Teoretická část zkoušky 6.6.2019

Jméno:

Skupina:

1. (8b) a) Definujte pojem mocninná řada.
   b) Formulujte a dokažte větu o existenci poloměru konvergence.
   c) Ukažte, že řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^k$ mají stejný poloměr konvergence.
   d) Pomocí předchozího tvrzení ukažte, že uvnitř intervalu konvergence lze mocninnou řadu libovolněkrát derivovat.

2. (7b) (a) Definujte pojem otevřená/uzavřená množina.
   (b) Definujte pojem cauchyovská posloupnost.
   (c) Definujte pojem kompaktní množina.
   (d) Uveďte a dokažte ekvivalentní charakterizaci kompaktní množiny v konečně dimenzionálních prostorech (pomocné tvrzení o konvergenci pouze uveďte, nemusíte ho dokazovat).
   (e) Formulujte a dokažte Cantorovu větu (průnik neprázdných do sebe vložených kompaktních množin).

3. (8b) a) Definujte pojem funkcionálu a Gateauxova diferenciálu funkcionálu.
   b) Definujte pojem lokálního extrému funkcionálu.
   c) Ukažte nutnou podmínku (Eulerovu; tedy 1. řádu) existence lokálního extrému funkcionálu.
   d) Ukažte, že pokud $f(x) \in C([a,b])$ a

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0 \qquad \forall h \in C_0^1([a,b]),$$

   pak $f(x) \equiv 0$ na $[a,b]$.
   c) Odvoďte tvar Euler–Lagrangeovy rovnice pro funkcionál

$$\Phi[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))dx$$

   na $X = \{u \in C^1([a,b]), u(a) = A, u(b) = B\}$. Vysvětlete!

Početní část zkoušky 6.6.2019

Jméno:

Skupina:

1. (6b) Nalezněte maximální řešení rovnice

$$y''' - y'' + y' - y = e^{x} + e^{-x}$$

splňující počáteční podmínku
$y(0) = -\frac{1}{4}$ $\quad$ $y'(0) = \frac{11}{4}$ $\quad$ $y''(0) = \frac{11}{4}$.

2. (6b) V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \frac{\sin(n+100)}{n^{\alpha} \ln(n+1)}.$$

Ukažte, pro které hodnoty řada konverguje absolutně, pro které neabsolutně a pro které nekonverguje.

3. (6b) V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete, zda funkce

$$f(x,y) = \begin{matrix} \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^{\alpha}} & ,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0), \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{matrix}$$

a) je v počátku spojitá
b) má v počátku parciální derivace
c) má v počátku totální diferenciál.

4. (9b) Nalezněte maximální a minimální hodnotu funkce

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$$

na množině $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + z^2 \leq 1$.

6.6

1 $y''' - y'' + y' - y = e^{x} + e^{-x}$

6b $y(0) = -\frac{1}{4} \quad y'(0) = \frac{11}{4} \quad y''(0) = \frac{11}{4}$

Rešenie:

$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda^1 - \lambda^0 = 0$ 0,5b

$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = i \quad \lambda_3 = -i$ 0,5

$\Rightarrow y_H(x) = C_1 e^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x$ 0,5

$y_p = Axe^{x} + Be^{-x}$ 1b

$\rightarrow (\cancel{Axe^x} + 3Ae^x - \cancel{Axe^x} - 2Ae^x + \cancel{Axe^x} + Ae^x - \cancel{Axe^x})$

$+ (-B - B - B - B)e^{-x} = e^{x} + e^{-x}$

$2A = 1 \qquad -4B = 1$

$A = \frac{1}{2} \qquad B = -\frac{1}{4}$ 1,5b

$y(x) = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{2} x e^x - \frac{1}{4} e^{-x}$ 0,5b

$\Rightarrow C_1 + C_2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \qquad \Rightarrow 2C_1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$C_1 + C_3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \qquad C_1 = 1 \Rightarrow C_2 = -1, \quad C_3 = 1$ 1b

$C_1 - C_2 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

$y(x) = e^x + \cos x + \sin x + \frac{1}{2} x e^x - \frac{1}{4} e^{-x} \qquad x \in \mathbb{R}$ 0,5

(6.6)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sin(n+100)}{n^\alpha \ln(n+1)}$

