zbytku (Lagrangeův by nám dal příliš hrubý odhad pro přechod $n \to +\infty$ pro $x < 0$) spolu se zřejmým odhadem $1 - \Theta \leq 1 - \Theta|x|$ dávají

$$|R_{n+1}(x)| = \Big|\frac{1}{(1+\Theta x)^{n+1}}\frac{1}{n}(1-\Theta)^n x^{n+1}\Big| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}.$$

Pro $x = 1$ nám naproti tomu Lagrangeův tvar zbytku dává

$$|R_{n+1}(x)| = \Big|\frac{f^{(n+1)}(\xi)|x|^{n+1}}{(n+1)!}\Big| = \frac{|x|^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Z posledních dvou odhadů již plynou požadované vlastnosti.

Konečně přistupme k případu $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$ a $x > -1$. Pak

$$f^{(k)}(\xi) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - k + 1)(1 + \xi)^{\alpha - k}$$

a Cauchyův tvar zbytku dává

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x)| &= \Big|(1+\Theta x)^{\alpha-n-1}\alpha\binom{\alpha-1}{n}(1-\Theta)^n x^{n+1}\Big| \\ &= (1+\Theta x)^{\alpha-1}\Big(\frac{1-\Theta}{1+\Theta x}\Big)^n |x|^{n+1}\alpha\binom{\alpha-1}{n} \\ &\leq \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\}|x|^{n+1}\alpha\binom{\alpha-1}{n}. \end{aligned}$$

Za pomoci Lemmatu před větou se snadno ověří, že $|x|^{n+1}\binom{\alpha}{n} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$. Z našeho odhadu zbytku proto plynou dokazované vlastnosti. $\square$

Poznámka 6.8.17. (i) Není obecně pravda, že by se C^∞-funkce dala rozvinout do Taylorovy řady v libovolném bodě tak, aby na nějakém okolí daného bodu konvergovala k této funkci. Kupříkladu funkce

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-x^2}) & \text{pro } x \in (-1,1) \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1) \end{cases}$$

má v bodech ± 1 nulové derivace všech řádů, ale samotná funkce není konstantně rovná nule na jejich okolí.
(ii) Funkce, které se naopak dají rozvinout do nekonečné Taylorovy řady v každém bodě otevřeného intervalu (a,b), se nazývají *reálně analytické* na (a,b).

Příklad 6.8.18. Za pomoci výše získaných Taylorových rozvojů si spočítejme pár limit:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1 + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3))}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \mathrm{o}(x^3)}{x^2} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cosh x - \sin x}{x^3} \\ &\quad = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)) - (1 + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)) - (x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4))}{x^3} \\ &\quad = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

6.8.1 Alternativní metody hledání Taylorových polynomů

Podle Peanovy věty je Taylorův polynom daného stupně (odpovídající dané funkci a středu) jednoznačně určen svými aproximačními vlastnostmi. Této skutečnosti nyní využijeme ke hledání Taylorových polynomů i jinými metodami, než je postupné derivování, které bývá u komplikovanějších funkcí často zdlouhavé.

Nejprve si připomeňme některé výsledky (více detailů je možno nalézt v Sekci 5.2, speciálně pak ve Cvičení 5.2.4).

Cvičení 6.8.19. Nechť $f, g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce definované na okolí $x_0 \in \mathbb{R}$ a $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro $x \to x_0$ platí
(i) $\mathrm{o}(f) \pm \mathrm{o}(f) = \mathrm{o}(f)$
(ii) $\mathrm{o}(f)\,\mathrm{o}(g) = \mathrm{o}(fg)$
(iii) $h = \mathrm{o}(g)$, $g = \mathrm{o}(f) \implies h = \mathrm{o}(f)$
(iv) $\mathrm{o}(\lambda f) = \mathrm{o}(f)$.

V dalším uvažme případ bodu $x_0 = 0$, $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j + \mathrm{o}(x^n)$ a $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j + \mathrm{o}(x^n)$. Můžeme používat následující operace.

Sčítání Taylorových polynomů

Zřejmě platí

$$f(x) + g(x) = \sum_{j=0}^{n} (a_j + b_j)x^j + \mathrm{o}(x^n).$$

Násobení Taylorových polynomů

Máme

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \big(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}(x^n)\big)\big(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \mathrm{o}(x^n)\big) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + \mathrm{o}(x^n) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \Big(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\Big) x^j + \mathrm{o}(x^n). \end{aligned}$$

Příklad 6.8.20. Najděme Taylorův polynom stupně 3 odpovídající funkci $\mathrm{e}^x \sin x$ v počátku. Použijeme rozvoje

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{a} \qquad \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$$

(protože rozvoj funkce $\sin x$ začíná až první mocninou, během násobení se všechny mocniny x v rozvoji funkce e^x zvýší alespoň o jedničku, a proto nám v rozvoji e^x stačí přesnost $\mathrm{o}(x^2)$). Odtud

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x \sin x &= (1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2))\Big(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\Big) \\ &= \Big(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\Big) + \Big(x^2 - \frac{x^4}{6} + \mathrm{o}(x^4)\Big) + \Big(\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \mathrm{o}(x^5)\Big) \\ &\quad + \mathrm{o}(x^2)\Big(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\Big) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3) \end{aligned}$$

(nepoužili jsme vzorec odvozený před příkladem, jednoduše jsme přenásobili oba známé rozvoje).

Poznámka 6.8.21. Pokud bychom špatně naplánovali přesnost původních rozvojů, výpočet by nám nedal požadovanou přesnost, což bychom poznali na výsledku. Uvažme například rozvoje

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{a} \qquad \mathrm{e}^x = 1 + x + \mathrm{o}(x).$$

Pak

$$\begin{aligned}
e^x \sin x &= (1 + x + o(x))\Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) \\
&= \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) + \Big(x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)\Big) + o(x)\Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) \\
&= x + x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + o(x^2) = x + x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^2),
\end{aligned}$$

kde nás na naše pochybení upozorňuje nedostatečná přesnost $o(x^2)$.

Dělení Taylorových polynomů

Zde má smysl uvažovat jen případ, kdy nejnižší nenulový koeficient Taylorova rozvoje funkce g odpovídá mocnině x, která je menší nebo rovna mocnině x při nejnižším nenulovém koeficientu funkce f (tedy připouštíme například $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}$, nikoliv $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$). Dělit se dá třemi způsoby. První metoda je založená na dělení polynomů se zbytkem, druhá metoda na výpočtu neurčitých koeficientů a třetí metoda využívá geometrickou řadu. Tyto metody si postupně představíme na příkladech.

Příklad 6.8.22. Najděme rozklad funkce tan do Taylorova polynomu s přesností $o(x^5)$ metodou dělení polynomů se zbytkem. Máme

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\
&= x + \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - x\big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\big)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\
&= x + \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + o(x^5) - \frac{x^3}{3}(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5))}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{\frac{2x^5}{15} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{\frac{2x^5}{15} + o(x^5) - \frac{2x^5}{15}(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5))}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).
\end{aligned}$$

V případě metody neurčitých koeficientů si požadovaný rozvoj napíšeme s neurčitými koeficienty, obě strany rovnosti vynásobíme jmenovatelem, čímž problém převedeme na násobení Taylorových polynomů. Následně budeme řešit lineární soustavu rovnic pro hledané koeficienty.

Příklad 6.8.23. Najděme rozklad funkce tan do Taylorova polynomu s přesností $o(x^5)$ metodou neurčitých koeficientů. Chceme najít $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o(x^5).$$

To je na dostatečně malém okolí počátku ekvivalentní s

$$\begin{aligned} x - &\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ &= \big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o(x^5)\big)\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\Big) \\ &= a_0 + a_1 x + \Big(a_2 - \frac{a_0}{2}\Big)x^2 + \Big(a_3 - \frac{a_1}{2}\Big)x^3 + \Big(a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24}\Big)x^4 \\ &\qquad + \Big(a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{24}\Big)x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Odtud porovnáním koeficientů v jednotlivých rozvojích dostáváme

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= 0 + \frac{a_0}{2} = 0 \\ a_3 &= -\frac{1}{6} + \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \\ a_4 &= 0 + \frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{24} = 0 \\ a_5 &= \frac{1}{120} + \frac{a_3}{2} - \frac{a_1}{24} = \frac{1}{120} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Proto

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

Pro metodu s geometrickou řadou si potřebujeme nejprve uvědomit, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

(výsledek se dá snadno ověřit libovolnou z předchozích metod). Dále předpokládejme, že pro naši funkci $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j + o(x^n)$ platí podmínka $b_0 \neq 0$ (nebo funkce v čitateli má v 0 kořen alespoň stejného stupně jako funkce g a podělením příslušné mocniny xpřejdeme na situaci uvažovanou níže). Bez újmy na obecnosti lze předpokládat $b_0 = 1$ (vytknutím $b_0 \neq 0$ před celý zlomek se dostaneme na tento případ). Pak máme

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} &= 1 + (g(x)-1) + (g(x)-1)^2 + \cdots + (g(x)-1)^n + o((g(x)-1)^n) \\ &= 1 + (g(x)-1) + (g(x)-1)^2 + \cdots + (g(x)-1)^n + o(x^{n^2}) \\ &= 1 + (g(x)-1) + (g(x)-1)^2 + \cdots + (g(x)-1)^n + o(x^n). \end{aligned}$$

Skutečně, na horním řádku jsme využili Větu o limitě složené funkce II (Věta 3.2.13). Nyní již jen stačí dosadit do výsledné formule rozvoj funkce g a následně vše vynásobit rozvojem funkce f.

Příklad 6.8.24. Najděme rozklad funkce tan do Taylorova polynomu s přesností $\mathrm{o}(x^5)$ metodou s geometrickou řadou. Máme

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5)}.$$

Podle úvah uvedených výše platí

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5))} \\
&= 1 + \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5)\Big) + \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5)\Big)^2 + \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5)\Big)^3 \\
&\qquad + \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5)\Big)^4 + \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5)\Big)^5 + \mathrm{o}(x^5) \\
&= 1 + \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5)\Big) + \Big(\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)\Big)^2 + \mathrm{o}(x^5) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5).
\end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned}
\tan x &= \Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5)\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5)\Big) \\
&= x + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\Big)x^3 + \Big(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\Big)x^5 + \mathrm{o}(x^5) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathrm{o}(x^5).
\end{aligned}$$

Taylorův polynom pro $f \circ g$

Zde požadujeme, aby $b_0 = 0$. Aplikací Věty o limitě složené funkce II (Věta 3.2.13, podobně jako v metodě s geometrickou řadou) odhadneme velikost chyby výsledného Taylorova polynomu a máme

$$(f \circ g)(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k x^k\Big)^j + \mathrm{o}(x^n).$$

Příklad 6.8.25. Najděme rozklad funkce $\mathrm{e}^{\sin x}$ do Taylorova polynomu s přesností $\mathrm{o}(x^5)$. Platí (pro $t \to 0$ a $x \to 0$)

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + \mathrm{o}(t^5)$$

a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5).$$

Proto

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\sin x} &= 1 + \Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5)\Big) + \frac{1}{2}\Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5)\Big)^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}\Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5)\Big)^3 + \frac{1}{24}\Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5)\Big)^4 \\
&\quad + \frac{1}{120}\Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5)\Big)^5 + \mathrm{o}(x^5) \\
&= 1 + \Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5)\Big) + \frac{1}{2}\Big(x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}(x^5)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{6}\Big(x^3 - \frac{x^5}{2} + \mathrm{o}(x^5)\Big) + \frac{1}{24}\Big(x^4 + \mathrm{o}(x^5)\Big) + \frac{1}{120}\Big(x^5 + \mathrm{o}(x^5)\Big) + \mathrm{o}(x^5) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \Big(-\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\Big)x^4 + \Big(\frac{1}{120} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\Big)x^5 + \mathrm{o}(x^5) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + \mathrm{o}(x^5).
\end{aligned}$$

6.9 Dodatek ke vztahu monotonie a znaménka derivace

Připomeňme, že umíme dokázat následující výsledek.

Tvrzení 6.9.1. *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na (a,b) a platí $f' \geq 0$ na $(a,b) \setminus K$, kde $K \subset (a,b)$ je konečná množina. Pak f je neklesající na (a,b).*

V následujícím si jednak ukážeme, že předchozí výsledek je možné zobecnit a povolit spočetnou množinu, kde nekontrolujeme derivaci. Naopak si ukážeme, že i nespočetná množina, která je v jistém smyslu velmi malá, může znamenat problém.

Definice 6.9.2. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a $x \in M$. Řekneme, že x je *vnitřní bod* množiny M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathcal{U}_\delta(x) \subset M$.

Lemma 6.9.3 (Zygmundovo lemma)**.** *Nechť funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu (a,b) a $f(\{x \in (a,b)\colon \mathrm{non}(f'(x) > 0)\})$ neobsahuje vnitřní bod. Pak je f neklesající na (a,b).*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ a $f(\alpha) > f(\beta)$. Podle předpokladu o množině $f(\{x \in (a,b)\colon \mathrm{non}(f'(x) > 0)\})$ můžeme najít úroveň $u \in \big(f(\beta), f(\alpha)\big)$ takovou, že $f'(x) > 0$, kdykoliv $f(x) = u$. Položme

$$P := \{x \in (\alpha,\beta)\colon f(x) > u\} \qquad \text{a} \qquad S := \sup P.$$

Ze spojitosti f a $u \in (f(\beta), f(\alpha))$ zřejmě plyne $S \in (\alpha,\beta)$. Nyní mohou nastat tři možnosti.
Pokud $f(S) > u$, ze spojitosti f máme $f > u$ na jistém pravém okolí bodu S, což je spor s volbou S.

Pokud $f(S) < u$, ze spojitosti f máme $f < u$ na jistém levém okolí bodu S, což je spor s volbou S.
Pokud $f(S) = u$, máme $f'(S) > 0$, f je tedy rostoucí v S a opět dostaneme spor s volbou S. □

Důsledek 6.9.4. *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na (a, b) a platí $f' \geq 0$ na $(a, b) \setminus K$, kde $K \subset (a, b)$ je nejvýše spočetná množina. Pak je f neklesající na (a, b).*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ a $f(\alpha) > f(\beta)$. Definujme $g(x) = f(x) + \varepsilon x$, kde $\varepsilon > 0$ je tak malé, že $g(\alpha) > g(\beta)$. Teď už máme $g' > 0$ na $(a, b) \setminus K$. Na g můžeme aplikovat Zygmundovo lemma (obrazem nejvýše spočetné množiny je zřejmě nejvýše spočetná množina a ta nemůže obsahovat vnitřní bod) a dostaneme spor s $g(\alpha) > g(\beta)$. □

Důsledek 6.9.5. *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na (a, b) a platí $f' = 0$ na $(a, b) \setminus K$, kde $K \subset (a, b)$ je nejvýše spočetná množina. Pak f je konstantní na (a, b).*

Důkaz. Plyne snadno z předchozího Důsledku 6.9.4. □

Nyní si ukážeme, že podobné výsledky nemusí platit pro K nespočetnou.

Příklad 6.9.6 (Cantorova funkce, ďábelské schodiště)**.** Cantorova funkce je neklesající funkce, jejíž konstrukce (zatím jen nultý až druhý krok) vypadá následovně

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, F(1) = 1 \\ F &= \frac{1}{2} \quad \text{na } [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}] \\ F &= \frac{1}{4} \quad \text{na } [\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}] \qquad \text{a} \qquad F = \frac{1}{4} \quad \text{na } [\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}]. \end{aligned}$$

Pokračujeme indukcí. Po n-tém kroku máme 2^n otevřených intervalů délky 3^{-n}, na kterých funkce dosud nebyla definována. Z těchto intervalů vezmeme vždy prostřední třetinu a funkci F na ní definujeme jako průměr hodnot na krajích intervalu.

Protože není zcela jasné, že tento proces přiřadí funkční hodnotu všem bodům z $[0, 1]$, ukažme si, jak by se funkce dodefinovala ve zbývajících bodech. Označme

$$M := \{x \in [0, 1]\colon \text{bodu } x \text{ byla přiřazena funkční hodnota v některém kroku}\}.$$

Z konstrukce plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$ vlastnost

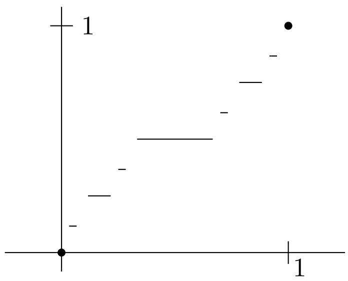
$$x, y \in M \wedge |x - y| \leq 3^{-n} \qquad \Longrightarrow \qquad |F(x) - F(y)| \leq 2^{-n}. \tag{6.9.1}$$

Dále F je na M nerostoucí. Protože navíc v libovolném okolí každého bodu z $(0, 1)$ jsou na obou stranách tohoto bodu přítomny body z M, existují v tomto bodě (díky monotonii F na M) jednostranné limity. Díky vlastnosti (6.9.1) se obě jednostranné limity musí rovnat. Můžeme tedy F na $[0, 1] \setminus M$ dodefinovat limitou funkčních hodnot z M. Díky zachování nerovností při limitním přechodu navíc získáváme vlastnost (6.9.1) dokonce pro $x, y \in [0, 1]$. Tato vlastnost implikuje dokonce stejnoměrnou spojitost.

Výsledná funkce má nulovou derivaci na vnitřcích jednotlivých intervalů, kde je konstantní. Součet délek těchto intervalů je

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{3} \frac{1 - (\frac{2}{3})^{k+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Množina zbývajících bodů se nazývá *Cantorovo diskontinuum* a je nespočetná (kdyby byla spočetná, musela by F být konstantní podle výsledků výše).



Obrázek 6.6: Náznak konstrukce Cantorovy funkce.

Poznámka 6.9.7. Část matematické analýzy, která se zabývá problémy podobného typu, se nazývá Teorie reálných funkcí.

Kapitola 7

Newtonův a Riemannův integrál

Pojem integrálu (někdy nepřesně nazývaný „integrálem určitým“) patří k nejdůležitějším pojmům matematické analýzy a v jejích aplikacích se používá velice často. V této kapitole se seznámíme se dvěma typy integrálu, Newtonovým a Riemannovým, později pak ještě s integrálem Lebesgueovým.

