**Teoretická část zkoušky 13.6.2019**

Jméno:

Skupina:

1. (8b) Uvažujte rovnici
$$y' = f(y)g(x)$$
s počáteční podmínkou $y(0) = 0$.
a) Formulujte větu o existenci řešení této počáteční úlohy (Peano).
b) Formulujte větu a existenci a jednoznačnosti řešení této počáteční úlohy (Picard, Lindelöf).
c) Kterou z výše uvedených vět nelze použít v případě:

   (i) $f(y) = y$, $g(x) = x$
   (ii) $f(y) = \sqrt{y}$, $g(x) = x^2$
   (iii) $f(y) = \frac{1}{y}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$
   (iv)
   $$f(y) = \begin{cases} y \ln y, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}, \quad g(x) = x.$$

   d) Jednu z úloh v části c) vyřešte.

2. (7b) (a) Definujte pojem přerovnání číselné řady.
(b) Ukažte, jak souvisí absolutní/neabsolutní konvergence číselné řady s konvergencí/divergencí řady, tvořené kladnou resp. zápornou částí $a_n$.
(c) Dokažte, že součet absolutně konvergentní řady nezáleží na jejím přerovnání.
(d) Jaká je situace u neabsolutně konvergentní řady?

3. (8b) (a) Definujte pojem otevřená/uzavřená množina v metrickém prostoru.
(b) Definujte pojem separabilní množina v metrickém prostoru.
(c) Definujte pojem kompaktní množina v metrickém prostoru.
(d) Formulujte Borelovu a Lindelöfovu pokrývací větu.
(e) Obě věty dokažte.

## Početní část zkoušky 13.6.2019

Jméno:

Skupina:

1. (7b) Nalezněte maximální řešení rovnice

$$y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = e^x$$

splňující počáteční podmínku
$y(0) = 1$ $\quad y'(0) = 2$ $\quad y''(0) = 5$ $\quad y'''(0) = 16.$

2. (6b) V závislosti na parametrech $p, q \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2(p+1)^2 \dots (p+n-1)^2}{(n!)^2} \frac{1}{(n+1)^q}.$$

Ukažte, pro které hodnoty řada konverguje a pro které nekonverguje.

3. (7b) Ověřte, že rovnice

$$y^3 + xy^2 + x^2y + y + 2x + (xy^2 + x^2y + x^3 + x + 2y)\frac{dy}{dx} = 0$$

není ve tvaru totálního diferenciálu. Metodou integračního faktoru (uvažujte $\mu = \Phi(xy)$) nalezněte její obecné řešení.

4. (7b) Nalezněte maximální a minimální hodnotu funkce

$$f(x, y) = |x| + |y|$$

na množině $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} \leq 1$. Ve kterých bodech nabývá funkce extrémů?

(14.6)

1 $\quad y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = e^x$

7,5 $\quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 2 \quad y''(0) = 5 \quad y'''(0) = 16$

Rozw

$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda - 4\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^4 = 0$ 1b

$\Rightarrow$

$y_h(x) = Ae^x + Bxe^x + Cx^2e^x + Dx^3e^x$ 1b

$y_0(x) = a \cdot x^4 e^x$ 1b

$\Rightarrow$

$\cancel{a \cdot e^x [24 \cdot 6 + 6 \cdot 6 \cdot x + 4 \cdot 3x^2 + x^3 - 4 \cdot 6 - 4 \cdot 6 \cdot 3x - 4 \cdot 3 \cdot 3x^2 - 4x^3 + 6 \cdot 6x^2 + 6 \cdot 2 \cdot 3x^2 + 6x^3 - 4 \cdot x^3 - 4 \cdot 3x^2 + x^2] = e^x}$

$\cancel{a \cdot e^x [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0x +}$

$a \cdot e^x \cdot [24 + 4 \cdot 24x + 6 \cdot 12x^2 + 4 \cdot 4x^3 + x^4$
$- 4 \cdot 24x - 4 \cdot 3 \cdot 12x^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4x^3 - 4 \cdot x^4$
$+ 6 \cdot 12x^2 + 6 \cdot 4 \cdot 2x^3 + 6 \cdot x^4$
$- 4 \cdot 4x^3 - 4 \cdot x^4$
$+ x^4]$ 1b

$= ae^x[0x^4 + 0 \cdot x^3 + 0x^2 + 0 \cdot x + 24] = e^x$

$a = \frac{1}{24}$ 1b

$y_0 = \frac{1}{24}x^4e^x + Ae^x + Bxe^x + Cx^2e^x + Dx^3e^x$

$y(0) = 1 \Rightarrow A = 1$
$y'(0) = 2 \Rightarrow A + B = 2 \Rightarrow B = 1$
$y''(0) = 5 \Rightarrow A + 2B + 2C = 5 \Rightarrow C = 1$
$y'''(0) = 16 \Rightarrow A + 3B + 6C + 6D = 16 \Rightarrow D = 1$ 1,5b

$\boxed{y(x) = \frac{1}{24}x^4e^x + x^3e^x + x^2e^x + xe^x + e^x \quad x \in \mathbb{R}}$ 0,1b

146

2

6,5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2(p+1)^2 \cdots (p+n-1)^2}{(n!)^2} \qquad \frac{1}{(n+1)^q}$$

Řešení:

