Teoretická část zkoušky 23.7.2019

Jméno:

Skupina:

1. (8b) Uvažujte homogenní lineární obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu
$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(i)}(x) = 0 \qquad a_n(x) > 0,$$
kde všechny funkce jsou reálné.
a) Vysvětlete pojmy lineárně nezávislá řešení, fundamentální systém.
b) Ukažte, že řešení rovnice tvoří vektorový prostor, jehož dimenze je n.
c) Definujte Wrońského determinant. Jaký je jeho vztah k lineární nezávislosti řešení rovnice uvedené výše?
d) Můžete z toho, že Wrońského determinant je nulový (nenulový) na nějakém intervalu, usoudit, že dané funkce jsou lineárně závislé či nezávislé? Dokažte, nebo uveďte protipříklad!

2. (7b) a) Definujte pojem mocninná řada.
b) Formulujte větu o existenci poloměru konvergence.
c) Ukažte, že řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^k$ mají stejný poloměr konvergence.
d) Pomocí předchozího tvrzení ukažte, že uvnitř intervalu konvergence lze mocninnou řadu libovolněkrát derivovat.

3. (8b) (a) Definujte metriku a metrický prostor.
(b) Definujte normu a lineární normovaný prostor.
(c) Definujte konvergenci posloupnosti v lineárním normovaném prostoru.
(c) Ukažte, že v konečně dimenzionálním vektorovém prostoru je konvergence ekvivalentní konvergenci po složkách.
(d) Definujte pojem ekvivalentní normy.
(e) Ukažte, že v konečně dimenzionálním prostoru jsou libovolné dvě normy ekvivalentní.

Početní část zkoušky 23.7.2019

Jméno:

Skupina:

1. (7b) Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{\sqrt{|y|}}{x^2+1}$$

splňující počáteční podmínku $y(1) = \frac{\pi^2}{64}$. Existuje i řešení, které navíc splňuje

$$\text{a) } y(-1) = -\frac{\pi^2}{64} \qquad \text{b) } y(-1) = \frac{\pi^2}{64}?$$

2. (6b) V závislosti na parametrech α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{\ln^\beta(n+1)} \frac{1}{(\ln(\ln(n+2)))^\gamma}.$$

3. (6b) Ověřte, že vztahy

$$x^3 + xy + \sin((u+v)\pi) - e^{uv} = 1$$
$$x^3 - xy + \cos((u+v)\pi) - e^{u^2v^2} + u + v = 2$$

zaručují na nějakém okolí bodu $u = 0$, $v = 1$, $x = y = 1$ existenci funkcí $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, a spočtěte $\nabla u(1, 1)$ a $\nabla v(1, 1)$.

4. (8b) Nalezněte maximální a minimální hodnotu funkce

$$f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$$

na podmnožině $\mathbb{R}^3$ splňující $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} \le 1$.

237.

(1) $y' = \dfrac{\sqrt{|y|}}{x^2+1}$ a) $y(1) = \dfrac{\pi^2}{64}$ b) $y(-1) = -\dfrac{\pi^2}{64}$ b_2) $y(-1) = \dfrac{\pi^2}{64}$?

7,5

Řešení:

$$\frac{dy}{\sqrt{|y|}} = \frac{dx}{x^2+1} \quad 0{,}5$$

⇓

a) $y > 0$ $2y^{\frac12} = \operatorname{arctg} x + C \Rightarrow y = \frac14(\operatorname{arctg} x + C)^2$ -1