Uvažujme následující úlohu. Mějme hmotnou tyč se zadanou lineární hustotou $\varrho(x)$, $x \in [a,b]$. Cílem je najít hmotnost tyče. Je-li $\varrho = konst$, pak $m = \varrho(b-a)$. Není-li ϱ konstantní, pak máme následující možnosti.

a) Vezměme $x \in (a,b]$ a předpokládejme, že (případně myšlenkovým) pokusem umíme určit hmotnost části tyče $[a,x]$ pro všechna $x \in (a,b]$, tedy umíme určit $m(x)$. Potom pro $b \geq y > x > a$ je „střední“ hodnota lineární hustoty na úseku mezi x a y

$$\varrho_{mean} = \frac{m(y)-m(x)}{y-x},$$

proto

$$\varrho(x) = \lim_{y \to x^+} \frac{m(y)-m(x)}{y-x} = m'(x),$$

tedy $\varrho(x) = m'(x)$. Dostáváme

$$m_{total} = \int m'(x)\,\mathrm{d}x|_{x=b} - 0(= m(a)),$$

což lze psát jako

$$m_{total} = \int \varrho(x)\,\mathrm{d}x|_{x=b} - \int \varrho(x)\,\mathrm{d}x|_{x=a},$$

tedy jako rozdíl primitivních funkcí v bodě b a a (a proto nevzniká problém s integrační konstantou, ta se odečte). Toto je podstata *Newtonova integrálu*, je-li

F primitivní funkce k f, pak

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

b) Pokusme se nyní postupovat jinak. Představme si, že umíme rozdělit tyč na malé části a přibližně spočítáme hmotnost každé části tyče (mezi x a $x + \Delta x$) jako

$$\Delta m_i = \varrho(x_i)(\Delta x)_i, \qquad x_i \in [x, x + (\Delta x)_i], \text{ libovolné.}$$

Potom $m_{approx} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i = \sum_{i=1}^n \varrho(x_i)(\Delta x)_i$, je-li tyč rozdělena na n dílků, přičemž $x_i \in [x, x + (\Delta x)_i]$ je libovolné. Očekáváme, že když $n \to +\infty$ (a současně $(\Delta x)_i \to 0_+$), pak se bude m_{approx} blížit ke skutečné hmotnosti tyče, tedy

$$m_{total} = \lim_{(\Delta x)_i \to 0_+} \sum_{i=1}^n \Delta m_i = \lim_{(\Delta x)_i \to 0_+} \sum_{i=1}^n \varrho(x_i)(\Delta x)_i.$$

Počítáme vlastně obsah pod grafem funkce $x \mapsto \varrho(x)$. Toto je základem *Riemannova integrálu*, tedy

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{(\Delta x)_i \to 0_+} \sum_{i=1}^n \varrho(x_i)(\Delta x)_i.$$

Uvidíme později, že pro „rozumné funkce“ dávají oba integrály tutéž hodnotu.

c) Poslední typ integrálu se kterým se v tomto kurzu seznámíme, tedy integrál Lebesgueův, je založen na myšlence měřit přesně velikost množin, na kterých naše funkce nabývá jednotlivých hodnot. Proto se dá velice jednoduše zobecnit na integrál nad vícerozměrnými množinami. Teď se ale tomuto velice důležitému pojmu nebudeme více věnovat.

7.1 Zavedení Newtonova integrálu

Definice 7.1.1 (Zobecněná primitivní funkce)**.** Nechť $f, F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že F je *zobecněnou primitivní funkcí* k f na (a,b), jestliže
(i) F je spojitá na (a,b)
(ii) $F' = f$ na $(a,b) \setminus K$, kde $K \subset (a,b)$ splňuje podmínku

$$K \cap (-n, n) \text{ je konečná množina kdykoliv } n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka 7.1.2. (i) Pokud je (a,b) omezený interval, připouštíme jen konečnou množinu K. Pokud $(a,b) = \mathbb{R}$, lze připustit třeba $K = \mathbb{Z}$.
(ii) Je-li F primitivní funkcí k f na (a,b), je automaticky také zobecněnou primitivní funkcí.
(iii) Funkce $F(x) = |x|$ je zobecněnou primitivní funkcí k funkci sign na $\mathbb{R}$, ale není její primitivní funkcí, neboť neexistuje $F'(0)$ (tedy F nemůže být na intervalu obsahujícím bod 0 primitivní funkcí ani k žádné jiné funkci). Obráceně, funkce sign

nemůže být derivací žádné funkce, neboť nesplňuje Darbouxovu vlastnost.
(iv) Dirichletova funkce nemůže mít zobecněnou primitivní funkci, neboť pak by na jednotlivých intervalech tvořících $(a,b) \setminus K$ musela mít Darbouxovu vlastnost (připomeňme Definici 6.2.6).

Poznámka 7.1.3. Funkce se nazývá *po částech konstantní* na $(a,b) \subset \mathbb{R}$, je-li možno (a,b) rozdělit na konečný počet podintervalů, na nichž je funkce konstantní.

Tvrzení 7.1.4. (i) *Je-li F zobecněná primitivní funkce k f na (a,b) a $C \in \mathbb{R}$, pak $F + C$ je také zobecněná primitivní funkce k f na (a,b).*
(ii) *Jsou-li F a G zobecněné primitivní funkce k f na (a,b), pak existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že $G = F + C$.*
(iii) *Je-li F_1 zobecněná primitivní funkce k f na (a,b), F_2 zobecněná primitivní funkce k f na (b,c) a existují-li vlastní $\lim_{x\to b_-} F_1(x)$ a $\lim_{x\to b_+} F_2(x)$, pak*

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) & \text{pro } x \in (a,b) \\ \lim_{x\to b_-} F_1(x) & \text{pro } x = b \\ F_2(x) - \lim_{x\to b_+} F_2(x) + \lim_{x\to b_-} F_1(x) & \text{pro } x \in (b,c) \end{cases}$$

je zobecněná primitivní funkce k f na (a,c).

Důkaz. Části (i) a (iii) jsou snadné. Dokažme (ii). Množina $(a,b) \setminus K$ je tvořena nejvýše spočetným sjednocením disjunktních otevřených intervalů. Označíme-li nějaký takový interval (α,β), pak na $[\alpha,\beta]$ splňuje funkce $G - F$ předpoklady Lagrangeovy věty a dostáváme, že je na takovém uzavřeném intervalu konstantní. Tento výsledek dostaneme na všech intervalech uvedeného typu. Protože se naše intervaly překrývají v koncových bodech, dostáváme, že získaná konstanta musí být stále stejná. □

Definice 7.1.5. (Newtonův integrál) Nechť $f, F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a F je zobecněnou primitivní funkcí k f na (a,b). Nechť existují vlastní limity

$$F(a_+) := \lim_{x\to a_+} F(x) \qquad \text{a} \qquad F(b_-) := \lim_{x\to b_-} F(x).$$

Pak číslo

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := [F(x)]_a^b := F(b_-) - F(a_+)$$

nazveme *Newtonovým integrálem* funkce f od a do b.

Poznámka 7.1.6. Velikost Newtonova integrálu nezávisí na volbě zobecněné primitivní funkce. Takové funkce jsou v případě existence určeny jednoznačně až na aditivní konstantu a ta se ve výrazu $F(b_-) - F(a_+)$ vyruší.

Poznámka 7.1.7. V literatuře se často setkáváme i se zkrácenými verzemi zápisu $(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Často bývá jasné, přes jakou proměnnou se integruje (nedorozumění vlastně hrozí jen při práci ve vyšší dimenzi, což se nás zatím netýká). Je tedy možné potkat následující značení

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (\mathcal{N}) \int_a^b f\,\mathrm{d}x, \qquad (\mathcal{N}) \int_a^b f.$$

My zde budeme používat to prostřední. Někdy se také znak $(\mathcal{N})$ před integrálem vynechává, zejména pokud se pracuje výhradně s Newtonovým integrálem a nehrozí záměna za jiný. My bude v této kapitole tento znak používat, protože budeme často pracovat souběžně s integrálem Newtonovým a Riemannovým a rádi bychom čtenáři usnadnili orientaci v textu.

Věta 7.1.8 (Základní vlastnosti Newtonova integrálu)**.** *Nechť funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $(a, b) \subset \mathbb{R}$.*
(i) *Jestliže $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a existují $(\mathcal{N}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x$ a $(\mathcal{N}) \int_a^b g \,\mathrm{d}x$, pak*

$$(\mathcal{N}) \int_a^b (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}x = \alpha(\mathcal{N}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x + \beta(\mathcal{N}) \int_a^b g \,\mathrm{d}x.$$

(ii) *Nechť navíc $c \in (a, b)$, pak*

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x = (\mathcal{N}) \int_a^c f \,\mathrm{d}x + (\mathcal{N}) \int_c^b f \,\mathrm{d}x,$$

existují-li integrály alespoň na jedné straně.
(iii) *Jestliže $f \geq 0$ na (a, b), pak*

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f \mathrm{d}x \geq 0.$$

Důkaz. Při důkazu první části si stačí uvědomit, že jsou-li F, G zobecněné primitivní funkce k f, g na (a, b), pak $\alpha F + \beta G$ je zobecněná primitivní funkce k $\alpha f + \beta g$ (spojitost plyne z aritmetiky spojitosti; pokud $F' = f$ na $(a, b) \setminus K_1$ a $G' = g$ na $(a, b) \setminus K_2$, pak $(\alpha F + \beta G)' = \alpha f + \beta g$ na $(a, b) \setminus (K_1 \cup K_2)$ a $K_1 \cup K_2$ má vlastnost požadovanou definicí). Nyní již jen stačí použít aritmetiku limit.

Dokažme druhou část. Nejprve předpokládejme, že existuje dvojice integrálů na pravé straně. Nechť F_1 je zobecněná primitivní funkce k f na (a, b) a F_2 je zobecněná primitivní funkce k f na (b, c). Podle třetí části Tvrzení o vlastnostech zobecněné primitivní funkce (Tvrzení 7.1.4) existuje $C \in \mathbb{R}$ tak, že

$$F(x) := \begin{cases} F_1(x) & \text{pro } x \in (a, c) \\ F_1(c_-) & \text{pro } x = c \\ F_2(x) + C & \text{pro } x \in (c, b) \end{cases}$$

je zobecněná primitivní funkce k f na (a, b) (speciálně $F(c) = F(c_+) = F(c_-) = F_1(c_-) = F_2(c_+) + C$ díky spojitosti). Proto

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x &= F(b_-) - F(a_+) = F(b_-) - F(c_+) + F(c_+) - F(a_+) \\ &= F_2(b_-) + C - (F_2(c_+) + C) + F_1(c_-) - F_1(a_+) \\ &= F_2(b_-) - F_2(c_+) + F_1(c_-) - F_1(a_+) \\ &= (\mathcal{N}) \int_a^c f \,\mathrm{d}x + (\mathcal{N}) \int_c^b f \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Pokud existuje naopak integrál na straně levé, důkaz je jen lehkým cvičením, které využívá spojitost zobecněné primitivní funkce.

Při důkazu třetí části si stačí uvědomit, že odpovídající zobecněná primitivní funkce je neklesající. □

Poznámka 7.1.9. Pokud $f \le g$ mají Newtonův integrál na (a, b), díky výsledkům výše také dostáváme

$$(\mathcal{N})\int_a^b f\,\mathrm{d}x \le (\mathcal{N})\int_a^b g\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 7.1.10. Pokud f a $|f|$ mají Newtonův integrál na (a, b), z nerovnosti $-|f| \le f \le |f|$ dostáváme

$$\left|(\mathcal{N})\int_a^b f\,\mathrm{d}x\right| \le (\mathcal{N})\int_a^b |f|\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 7.1.11. (i) metodou per-partes získáme

$$(\mathcal{N})\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x = [x\log x - x]_0^1 = \lim_{x\to 1_-}(x\log x - x) - \lim_{x\to 0_+}(x\log x - x) = -1$$

(ii) metoda per-partes také dává

$$\begin{aligned}(\mathcal{N})\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= [-(x+1)\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty}\\ &= \lim_{x\to+\infty}(-(x+1)\mathrm{e}^{-x}) - \lim_{x\to 0_+}(-(x+1)\mathrm{e}^{-x}) = 1\end{aligned}$$

(iii) přímým výpočtem dostaneme (výsledek $+\infty$ znamená, že integrál dle Definice 7.1.5 neexistuje)

$$(\mathcal{N})\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases}[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}]_0^1 = \lim_{x\to1_-}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \lim_{x\to0_+}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1} & \text{pro } \alpha > -1\\ [\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}]_0^1 = \lim_{x\to1_-}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \lim_{x\to0_+}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = +\infty & \text{pro } \alpha < -1\\ [\log x]_0^1 = \lim_{x\to1_-}\log x - \lim_{x\to0_+}\log x = +\infty & \text{pro } \alpha = -1\end{cases}$$

(iv) dále máme

$$\begin{aligned}&(\mathcal{N})\int_1^{+\infty} x^\alpha\,\mathrm{d}x\\ &= \begin{cases}[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}]_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \lim_{x\to1_+}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = +\infty & \text{pro } \alpha > -1\\ [\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}]_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \lim_{x\to1_+}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{1}{|\alpha+1|} & \text{pro } \alpha < -1\\ [\log x]_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\log x - \lim_{x\to1_+}\log x = +\infty & \text{pro } \alpha = -1\end{cases}\end{aligned}$$

(v) protože se funkce $x \mapsto \frac{1}{x}$ výše ukázala jako hraniční případ pro existenci integrálu, je zajímavé zkusit třeba

$$(\mathcal{N})\int_2^{+\infty}\frac{1}{x}\log^\alpha x\,\mathrm{d}x = \begin{cases}[\frac{\log^{\alpha+1}x}{\alpha+1}]_2^{+\infty} = +\infty & \text{pro } \alpha > -1\\ [\frac{\log^{\alpha+1}x}{\alpha+1}]_2^{+\infty} = \frac{\log^{\alpha+1}(2)}{|\alpha+1|} & \text{pro } \alpha < -1\\ [\log(\log x)]_2^{+\infty} = +\infty & \text{pro } \alpha = -1\end{cases}$$

(vi) nebo

$$(\mathcal{N})\int_3^{+\infty}\frac{1}{x\log x}\log^\alpha(\log x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}[\frac{\log^{\alpha+1}(\log x)}{\alpha+1}]_3^{+\infty}=+\infty & \text{pro } \alpha>-1\\ [\frac{\log^{\alpha+1}(\log x)}{\alpha+1}]_3^{+\infty}=\frac{\log^{\alpha+1}(\log 3)}{|\alpha+1|} & \text{pro } \alpha<-1\\ [\log(\log(\log x))]_3^{+\infty}=+\infty & \text{pro } \alpha=-1.\end{cases}$$

Poznámka 7.1.12. V literatuře se někdy připouští i případ divergentního Newtonova integrálu, tedy situace, kdy $F(b_-)-F(a_+)$ není vlastní, ale má dobrý smysl v $\mathbb{R}^*$.

Poznámka 7.1.13. I když jsme výše pracovali pouze s reálnými funkcemi, definice Newtonova integrálu se dá přirozeně přenést na funkce komplexní. Je-li tedy $f = f_1 + \mathrm{i}f_2$, kde $f_1, f_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, pak

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := (\mathcal{N})\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}(\mathcal{N})\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x,$$

pokud oba integrály napravo existují v $\mathbb{R}$.

7.2 Darbouxova definice Riemannova integrálu

Nyní si představíme integrál, který není zadefinován pomocí primitivní funkce, ale za pomoci konstrukce, při níž se snažíme spočítat plochu pod grafem dané funkce. Podobně jako u Newtonova integrálu, integrovatelné budou jen některé funkce. Čtenáři můžeme dopředu prozradit, že „zakázanými“ funkcemi v podobných konstrukcích bývají typicky funkce, u nichž hrozí

$$\int_a^b (f+g)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b f\,\mathrm{d}x + \int_a^b g\,\mathrm{d}x$$

(uvážíme-li Dirichletovu funkci $D(x)$, můžeme mít názor, že na intervalu $(0,1)$ je plocha pod grafem nulová a zároveň plocha pod grafem funkce $1-D(x)$ je nulová; takovéto funkce je nutné integrálu zakázat a nebo konstrukci integrálu nějak modifikovat).

Následující konstrukce vedoucí k definici našeho nového integrálu pochází od Darbouxa. Později si ukážeme i původní Riemannovu definici, která je sice méně elegantní, ale její znalost se občas hodí při výpočtu hodnoty integrálu.

Definice 7.2.1 (Dělení intervalu)**.** Nechť $[a,b]\subset\mathbb{R}$ a $D=\{x_j\}_{j=0}^n\subset\mathbb{R}$ je konečná množina. Řekneme, že D je *dělením* intervalu $[a,b]$, jestliže

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Jsou-li D a D' dvě dělení intervalu $[a,b]$ a platí-li $D\subset D'$, řekneme, že D' je *zjemněním* dělení D.

V dalším uvažujme pevně zvolenou funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je omezená a platí pro ni $D_f \supset [a,b]$. Je-li D zafixovaným dělením intervalu $[a,b]$, položme pro všechna $i \in \{1,\dots,n\}$

$$m_j := \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \qquad \text{a} \qquad M_j := \sup_{[x_{j-1},x_j]} f.$$

Definujme ještě

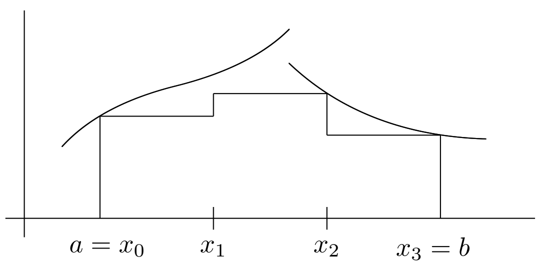
$$m := \min_{j\in\{1,\dots,n\}} m_j = \inf_{[a,b]} f \qquad \text{a} \qquad M := \max_{j\in\{1,\dots,n\}} M_j = \sup_{[a,b]} f.$$

Definice 7.2.2 (Dolní a horní Riemannův součet)**.** Nechť f, $[a,b]$ a D jsou jako výše. *Dolním Riemannovým součtem* (příslušejícím funkci f a dělení D) nazveme číslo

$$s(f,D) := \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}).$$

Horním Riemannovým součtem nazveme

$$S(f,D) := \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{i-j}).$$



Obrázek 7.1: Konstrukce dolního Riemannova součtu.

Poznámka 7.2.3. Za našich předpokladů jsou čísla $s(f,D)$ a $S(f,D)$ vždy definována a platí pro ně

$$m(b-a) \le s(f,D) \le S(f,D) \le M(b-a).$$

Poznámka 7.2.4. Pokud $b = a$, připadá v úvahu jen dělení s jediným bodem $x_0 = a = b$. Je pak přirozené definovat symbol $\sum_{i=1}^{0}$ jako součet nulového počtu členů, tedy nulu. Dostáváme $s(f,D) = S(f,D) = 0$. Tato situace žádné zajímavé či užitečné výsledky nenabízí. Stejně tak všechna dokazovaná tvrzení o vlastnostech Riemannova integrálu platí triviálně. Domluvme se tedy, že tento případ nebudeme vylučovat z našich tvrzení, zároveň se jím ale nebudeme zabývat v důkazech.