(6)

$\sin(n+100) = \sin n \cos 100 + \cos n \sin 100$ a tedy se vše dává [illegible]

Řešení: Zjevně pro $\alpha \geq 0$ jde $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{n^\alpha \ln(n+1)} \downarrow 0$ a tedy řada K (alespoň neabsolutně)

Dále je vidět, že (nejspíš to uvidíte) (odhadem na monotonii) je pro $\alpha \geq -\frac{1}{2}$

1 $\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^\alpha \ln(n+1)} \downarrow 0$ (stačí použít l'Hospitalovo pravidlo)

Proto řada K (alespoň neabsolutně) pro $\alpha \geq -\frac{1}{2}$. Zjevně pro $\alpha < -\frac{1}{2}$ 1,5 0,5

nesplňuje nutnou podmínku K.

Pokud jde o absolutní konvergenci, je

$\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^\alpha \ln(n+1)} \sim \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}} \ln(n+1)}$ 2,5 , tedy K pro $\alpha > \frac{1}{2}$. 1b $|\sin(n+100)| \leq 1$, 0,75

ale dá se říci, jestli více lepší odhad?

$\sin(n+100)$ je pro hodně indexů „daleko" od násobků π.

Závěr: $\alpha > \frac{1}{2}$ řada K absolutně 1b

$\alpha \geq -\frac{1}{2}$ řada K neabsolutně.

66.

3

65

$$\begin{cases} \frac{x^2 y^3}{(x^2+y^2)^\alpha} \\ 0 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

a)$_1$ Spojitost: pro $\alpha < \frac{5}{2}$ je

$$|x^2y^3| \leq \frac{2}{5} x^5 + \frac{3}{5} y^5 = \frac{2}{5}(x^5+y^5) \leq C\ (x^2+y^2)^{5/2} \quad 1$$

(zobec. Lagrangeova nerovnost),

a proto pro $\alpha < \frac{5}{2}$ je $f(x,y)$ v $(0,0)$ spojitá 0,5

a)$_2$ Je-li $\alpha \geq \frac{5}{2}$, spojitá není (např. $\alpha = \frac{5}{2}$ $x=y$; $x=0$, $y=\frac{1}{n}$) 0,5

b) Derivace

$$\lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad 0,5$$

c) Tot. diferenciál

$$\lim_{|h| \to 0} \left[\frac{(0+h_1)^2 (0+h_2)^3}{(h_1^2+h_2^2)^\alpha} - 0 - 0 \right] \frac{1}{|h|} =$$

1

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h_1^2 h_2^3}{(h_1^2+h_2^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}} = 0 \quad \text{pro} \quad \alpha + \frac{1}{2} < \frac{5}{2} \ \text{tj} \ \underbrace{\alpha < 2}_{0,5} \quad \text{dle bodu a)} \quad 0,5$$

Závěr: • Fce má nulové parc. derivace v $(0,0)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
• Fce je v $(0,0)$ spojitá pro $\alpha < \frac{5}{2}$
• Fce má v $(0,0)$ tot. diferenciál pro $\alpha < 2$.
0,5

(66) (5)

(9,5) Nalezněte max. a min. hodnotu fce

$$f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$$

na množině

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{1^2} \leq 1.$$

Řešení

- Ze spojitosti fce, že stačí nalézt max. hodnotu (určitě ∃ - uzavřená a omezená množina)
- $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 3z^2 \end{aligned}\right\} 1 \Rightarrow$$ stac. bod je $(0,0,0)$, ale ten není bod lok. extrému

$\Rightarrow$ extrémy leží na hranici 0,5

$\Rightarrow$ Použijeme Lagr. multiplikátory:

$$F(x,y,z,\lambda) = x^3+y^3+z^3 - \lambda\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2-1\right) \quad 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow 3x^2 - \lambda\frac{x}{2} = 0 \\ &3y^2 - 2\lambda\frac{y}{9} = 0 \\ &3z^2 - 2\lambda z = 0 \\ &\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2 = 1 \end{aligned}\right\} 0,5 \qquad \left.\begin{aligned} &\Rightarrow x=0 \vee x = \frac{\lambda}{6} \\ &y=0 \vee y = \frac{2\lambda}{27} \\ &z=0 \vee z = \frac{2\lambda}{3} \end{aligned}\right\} 1$$