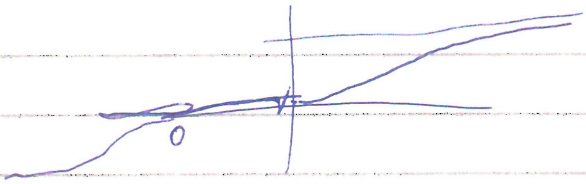
b) $y < 0$ $2|y|^{\frac12} = \operatorname{arctg} x + C$

$$\underbrace{y = -\tfrac14(\operatorname{arctg} x + C)^2}$$ 0,5

$y(1) = \frac{\pi^2}{64} \Rightarrow y = \frac14(\operatorname{arctg} x)^2$ $x > 0$ 1 (druhé řešení musí $y' \geq 0$)

v 0 je $y'(0) = 0$ $\sqrt{|y|}$ není Lipsch. spojitá 0,5

⇒



Řešení: $y = \begin{cases} \frac14(\operatorname{arctg} x)^2, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ 0,5

nebo

a) $y = \begin{cases} \frac14(\operatorname{arctg} x)^2 & x > 0 \\ 0 & x \in [-\operatorname{tg} C, 0] \\ -\frac14(\operatorname{arctg} x + C)^2 & x < -\operatorname{tg} C \end{cases}$ 0,5 0,5

$C \geq 0$

b) Varianta $y(1) = -\frac{1}{64}\pi^2$ odpovídá volbě $C = 0$. 1

Ale $y(-1) = \frac{1}{64}\pi^2$ nelze (y musí být ~~...~~ rostoucí na D_f !) 1

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{\ln^\beta(n+1)} \frac{1}{(\ln(\ln(n+1)))^\mu}$

65

Řešení: Asymptoticky se chová jako $\frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{\ln^\beta n} \frac{1}{(\ln \ln n)^\mu}$ 6,5

Proto $\alpha \leq 0$ .. Fakt D (není splněna nutná podmínka) 0,5

$\alpha < 1$ $a_n \geq \frac{K}{n^{\alpha+\varepsilon}}$ D z integrálního 0,5

$\alpha > 1$ $|a_n| \leq \frac{K}{n^{\alpha-\varepsilon}}$ K –||– 0,5

$\alpha = 1$ – rozhodují další mocniny 0,5

$\beta < 1$ D z integrálního 0,5

$\int_{100}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{\ln^\beta x} dx$ D $\beta < 1$ a $|a_n| \geq \frac{K}{n \ln^{\beta+\varepsilon} n}$

$\beta > 1$ K –||– $|a_n| \leq \frac{K}{n \ln^{\beta-\varepsilon} n}$ 0,5

$\beta = 1$ .. rozhodují další mocniny (analogicky)

$\mu > 1$ K 0,5

$\mu \leq 1$ D 0,5

$\int \frac{1}{x \ln x} \frac{1}{(\ln \ln x)^\mu} dx$ K pro $\mu > 1$, D $\mu \leq 1$

Závěr: Řada K $\alpha > 1$

$\alpha = 1$ $\beta > 1$

$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\mu > 1$

jinak D.

1,5

(3) $x^2 + xy + \sin((u+v)\pi) - e^{uv} = 1$ $\quad x = y = 1$

$x^3 - xy + \cos((u+v)\pi) \cancel{+} e^{u^2v^2} + u + v = 2$ $\quad u = 0 \quad v = 1$

6b

Řešení

$\vec{F}(1,1,0,1) = \begin{pmatrix} 1+1+0-1 = 1 \\ 1-1+(-1)\cancel{+}1+0+1 = \cancel{2}\ -1 \end{pmatrix}$ ← nesplňuje podmínku!

imo tohle nesedí, jelikož by to v bodě F(1,1,0,1) mělo být 0, ale whatever. Zeptám se na to p. Běhounkové

O.K.

If RHS of $F_2 = -1$ Then platí následující 2b

$\vec{F}$ je na okolí $(1,1,0,1)$ hladká O.K.

hladká ... první derivace jsou spojité. To abychom pak mohli najít ten gradient pro obě fce.