Tvrzení 7.2.5 (O monotonii integrálních součtů)**.** *Nechť f a $[a,b]$ jsou jako výše a D, D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Pak*
(i) *je-li D zjemněním D_1, platí*

$$s(f,D_1) \le s(f,D) \le S(f,D) \le S(f,D_1) \tag{7.2.1}$$

(ii) *jsou-li D_1 a D_2 libovolná dělení, platí*

$$s(f,D_1) \le S(f,D_2) \qquad a \qquad s(f,D_2) \le S(f,D_1).$$

Důkaz. Dokažme část (i). Nejprve se podívejme na nerovnost nejvíce nalevo v nerovnostech (7.2.1). Můžeme předpokládat, že dělení D obsahuje o jeden bod více než D_1, v ostatních případech použijeme indukci. Nechť tedy $D_1 = \{x_k\}_{k=0}^n$ a $D = D_1 \cup \{y\}$, kde $x_{j-1} < y < x_j$ pro jisté j. Tedy $s(f,D_1)$ a $s(f,D)$ obsahují shodné sčítance, až na sčítance odpovídající intervalu $[x_{j-1}, x_j]$. Proto

$$\begin{aligned} s(f,D) - s(f,D_1) & \\ &= (y - x_{j-1}) \inf_{[x_{j-1},y]} f + (x_j - y) \inf_{[y,x_j]} f - (x_j - x_{j-1}) \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \\ &\ge (y - x_{j-1}) \inf_{[x_{j-1},x_j]} f + (x_j - y) \inf_{[x_{j-1},x_j]} f - (x_j - x_{j-1}) \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nerovnost napravo se dokáže podobně a prostřední nerovnost je zřejmá.

Dokažme část (ii). Nechť D je společné zjemnění D_1 a D_2 (lze vzít třeba $D := D_1 \cup D_2$). Pak podle části (i) máme

$$\begin{aligned} s(f,D_1) \le s(f,D) \le S(f,D) \le S(f,D_1) \\ s(f,D_2) \le s(f,D) \le S(f,D) \le S(f,D_2). \end{aligned}$$

Odtud již plynou dokazované odhady. □

Definice 7.2.6 (Riemannův integrál)**.** Nechť f a $[a,b]$ jsou jako výše. *Dolním Riemannovým integrálem* nazveme číslo

$$(\mathcal{R}) \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup_D s(f,D)$$

(supremum bereme přes všechna dělení intervalu $[a,b]$) a *horním Riemannovým integrálem* nazveme

$$(\mathcal{R}) \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf_D S(f,D).$$

Pokud platí $(\mathcal{R}) \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, tuto společnou hodnotu nazveme *Riemannovým integrálem* a značíme ji

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V tomto případě také říkáme, že f je *riemannovsky integrovatelná* na $[a,b]$.

Poznámka 7.2.7. Podle Poznámky 7.2.3 vždy existuje dolní a horní Riemannův integrál. Navíc podle Tvrzení o monotonii integrálních součtů (Tvrzení 7.2.5) máme

$$m(b-a) \leq (\mathcal{R}) \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq (\mathcal{R}) \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Existence Riemannova integrálu je tedy ekvivalentní podmínce

$$(\mathcal{R}) \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq (\mathcal{R}) \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

která již obecně platit nemusí, jak uvidíme na příkladu níže.

Poznámka 7.2.8. I u Riemannova integrálu se v literatuře často používají zkrácené verze zápisu, my budeme používat analogickou verzi jako u integrálu Newtonova.

Příklad 7.2.9. (i) Nechť $f \equiv c \in \mathbb{R}$ na $[a,b]$. Pak pro libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=1}^n$ máme

$$s(f,D) = \sum_{j=1}^n c(x_j - x_{j-1}) = c(x_n - x_0) = c(b-a).$$

Podobně $S(f,D) = c(b-a)$. Odtud

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f\,\mathrm{d}x = c(b-a).$$

(ii) Nechť f je Dirichletova funkce. Protože v každém nedegenerovaném intervalu leží alespoň jedno racionální a alespoň jedno iracionální číslo, snadno dostáváme pro libovolné dělení D

$$s(f,D) = 0 \qquad \text{a} \qquad S(f,D) = b-a.$$

Proto

$$(\mathcal{R}) \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 < b-a = (\mathcal{R}) \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a Riemannův integrál neexistuje.
(iii) Položme

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = a \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nechť $D = \{x_i\}_{i=1}^n$ je libovolné dělení intervalu $[a,b]$. Pak zřejmě $s(f,D) = 0$ a protože do $S(f,D)$ dává nenulový příspěvek pouze podinterval obsahující bod a, máme $S(f,D) = x_1 - a$. Proto

$$(\mathcal{R}) \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{a} \qquad (\mathcal{R}) \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{x_1 \in (a,b]} (x_1 - a) = 0.$$

Riemannův integrál tedy existuje a je nulový.

Poznámka 7.2.10. (i) Je-li $M \subset \mathbb{R}$ množina, pak definujeme její *charakteristickou funkci* jako

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in M \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(ii) Snadnou modifikací předchozího příkladu dostaneme, že charakteristická funkce jednobodové množiny je riemannovsky integrovatelná a má nulový Riemannův integrál. Není těžké nahlédnout, že totéž platí pro charakteristické funkce konečných množin.
(iii) Povšimněme si, že Dirichletova funkce se dá také psát jako $\chi_{\mathbb{Q}}$. Připomeňme si, že o Dirichletově funkci jsme si ukázali, že není riemannovsky integrovatelná na $[0,1]$ (snadno bychom dostali totéž pro libovolný nedegenerovaný uzavřený interval). Charakteristická funkce spočetné množiny už tedy riemannovsky integrovatelná být nemusí.

7.3 Kritéria existence Riemannova integrálu

Nyní si představíme jednoduché kritérium pro ověření existence Riemannova integrálu. To posléze použijeme k důkazu, že spojité a monotonní funkce jsou riemannovsky integrovatelné. Při pevně zvoleném intervalu $[a,b]$ bude D označovat jeho dělení.

Lemma 7.3.1 (Kritérium existence Riemannova integrálu)**.** *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je omezená na* $[a,b]$*. Pak*

$$(\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\varepsilon > 0\,\exists D \quad S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$$

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože Riemannův integrál existuje, musí se dolní integrál rovnat hornímu, a proto podle definice můžeme nalézt dělení D_1, D_2 tak, že

$$s(f,D_1) > (\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x - \varepsilon \qquad \text{a} \qquad S(f,D_2) < (\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Položíme-li $D = D_1 \cup D_2$, podle Tvrzení o monotonii integrálních součtů (Tvrzení 7.2.5) dostáváme

$$(\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x - \varepsilon < s(f,D_1) \le s(f,D) \le S(f,D) \le S(f,D_2) < (\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x + \varepsilon,$$

odkud plyne $S(f,D) - s(f,D) < 2\varepsilon$ a multiplikativní konstanta na pravé straně není podstatná (vzhledem k obecnému kvantifikátoru v dokazovaném výroku).

„$\Leftarrow$“ Díky definici dolního a horního integrálu máme

$$(\mathcal{R})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x \le S(f,D) \le s(f,D) + \varepsilon \le (\mathcal{R})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Tento odhad umíme získat pro libovolné $\varepsilon > 0$, dostáváme tedy

$$(\mathcal{R})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x \le (\mathcal{R})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x.$$

Protože obrácená nerovnost platí vždy, dolní integrál se rovná hornímu, a proto Riemannův integrál existuje. □

Příklad 7.3.2. Uvažme $f(x) = x$ na $[0,1]$. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a definujme dělení $D_n := \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^n$ (tedy $x_j = \frac{j}{n}$). Pro libovolné $j \in \{1,\dots,n\}$ máme

$$\inf_{[x_{j-1},x_j]} f = \frac{j-1}{n} \qquad \text{a} \qquad \sup_{[x_{j-1},x_j]} f = \frac{j}{n}.$$

Protože

$$\begin{aligned} S(f,D_n) - s(f,D_n) = \sum_{j=1}^n \big(\sup_{[x_{j-1},x_j]} f - \inf_{[x_{j-1},x_j]} f\big)(x_j - x_{j-1}) \\ = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \overset{n\to+\infty}{\to} 0, \end{aligned}$$

Riemannův integrál existuje. Zároveň máme

$$(\mathcal{R})\int_0^1 f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} S(f,D_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^n \frac{j}{n}\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Věta 7.3.3 (O riemannovské integrovatelnosti monotonní funkce)**.** *Nechť funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotonní na $[a,b]$. Pak je zde riemannovsky integrovatelná.*

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že f je neklesající. Zvolme $\varepsilon > 0$. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a uvažme ekvidistantní dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^n = \{a + (b-a)\frac{j}{n}\}_{j=0}^n$. Pak

$$\begin{aligned} S(f,D) - s(f,D) &= \sum_{j=1}^n \big(\sup_{[x_{j-1},x_j]} f - \inf_{[x_{j-1},x_j]} f\big)(x_j - x_{j-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) \\ &= \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Pro n dostatečně velké tedy máme $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$ a podle Kritéria existence Riemannova integrálu (Lemma 7.3.1) jsme hotovi.

Pro nerostoucí funkci je důkaz podobný. □

Poznámka 7.3.4. Monotonie na $[a,b]$ implikuje omezenost. Proto jsme ve znění věty omezenost nepožadovali, třebaže je nedílnou součástí všech vět a definic v této kapitole.

Věta 7.3.5 (O riemannovské integrovatelnosti spojité funkce)**.** *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* $[a, b]$*. Pak je zde riemannovsky integrovatelná.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a uvažme ekvidistantní dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^n = \{a + (b-a)\frac{j}{n}\}_{j=0}^n$. Pak

$$\begin{aligned}
S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{j-1}, x_j]} f - \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \Big)(x_j - x_{j-1}) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{j-1}, x_j]} f - \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \Big) \\
&\le \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)| \\
&\le (b-a) \sup_{x, y \in [a, b], |x-y| \le \frac{b-a}{n}} |f(x) - f(y)|
\end{aligned}$$

(nerovnost použitou při přechodu ze druhého na třetí řádek přenecháváme čtenáři jako cvičení). Konečně, podle Cantorovy věty o stejnoměrné spojitosti (Věta 6.2.15) je naše funkce stejnoměrně spojitá na $[a, b]$, odkud pro n dostatečně velké máme

$$\sup_{x, y \in [a, b], |x-y| \le \frac{b-a}{n}} |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Tedy $S(f, D) - s(f, D) < (b-a)\varepsilon$ a podle kritéria existence Riemannova integrálu z Lemmatu 7.3.1 jsme hotovi. □

Poslední věta se dá zesílit tím, že výsledek dokážeme v případě, kdy připouštíme konečně mnoho bodů nespojitosti. Myšlenka důkazu využívá konstrukci z poslední části Příkladu 7.2.9, kde jsme okolo problematického bodu zahustili dělení, což v kombinaci s omezeností funkce zajistilo, že jsme stále kontrolovali velikost $S(f, D) - s(f, D)$ (využili jsme toho, že plocha obdélníku omezené výšky a malé šířky je malá).

Věta 7.3.6 (Riemannovská integrovatelnost funkce spojité až na konečně bodů)**.** *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je omezená na* $[a, b]$ *a spojitá na* $[a, b] \setminus K$*, kde* K *je konečná množina. Pak je* f *na* $[a, b]$ *riemannovsky integrovatelná.*

Důkaz. Označme $K \cup \{a, b\} = \{y_j\}_{j=1}^k$, kde $y_1 < y_2 < \cdots < y_k$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Můžeme předpokládat, že

$$\varepsilon \le \frac{1}{3} \min_{j \in \{2, \ldots, k\}} (y_j - y_{j-1}).$$

Definujme

$$z_{2j-1} = \begin{cases} y_j & \text{pro } j = 1 \\ y_j - \varepsilon & \text{pro } j = 2, \ldots, k \end{cases} \quad \text{a} \quad z_{2j} = \begin{cases} y_j + \varepsilon & \text{pro } j = 1, \ldots, k-1 \\ y_j & \text{pro } j = k. \end{cases}$$

Body $\{z_i\}_{i=1}^{2k}$ nám tedy interval $[a,b]$ rozdělují na $2k-1$ podintervalů. Liché podintervaly jsou velice úzké, zatímco na sudých podintervalech je f spojitá. Podle druhé z uvedených vlastností, Věty o riemannovské integrovatelnosti spojité funkce (Věta 7.3.5) a Kritéria pro existenci Riemannova integrálu (Lemma 7.3.1) pro každé $j=1,\dots,k-1$ existuje D_j dělení intervalu $[z_{2j},z_{2j+1}]$ takové, že $S(f,D_j)-s(f,D_j)<\varepsilon$. Položme

$$D=\{a,b\}\cup\bigcup_{j=1}^{k-1}D_j.$$

Označíme-li navíc $L=\sup_{[a,b]}f$, pak máme

$$\begin{aligned}
&S(f,D)-s(f,D)\\
&=S(f,\{z_1,z_2\})-s(f,\{z_1,z_2\})+S(f,D_1)-s(f,D_1)\\
&\qquad+S(f,\{z_3,z_4\})-s(f,\{z_3,z_4\})+S(f,D_2)-s(f,D_2)\\
&\qquad+\dots+S(f,\{z_{2k-1},z_{2k}\})-s(f,\{z_{2k-1},z_{2k}\})\\
&\le 2L(z_2-z_1)+\varepsilon+2L(z_4-z_3)+\varepsilon+\dots+2L(z_{2k}-z_{2k-1})\\
&=2L\varepsilon+\varepsilon+2L\cdot 2\varepsilon+\dots+2L\varepsilon=(k+4L+4(k-1)L)\varepsilon
\end{aligned}$$

a podle kritéria pro existenci Riemannova integrálu (Lemma 7.3.1) jsme hotovi. □

Cvičení 7.3.7. Nechť $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je omezená na $[a,b]$ a spojitá na $[a,b]\setminus K$, kde $K=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}\subset[a,b]$ splňuje $y_1<y_2<\dots<y_n\to b$. Dokažte riemannovskou integrovatelnost funkce f na $[a,b]$ drobnou modifikací důkazu předchozí věty.

Poznámka 7.3.8. Mějme však stále na paměti případ Dirichletovy funkce, který nám ukazuje, že změna funkčních hodnot ve spočetně mnoha bodech (porovnáváme Dirichletovu funkci s konstantně nulovou funkcí) může mít pro riemannovskou integrovatelnost fatální následky.

7.4 Ekvivalentní definice Riemannova integrálu

Nyní si představíme konstrukci, jejímž autorem je Riemann. Tato konstrukce je o něco komplikovanější než Darbouxova konstrukce, ale zase nám v některých situacích usnadní práci s Riemannovým integrálem.

Definice 7.4.1 (Riemannovy integrální součty)**.** Nechť $D=\{x_j\}_{j=0}^{n}$ je dělení intervalu $[a,b]$. *Normou dělení* D nazýváme číslo

$$\nu(D):=\max_{i\in\{1,\dots,n\}}(x_i-x_{i-1}).$$

Dále definujeme množinu

$$N(D):=\{\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n\colon \xi_j\in[x_{j-1},x_j]\,\forall j\in\{1,\dots,n\}\}.$$

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je omezená na $[a, b]$. *Riemannovým integrálním součtem* (odpovídajícím funkci f, dělení D a sadě význačných bodů $\xi \in N(D)$) nazveme číslo

$$\sigma(f, D, \xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Poznámka 7.4.2. Na rozdíl od Darbouxových součtů, kde jsme f na jednotlivých intervalech nahrazovali infimem a supremem, Riemannovy součty pracují s funkčními hodnotami v předepsaných bodech (bez podmínky na nějakou speciální vlastnost funkční hodnoty v daných bodech).

Definice 7.4.3 (Riemannova definice integrálu)**.** Nechť $\delta > 0$. Označme

$$\mathcal{U}_\delta := \{(D, \xi)\colon \nu(D) < \delta \wedge \xi \in N(D)\}.$$

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ omezená na $[a, b]$ a $A \in \mathbb{R}$. Pak píšeme, že

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = A,$$

jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \quad (D, \xi) \in \mathcal{U}_\delta \Longrightarrow |\sigma(f, D, \xi) - A|.$$

Poznámka 7.4.4. Konstrukce veličiny $\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi)$ proběhla velmi podobným způsobem jako definice limity, a proto se dá dokázat (udělejte si sami jako užitečné cvičení) drobnou modifikací našich postupů z předchozích kapitol:
(i) verze Heineho věty

$$\begin{aligned} &\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = A \\ &\qquad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to+\infty} \sigma(f, D^k, \xi^k) = A \quad \text{kdykoliv posloupnost dělení } \{D^k\}_{k=1}^{\infty} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{splňuje } \nu(D^k) \to 0 \text{ a } \xi^k \in N(D^k)\, \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(ii) verze B-C podmínky

$$\begin{aligned} &\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) \text{ existuje vlastní} \\ &\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \quad (D^1, \xi^1), (D^2, \xi^2) \in \mathcal{U}_\delta \Rightarrow |\sigma(f, D^1, \xi^1) - \sigma(f, D^2, \xi^2)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

(iii) verze aritmetiky limit (bez součinu a podílu)
Nechť $\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = A$, $\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(g, D, \xi) = B$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f + g, D, \xi) = A + B \qquad \text{a} \qquad \lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(\lambda f, D, \xi) = \lambda A.$$

(iv) verze zachování nerovnosti při limitním přechodu
Nechť $\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = A$, $\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(g, D, \xi) = B$ a existuje $\delta > 0$ takové, že $\sigma(f, D, \xi) \le \sigma(g, D, \xi)$ na $\mathcal{U}_\delta$. Pak $A \le B$.

Nyní si dokážeme, že Riemannova definice (integrálem nazveme číslo A) je ekvivalentní Darbouxově definici.

Věta 7.4.5 (Ekvivalence Darbouxovy a Riemannovy definice)**.** *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je omezená na* $[a,b]$*. Pak*

$$(\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x = A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f,D,\xi) = A.$$

Důkaz. „$\Leftarrow$“ Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu pak existuje $\delta > 0$ takové, že $|\sigma(f,D,\xi) - A| < \varepsilon$, kdykoliv $\nu(D) < \delta$ a $\xi \in N(D)$. Zafixujme D splňující $\nu(D) < \delta$ a definujme číslo $n+1$ jako počet jeho bodů. Z druhé vlastnosti infima můžeme najít takové $\theta \in N(D)$, že

$$\begin{aligned}\sigma(f,D,\theta) - s(f,D) &= \sum_{j=1}^{n} \bigl(f(\theta_j) - \inf_{[x_{j+1},x_j]} f\bigr)(x_j - x_{j+1})\\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(x_j - x_{j+1}) = (b-a)\varepsilon.\end{aligned}$$

Analogicky umíme najít $\eta \in N(D)$ tak, aby $S(f,D) - \sigma(f,D,\eta) < (b-a)\varepsilon$. Připomeňme, že máme $\nu(D) < \delta$, což implikuje

$$|\sigma(f,D,\theta) - A| < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad |\sigma(f,D,\eta) - A| < \varepsilon.$$

Celkově dostáváme

$$A - (b-a+1)\varepsilon \leq s(f,D) \leq S(f,D) \leq A + (b-a+1)\varepsilon.$$

Odtud již snadno ukážeme, že integrál existuje a rovná se A.