([illegible]) 1,5

Zřejmě přijde použít vhodné podílové kritérium (Gauss). Tedy

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{p^2(p+1)^2 \cdots (p+n-1)^2}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{(n+1)^q} \cdot \frac{((n+1)\cdot n!)^2}{p^2(p+1)^2 \cdots (p+n-1)^2(p+n)^2}(n+2)^q \quad 0,5$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^q \overset{1,5}{} \frac{(n+1)^2}{(n+p)^2} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^q \cdot \left(1-\frac{p-1}{n+p}\right)^2$$

$$= \left(1+\frac{q}{n}+q\underbrace{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)}_{-\frac{1}{n(n+1)}}\right)^{q} \cdot \left(1-\frac{2(p-1)}{n}+\underbrace{\left(\frac{p-1}{n}-\frac{p-1}{n+p}\right)}_{\sim O\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right)^2 \quad 1,5$$

$$= 1+\frac{q-2(p-1)}{n}+\frac{c_n}{n^2} \quad 1,5$$

Tedy podle Gaussova kritéria

$$\text{Řada } K \Leftrightarrow q-2(p-1) > 1 \Leftrightarrow \boxed{q > 2p-1}$$

$$D \Leftrightarrow q-2(p-1) \le 1$$

0,5

1,5

3 (146)

(7b) $(y^3 + xy^2 + x^2y + y + 2x)\,dx + (xy^2 + x^2y + x^3 + x + 2y)\,dy = 0$

$3y^2 + 2yx + x^2 + 1 \neq y^2 + 2xy + 3x^2 + 1$

1b

$\Rightarrow$ není ve tvaru tot. dif. $\to$ zkusíme int. fakt. pro $\Phi(xy)$

$\Phi(xy)\,(y^3 + xy^2 + x^2y + y + 2x)\,dx + \Phi(xy)\,(xy^2 + x^2y + x^3 + x + 2y)\,dy = 0$

$\Rightarrow (y^3 + xy^2 + x^2y + y + 2x)\,\Phi' \cdot x + \Phi \cdot (3y^2 + 2yx + x^2 + 1) =$

$(xy^2 + x^2y + x^3 + x + 2y)\,\Phi' \cdot y + \Phi \cdot (y^2 + 2xy + 3x^2 + 1)$ 1b

$\Phi' \cdot (2x^2 - 2y^2) = \Phi\,(2x^2 - 2y^2)$

$\frac{\Phi'}{\Phi} = 1$ 1b

$\Downarrow$

$\underline{\Phi(xy) = e^{xy}}$ 1b

$\Rightarrow e^{xy}\,(y^3 + xy^2 + x^2y + y + 2x)\,dx + (xy^2 + x^2y + x^3 + x + 2y)\,e^{xy}\,dy = 0$

$\to$ Hledáme potenciál: 0,5b

$V(x,y) = \int e^{xy}\,(y^3 + xy^2 + x^2y + y + 2x)\,dx$

$= e^{xy}y^2 + xye^{xy} - \int e^{xy}y\,dx + e^{xy}x^2 - 2\int e^{xy}x\,dx + e^{xy} + 2e^{xy}\frac{x}{y} - 2\int e^{xy}\frac{1}{y}\,dx$

$= e^{xy}\left[y^2 + xy - 1 + x^2 - 2\frac{x}{y} + 2\frac{1}{y^2} + 1 + 2\frac{x}{y} - \frac{2}{y^2}\right] + \varphi(y)$

$= \underline{e^{xy}\,[y^2 + xy + x^2]} + \varphi(y)$ 1,5b

$e^{xy}\left(2y + x + x(y^2 + xy + x^2)\right) + \varphi'(y) = e^{xy}\,(xy^2 + x^2y + x^3 + x + 2y) \to \varphi'(y) = 0$ 0,5b

$\to \boxed{e^{xy}\,(y^2 + xy + x^2) = \text{const}}$ 0,5b

(1,6)

(4) Nalezněte maximální a minimální hodnotu funkce

(1,5)

$$f(x,y) = |x| + |y|$$

na množině $\underbrace{\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} \le 1}_{M}$.

0,25

Řešení: Derivace neexistují – spojitá na kompaktu

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \operatorname{sign} x, \quad x \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \operatorname{sign} y \quad y \neq 0 \end{aligned}\right\} 0,25$$

Ale $f(x,y) \ge 0 \Rightarrow \min\limits_M f(x,y) = 0$ a nabývá v $[0,0]$ 0,5

0,25

Maximum se musí nabýt na $\partial M$ (protože $x=0$ či $y=0$ nemá opět na hranici)

Lagrangeovy multiplikátory + symetrie – uvažujeme pouze 1. ~~kvad~~ kvadrant $x \ge 0 \wedge y \ge 0$ 0,25

Pole

$$F(x,y,\lambda) = x + y - \lambda\left(\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} - 1\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 1 - \frac{2\lambda x}{4} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 1 - \frac{2\lambda y}{9} = 0 \end{aligned}\right\} 0,5$$

a navíc krajní body $x = 0 \quad y = 3$; $x = 2 \quad y = 0$ 0,25

$$x = \frac{2}{\lambda} \qquad y = \frac{9}{2\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2}\left[1 + \frac{9}{4}\right] = 1$$

$$\lambda^2 = \frac{13}{4}$$

0,25 $\lambda = \frac{\sqrt{13}}{2}$ (1 kvadrant) $\Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \frac{4}{\sqrt{13}} \\ y &= \frac{9}{\sqrt{13}} \end{aligned}\right\}$ 0,25

$$\left.\begin{aligned} f(0,3) &= 3 \\ f(2,0) &= 2 \\ f\left(\tfrac{4}{\sqrt{13}}, \tfrac{9}{\sqrt{13}}\right) &= \sqrt{13} > 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \max_M f(x,y) = \sqrt{13}$$

0,5

a nabývá se v bodech $x = \pm\frac{4}{\sqrt{13}}$, $y = \pm\frac{9}{\sqrt{13}}$ (celkem 4 body)

0,25