$\nabla_{u,v} \vec{F}(1,1,0,1) = \begin{pmatrix} -\pi-1, & -\pi \\ 1, & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\nabla_{u,v} \vec{F}(1,1,0,1)) = -1 \neq 0$

ověření 3. podmínky věty o implicitní fci (skripta str. 177)

$\Rightarrow \exists\, u = u(x,y)$ na okolí $(1,1,0,1)$.
$v = v(x,y)$

$\Rightarrow 3+1 \cancel{+} \pi \frac{\partial u}{\partial x} - \pi \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$3 - 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad /\pi$ 1b

$\boxed{2\pi + 4 = \frac{\partial u}{\partial x}}$ $\quad \boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = -2 - \frac{\partial u}{\partial x} = -2\pi - 6}$ 1b

$1 - \pi \frac{\partial u}{\partial y} - \pi \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$-1 + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad /\pi$ 2b

$\boxed{-\pi + 1 = \frac{\partial u}{\partial y}} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 1 - \frac{\partial u}{\partial y} = 1 - (-\pi + 1) = \boxed{\pi}$

$\nabla u(1,1) = (2\pi + 4, \cancel{\ \ }\ -\pi+1)$

$\boxed{\nabla v(1,1) = (-2\pi - 6, \pi)}$

6b

(4) $f(x,y,z) = |x|+|y|+|z|$

3b

na elipsoidu (vnitřní) $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}\le 1$.

Řešení

- f je spojitá, $M = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}\le 1\}$ je kompaktní $\Rightarrow$ $\min_M f$ a $\max_M f$ existují. 1b

- ~~ze symetrie~~ $\min_M f = 0$ (f je nezáporná) a nabývá se v $(0,0,0)$ 1b

- ze symetrie – stačí hledat $\max_M f$ na hranici $\partial M \cap \{x\ge 0\}\cap\{y\ge 0\}\cap\{z\ge 0\}$ a zároveň se nenabude max na místě kde $x=0$, $y=0$ či $z=0$ ani v $x=0 \wedge y=0$ a pod. (vždy se může posunout na hranici ∂M a hodnota f se zvětší). 1b

Proto stačí použít Lag. mult. a řešit jen $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$

$\Phi(x,y,z,\lambda) = |x|+|y|+|z| - \lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}-1\right)$ 1b

a protože $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$

$\Phi(x,y,z,\lambda) = x+y+z - \lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}-1\right)$

$\Rightarrow$ $1-2\lambda x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2\lambda}$

$1-\frac{2\lambda y}{4}=0 \qquad y=\frac{2}{\lambda}$

$1-\frac{2\lambda z}{16}=0 \qquad z=\frac{8}{\lambda}$ 1b

$\Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{4}{\lambda^2}=1 \Rightarrow \frac{21}{4}=\lambda^2 \Rightarrow \lambda=\frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{21}}$, $y=\frac{4}{\sqrt{21}}$, $z=\frac{16}{\sqrt{21}}$

$\Rightarrow f(x,y,z)=\frac{21}{\sqrt{21}}=\sqrt{21}$ 1b

Dále je třeba ještě vyloučit, kdy 1 či 2 souř. je 0 (hranice – či tam je f max)

Závěr: $\max_M f=\sqrt{21}$ v $\left(\frac{1}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}},\frac{16}{\sqrt{21}}\right)$, $\min_M f = 0$ v $(0,0,0)$.

A) $x=y=0 \Rightarrow f=4$

$x=z=0 \Rightarrow f=2$ $\quad < \sqrt{21}$

$y=z=0 \quad f=1$

B) $x=0 \Rightarrow y=\frac{2}{\lambda}$, $z=\frac{8}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2}(1+4)=1$, $\lambda=\sqrt{5}$

$f(x,y,z)=0+\frac{2}{\sqrt5}+\frac{8}{\sqrt5}=2\sqrt5=\sqrt{20}<\sqrt{21}$ 1b

Analogicky $y=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2\lambda}$, $z=\frac{8}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac14+4\right)=1 \Rightarrow \lambda=\frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{17}}$, $z=\frac{16}{\sqrt{17}}$

$f(x,y,z)=\sqrt{17}$

$z=0$: $\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac14+1\right)=1 \Rightarrow \lambda^2=\frac54 \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt5}$, $y=\frac{4}{\sqrt5}$, $f=\sqrt5$