„$\Rightarrow$“ Zvolme $\varepsilon > 0$. Z předpokladů získáváme dělení D_1 takové, že

$$A - \varepsilon \leq s(f,D_1) \leq \sigma(f,D_1,\xi) \leq S(f,D_1) \leq A + \varepsilon \qquad \text{kdykoliv } \xi \in N(D_1).$$

Definujme číslo $n+1$ jako počet bodů dělení D_1. Označme $K := \sup_{[a,b]} f$.

Zafixujme nyní dělení D (budeme se snažit získat podmínku na $\nu(D)$, která nám zajistí kontrolu velikosti $|\sigma(f,D,\xi) - A|$). Definujme $E = D \cup D_1$. Pokusíme se porovnat $s(f,D)$ a $s(f,E)$. Dělení E se od dělení D liší přidáním nejvýše $n-1$ dělících bodů (obě dělení obsahují body a,b). Tedy při přechodu od $s(f,D)$ k $s(f,E)$ dojde k rozdělení nejvýše $n-1$ původních intervalů, jejichž délka je nejvýše $\nu(D)$ a nová infima se od starých mohou lišit nejvýše o $2K$. Proto

$$s(f,E) - s(f,D) \leq (n-1)\nu(D)2K.$$

Pokud tedy budeme mít $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{2K(n-1)}$, dostáváme

$$s(f,D) > s(f,E) - \varepsilon.$$

Protože E je zároveň zjemněním dělení D_1, máme celkově

$$s(f,D) > s(f,E) - \varepsilon \geq s(f,D_1) - \varepsilon \geq A - 2\varepsilon.$$

Analogicky nám podmínka $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{2K(n-1)}$ zajistí odhad

$$S(f, D) < A + 2\varepsilon.$$

Protože vždy platí $s(f, D) \leq \sigma(f, D, \xi) \leq S(f, D)$ (pro $\xi \in N(D)$ libovolné), k zadanému $\varepsilon > 0$ jsme našli $\delta := \frac{\varepsilon}{2K(n-1)}$ takové, že platí

$$(D, \xi) \in \mathcal{U}_\delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\sigma(f, D, \xi) - A| < 2\varepsilon$$

a jsme hotovi. □

Příklad 7.4.6. Připomeňme Riemannovu funkci z Úlohy 3.2.12. Ta je definovaná předpisem

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \{0\} \\ \frac{1}{q} & \text{pro } x = \frac{p}{q}, \text{kde } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ a } q \in \mathbb{N} \text{ jsou nesoudělná.} \end{cases}$$

Ukázali jsme o ní, že je spojitá ve všech iracionálních číslech a v nule, ale v ostatních racionálních číslech spojitá není. Změnou na spočetné množině (racionální čísla mimo 0) lze získat spojitou funkci, jedná se tedy o podobnou, ale přeci trochu jinou situaci než v Cvičení 7.3.7. Ukažme ale, že i tak je Riemannova funkce riemannovsky integrovatelná, přesněji, ukažme že

$$(\mathcal{R}) \int_0^1 R \, \mathrm{d}x = 0,$$

zatímco Newtonův integrál přes daný interval neexistuje, neboť naše funkce nesplňuje Darbouxovu vlastnost.

Víme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečný počet $N(\varepsilon)$ bodů, ve kterých je $R(x) \geq \varepsilon$. Proto pro libovolné dělení D intervalu $[0, 1]$ máme

$$\sigma(f, D, \xi) \leq \varepsilon + 2N(\varepsilon)\nu(D),$$

tedy (pokud existuje), pak je

$$0 \leq \lim_{\nu(D) \to 0} \sigma(f, D, \xi) \leq \varepsilon.$$

Protože toto platí pro každé $\varepsilon > 0$, je nutně

$$\lim_{\nu(D) \to 0} \sigma(f, D, \xi) = 0,$$

tedy

$$(\mathcal{R}) \int_0^1 R(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Poznámka 7.4.7. Pokud $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, můžeme psát $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$, kde $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Následně definujeme

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f \, \mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_a^b f_1 \, \mathrm{d}x + \mathrm{i} (\mathcal{R}) \int_a^b f_2 \, \mathrm{d}x.$$

Tím jsme obešli problém, že na $\mathbb{C}$ nemáme uspořádání a není tedy možné zavést horní a dolní součty v Darbouxově definici. Na druhé straně Riemannova definice uspořádání v oboru hodnot nevyžaduje (stačí, že je tam zavedena vzdálenost), bylo by tedy možné postupovat přímo podle Riemannovy definice a neprovádět rozklad na reálnou a imaginární složku. Ekvivalenci obou definic přenecháváme čtenáři jako cvičení.

Poznámka 7.4.8. (i) Zatímco Newtonův integrál pracující s pojmem primitivní funkce nepřipouští zobecnění třeba pro funkce z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$, Riemannův integrál pracující s plochou množiny pod grafem zkoumané funkce se dá snadno přeformulovat. Budeme-li například integrovat $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ přes kvádr $[a_1, b_1]\times\cdots\times[a_N, b_N]$, darbouxovské či riemannovské součty získáme rozdělením původního kvádru na malé kvádry pomocí vhodné mřížky.
(ii) Díky tomu, že Riemannova definice si v obraze vystačí pouze s pojmem vzdálenosti, lze tuto definici rozšířit třeba i na případy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$, $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$.

Příklad 7.4.9. Zkusme se podívat na vícerozměrnou verzi Riemannova integrálu pro funkci $f(x, y) = xy$ integrovanou přes $[0, 1]^2$. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a čtverec $[0, 1]^2$ rozdělíme na n^2 menších čtverců tak, že definujeme $x_i := \frac{i}{n}$ pro $i = 0, \dots, n$ a $y_j := \frac{j}{n}$ pro $j = 0, \dots, n$. Tím nám vzniká kolekce čtverečků $\{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}_{i,j=1}^{n}$. Pro pevně zvolený čtvereček zřejmě platí

$$\inf_{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f = f(x_{i-1}, y_{j-1}) = \frac{(i-1)(j-1)}{n^2}$$

a

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f = f(x_i, y_j) = \frac{ij}{n^2}.$$

Pro naše dělení D proto máme (supremum a infimum násobíme plochou jednotlivých čtverečků a výsledek vysčítáme)

$$\begin{aligned}
s(f, D) &= \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \inf_{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{n^2}\frac{(i-1)(j-1)}{n^2} = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i-1)(j-1) \\
&= \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}(i-1)\sum_{j=1}^{n}(j-1) = \frac{1}{n^4}\frac{(n-1)n}{2}\frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{(n-1)^2}{n^2}
\end{aligned}$$

a (teď už budeme postupovat o malinko rychleji)

$$\begin{aligned}
S(f,D) &= \sum_{i,j=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \sup_{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{n^2}\frac{ij}{n^2} = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n^4}\frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2}.
\end{aligned}$$

Protože se zvětšováním čísla $n \in \mathbb{N}$ umíme dolními i horními součty libovolně přiblížit k číslu $\frac{1}{4}$, dostáváme

$$(\mathcal{R}) \int_{[0,1]^2} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}.$$

Poznámka 7.4.10. Vícerozměrné integraci se budeme věnovat v kapitole o Lebesgueově integrálu. Ten je zobecněním Riemannova integrálu a umožňuje pracovat i na podstatně „ošklivějších“ množinách než jsou čtverce a kvádry. Navíc má několik příjemných vlastností, které při jeho výpočtu umožňují používat celou řadu dalších (a pokročilejších) technik, než jsou aritmetické operace, per partes a substituce.

7.5 Vlastnosti Riemannova integrálu

Nyní si ukážeme, že Riemannův integrál má stejné základní vlastnosti jako integrál Newtonův. Dále tyto dva integrály porovnáme a dokážeme si i několik hlubších výsledků.

Věta 7.5.1 (O Riemannově integrálu součtu a násobku)**.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou riemannovsky integrovatelné na (a,b). Pak*
(i) $(\mathcal{R}) \int_a^b (f+g)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_a^b f\,\mathrm{d}x + (\mathcal{R}) \int_a^b g\,\mathrm{d}x$
(ii) $(\mathcal{R}) \int_a^b \alpha f\,\mathrm{d}x = \alpha(\mathcal{R}) \int_a^b f\,\mathrm{d}x$.

Důkaz. Nejprve si dokažme jednodušší část (ii) v případě $\alpha \geq 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle kritéria konvergence Riemannova integrálu existuje dělení D takové, že $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$. Snadno se nahlédne, že

$$s(\alpha f, D) = \alpha s(f,D) \qquad \text{a} \qquad S(\alpha f, D) = \alpha S(f,D).$$

Odtud jednak máme $S(\alpha f, D) - s(\alpha f, D) < \alpha\varepsilon$, a proto $\int_a^b \alpha f\,\mathrm{d}x$ existuje. Zároveň musí platit

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}) \int_a^b \alpha f\,\mathrm{d}x &\in [s(\alpha f, D), S(\alpha f, D)] = [\alpha s(f,D), \alpha S(f,D)] \\
&\subset \Big[\alpha(\mathcal{R}) \int_a^b f\,\mathrm{d}x - \alpha\varepsilon, \alpha(\mathcal{R}) \int_a^b f\,\mathrm{d}x + \alpha\varepsilon\Big].
\end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, jsme hotovi. Případ $\alpha < 0$ se dokazuje podobně, jen je potřeba dát pozor na to, že

$$s(\alpha f, D) = \alpha S(f, D) \qquad \text{a} \qquad S(\alpha f, D) = \alpha s(f, D).$$

Dokažme část (i). Zvolme $\varepsilon > 0$. Předně aplikací kritéria konvergence Riemannova integrálu na f a g zvlášť a následným přechodem ke společnému zjemnění umíme najít dělení D takové, že

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad S(g, D) - s(g, D) < \varepsilon.$$

Dále díky tomu, že pro libovolnou $M \subset D_f \cap D_g$ platí (dokažte si sami jako cvičení)

$$\inf_M (f + g) \geq \inf_M f + \inf_M g \qquad \text{a} \qquad \sup_M (f + g) \leq \sup_M f + \sup_M g,$$

máme

$$s(f + g, D) \geq s(f, D) + s(g, D) \qquad \text{a} \qquad S(f + g, D) \leq S(f, D) + S(g, D).$$

Proto

$$S(f + g, D) - s(f + g, D) \leq S(f, D) - s(f, D) + S(g, D) - s(g, D) < 2\varepsilon.$$

Důkaz dokončíme podobně jako v části (i). □

Poznámka 7.5.2. Důkaz lze také provést (a to dokonce „jednodušeji“) použitím Riemannovy definice. Obě tvrzení Věty 7.5.1 plynou z Věty 7.4.5 a Poznámky 7.4.4 (iii).

Věta 7.5.3 (Monotonie integrálu, integrál z absolutní hodnoty)**.** *Nechť funkce f, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou riemannovsky integrovatelné na (a, b). Pak*
(i) *platí-li $f \leq g$ na $[a, b]$, je $(\mathcal{R}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x \leq (\mathcal{R}) \int_a^b g \,\mathrm{d}x$*
(ii) *funkce $|f|$ je riemannovsky integrovatelná na (a, b) a platí $|(\mathcal{R}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x| \leq (\mathcal{R}) \int_a^b |f| \,\mathrm{d}x$.*

Důkaz. Dokažme (i). Díky Větě o Riemannově integrálu součtu a násobku (Věta 7.5.1) dostáváme, že dokazovaný výrok je ekvivalentní s

$$f - g \geq 0 \quad \text{na } [a, b] \qquad \Longrightarrow \qquad (\mathcal{R}) \int_a^b (f - g) \,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Tento výrok je však zřejmý, neboť nezáporná funkce má nezáporné všechny darbouxovské součty.

Dokažme (ii). Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Kritéria konvergence Riemannova integrálu (Lemma 7.3.1) existuje dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ takové, že $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$. Zafixujme $j \in \{1, \ldots, n\}$. Protože pro všechna $x, y \in [x_{j-1}, x_j]$ platí

$$|f(x)| - |f(y)| \leq \big||f(x)| - |f(y)|\big| \leq |f(x) - f(y)| \leq \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f - \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f,$$

dostáváme také

$$\sup_{[x_{j-1},x_j]} |f| - \inf_{[x_{j-1},x_j]} |f| \leq \sup_{[x_{j-1},x_j]} f - \inf_{[x_{j-1},x_j]} f.$$

Odtud již snadno plyne

$$S(|f|, D) - s(|f|, D) \leq S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon,$$

a proto je $|f|$ riemannovsky integrovatelná. Dokazovaný odhad integrálu plyne z části (i) a odhadu $-|f| \leq f \leq |f|$. □

Věta 7.5.4 (Aditivita Riemannova integrálu vzhledem k integračnímu oboru)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ omezená na $[a, b]$ a $c \in (a, b)$. Pak*
(i) $(\mathcal{R}) \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \underline{\int_a^c} f \,\mathrm{d}x + (\mathcal{R}) \underline{\int_c^b} f \,\mathrm{d}x$
(ii) $(\mathcal{R}) \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \overline{\int_a^c} f \,\mathrm{d}x + (\mathcal{R}) \overline{\int_c^b} f \,\mathrm{d}x$
(iii) $(\mathcal{R}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_a^c f \,\mathrm{d}x + (\mathcal{R}) \int_c^b f \,\mathrm{d}x$*, pokud má jedna strana smysl*
(iv) *pokud $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ a f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, je rovněž riemannovsky integrovatelná na $[\alpha, \beta]$.*

Důkaz. Dokažme (i). Připomeňme, že dolní integrál je supremum dolních integrálních součtů přes všechna přípustná dělení. Předně vezmeme-li jakékoliv dělení D intervalu $[a, b]$, přidáním bodu c (pokud tam již není) dojde k jeho zjemnění $\widetilde{D}$, čímž se může odpovídající dolní součet jen zvětšit. Zároveň dělení $D_1 := \widetilde{D} \cap [a, c]$ a $D_2 := \widetilde{D} \cap [c, b]$ splňují

$$s(f, D) \leq s(f, \widetilde{D}) = s(f, D_1) + s(f, D_2).$$

Odtud dostáváme nerovnost „$\leq$“.

Uvážíme-li jakoukoliv dvojici D_1 a D_2 dělení intervalů $[a, c]$ a $[c, b]$, je $D := D_1 \cup D_2$ přípustným dělením pro definici dolního integrálu (supremum přes všechna dělení) a platí pro něj

$$s(f, D) = s(f, D_1) + s(f, D_2).$$

Na levé straně jsou přípustná ještě obecnější dělení, která se nezískají tímto způsobem (a sice ta dělení, která neobsahují bod c jakožto dělící bod). Proto dostáváme nerovnost „$\geq$“. Tím je první část dokázána. Část (ii) se dokáže podobně.

Dokažme (iii). Odečtěme od sebe výsledky (ii) a (i)

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}) \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x - (\mathcal{R}) \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \overline{\int_a^c} f \,\mathrm{d}x - (\mathcal{R}) \underline{\int_a^c} f \,\mathrm{d}x \\ + (\mathcal{R}) \overline{\int_c^b} f \,\mathrm{d}x - (\mathcal{R}) \underline{\int_c^b} f \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Povšimněme si, že obě strany jsou nezáporné. Pokud existují Riemannovy integrály na kterékoliv straně, příslušná strana je v předchozí identitě nulová. Tudíž je nulová i druhá strana a odpovídající Riemannovy integrály existují. Požadovaná rovnost pak už plyne třeba z (i).

Dokažme (iv). Dvojí aplikací (iii) dostáváme

$$\begin{aligned}(\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x &= (\mathcal{R})\int_a^\alpha f\,\mathrm{d}x + (\mathcal{R})\int_\alpha^b f\,\mathrm{d}x\\ &= (\mathcal{R})\int_a^\alpha f\,\mathrm{d}x + (\mathcal{R})\int_\alpha^\beta f\,\mathrm{d}x + (\mathcal{R})\int_\beta^b f\,\mathrm{d}x, \qquad (7.5.1)\end{aligned}$$

a proto prostřední integrál v rovnosti (7.5.1) úplně napravo existuje. □

Označení 7.5.5. Doposud jsme definovali $(\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ jen pro případ $a \le b$. Zaveďme ještě

$$(\mathcal{R})\int_b^a f\,\mathrm{d}x := -(\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 7.5.6. Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná na $[\min\{a,b,c\}, \max\{a,b,c\}]$. Dokažte si, že (s ohledem na předchozí úmluvu) stále platí

$$(\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R})\int_a^c f\,\mathrm{d}x + (\mathcal{R})\int_c^b f\,\mathrm{d}x.$$

Věta 7.5.7 (Změna v konečném počtu bodů neovlivní Riemannův integrál)**.** *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b] \subset \mathbb{R}$ a $f = g$ na $[a,b] \setminus K$, kde K je konečná. Pak*

$$(\mathcal{R})\int_a^b g\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Interval $[a,b]$ rozložme na takové pointervaly, že každý z nich obsahuje nejvýše jeden bod z K a má jej jako krajní bod. Podle Věty o aditivitě Riemannova integrálu vůči integračnímu oboru (Věta 7.5.4) je f riemannovsky integrovatelná na každém z těchto podintervalů. Na takovémto podintervalu je $g-f$ funkce, která je triviální až na jeden bod a dá se snadno dokázat, že má nulový Riemannův integrál (pro pravý krajní bod jsme to dokázali v poslední části příkladu 7.2.9). Nyní již důkaz snadno dokončíme s využitím Věty o Riemannově integrálu součtu a násobku (Věta 7.5.1) a Věty o aditivitě Riemannova integrálu vůči integračnímu oboru (Věta 7.5.4). □

Následující výsledek nám dává, že v mnohých praktických situacích se Riemannův a Newtonův integrál sobě rovnají, a proto můžeme dle potřeby používat tu definici, která se nám lépe hodí.

Věta 7.5.8 (Vztah Riemannova a Newtonova integrálu)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Existují-li $(\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ a $(\mathcal{N})\int_a^b f\,\mathrm{d}x$, pak se rovnají.*

Důkaz. Díky existenci Newtonova integrálu existuje zobecněná primitivní funkce F na (a,b), která má vlastní limity v krajních bodech. Po dodefinování těmito limitami můžeme předpokládat, že F je spojitá na $[a,b]$ a $F' = f$ na $(a,b) \setminus K$, kde K je konečná ($[a,b]$ je omezený interval).

Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Riemannovy definice (a Věty o ekvivalenci Darbouxovy a Riemannovy definice, tedy Věty 7.4.5) existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(D,\xi) \in \mathcal{U}_\delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\sigma(f,D,\xi) - (\mathcal{R})\int_a^b f \,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Zvolme dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ tak, aby $\nu(D) < \delta$ a $K \subset D$. Pro každé $j \in \{1,\dots,n\}$ dále podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce (Věta 6.3.3) máme $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ takové, že

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = F'(\xi_j) = f(\xi_j).$$

Definujeme-li $\xi \in N(D)$ jako množinu bodů ξ_j, $j \in \{1,\dots,n\}$, získaných výše, celkově dostáváme

$$\begin{aligned}
&\left|(\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x - (\mathcal{N})\int_a^b f\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|(\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x - \sigma(f,D,\xi) + \sigma(f,D,\xi) - \sum_{j=1}^n (\mathcal{N})\int_{x_{j-1}}^{x_j} f\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|(\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x - \sigma(f,D,\xi) + \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n F'(\xi_j)(x_j - x_{j-1})\right| \\
&= \left|(\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x - \sigma(f,D,\xi)\right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Poznámka 7.5.9. (i) Riemannův integrál jsme si představili jako integrál, který má jistý geometrický význam (plocha pod grafem funkce) a Newtonův integrál jako integrál bez geometrického významu, se kterým zase dobře počítá za pomoci výsledků z kapitoly o primitivních funkcích. Naše věta nám říká, že pro funkce integrovatelné jak riemannovsky tak newtonovsky máme k dispozici obě výhody.
(ii) Jednou ze tříd funkcí, kde máme oba typy integrovatelnosti, jsou omezené spojité funkce na omezeném intervalu. Riemannovskou integrovatelnost jsme si dokázali v tomto oddíle, k té newtonovské stále ještě dlužíme důkaz. Nicméně teorii vedoucí k němu začneme budovat hned za touto poznámkou.
(iii) Snadno lze nalézt funkce, které jsou integrovatelné newtonovsky, ale nejsou integrovatelné riemannovsky. Stačí si vzpomenout, že Riemannův integrál požaduje omezenost funkce a intervalu, Newtonův integrál nikoliv.
(iv) Funkcí, která je integrovatelná riemannovsky na $[0,1]$, ale není integrovatelná newtonovsky na $(0,1)$, je třeba

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x = \frac{1}{n},\ \text{kde } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Důkaz Riemannovské integrovatelnosti je jen variantou Cvičení 7.3.7. Newtonovská integrovatelnost vyžaduje darbouxovskost f na jednotlivých podintervalech $(a,b)\setminus K$ (K je množina, kde nepožadujeme $F' = f$). Zde nám darbouxovskost kazí spočetně mnoho bodů, ale definice Newtonova integrálu připouští rozdělení jen na konečně mnoho podintervalů. Analogickým příkladem je Riemannova funkce z Příkladu 7.4.6.

Úloha 7.5.10. Spočítejme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$.

Řešení: Argument limity si přepíšeme do tvaru

$$\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}\frac{1}{n} + \frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\frac{1}{n}.$$

Pravá strana se dá interpretovat jako $\sigma(f, D_n, \xi_n)$, kde $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $D_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^n$ a $\xi_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=1}^n$. Protože f je spojitá na $[0,1]$, je zde riemannovsky integrovatelná. Navíc je zde newtonovsky integrovatelná (primitivní funkcí je arkustangens), tudíž se oba integrály rovnají a podle Věty o ekvivalenci Darbouxovy a Riemannovy definice (Věta 7.4.5) je Riemannův integrál roven limitě $\sigma(f, D_n, \xi_n)$ pro $n \to +\infty$. Celkově máme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} &= (\mathcal{R}) \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ = (\mathcal{N}) \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\arctan x]_0^1 &= \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

☆

Cvičení 7.5.11. Spočítejte $\lim_{n\to+\infty} \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$.

V dalším si ukážeme, že i Riemannův interál úzce souvisí s pojmem primitivní funkce. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$. Pro libovolné $x \in [a,b]$ pak podle Věty o aditivitě Riemannova integrálu vzhledem k integračnímu oboru (Věta 7.5.4) můžeme definovat

$$F(x) = F_a(x) := (\mathcal{R}) \int_a^x f\,\mathrm{d}y.$$

Věta 7.5.12 (Takzvaná hlavní věta diferenciálního a integrálního počtu)**.** *Nechť f a F jsou jako výše. Pak*
(i) *funkce F je spojitá na $[a,b]$*
(ii) *je-li f spojitá v $x_0 \in (a,b)$, platí $F'(x_0) = f(x_0)$ (analogicky pro jednostrannou spojitost v krajních bodech a jednostranné derivace).*
Speciálně, je-li f spojitá na (a,b), pak $F' = f$ na (a,b).

Důkaz. Dokažme (i). Nechť $x_0 \in [a,b)$ a $x \in (x_0, b]$. Označme $L := \sup_{[a,b]} |f|$. Pak

$$\begin{aligned}|F(x) - F(x_0)| &= \left|(\mathcal{R}) \int_a^x f\,\mathrm{d}y - (\mathcal{R}) \int_a^{x_0} f\,\mathrm{d}y\right| = \left|(\mathcal{R}) \int_{x_0}^x f\,\mathrm{d}y\right| \\ &\le L(\mathcal{R}) \int_{x_0}^x \mathrm{d}y = L(x - x_0).\end{aligned}$$

Odtud snadno plyne spojitost v x_0 zprava. Spojitost zleva se dokazuje podobně.

Dokažme (ii). Nechť $x_0 \in [a, b)$ a $x \in (x_0, b]$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak díky spojitosti f v x_0 zprava máme $\delta > 0$ takové, že

$$y \in (x_0, x_0 + \delta) \qquad \Longrightarrow \qquad |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Dále platí

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\Big((\mathcal{R})\int_a^x f\,\mathrm{d}y - (\mathcal{R})\int_a^{x_0} f\,\mathrm{d}y\Big) = \frac{1}{x - x_0}(\mathcal{R})\int_{x_0}^x f\,\mathrm{d}y.$$

Odtud s využitím odhadu získaného ze spojitosti dostáváme pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$\begin{aligned}\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\Big| &= \Big|\frac{1}{x - x_0}(\mathcal{R})\int_{x_0}^x \big(f(y) - f(x_0)\big)\,\mathrm{d}y\Big| \\ &\le \frac{1}{x - x_0}(\mathcal{R})\int_{x_0}^x |f(y) - f(x_0)|\,\mathrm{d}y \le \frac{1}{x - x_0}(\mathcal{R})\int_{x_0}^x \varepsilon\,\mathrm{d}y = \varepsilon.\end{aligned}$$

Proto $F'_+(x_0) = f(x_0)$. Analogicky pro derivaci zleva. □

Věta 7.5.13 (Existence primitivní funkce ke spojité funkci)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na (a, b). Pak zde má primitivní funkci.*

Důkaz. Vezměme $\{a_n\}, \{b_n\} \subset (a, b)$ tak, aby

$$a \leftarrow a_n < \cdots < a_2 < a_1 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n \to b.$$

Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce

$$F_n(x) := (\mathcal{R})\int_{a_n}^x f\,\mathrm{d}y$$

primitivní k f na (a_n, b_n). Zafixujme $x_0 \in (a_1, b_1)$ a definujme

$$\widetilde{F}_n(x) := F_n(x) - F_n(x_0) \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Tím jsme získali sadu primitivních funkcí, které se shodují v x_0. Zároveň podle Věty o nejednoznačnosti primitivní funkce (Věta 4.1.4) platí

$$m < n \qquad \Longrightarrow \qquad \widetilde{F}_m = \widetilde{F}_n \quad \text{na } (a_m, b_m).$$

Proto můžeme definovat

$$F(x) = \widetilde{F}_n(x) \qquad \text{kdykoliv } x \in (a_n, b_n) \text{ pro nějaké } n \in \mathbb{N}.$$

Protože $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n) = (a, b)$, je F primitivní funkce k f na (a, b). □

Poznámka 7.5.14. Pokud $f \in C([a,b])$, máme podle Takzvané hlavní věty diferenciálního a integrálního počtu (Věta 7.5.12)

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f \, \mathrm{d}x = F_a(b) - F_a(a).$$

Pokud bychom znali jinou primitivní funkci na (a,b), lišila by se od F_a jen o aditivní konstantu, která by se ve formuli $F(b) - F(a)$ vyrušila. V takovéto situaci lze tedy Riemannův integrál počítat bez využití definice Newtonova integrálu (nicméně používáme pojem primitivní funkce).

Příklad 7.5.15. Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f je spojitá na $[a,b]$ a g je diferencovatelná na (a,b). Spočtěme derivaci funkce

$$\varphi\colon x \mapsto (\mathcal{R}) \int_a^{g(x)} f \, \mathrm{d}y.$$

Platí $\varphi(x) = F(g(x)) - F(a)$, a proto

$$\varphi'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Analogicky se odvodí vzorec (je-li navíc $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencovatelná na (a,b))

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\mathcal{R}) \int_{h(x)}^{g(x)} f \, \mathrm{d}y = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x).$$

Pokročilejší metody integrace jako jsou per partes můžeme provádět dvěma způsoby. Jednak můžeme odpovídající výsledky odvozené pro primitivní funkce kombinovat s Větou o vztahu Riemannova a Newtonova integrálu (Věta 7.5.8), druhou možností je tyto výsledky odvodit přímo pro Riemannův integrál.

Označení 7.5.16. V dalším budeme pracovat s funkcemi z $C^1([a,b])$. Myslíme tím funkce, které jsou z $C([a,b])$ (spojité na (a,b) a jednostranně spojité v krajních bodech), diferencovatelné na (a,b) a jednostranně diferencovatelné v krajních bodech a takto chápaná derivace je z $C([a,b])$.

Věta 7.5.17 (Per partes pro Riemannův integrál)**.** *Nechť $f, g \in C^1([a,b])$. Pak*

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f'g \, \mathrm{d}x = [fg]_a^b - (\mathcal{R}) \int_a^b fg' \, \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Protože $f, g \in C^1([a,b])$ a $(fg)' = f'g + fg'$ (speciálně všechny tři funkce v poslední identitě jsou riemannovsky integrovatelné), platí

$$[fg]_a^b = (\mathcal{R}) \int_a^b (fg)' \, \mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_a^b (f'g + fg') \, \mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_a^b f'g \, \mathrm{d}x + (\mathcal{R}) \int_a^b fg' \, \mathrm{d}x.$$

Odtud již plyne požadované. □

Poznámka 7.5.18. Ve znění věty jsme se trochu ošidili, neboť spojitost není jedinou známou postačující podmínkou existence Riemannova integrálu. Na druhou stranu, pokud budeme předchozí větu kombinovat třeba s Větou o aditivitě Riemannova integrálu vzhledem k integračnímu oboru (Věta 7.5.18), je možné pracovat i s širší třídou funkcí, než je $C^1([a,b])$, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 7.5.19. Spočtěme $(\mathcal{R})\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos x\,\mathrm{d}x$. Máme

$$\begin{aligned}(\mathcal{R})\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos x\,\mathrm{d}x &= -\,(\mathcal{R})\int_{-\pi}^{0}x\cos x\,\mathrm{d}x+(\mathcal{R})\int_{0}^{\pi}x\cos x\,\mathrm{d}x\\ &=\begin{bmatrix} f=\sin x & f'=\cos x\\ g=x & g'=1\end{bmatrix} = -[x\sin x]_{-\pi}^{0}+(\mathcal{R})\int_{-\pi}^{0}\sin x\,\mathrm{d}x\\ &\quad+[x\sin x]_0^{\pi}-(\mathcal{R})\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\\ &=-\,[x\sin x]_{-\pi}^{0}+[-\cos x]_{-\pi}^{0}+[x\sin x]_0^{\pi}-[-\cos x]_0^{\pi}=-4.\end{aligned}$$

Při přepisu na dva integrály přes $[-\pi,0]$ a $[0,\pi]$ jsme museli být opatrní, abychom dostali funkce z $C^1([-\pi,0])$ a $C^1([0,\pi])$.

Věta 7.5.20 (O substituci pro Riemannův integrál)**.** (i) *Nechť* $\varphi\in C^1([\alpha,\beta])$ *a* $f\in C([a,b])$, *kde* $\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b]$. *Pak*

$$(\mathcal{R})\int_{\alpha}^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=(\mathcal{R})\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) *Nechť* $\varphi\in C^1([\alpha,\beta])$, $\varphi'\neq 0$ *na* $[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ *a* $f\in C([a,b])$. *Pak*

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(\mathcal{R})\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Důkaz. Dokažme (i). Protože $f\in C([a,b])$, má zde primitivní funkci F. Z předpokladů dále plyne

$$(F\circ\varphi)'=(f\circ\varphi)\varphi'\qquad\text{na }[\alpha,\beta]$$

(v krajních bodech máme jednostranné derivace, které jsme získali pomocí Věty o limitě derivací; tedy Věty 6.3.9). Odtud

$$(\mathcal{R})\int_{\alpha}^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=[F\circ\varphi]_{\alpha}^{\beta}=[F]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}=(\mathcal{R})\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dokažme (ii). Protože $(f\circ\varphi)\varphi'\in C([\alpha,\beta])$, má zde primitivní funkci Φ a podle Druhé substituční metody pro primitivní funkce (Věta 4.1.31) je $\Phi\circ\varphi^{-1}$ primitivní k f na $[a,b]$ (opět jsme si na kraji pomohli Větou o limitě derivací; tedy Větou 6.3.9). Proto

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[\Phi\circ\varphi^{-1}]_a^b=[\Phi]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}=(\mathcal{R})\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Příklad 7.5.21.

$$(\mathcal{R})\int_0^1 2x\mathrm{e}^{x^2}\cos x^2\,\mathrm{d}x \overset{\text{1.s.m.}}{=} \begin{bmatrix} \varphi(x)=x^2 & \text{na } [0,1] \\ f(y)=\exp y\cos y & \text{na } \mathbb{R} \end{bmatrix} = (\mathcal{R})\int_0^1 \mathrm{e}^y\cos y\,\mathrm{d}y$$
$$= (\mathcal{R})\int_0^1 \operatorname{Re}\mathrm{e}^{((1+\mathrm{i})y)}\,\mathrm{d}y = \operatorname{Re}(\mathcal{R})\int_0^1 \mathrm{e}^{((1+\mathrm{i})y)}\,\mathrm{d}y = \operatorname{Re}\Big(\frac{1}{1+\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{((1+\mathrm{i})y)}]_0^1\Big)$$
$$= \operatorname{Re}\Big(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\big(\mathrm{e}(\cos 1+\mathrm{i}\sin 1)-1\big)\Big) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}\cos 1+\mathrm{e}\sin 1-1).$$

Příklad 7.5.22. Zabývejme se integrálem

$$I = (\mathcal{R})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = (\mathcal{N})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Nabízí se postup

$$I = \begin{bmatrix} y=\tan x \\ \sin^2 x = \dfrac{y^2}{1+y^2} \end{bmatrix} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{y^2}{1+y^2}}\,\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+2y^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[\arctan(\sqrt{2}y)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(Úmyslně jsme nepsali, o jaký typ integrálu se jedná.) Tento postup však není korektní v naší teorii Riemannova integrálu, neboť zde pro funkci $\varphi\colon x\mapsto \tan x$ není φ z $C([0,\frac{\pi}{2}])$, máme jen $\varphi\in C([0,\frac{\pi}{2}))$, a zároveň Riemannův integrál pracuje jen na omezených intervalech (nikoliv na $[0,+\infty)$). Náprava je možná hned několika způsoby.
(i) Můžeme si všimnout, že integrand je spojitý, lze tedy původní integrál chápat rovněž jako Newtonův. Provedeme první substituční metodu pro primitivní funkci a nakonec použijeme definici Newtonova integrálu.
(ii) Druhou možností je opět přejít k Newtonovu integrálu a pak použít větu o substituci pro Newtonův integrál (tu probereme v následující části textu).
(iii) Další možností je zůstat u riemannovské integrace, zadefinovat

$$I_n := (\mathcal{R})\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Protože integrand je omezený, snadno se ukáže $I_n \overset{n\to+\infty}{\to} I$. Na druhou stranu, na I_n již můžeme aplikovat riemannovskou substituci (neboť $\tan\in C([0,\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}])$) a dostáváme

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{2}}[\arctan(\sqrt{2}y)]_0^{\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\Big(\sqrt{2}\tan\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\Big)\Big) \overset{n\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Proto $I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Poznámka 7.5.23. (i) Při výpočtu Riemannova či Newtonova integrálu se lepení nepoužívá. Pohodlnější je použít Větu o aditivitě Riemannova integrálu vzhledem k integračnímu oboru (Větu 7.5.4). Poznamenejme ještě, že analogický výsledek jsme si dokázali i pro Newtonův integrál (druhá část Věty o základních vlastnostech Newtonova integrálu, tedy Věty 7.1.8). Aditivita vzhledem k integračnímu oboru se navíc často kombinuje s různými symetriemi.
(ii) Přínos vět o substituci pro určité integrály nespočívá jen v tom, že obejdeme lepení. Značnou výhodou je rovněž to, že se na konci výpočtu obsahujícího substituci už nemusíme vracet k původním proměnným, jako jsme to dělali u primitivních funkcí (zde je tento krok nahrazen nepříliš pracnou transformací integračních mezí).

Tvrzení 7.5.24. *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$. Pak*
(i) *je-li f sudá, je $(\mathcal{R})\int_{-b}^{-a} f\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x$*
(ii) *je-li f lichá, je $(\mathcal{R})\int_{-b}^{-a} f\,\mathrm{d}x = -(\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x$*
(iii) *je-li f p-periodická, kde $p > 0$, pak $(\mathcal{R})\int_{a+kp}^{b+kp} f\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ kdykoliv $k \in \mathbb{Z}$.*

Důkaz. Dokážeme jen část (i), ostatní důkazy jsou podobné. Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení intervalu $[a,b]$. Pak $\widetilde{D} = \{-x_j\}_{j=0}^n$ je dělení intervalu $[-b,-a]$ a zřejmě ze sudosti f plyne

$$s(f,D) = s(f,\widetilde{D}) \qquad \text{a} \qquad S(f,D) = S(f,\widetilde{D}).$$

Analogicky každému dělení intervalu $[-b,-a]$ odpovídá jisté dělení intervalu $[a,b]$ se stejnými integrálními součty. Odtud a z Darbouxovy konstrukce již plyne dokazované. □

Poznámka 7.5.25. Pokud $f \in C([a,b])$, dá se rovněž použít Věta o substituci pro Riemannův integrál (Věta 7.5.20)

$$\begin{aligned}(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\overset{\text{2.s.m.}}{=} [t=-x] = (\mathcal{R})\int_{-a}^{-b} f(-t)(-1)\,\mathrm{d}t \\ &= (\mathcal{R})\int_{-b}^{-a} f(-t)\,\mathrm{d}t = (\mathcal{R})\int_{-b}^{-a} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Příklad 7.5.26. Máme (porovnejte s Příkladem 7.5.22)

$$(\mathcal{R})\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 4(\mathcal{R})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\pi.$$

7.6 Vlastnosti Newtonova integrálu

V následující části textu si odvodíme několik výsledků, které nám zajistí pohodlnější práci s Newtonovým integrálem (kupříkladu se naučíme podobně jako u Riemannova integrálu obcházet lepení primitivních funkcí a zpětné substituce).