(i) $x=y=z=0$ nesplňuje - není extrém 0,5

(ii)
$$\left.\begin{aligned} &x=y=0 \quad z=1 \text{ (po max.)} \quad f(0,0,1) = 1 \\ &x=z=0 \quad y=3 \quad \lambda \text{ dopočítá} \quad f(0,3,0) = 27 \\ &y=z=0 \quad x=2 \quad \lambda \text{ -"-} \quad f(2,0,0) = 8 \end{aligned}\right\} 1,5$$

(iii) $x=0$ $\quad y = \frac{2\lambda}{27}$, $z = \frac{2\lambda}{3}$ $\Rightarrow \lambda^2\left(\frac{4}{3^8}+\frac{4}{3^2}\right) = 1$ 0,25

$$\lambda^2 = \frac{3^8}{4(3^6+1)} \Rightarrow \lambda = \frac{3^4}{2\sqrt{3^6+1}} \Rightarrow y = \frac{3}{\sqrt{3^6+1}} \;(<1)$$

$$f\left(0, \frac{3}{\sqrt{3^6+1}}, \frac{3^3}{\sqrt{3^6+1}}\right) < 27 \checkmark \qquad \Rightarrow z = \frac{3^3}{\sqrt{3^6+1}} \;(\sim 1)$$

$y=0$ $\quad x = \frac{\lambda}{6}$, $y=0$, $z = \frac{2\lambda}{3}$ $\Rightarrow \lambda^2\left(\frac{1}{3^2 2^4}+\frac{2^2}{3^2}\right) = 1$ $\Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{65}} < 1$ 0,25

$$\lambda^2 = \frac{3^2 2^4}{2^6+1} \qquad z = \frac{8}{\sqrt{65}} \sim 1$$

$$\lambda = \frac{12}{\sqrt{65}} \qquad f\left(\frac{2}{\sqrt{65}}, 0, \frac{8}{\sqrt{65}}\right) < 27$$

$z=0 \quad x=\frac{\lambda}{6} \quad y=\frac{2\lambda}{27}$

$\lambda^2\left(\frac{1}{2^4 3^2}+\frac{2^2}{3^6 \cdot 3^2}\right)=1$

0,53

$\lambda^2 \cdot \frac{3^6+2^6}{2^4 3^8}=1$

$\lambda=\frac{2^2 3^4}{\sqrt{9^3+64}} \Rightarrow x=\frac{54}{\sqrt{9^3+64}} \approx \frac{54}{\sqrt{793}} \approx 2$

$y=\frac{24}{\sqrt{9^3+64}} \sim \frac{24}{793} < 1$

6^3+3^3

$f\left(\frac{54}{\sqrt{793}}, \frac{36}{\sqrt{793}}, 0\right) < 27$

(iii) $x=\frac{\lambda}{6}$

$y=\frac{2\lambda}{27} \Rightarrow 1=\lambda^2\left(\frac{1}{2^4 3^2}+\frac{2^2}{3^8}+\frac{2^2}{3^2}\right)=\frac{3^6+2^6+2^4 3^6}{3^8 \cdot 2^4}$

$z=\frac{2\lambda}{3}$

$\lambda=\frac{3^4 \cdot 2^2}{\sqrt{17 \cdot 9^3+64}}=\frac{4 \cdot 81}{\sqrt{12457}} \approx \frac{4 \cdot 81}{2 \cdot 3^4} \approx \frac{2}{3}$

~ 438

$x=\frac{54}{\sqrt{12457}} \sim \frac{1}{4} < 1$

$y=\frac{24}{\sqrt{12457}} \sim \frac{2}{81} < 1$

1

$z=\frac{216}{\sqrt{12457}} \sim \frac{2}{3} < 1$

$\Rightarrow f\left(\frac{54}{\sqrt{12457}}, \frac{24}{\sqrt{12457}}, \frac{216}{\sqrt{12457}}\right)$

$\Rightarrow$ v bodě $(0,3,0)$ max

$(0,-3,0)$ min

5/6

(lze vyčíst z toho, že y má nejvyšší mocninu ze všech ostatních hodnot).

Při dobrém popisu ohodnotil bych