Zároveň si ještě vybudujeme sadu nástrojů, které nám budou pomáhat rozhodnout, že Newtonův integrál existuje (zatím máme jen Větu o primitivní funkce ke spojité funkci, tedy Větu 4.1.14, která sama o sobě existenci Newtonova integrálu nezaručuje, neboť nemáme jistotu, že takto získaná primitivní funkce má vlastní limity v krajních bodech zkoumaného intervalu).

Věta 7.6.1 (Per partes pro Newtonův integrál)**.** *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mají zobecněné primitivní funkce F, G na (a, b). Pak*

$$(\mathcal{N}) \int_a^b Fg \,\mathrm{d}x = [FG]_a^b - (\mathcal{N}) \int_a^b fG \,\mathrm{d}x,$$

existuje-li alespoň jeden z Newtonových integrálů a má-li smysl výraz $[FG]_a^b$ (odpovídající limity existují a jsou konečné).

Důkaz. Nechť existuje Newtonův integrál na levé straně. Zobecněnou primitivní funkci k Fg označme H (ta má navíc konečné jednostranné limity v bodech a, b). Pak $FG - H$ je zobecněná primitivní funkce k fG. Skutečně, naše funkce je zřejmě spojitá a platí

$$(FG - H)' = fG + Fg - Fg = fG \qquad \text{na } (a, b) \setminus K,$$

kde K má vlastnost požadovanou v definici zobecněné primitivní funkce (uvědomte si, jak tato množina vznikla). Konečně, funkce $FG - H$ má konečné jednostranné limity v bodech a, b, neboť je rozdílem dvou funkcí s touto vlastností.

Druhý případ je analogický. □

Věta 7.6.2 (O substituci pro Newtonův integrál)**.** *Nechť $f, \varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f je definovaná na (a, b), φ zobrazuje (α, β) na (a, b) a má vlastní nenulovou derivaci na (α, β). Pak*

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = (\mathcal{N}) \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) \,\mathrm{d}x,$$

má-li alespoň jedna strana smysl a uvažovaná zobecněná primitivní funkce má jen konečně mnoho výjimečných bodů stran derivace.

Důkaz. Předně připomeňme, že derivace má Darbouxovu vlastnost (Věta 6.2.7), proto φ' musí mít stále totéž znaménko. V důkazu budeme uvažovat jen případ $\varphi' > 0$, tedy $\varphi^{-1}(a) = \alpha$ a $\varphi^{-1}(b) = \beta$. Druhý případ je analogický.

Nejprve nechť existuje integrál na levé straně a platí zesílení podmínky pro zobecněnou primitivní funkci. Nechť tedy F je zobecněná primitivní funkce k f na (a, b) splňující $F' = f$ na $(a, b) \setminus K$, kde K je konečná, a má konečné jednostranné limity v krajních bodech. Pak $F \circ \varphi$ je spojitá na (α, β) a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \qquad \text{na } (\alpha, \beta) \setminus \varphi^{-1}(K).$$

Odtud $t \mapsto F(\varphi(t))$ je zobecněná primitivní funkce k $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na (α, β) a máme (rozmyslete si verzi Věty o limitě složené funkce, tedy Věty 3.1.46, pro jednostrannou limitu s vnitřní funkcí ryze monotonní)

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b_-) - F(a_+) = (F\circ\varphi)(\beta_-) - (F\circ\varphi)(\alpha_+)$$
$$= (\mathcal{N})\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nechť naopak existuje integrál napravo a platí podmínka pro odpovídající zobecněnou primitivní funkci. Existuje tedy Ψ spojitá na (α,β) splňující

$$\Psi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \qquad \text{na } (\alpha,\beta)\setminus L,$$

kde L je konečná. Pak $\Psi\circ\varphi^{-1}$ je spojitá a na jednotlivých podintervalech $(a,b)\setminus\varphi(L)$ je primitivní funkcí k f podle Druhé substituční metody pro primitivní funkce (Věta 4.1.31). Celkově je to zobecněná primitivní funkce k f na (a,b) a (opět používáme jednostrannou verzi Věty o limitě složené funkce, tedy Věty 4.2.4)

$$(\mathcal{N})\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Psi(\beta_-) - \Psi(\alpha_+)$$
$$= (\Psi\circ\varphi^{-1})(b_-) - (\Psi\circ\varphi^{-1})(a_+) = (\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

7.6.1 Existence Newtonova integrálu

Věta 7.6.3 (Vztah omezenosti a existence Newtonova integrálu)**.** *Nechť $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je spojitá na $(a,b)\setminus K$, kde $a,b\in\mathbb{R}$ a K je konečná množina. Je-li f navíc omezená, je newtonovsky integrovatelná.*

Důkaz. Není-li f definovaná v koncových bodech a,b, dodefinujme ji nulou. Newtonův integrál přes (a,b) to neovlivní. Z teorie Riemannova integrálu víme, že v této situaci je f riemannovsky integrovatelná. Položme

$$F(x) = (\mathcal{R})\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Pak podle Takzvané hlavní věty diferenciálního a integrálního počtu (Věta 7.5.12) je F spojitá na (a,b) a $F'=f$ na $(a,b)\setminus K$. Aplikací Věty o dvou strážnících (Věta 3.1.36) a odhadů

$$0 \le \left|(\mathcal{R})\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y\right| \le (\mathcal{R})\int_a^x |f(y)|\,\mathrm{d}y \le (x-a)\sup_{(a,b)}|f|$$

dostaneme, že $F(a_+)=0$. Dále pro $x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1<x_2$, máme

$$|F(x_2)-F(x_1)| = \left|(\mathcal{R})\int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}y\right| \le (x_2-x_1)\sup_{(a,b)}|f|.$$

Odtud vidíme, že F splňuje B-C podmínku pro $x\to b_-$ a dostáváme, že existuje vlastní $F(b_-)$. Celkově jsme ukázali, že Newtonův integrál existuje. □

Poznámka 7.6.4. (i) Nejčastějším případem, kdy se předchozí věta aplikuje, je situace, kdy $f \in C([a,b])$.
(ii) Obecnější případ $f \in C([a,b))$ již připouští problémy. Například spojitost na polouzavřeném intervalu připouští neomezenost, která může pokazit newtonovskou integrovatelnost

$$(\mathcal{N}) \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x-1}\right]_0^1 = +\infty - 1 = +\infty \qquad \text{(integrál neexistuje)},$$

ale také nemusí

$$(\mathcal{N}) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^1 = 2.$$

Poznamenejme ještě, že do kategorie polouzavřených intervalů spadají i neomezené intervaly. Tady situace zmiňované v předchozí poznámce nastávají třeba v případech

$$(\mathcal{N}) \int_0^{+\infty} 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^{+\infty} = +\infty$$

a

$$(\mathcal{N}) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

S ohledem na předchozí poznámku se jeví přirozené studovat kritéria newtonovské integrovatelnosti pro důležitý a často zkoumaný případ $f \in C([a,b))$ (primitivní funkce existuje, zkoumáme jen existenci a hodnotu její limity v krajních bodech; situace $f \in C((a,b])$ je analogická a dá se na námi uvažovanou převést třeba substitucí, situaci $f \in C((a,b)$ si přepíšeme jako $f \in C((a,c])$ a $f \in C([c,b))$ pro vhodné $c \in (a,b)$).

Věta 7.6.5 (Srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** *Nechť* $-\infty < a < b \le +\infty$. *Pak*
(i) *jestliže* $f \in C([a,b)$, g *je nezáporná newtonovsky integrovatelná na* (a,b) *a platí* $f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ *pro* $x \to b_-$, *pak i* f *je newtonovsky integrovatelná na* (a,b)
(ii) *jestliže* $f,g \in C([a,b))$ *jsou nezáporné,* $f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ *a* $g(x) = \mathrm{O}(f(x))$ *pro* $x \to b_-$, *pak* f *je newtonovsky integrovatelná na* (a,b) *právě tehdy, když* g *je newtonovsky integrovatelná na* (a,b)
(iii) *speciálně pokud* $f,g,h \in C([a,b)$ *jsou nezáporné,* $f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ *a* $g(x) = \mathrm{O}(f(x))$ *pro* $x \to b_-$, *pak* fh *je newtonovsky integrovatelná na* (a,b) *právě tehdy, když* gh *je newtonovsky integrovatelná na* (a,b).

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat část (i). Nechť G je zobecněná primitivní funkce k g. Ta musí díky newtonovské integrovatelnosti g splňovat B-C podmínku pro $x \to b_-$. Ke zvolenému $\varepsilon > 0$ tedy máme $\delta > 0$ takové, že

$$x_1, x_2 \in \mathcal{P}_\delta^-(b) \qquad \Longrightarrow \qquad |G(x_2) - G(x_1)| < \varepsilon.$$

Na druhou stranu f má (a,b) primitivní funkci F, která je na $[x_1,x_2]$ integrovatelná v riemannovském i newtonovském smyslu a platí (bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_1 < x_2$)

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left|(\mathcal{N}) \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}y\right| \leq (\mathcal{N}) \int_{x_1}^{x_2} |f(y)|\,\mathrm{d}y$$
$$\leq (\mathcal{N}) \int_{x_1}^{x_2} Cg(y)\,\mathrm{d}y = C(G(x_2) - G(x_1)) < C\varepsilon.$$

Odtud vidíme, že i F splňuje B-C podmínku pro $x \to b_-$, a proto je f newtonovsky integrovatelná na (a, b). □

Poznámka 7.6.6. Věta se používá tak, že k zadané spojité funkci f, jejíž newtonovskou integrovatelnost zkoumáme, hledáme funkci g, u níž umíme určit, zda je newtonovsky integrovatelná (nejčastěji výpočtem) a zároveň vykazuje srovnatelné limitní chování jako funkce f (nejlepší jsou výsledky typu $\lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, které nám umožní rozhodnout jak v případě integrovatelnosti, tak v případě opačném).

Příklad 7.6.7. Zkoumejme existenci

$$(\mathcal{N}) \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\sqrt{x}\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Označme integrand jako f a položme $g = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Pak máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \qquad \text{a} \qquad (\mathcal{N}) \int_0^1 g\,\mathrm{d}x = [2\sqrt{x}]_0^1 \in \mathbb{R}.$$

Proto podle druhé části Srovnávacího kritéria pro konvergenci Newtonova integrálu (Věta 7.6.5; zde máme lehce odlišnou ale analogickou situaci $f, g \in C((a, b])$, což přenecháváme čtenáři na rozmyšlenou) zkoumaný Newtonův integrál existuje.

Příklad 7.6.8. Zkoumejme existenci

$$(\mathcal{N}) \int_0^1 \log x \sin \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme první část srovnávacího kritéria s funkcí $g = |\log x| = -\log x$. Máme $|f| \leq g$ na $(0, 1)$ a (primitivní funkce se získá integrací per partes)

$$(\mathcal{N}) \int_0^1 -\log x\,\mathrm{d}x = -[x \log x - x]_0^1 = 1.$$

Proto zkoumaný Newtonův integrál existuje.

Příklad 7.6.9. Zkoumejme existenci

$$(\mathcal{N}) \int_0^{+\infty} \arctan x\,\mathrm{d}x.$$

Položme $g(x) = 1$. Tato funkce není newtonovsky integrovatelná, zároveň

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pi}{2}.$$

Odtud vidíme, že zkoumaný integrál neexistuje.

Poznámka 7.6.10. Vyšetřování existence určitého integrálu se provádí proto, že mimo nám dosud známých metod počítání integrálů existují i metody pokročilé, které jsou aplikovatelné jen v případě existence počítaného integrálu. Důkaz existence je tedy jen prvním krokem procesu, který skončí výpočtem jeho přesné hodnoty. Ještě zde poznamenejme, že pro tyto metody je důležitá integrovatelnost $|f|$, proto požadavek na znaménko v předchozí větě nás v praxi nijak neomezuje v aplikacích.

7.6.2 Existence Newtonova integrálu pro funkce měnící znaménko

I když jsme předchozí výklad zakončili informací, že nás v aplikacích bude zajímat jen integrovatelnost nezáporných funkcí, přidáme několik komentářů o případné platnosti či neplatnosti srovnávacího kritéria pro funkce, které nejsou nezáporné. V takovém případě totiž dochází k některým zajímavým jevům.

Předně, pokud bychom měli $f, g \leq 0$ na $[a, b)$, kritérium by stále platilo, neboť záporné znaménko můžeme vytknout před integrál.

Pokud bychom zkoumali problém typu

$$(\mathcal{N}) \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} \, dx,$$

stačí si uvědomit, že $\frac{\sin x}{x} \in C([0, \pi])$ (po dodefinování hodnotou 1 v $x = 0$) a funkce $\frac{1}{\sqrt{x}}$ je na pravém okolí počátku integrovatelná, lze tedy použít Srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu (Věta 7.6.5 část (i)) a $\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} \in C([\pi, 2\pi])$ (situace se spojitostí až do kraje, kdy integrál existuje vždy). Podobně bychom si dokázali poradit se spojitou funkcí, která změní znaménko konečněkrát.

Případ s nekonečně mnoha změnami znaménka už skutečně problémy přináší. Definujme funkce

$$u(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} \qquad \text{a} \qquad v(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Obě funkce jsou z $C([2\pi, +\infty))$ a platí $\lim_{x \to +\infty} \frac{u(x)}{v(x)} = 1$. Dá se však ukázat, že v je newtonovsky integrovatelná, zatímco u nikoliv.

Integrovatelnost v plyne z následujícího výsledku (dokážeme jej v jednom z dodatků na konci kapitoly).

Věta 7.6.11 (Kritérium Abel-Dirichletovo). *Nechť $F, f, g \in C([a, b))$, $F' = f$ na (a, b) a g je monotonní na $[a, b)$.*
(Dirichlet) *je-li F omezená na (a, b) a $\lim_{x \to b_-} g(x) = 0$, pak fg je newtonovsky integrovatelná na (a, b)*
(Abel) *je-li f newtonovsky integrovatelná na (a, b) a g omezená na $[a, b)$, pak fg je newtonovsky integrovatelná na (a, b).*

Skutečně, v Dirichletově kritériu stačí položit $f(x) := \sin x$ a $g(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$. Pak g je spojitá, monotonní, s nulovou limitou a $F(x) := \cos x$ je spojitá a omezená primitivní funkce k f (která má opět požadované vlastnosti).

Na druhou stranu,

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{2x},$$

a zatímco integrál

$$(\mathcal{N}) \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x} \, \mathrm{d}x$$

konverguje podle Dirichletova kritéria z Věty 7.6.11, integrál

$$(\mathcal{N}) \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{1}{2x} \, \mathrm{d}x$$

diverguje (ověří se snadným výpočtem), a proto diverguje i

$$(\mathcal{N}) \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \, \mathrm{d}x$$

a také

$$(\mathcal{N}) \int_{2\pi}^{+\infty} u \, \mathrm{d}x.$$

Příklad 7.6.12. Ukažme, že

$$(\mathcal{N}) \int_{0}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} \, \mathrm{d}x$$

neexistuje (je roven $+\infty$).

Zřejmě totiž

$$(\mathcal{N}) \int_{0}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} \, \mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} (\mathcal{N}) \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Platí ale

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2},$$

a proto $(\mathcal{N}) \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} \, \mathrm{d}x$ neexistuje.

Cvičení 7.6.13. Ukažte analogicky jako výše, že

$$(\mathcal{N}) \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x$$

existuje pro $\alpha \in (0, 2)$ a

$$(\mathcal{N}) \int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^\beta} \, \mathrm{d}x$$

existuje pro $\beta > 0$.

7.7 Věty o střední hodnotě pro Riemannův integrál

Zatím jsme se bavili o základních metodách jak Newtonův či Riemannův integrál spočítat, nebo jsme se zabývali přípravou na jeho budoucí výpočet (kriteria pro konečnost Newtonova integrálu z nezáporné spojité funkce). V některých aplikacích však stačí dostatečně přesný odhad hodnoty integrálu. K tomu se často používají takzvané věty o střední hodnotě integrálního počtu. Bývají vysloveny jak pro Riemannův tak Newtonův integrál. My zde uvedeme verze jen pro Riemannův integrál. Zároveň však připomínáme čtenáři, že v mnoha aplikacích oba integrály splývají (kupříkladu pro omezené spojité funkce). V takovém případě se naše výsledky dají použít i pro integrál Newtonův. V následující části textu tedy pracujeme s integrálem Riemannovým. Začneme jedním pomocným výsledkem.

Tvrzení 7.7.1. *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou riemannovsky integrovatelné na $[a, b]$. Pak i fg je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$.*

Důkaz. Obě funkce jsou omezené, nechť je tedy K takové, že $|f| \leq K$ a $|g| \leq K$ na $[a, b]$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle kriteria riemannovské integrovatelnosti (Lemma 7.3.1) existuje dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ tak, že

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad S(g, D) - s(g, D) < \varepsilon$$

(ve skutečnosti každé funkci odpovídá obecně jiné dělení, naše dělení jsme získali jejich společným zjemněním). Povšimněme si, že pro libovolné $x, y \in [a, b]$ platí

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f(y)g(y) &= f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y) \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \\ &\leq K|g(x) - g(y)| + K|f(x) - f(y)|. \end{aligned}$$

Proto pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ dostáváme

$$\sup_{[x_{j-1},x_j]} fg - \inf_{[x_{j-1},x_j]} fg \leq K(\sup_{[x_{j-1},x_j]} f - \inf_{[x_{j-1},x_j]} f) + K(\sup_{[x_{j-1},x_j]} g - \inf_{[x_{j-1},x_j]} g).$$

Odtud po vysčítání

$$\begin{aligned} S(fg, D) - s(fg, D) &= \sum_{j=1}^n (\sup_{[x_{j-1},x_j]} fg - \inf_{[x_{j-1},x_j]} fg)(x_j - x_{j-1}) \\ &= K\sum_{j=1}^n (\sup_{[x_{j-1},x_j]} f - \inf_{[x_{j-1},x_j]} f)(x_j - x_{j-1}) \\ &\qquad + K\sum_{j=1}^n (\sup_{[x_{j-1},x_j]} g - \inf_{[x_{j-1},x_j]} g)(x_j - x_{j-1}) \\ &= K(S(f, D) - s(f, D)) + K(S(g, D) - S(g, D)) < 2K\varepsilon \end{aligned}$$

a kriterium riemannovské integrovatelnosti (Lemma 7.3.1) dává dokazovaný výsledek. □

Věta 7.7.2 (První věta o střední hodnotě integrálního počtu). *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou riemannovsky integrovatelné na $[a, b]$ a g nemění znaménko na $[a, b]$. Pak existuje $c \in [\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f]$ takové, že*

$$(\mathcal{R}) \int_a^b fg \,\mathrm{d}x = c(\mathcal{R}) \int_a^b g \,\mathrm{d}x.$$

Je-li dokonce f spojitá na $[a, b]$, existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$(\mathcal{R}) \int_a^b fg \,\mathrm{d}x = f(\xi)(\mathcal{R}) \int_a^b g \,\mathrm{d}x.$$

Speciálně pro f spojitou na $[a, b]$ a $g \equiv 1$ máme

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x = f(\xi)(b - a).$$

Důkaz. Důkaz provedeme pro g nezápornou, pro g nekladnou je analogický. Označme $m := \inf_{[a,b]} f$ a $M := \sup_{[a,b]} f$. Protože $m \le f \le M$ na $[a, b]$, z nezápornosti g dostáváme

$$mg \le fg \le Mg \qquad \text{na } [a, b].$$

Monotonie a linearita integrálu (Věty 7.5.1 a 7.5.3) spolu s Tvrzením o integrovatelnosti součinu dvou integrovatelných funkcí (Tvrzení 7.7.1) tedy dávají

$$\begin{aligned} m(\mathcal{R}) \int_a^b g \,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_a^b mg \,\mathrm{d}x &\le (\mathcal{R}) \int_a^b fg \,\mathrm{d}x \\ &\le (\mathcal{R}) \int_a^b Mg \,\mathrm{d}x = M(\mathcal{R}) \int_a^b g \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pokud $(\mathcal{R}) \int_a^b g \,\mathrm{d}x = 0$, první výsledek platí s libovolným $c \in \mathbb{R}$ a druhý s libovolným $\xi \in (a, b)$. V opačném případě můžeme psát

$$m \le \frac{(\mathcal{R}) \int_a^b fg \,\mathrm{d}x}{(\mathcal{R}) \int_a^b g \,\mathrm{d}x} \le M.$$

Odtud okamžitě plyne první výsledek. Pokud je f spojitá, nabývá hodnot m a M. Z Darbouxovy věty (Věta 6.2.1) pak plyne, že

$$f(\xi) = \frac{(\mathcal{R}) \int_a^b fg \,\mathrm{d}x}{(\mathcal{R}) \int_a^b g \,\mathrm{d}x}$$

pro nějaké $\xi \in [a, b]$. Ukažme, že lze volit $\xi \in (a, b)$. Pokud by to nešlo, měli bychom například

$$f(a) = \frac{(\mathcal{R}) \int_a^b fg \,\mathrm{d}x}{(\mathcal{R}) \int_a^b g \,\mathrm{d}x} \qquad \text{a} \qquad f \ne f(a) \quad \text{na } (a, b)$$

(druhá možnost je, že na pozici $f(a)$ je $f(b)$, a postupuje se podobně). V našem případě Darbouxova věta (Věta 6.2.1) implikuje, že buď $f > f(a)$ na celém (a,b) nebo $f < f(a)$ na celém (a,b). Věnujme se v dalším prvnímu z těchto případů (druhý se řeší analogicky). Chceme tedy odvodit spor z vlastností

$$(\mathcal{R})\int_a^b g\,\mathrm{d}x > 0, \qquad f(a) = \frac{(\mathcal{R})\int_a^b fg\,\mathrm{d}x}{(\mathcal{R})\int_a^b g\,\mathrm{d}x},$$
$$f > f(a) \text{ na } (a,b) \quad \text{a} \qquad f \text{ je spojitá na } [a,b].$$

Protože g je omezená, dokážeme najít $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ tak, že $\int_\alpha^\beta g\,\mathrm{d}x > 0$. Zároveň musí platit $\inf_{[\alpha,\beta]} f > f(a)$. Odtud

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R})\int_a^b fg\,\mathrm{d}x &= f(a)(\mathcal{R})\int_a^b g\,\mathrm{d}x \\
&= (\mathcal{R})\int_a^\alpha f(a)g\,\mathrm{d}x + (\mathcal{R})\int_\alpha^\beta f(a)g\,\mathrm{d}x + (\mathcal{R})\int_\beta^b f(a)g\,\mathrm{d}x \\
&< (\mathcal{R})\int_a^\alpha f(a)g\,\mathrm{d}x + (\mathcal{R})\int_\alpha^\beta (\inf_{[\alpha,\beta]} f)g\,\mathrm{d}x + (\mathcal{R})\int_\beta^b f(a)g\,\mathrm{d}x \\
&\le (\mathcal{R})\int_a^\alpha fg\,\mathrm{d}x + (\mathcal{R})\int_\alpha^\beta fg\,\mathrm{d}x + (\mathcal{R})\int_\beta^b fg\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R})\int_a^b fg\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

a dostáváme spor. Speciální tvrzení ve větě plyne okamžitě z druhé části. □

Poznámka 7.7.3. (i) Předpoklad spojitosti ve speciální části věty zaručuje existenci primitivní funkce, pro kterou potom věta dává

$$f(\xi) = F'(\xi) = \frac{(\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x}{b-a} = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}.$$

Výsledek tedy úzce souvisí s větami o přírůstku funkce.
(ii) Veličina $\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ se nazývá *integrální průměr* a v některých partiích matematické analýzy hraje důležitou roli.
(iii) Požadavek, aby funkce g neměnila znaménko, se nedá vynechat, jak ukazuje volba $f(x) = g(x) = x$, která dává

$$(\mathcal{R})\int_{-1}^1 fg\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R})\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \qquad \text{a} \qquad (\mathcal{R})\int_{-1}^1 g\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R})\int_{-1}^1 x\,\mathrm{d}x = 0.$$

První věta o střední hodnotě integrálního počtu (Věta 7.7.2) sama o sobě žádné zajímavé odhady nenabízí (odhady $m\int_a^b g\,\mathrm{d}x \le \int_a^b fg\,\mathrm{d}x \le M\int_a^b g\,\mathrm{d}x$ pro g nezápornou jsme již dávno měli k dispozici díky monotonii integrálu). Překvapivě zajímavé výsledky se však získají, když se tato věta zkombinuje s integrací per partes.

Věta 7.7.4 (Druhá věta o střední hodnotě integrálního počtu (slabší verze))**.** *Nechť $f, g, : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f, g, g' \in C([a, b])$ a g' nemění znaménko. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že*

$$(\mathcal{R}) \int_a^b fg \, \mathrm{d}x = g(a)(\mathcal{R}) \int_a^\xi f \, \mathrm{d}x + g(b)(\mathcal{R}) \int_\xi^b f \, \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Předpoklady zaručují, že f má na $[a, b]$ primitivní funkci. Označme ji F. Pak podle Věty o integraci per partes pro Riemannův integrál (Věta 7.5.17) a První věty o střední hodnotě integrálního počtu (Věta 7.7.2) máme

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}) \int_a^b fg \, \mathrm{d}x &= [Fg]_a^b - (\mathcal{R}) \int_a^b Fg' \, \mathrm{d}x = [Fg]_a^b - F(\xi)(\mathcal{R}) \int_a^b g' \, \mathrm{d}x \\ &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)g(b) + F(\xi)g(a) \\ &= g(a)(\mathcal{R}) \int_a^\xi f \, \mathrm{d}x + g(b)(\mathcal{R}) \int_\xi^b f \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

Příklad 7.7.5. Odhadněme $|\int_1^{100} \frac{\cos x}{x} \, \mathrm{d}x|$. Pokud bychom k problému přistupovali přes monotonii integrálu (Věta 7.5.3) nebo První větu o střední hodnotě (Věta 7.7.2), dostali bychom odhad typu

$$\begin{aligned}\left|(\mathcal{R}) \int_1^{100} \frac{\cos x}{x} \, \mathrm{d}x\right| &\leq (\mathcal{R}) \int_1^{100} \max_{[1,100]} \left|\frac{\cos x}{x}\right| \mathrm{d}x \\ &\leq (\mathcal{R}) \int_1^{100} \frac{\max_{[1,100]} |\cos x|}{\min_{[1,100]} x} \, \mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_1^{100} \mathrm{d}x = 99.\end{aligned}$$

Hledané číslo tedy leží někde v intervalu $[-99, 99]$.

Aplikace Druhé věty o střední hodnotě (Věta 7.7.4) dává ($f(x) = \cos x$, $g(x) = \frac{1}{x}$)

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}) \int_1^{100} \frac{\cos x}{x} \, \mathrm{d}x &= 1(\mathcal{R}) \int_1^\xi \cos x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{100}(\mathcal{R}) \int_\xi^{100} \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= \sin \xi - \sin 1 + \frac{\sin 100 - \sin \xi}{100}.\end{aligned}$$

Číslo $\xi \in (1, 100)$ sice nedokážeme určit, ale vzhledem k tomu, že $-1 \leq \sin \leq 1$, snadno nahlédneme, že platí $\int_1^{100} \frac{\cos x}{x} \, \mathrm{d}x \in (-2, \frac{1}{2})$. To je podstatně přesnější informace, než jakou jsme dostali výše.

Pohodlnější užití poskytuje standardní verze Druhé věty o střední hodnotě (formulované níže), která má však podstatně pracnější důkaz.

Věta 7.7.6 (Druhá věta o střední hodnotě integrálního počtu)**.** *Nechť f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$ a g je monotonní na $[a, b]$. Pak existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že*

$$(\mathcal{R}) \int_a^b fg \, \mathrm{d}x = g(a)(\mathcal{R}) \int_a^\xi f \, \mathrm{d}x + g(b)(\mathcal{R}) \int_\xi^b f \, \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Krok 1 (přechod ke speciálnímu případu):
Předně si připomeňme, že monotonní funkce je riemannovsky integrovatelná. Díky tomu je integrovatelný součin fg (Tvrzení 7.7.1) a všechny integrály ve znění věty mají dobrý smysl. Dále si uvědomme, že pro konstantní g je dokazovaná rovnost zřejmě splněna a navíc integrál je lineární. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že

$$g \text{ je nerostoucí na } [a,b] \qquad \text{a} \qquad g(a) > g(b) = 0$$

(pokud je g neklesající, pracujeme s $-g$, pokud $g(b) \neq 0$, pracujeme s $\tilde{g} = g - g(b)$, pokud je $g(a) = g(b)$, je g konstantní a rovnost zřejmě platí).

Protože f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$, je $F(x) := (\mathcal{R}) \int_a^x f \,\mathrm{d}y$ spojitá na $[a,b]$ (podle Takzvané hlavní věty diferenciálního a integrálního počtu, tedy Věty 7.5.12) a proto na $[a,b]$ nabývá svého maxima a minima. Označme je

$$\alpha := \min_{[a,b]} F \qquad \text{a} \qquad \beta := \max_{[a,b]} F.$$

Krok 2 (klíčová nerovnost):
Naším cílem je nyní dokázat klíčovou nerovnost

$$\alpha \leq \frac{1}{g(a)} (\mathcal{R}) \int_a^b fg \,\mathrm{d}x \leq \beta. \tag{7.7.1}$$

Na chvíli zafixujme dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ a definujme číslo

$$L := \sum_{j=1}^n g(x_{j-1}) (\mathcal{R}) \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \,\mathrm{d}x.$$

Nejprve si povšimněme, že

$$L = \sum_{j=1}^n g(x_{j-1}) (\mathcal{R}) \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \,\mathrm{d}x \leq \sum_{j=1}^n g(a) (\mathcal{R}) \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \,\mathrm{d}x = g(a)F(b) \leq g(a)\beta.$$

Dále s využitím monotonie funkce g a $F(a) = 0$

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{j=1}^n g(x_{j-1}) (\mathcal{R}) \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^n g(x_{j-1}) (F(x_j) - F(x_{j-1})) \\
&= g(x_0)F(x_1) + g(x_1)(F(x_2) - F(x_1)) + \cdots + g(x_{n-1})(F(x_n) - F(x_{n-1})) \\
&= F(x_1)(g(x_0) - g(x_1)) + F(x_2)(g(x_1) - g(x_2)) + \cdots + F(x_n) g(x_{n-1}) \\
&\geq \alpha(g(x_0) - g(x_1)) + \alpha(g(x_1) - g(x_2)) + \cdots + \alpha g(x_{n-1}) \\
&= \alpha g(x_0) = \alpha g(a).
\end{aligned}$$

Celkově dostáváme

$$\alpha \leq \frac{L}{g(a)} \leq \beta. \tag{7.7.2}$$

Navíc máme

$$\begin{aligned}\Big|L - (\mathcal{R})\int_a^b fg\,\mathrm{d}x\Big| &= \Big|\sum_{j=1}^{n}(\mathcal{R})\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(g(x_{j-1}) - g(x))\,\mathrm{d}x\Big| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n}(\mathcal{R})\int_{x_{j-1}}^{x_j} |f||g(x_{j-1}) - g(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \sup_{[a,b]}|f|\sum_{j=1}^{n}(\mathcal{R})\int_{x_{j-1}}^{x_j}\big(g(x_{j-1}) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \sup_{[a,b]}|f|\Big(S(g,D) - (\mathcal{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\Big).\end{aligned}$$

Protože g je riemannovsky integrovatelná, můžeme volit dělení D tak, že L je libovolně blízko $\int_a^b fg\,\mathrm{d}x$. Proto nerovnost (7.7.2) implikuje (7.7.1).

Krok 3 (dokončení důkazu):
Protože F je spojitá na $[a,b]$, nabývá zde hodnot α, β, a proto podle Darbouxovy věty (Věta 6.2.1) a klíčové nerovnosti (7.7.1) musí existovat $\xi \in [a,b]$ tak, že

$$(\mathcal{R})\int_a^{\xi} f\,\mathrm{d}x = F(\xi) = \frac{1}{g(a)}(\mathcal{R})\int_a^b fg\,\mathrm{d}x,$$

což jsme chtěli ukázat. □

Poznámka 7.7.7. Možnost pracovat s obecnějšími funkcemi není jedinou výhodou obecné verze druhé věty o střední hodnotě. Kombinujeme-li tuto větu s tím, že změna funkční hodnoty v jediném bodě nezmění Riemanův integrál, případným předefinováním funkce g v jednom bodě můžeme výslednou identitu ve větě přepsat do tvarů

$$(\mathcal{R})\int_a^b fg\,\mathrm{d}x = g(a)(\mathcal{R})\int_a^{\xi} f\,\mathrm{d}x$$

pro g nerostoucí nezápornou či neklesající nekladnou a

$$(\mathcal{R})\int_a^b fg\,\mathrm{d}x = g(b)(\mathcal{R})\int_{\xi}^b f\,\mathrm{d}x$$

pro g nerostoucí nekladnou či neklesající nezápornou.

Příklad 7.7.8. Pokud bychom při řešení Příkladu 7.7.5 používali naše nejnovější poznatky, mohli jsme postupovat rychleji s využitím identity

$$(\mathcal{R})\int_1^{100}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R})\int_1^{\xi}\cos x\,\mathrm{d}x = \sin\xi - \sin 1 \in \Big(-\frac{19}{10}, \frac{1}{5}\Big).$$

7.8 Dodatek: důkaz Abel-Dirichletova kritéria

Věta 7.8.1 (Kritérium Abel-Dirichletovo)**.** *Nechť $F, f, g \in C([a,b))$, $F' = f$ na (a,b) a g je monotonní na $[a,b)$.*
(Dirichlet) *je-li F omezená na (a,b) a $\lim_{x\to b_-} g(x) = 0$, pak fg je newtonovsky integrovatelná na (a,b)*
(Abel) *je-li f newtonovsky integrovatelná na (a,b) a g omezená na $[a,b)$, pak fg je newtonovsky integrovatelná na (a,b).*

Důkaz. Nejprve předpokládejme Dirichletovy podmínky. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle předpokladů existuje $\tau \in (a,b)$ takové, že $|g| < \varepsilon$ na (τ,b). Na chvíli zafixujme $x_1, x_2 \in (\tau,b)$, $x_1 < x_2$. Na intervalu $[x_1,x_2]$ je fg spojitá omezená funkce, má zde tedy jak Newtonův tak Riemannův integrál (se shodnou hodnotou) a na tento integrál lze použít Druhou větu o střední hodnotě integrálního počtu (Věta 7.7.6). Dostáváme

$$\begin{aligned}
\left|(\mathcal{N})\int_{x_1}^{x_2} fg\,\mathrm{d}x\right| &= \left|(\mathcal{R})\int_{x_1}^{x_2} fg\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|g(x_1)(\mathcal{R})\int_{x_1}^{\xi} f\,\mathrm{d}x + g(x_2)(\mathcal{R})\int_{\xi}^{x_2} f\,\mathrm{d}x\right| \\
&= |g(x_1)(F(\xi)-F(x_1)) + g(x_2)(F(x_2)-F(\xi))| \le 4\varepsilon \sup_{(\tau,b)} |F|.
\end{aligned}$$

Protože F je omezená na (a,b), ověřili jsme B-C podmínku pro limitu funkce $t \mapsto (\mathcal{N})\int_a^t fg\,\mathrm{d}x$ v bodě b zleva a jsme v prvním případě hotovi.

Nyní předpokládejme Abelovy podmínky. Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože f je newtonovsky integrovatelná na (a,b), funkce F splňuje B-C podmínku pro konvergenci v bodě b zleva. Existuje tedy $\tau \in (a,b)$ takové, že

$$y_1, y_2 \in (\tau,b) \qquad \Longrightarrow \qquad |F(y_1) - F(y_2)| < \varepsilon.$$

Přidáme-li navíc omezenost funkce g a Druhou větu o střední hodnotě integrálního počtu (Větu 7.7.6) (oprávněnost aplikace plyne ze spojitosti jako výše), dostáváme pro $x_1, x_2 \in (\tau,b)$

$$\begin{aligned}
\left|(\mathcal{N})\int_{x_1}^{x_2} fg\,\mathrm{d}x\right| &= \left|(\mathcal{R})\int_{x_1}^{x_2} fg\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|g(x_1)(\mathcal{R})\int_{x_1}^{\xi} f\,\mathrm{d}x + g(x_2)(\mathcal{R})\int_{\xi}^{x_2} f\,\mathrm{d}x\right| \\
&= |g(x_1)||F(\xi)-F(x_1)| + |g(x_2)||F(x_2)-F(\xi))| \le 2\varepsilon \sup_{(a,b)} |g|.
\end{aligned}$$

Opět jsme ověřili B-C podmínku pro limitu funkce $t \mapsto (\mathcal{N})\int_a^t fg\,\mathrm{d}x$ v bodě b zleva a jsme hotovi. □

Příklad 7.8.2. Ukažme, že $(\mathcal{N})\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,\mathrm{d}x$ neexistuje. Předně si povšimněme, že

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sin x)}.$$

Z Dirichletova kritéria plyne, že první funkce napravo má Newtonův integrál přes $(\pi, +\infty)$. Pokud by jej měla i funkce nalevo, podle linearity integrálu by jej musela mít i funkce uplně napravo. My však máme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$(\mathcal{N})\int_\pi^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sin x)}\,\mathrm{d}x \geq (\mathcal{N})\int_\pi^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\,\mathrm{d}x \overset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

(limitní přechod úplně napravo je analogický situaci za Větou 7.6.11).

7.9 Dodatek o zobecněné primitivní funkci k f a $|f|$

V Poznámce 7.1.9 jsme se zabývali nerovnostmi mezi $(\mathcal{N})\int_a^b f\,dx$ a $(\mathcal{N})\int_a^b |f|\,dx$. Je přirozenou otázkou, zda newtonovská integrovatelnost f implikuje newtonovskou integrovatelnost $|f|$ (takový jev jsme viděli u Riemannova integrálu). V případě Newtonova integrálu ale takový vztah neplatí. Už na úrovni existence zobecněných primitivních funkcí kladný výsledek pro f neimplikuje kladný výsledek pro $|f|$ a obráceně, což si nyní ukážeme.

Předně položíme-li $f(x) = 2D(x) - 1$ (D je Dirichletova funkce), vidíme, že f nemá na žádném intervalu Darbouxovu vlastnost, nemůže tedy mít primitivní funkci a ani zobecněnou primitivní funkci (ta by na omezeném intervalu vznikla poslepováním konečně mnoha dílčích primitivních funkcí). Na druhou stranu $|f| \equiv 1$ primitivní funkci má.

Nyní si zkonstruujeme funkci f, která primitivní funkci má, zatímco $|f|$ nemá ani zobecněnou primitivní funkci. Definujme

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^3}) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Odtud

$$f(x) := F'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x^3}) - \frac{3}{x^2}\cos(\frac{1}{x^3}) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Funkce f má primitivní funkci F na $\mathbb{R}$. Pokud by G byla zobecněná primitivní funkce k $|f|$ na $\mathbb{R}$, byla by spojitá, neklesající a platilo by

$$\begin{aligned} +\infty > G(1) - G(0) &= (\mathcal{N})\int_0^1 |f|\,\mathrm{d}x = (\mathcal{N})\int_0^1 \Big|2x\sin\Big(\frac{1}{x^3}\Big) - \frac{3}{x^2}\cos\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big|\,\mathrm{d}x \\ &\geq (\mathcal{N})\int_0^1 \Big(\Big|\frac{3}{x^2}\cos\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big| - \Big|2x\sin\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big|\Big)\,\mathrm{d}x \\ &\geq (\mathcal{N})\int_0^1 \Big(\Big|\frac{3}{x^2}\cos\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big| - 2x\Big)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{N})\int_0^1 \Big|\frac{3}{x^2}\cos\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big|\,\mathrm{d}x - 1. \end{aligned}$$

Pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, ale platí

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{N}) \int_0^1 \left|\frac{1}{x^2}\cos\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\right| \mathrm{d}x \geq (\mathcal{N}) \int_{((m+1)\pi)^{-\frac{1}{3}}}^1 \left|\frac{1}{x^2}\cos\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\right| \mathrm{d}x \\
&= (\mathcal{R}) \int_{((m+1)\pi)^{-\frac{1}{3}}}^1 \left|\frac{1}{x^2}\cos\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\right| \mathrm{d}x \geq \sum_{j=2}^m (\mathcal{R}) \int_{(j\pi+\frac{\pi}{4})^{-\frac{1}{3}}}^{(j\pi-\frac{\pi}{4})^{-\frac{1}{3}}} \left|\frac{1}{x^2}\cos\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\right| \mathrm{d}x \\
&\geq \sum_{j=2}^m (\mathcal{R}) \int_{(j\pi+\frac{\pi}{4})^{-\frac{1}{3}}}^{(j\pi-\frac{\pi}{4})^{-\frac{1}{3}}} ((j-1)\pi)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=2}^m ((j-1)\pi)^{\frac{2}{3}} \big((j\pi-\tfrac{\pi}{4})^{-\frac{1}{3}} - (j\pi+\tfrac{\pi}{4})^{-\frac{1}{3}}\big) \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=2}^m ((j-1)\pi)^{\frac{2}{3}} \frac{\frac{\pi}{2}}{3((j+1)\pi)^{\frac{4}{3}}} \geq \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{6\sqrt{2}} \sum_{j=2}^m \frac{(j-1)^{\frac{2}{3}}}{(j+1)^{\frac{4}{3}}} \\
&\geq \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{6\sqrt{2}} \sum_{j=2}^m \frac{(m-1)^{\frac{2}{3}}}{(m+1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{6\sqrt{2}} \frac{(m-1)^{\frac{5}{3}}}{(m+1)^{\frac{4}{3}}}
\end{aligned}$$

a odtud snadno dostaneme spor. V průběhu výpočtu jsme použili odhad

$$a^{-\frac{1}{3}} - b^{-\frac{1}{3}} = \frac{b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}} = \frac{b-a}{a^{\frac{3}{3}} b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{3}{3}}} \geq \frac{b-a}{3b^{\frac{4}{3}}} \qquad \text{platný pro } 0 < a \leq b.$$

7.10 Dodatek o aplikacích určitého integrálu

V následujícím textu si představíme plošný obsah a délku křivky.

Začneme plošným obsahem. V dalším předpokládejme, že máme dán interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitou a nezápornou na $[a, b]$. Budeme zkoumat obsah množiny

$$M(a, b; f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \wedge y \in [0, f(x)]\}.$$

Plošný obsah budeme značit $P(a, b; f)$. Po této veličině je přirozené požadovat

(i)$P(a, b; f) \geq 0$ kdykoliv a, b, f jsou jako výše

(ii)$P(a, b; f) = P(a, c; f) + P(c, b; f)$ kdykoliv $c \in (a, b)$

(iii)$P(a, b; f) \geq P(\alpha, \beta, g)$ kdykoliv $M(a, b; f) \supset M(\alpha, \beta; g)$

(iv)$P(a, b; f) = c(b - a)$ pro $f \equiv c > 0$.

Poznámka 7.10.1. (i) Množinová inkluze $M(a, b; f) \supset M(\alpha, \beta; g)$ znamená, že $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ a $0 \leq g \leq f$ na $[\alpha, \beta]$.
(ii) V bodu (iv) výše se nemusíme zabývat případem $c = 0$, neboť podle (i), (ii) a (iii) máme

$$0 \leq P(a, b; 0) \leq P(a, b; \varepsilon) = \varepsilon(b - a) \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

(iii) Část (iv) vlastně definuje plošný obsah obdélníku.

Právě vyslovené požadavky mají velice blízko k Riemannovu integrálu.

Věta 7.10.2. *Veličina* P *(pracující s dvojicí reálných čísel a funkcí jako výše) splňuje vlastnosti* (i) *až* (iv) *právě tehdy, když*

$$P(a,b;f) = (\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x \qquad \textit{kdykoliv } a,b,f \textit{ jsou jako výše.}$$

Důkaz. „$\Leftarrow$“ Riemannův integrál má vlastnosti (i) až (iv) (díky své monotonii a aditivitě vůči intervalům).
„$\Rightarrow$“ Předně Riemannův integrál existuje díky spojitosti f na $[a,b]$. Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení. Podle (ii) platí

$$P(a,b;f) = \sum_{j=1}^n P(x_{j-1},x_j;f).$$

Odtud za pomoci (iii) dostáváme

$$s(f,D) \le P(a,b,f) \le S(f,D).$$

Protože D bylo libovolné, Darbouxova definice Riemannova integrálu (Definice 7.2.6) dává dokazovanou rovnost. □

Příklad 7.10.3. Máme

$$\begin{aligned}P(-1,1;\sqrt{1-x^2}) = (\mathcal{R})\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= [x\sqrt{1-x^2}]_{-1}^1 + (\mathcal{R})\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + (\mathcal{R})\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - (\mathcal{R})\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Odtud

$$2P(-1,1;\sqrt{1-x^2}) = (\mathcal{R})\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = [\arcsin x]_{-1}^1 = \pi.$$

Číslo π se tedy také dá charakterizovat jako obsah jednotkového kruhu.

Nyní se budeme věnovat délce křivky v $\mathbb{R}^N$. Připomeňme, že na $\mathbb{R}^N$ jsme definovali vzdálenost dvou bodů předpisem

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_N-y_N)^2}.$$

Tato vzdálenost splňuje trojúhelníkovou nerovnost, jak snadno vidíme z následujícího výpočtu používajícího První Cauchy-Schwarzovu nerovnost (Tvrzení 2.2.44)

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= (x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_N-y_N)^2 \\ &= x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 + \cdots + x_N^2 + y_N^2 - 2x_Ny_N \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x_1y_1 + \cdots + x_Ny_N) \\ &\le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Definice 7.10.4. Nechť $N \in \mathbb{N}$ a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou třídy C^1 na $[a, b]$. Pak zobrazení $\varphi\colon x \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x)), \dots, \varphi_N(x))$ nazveme C^1-*křivkou. Geometrickým obrazem* křivky φ rozumíme množinu $\varphi([a, b]) \subset \mathbb{R}^N$. Dále značíme

$$\dot{\varphi}(x) = \big(\varphi_1'(x), \varphi_2'(x), \dots, \varphi_N'(x)\big).$$

Příklad 7.10.5. (i) Jednotkovou kružnici v rovině lze popsat křivkou $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, kde $t \in [0, 2\pi]$. Platí $\dot{\varphi}(t) = (-\sin t, \cos t)$.
(ii) Graf funkce $f \in C^1([a, b])$ lze popsat křivkou $\varphi(t) = (t, f(t))$, kde $t \in [a, b]$.

Definice 7.10.6. Nechť φ je C^1-křivka na $[a, b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení intervalu $[a, b]$. Položme

$$L(\varphi; D) = \sum_{j=0}^{n} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\|.$$

Veličinu

$$L(\varphi) := \sup\{L(\varphi, D)\colon D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}$$

nazýváme *délkou křivky* φ.

Poznámka 7.10.7. Veličina $L(\varphi; D)$ je délka lomené čáry, která se s naší křivkou shoduje v bodech $\varphi(x_j)$ a právě v těchto bodech má zlomy.

Naším dalším cílem bude spočítat délku křivky pomocí Riemannova integrálu. Začneme jedním pomocným výsledkem.

Lemma 7.10.8. *Nechť* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *má spojité složky na* $[a, b]$. *Pak*

$$\left\| \left((\mathcal{R}) \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x, (\mathcal{R}) \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}x, \dots, (\mathcal{R}) \int_a^b f_N \,\mathrm{d}x \right) \right\| \le (\mathcal{R}) \int_a^b \|f\| \,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Spojitost jednotlivých složek zaručuje, že je spojitá i funkce $\|f\|$ a všechny integrály ve znění věty tedy existují. Dokažme požadovanou nerovnost. Položme

$$y := \left((\mathcal{R}) \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x, (\mathcal{R}) \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}x, \dots, (\mathcal{R}) \int_a^b f_N \,\mathrm{d}x \right).$$

Pak podle První Cauchy-Schwarzovy nerovnosti (Tvrzení 2.2.44) máme

$$\begin{aligned} \|y\|^2 = \sum_{j=1}^{N} y_j^2 = \sum_{j=1}^{N} y_j (\mathcal{R}) \int_a^b f_j \,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_a^b \sum_{j=1}^{N} y_j f_j \,\mathrm{d}x \\ \le (\mathcal{R}) \int_a^b \|y\| \|f\| \,\mathrm{d}x = \|y\| (\mathcal{R}) \int_a^b \|f\| \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tento výpočet nám dává požadovaný odhad v případě, že $\|y\| > 0$. Je-li naopak $\|y\| = 0$, odhad platí triviálně. □

Věta 7.10.9 (Výpočet délky křivky). *Nechť φ je C^1-křivka na $[a,b]$. Pak*

$$L(\varphi) = (\mathcal{R})\int_a^b \|\dot\varphi\|\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R})\int_a^b \sqrt{{\varphi_1'}^2 + {\varphi_2'}^2 + \cdots + {\varphi_N'}^2}\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Druhá rovnost je jen přepis definice $\|\dot\varphi\|$, věnujme se té první.
„$\leq$“ Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení. Pak díky Lemmatu 7.10.8 máme

$$\begin{aligned}
L(\varphi; D) &= \sum_{j=1}^n \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| \\
&= \sum_{j=1}^n \left\| \left((\mathcal{R})\int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_1'\,\mathrm{d}x, (\mathcal{R})\int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_2'\,\mathrm{d}x, \ldots, (\mathcal{R})\int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_N'\,\mathrm{d}x \right) \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^n (\mathcal{R})\int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\dot\varphi\|\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R})\int_a^b \|\dot\varphi\|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Protože D bylo libovolné, poslední odhad implikuje dokazovanou nerovnost.
„$\geq$“ Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu je podle Cantorovy věty (Věta 6.2.15) automaticky stejnoměrně spojitá, umíme najít $\delta > 0$ takové, že

$$|\varphi_i'(y_1) - \varphi_i'(y_2)| < \varepsilon \qquad \text{kdykoliv } y_1, y_2 \in [a,b], |y_1 - y_2| < \delta \text{ a } i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Zvolíme-li nyní dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ tak, aby mělo normu menší než δ. Pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ dostáváme

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R})\int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\dot\varphi(x)\|\,\mathrm{d}x &= (\mathcal{R})\int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\dot\varphi(x_j) + (\dot\varphi(x) - \dot\varphi(x_j))\|\,\mathrm{d}x \\
&\leq (\mathcal{R})\int_{x_{j-1}}^{x_j} \big(\|\dot\varphi(x_j)\| + \|\dot\varphi(x) - \dot\varphi(x_j)\|\big)\,\mathrm{d}x \\
&\leq (\mathcal{R})\int_{x_{j-1}}^{x_j} \big(\|\dot\varphi(x_j)\| + \sqrt{\varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^2}\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \left\| (\mathcal{R})\int_{x_{j-1}}^{x_j} \dot\varphi(x_j)\,\mathrm{d}x \right\| + \sqrt{N}\varepsilon(x_j - x_{j-1}) \\
&= \left\| (\mathcal{R})\int_{x_{j-1}}^{x_j} \big(\dot\varphi(x) - (\dot\varphi(x_j) - \dot\varphi(x))\big)\,\mathrm{d}x \right\| + \sqrt{N}\varepsilon(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq \left\| (\mathcal{R})\int_{x_{j-1}}^{x_j} \dot\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right\| + (\mathcal{R})\int_{x_{j-1}}^{x_j} \sqrt{\varepsilon^2 + \ldots \varepsilon^2}\,\mathrm{d}x + \sqrt{N}\varepsilon(x_j - x_{j-1}) \\
&= \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| + 2\sqrt{N}\varepsilon(x_j - x_{j-1}).
\end{aligned}$$

Celkově

$$\begin{aligned}(\mathcal{R})\int_a^b \|\dot{\varphi}\|\,\mathrm{d}x &= \sum_{j=1}^{n}(\mathcal{R})\int_{x_{j-1}}^{x_j}\|\dot{\varphi}\|\,\mathrm{d}x \\ &\le \sum_{j=1}^{n}\Big(\|\varphi(x_j)-\varphi(x_{j-1})\| + 2\sqrt{N}\varepsilon(x_j-x_{j-1})\Big) \\ &= L(\varphi;D) + 2\sqrt{N}(b-a)\varepsilon \le L(\varphi) + 2\sqrt{N}(b-a)\varepsilon.\end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, jsme hotovi. □

Příklad 7.10.10. Spočítejme obvod kružnice. Uvažujeme-li $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, kde t bereme z intervalu $[0, 2\pi]$, máme

$$L(\varphi) = (\mathcal{R})\int_0^{2\pi}\|\dot{\varphi}\|\,\mathrm{d}t = (\mathcal{R})\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = (\mathcal{R})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = 2\pi.$$

Můžeme také popsat horní půloblouk jako graf funkce $f\colon x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ na $[-1, 1]$. Pracujeme tedy s křivkou $\psi(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ a dostáváme

$$L(\psi) = (\mathcal{R})\int_{-1}^{1}\sqrt{1^2 + \Big(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\Big)^2}\,\mathrm{d}t = (\mathcal{R})\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1}{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = [\arcsin t]_{-1}^{1} = \pi.$$

Podobně bychom spočítali obvod dolního půloblouku.

Literatura

[AmEs An] AMMAN, H. a ESCHER, J.: *Analysis I,II,III.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

[Ap MA] APOSTOL, T.M.: *Mathematical Analysis.* Narosa Publishing House, New Delhi, 1997 (16. reprint).

[BaSt TeMno] BALCAR, B. a ŠTĚPÁNEK, P.: *Teorie množin.* Academia, Praha, 2005 (2. vydání).

[BrSaSo MeKo] BRDIČKA, M., SAMEK, L. a SOPKO B.: *Mechanika kontinua.* Academia, Praha, 2000.

[De] DĚMIDOVIČ B.P.: *Sbírka a cvičení z matematické analýzy.* Fragment, Praha, 2003.

[Di An] DIEDONNÉ, J. *Foundation of Modern Analysis.* Academic Press, New York–London, 1960.

[Ja DPI] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet I.* Academia, Praha, 1976 (3. vydání).

[Ja DPII] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet II.* Academia, Praha, 1976 (3. vydání).

[Ja IPI] JARNÍK, V.: *Integrální počet I.* Academia, Praha, 1976 (3. vydání).

[Ja IPII] JARNÍK, V.: *Integrální počet II.* Academia, Praha, 1976 (3. vydání).

[Ko MA I] KOPÁČEK, J.: *Matematická analýza pro fyziky I.* Matfyzpress, Praha, 2002.

[Ko MA II] KOPÁČEK, J.: *Matematická analýza pro fyziky II.* Matfyzpress, Praha, 2002.

[Ko MA III] KOPÁČEK, J.: *Matematická analýza pro fyziky III.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[Ko MA IV] KOPÁČEK, J.: *Matematická analýza pro fyziky IV.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[Ci MA V] ČIHÁK, P. a kol. : *Matematická analýza pro fyziky V.* Matfyzpress, Praha, 2001.

[Ko Pr I] Kopáček, J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky I.* Matfyzpress, Praha, 2002.

[Ko Pr II] Kopáček, J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky II.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[Ko Pr III] Kopáček, J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky III.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[Ko Pr IV] Kopáček, J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky IV.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[Ko Pr V] Kopáček, J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky V.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[StSa AnI] Stein, E.M. a Shakarchi, R.: *Fourier analysis. An intorduction.* Princeton Lecture Notes in Analysis I, Princeton University Press, Princeton, New York, 2003.

[StSa AnII] Stein, E.M. a Shakarchi, R.: *Complex analysis.* Princeton Lecture Notes in Analysis II, Princeton University Press, Princeton, New York, 2003.

[StSa AnIII] Stein, E.M. a Shakarchi, R.: *Real analysis. Measure theory, integration and Hilbert spaces.* Princeton Lecture Notes in Analysis III, Princeton University Press, Princeton, New York, 2005.