Početní část zkoušky 17.6.2019

Jméno:

Skupina:

1. (7b) Nalezněte maximální řešení rovnice

$$x^3y''' + 3y''x^2 + xy' - y = 3x$$

splňující počáteční podmínku
$y(1) = 3$ $\qquad$ $y'(1) = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $y''(1) = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

2. (5b) V závislosti na parametrech $p, q \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \right)^p \frac{1}{n^q}.$$

Ukažte, pro které hodnoty řada konverguje a pro které diverguje.

3. (6b) Přechodem k polárním souřadnicím

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

vyjádřete

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y},$$

tj. přejděte k funkci

$$\widetilde{u}(r,\varphi) := u\big(x(r,\varphi), y(r,\varphi)\big)$$

a výraz přepište pomocí funkce $\widetilde{u}$ a jejich derivací. Nezapomeňte ověřit, na jaké množině jsou splněny předpoklady globální věty o inverzi.

4. (9b) Nalezněte lokální a globální extrémy funkce

$$f(x,y) = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

na jejím definičním oboru. Parametry $a, b > 0$.

176

1 $x^3y''' + 3y''x^2 + xy' - y = 3x$

75 $y(1) = 3$ $\quad y'(1) = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\quad y''(1) = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Řešení

Jde o Eulerovu rovnici, řešíme budeme konstruovat řešení na $(0,+\infty)$ (Poč. podmínky jsou zadány v 1).

Zavedeme dvou proměnné s: $x = e^s$, $s \in \mathbb{R}$ 1

$Y(s) = y(x(s))$

$Y'(s) = y'(x)\cdot x$

$Y''(s) = y''(x)\cdot x^2 + y'(x)\cdot x$

$Y'''(s) = y'''(x)\cdot x^3 + 2y''(x)x^2 + y''(x)\cdot x^2 + y'(x)\cdot x$

$\Rightarrow \underline{Y''' - Y = 3e^s}$ 1

$\lambda^3 - 1 = 0$

$(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) = 0 \qquad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1

$Y_H(s) = C_1e^s + C_2e^{-\frac{1}{2}s}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + C_3e^{-\frac{1}{2}s}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)$ 1

$Y_p(s) = Ase^s$

$Y_p'(s) = A(e^s + se^s)$

$Y_p''(s) = Ae^s(2+s)$

$Y_p'''(s) = Ae^s(3+s)$

$\Rightarrow Ae^s(3+s) - Ae^s s = 3e^s \Rightarrow A = 1$ 1

$\underline{Y(s) = C_1e^s + C_2e^{-\frac{1}{2}s}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + C_3e^{-\frac{1}{2}s}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + se^s}$

$x = 1 \to s = 0$

$Y(0) = C_1 + C_2 = 3$

$Y'(0) = C_1 - \frac{1}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_3 + 1 = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$Y''(0) = C_1 + C_2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) + C_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 2 = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 1,5

$C_3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4} - 1 = -1 + \frac{9\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \underline{C_3 = 3}$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 3 \\ C_1 - \frac{1}{2}C_2 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 3C_1 = 3 \quad \underline{C_1 = 1} \Rightarrow \underline{C_2 = 2}$$

$$Y(s) = e^s + se^s + 2e^{-\frac{1}{2}s}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + 3e^{-\frac{1}{2}s}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}s \qquad s \in \mathbb{R}$$

0,5b

$$\Rightarrow \underline{y(x) = x + x\ln x + 2x^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + 3x^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right), \quad x \in \mathbb{R}^+}$$

([illegible])

156

2 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4 \cdots 2n} \right)^p \frac{1}{n^q}$

5b

Rešenie

Pomoću Gaussovog kriterija: 1b

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \cancel{\left(\frac{1\cdot 3 \cdots 2n-1}{2\cdot 4 \cdots 2n} \right)^p} \frac{1}{n^q} \cdot (n+1)^q \cdot \left(\frac{2\cdot 4 \cdots (2n+2)}{1\cdot 3 \cdots 2n+1} \right)^p$$ 1b

$$= \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p \left(\frac{n+1}{n}\right)^q = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p \left(1+\frac{1}{n}\right)^q$$

$$= \left(1 + \frac{p}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 + \frac{q}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$ 1b

$$= 1 + \left(\frac{p+2q}{2}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$ 1b

$\Rightarrow$ Red K za $q + \frac{p}{2} > 1$ 1b

D za $q + \frac{p}{2} \leq 1$

476

3 $\quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$

6b

$\tilde{u} = u(x(r,\varphi),\ y(r,\varphi))$ $\qquad x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi$ $\quad / r\cos\varphi \quad / + r\sin\varphi$

$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi$ $\quad / -\sin\varphi \quad / \cos\varphi$ $\quad$ 1b

$r\frac{\partial u}{\partial x} = r\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}\sin\varphi$

tj. $x\frac{\partial u}{\partial x} = r\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x} = r\cos^2\varphi\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}\sin\varphi\cos\varphi$ $\quad$ 1b

$r\frac{\partial u}{\partial y} = r\sin\varphi\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}\cos\varphi$

tj. $y\frac{\partial u}{\partial y} = r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y} = r\sin^2\varphi\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}\sin\varphi\cos\varphi$ $\quad$ 1b

$\Rightarrow \boxed{x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = r\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}}$ $\quad$ 1b

Ověření předpokladů vět o reg. zobrazení

Jacobián OK

$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$ $\qquad r \neq 0$ pro $(x,y) \neq (0,0)$ tj. mimo počátek

2b

Zobrazení je prosté pro $r>0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, tj. na množině (otevřená množina!) $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0);\ x \in \mathbb{R}_0^+\}$

(17.6.)

(1) (9,5)

$$f(x,y) = xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

Definicijsko obm.: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$ ... elipsa

na robu elipse $f(x,y)=0$, a $f(x,y)$ je znotraj >0 ali <0. (1/2)

(Tej ~~kateri ekstrem bodo znotraj~~ globalni se nahajajo na robu oz. znotraj elipse).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} - \frac{x^2y}{a^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} - \frac{xy^2}{b^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

1b

$$0 = y\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{x^2y}{a^2} = y\left(1-\frac{2x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$0 = x\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{xy^2}{b^2} = x\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{2y^2}{b^2}\right)$$

Pogoji: $x=0 \wedge y=0$ .. zgolj ni lok. ekstr. (na okolici bodo $f>0$ in <0) 0,5

$x=0$ ~~$\frac{2x^2}{a^2}$~~ $|y|=b$ 2 sedl. } ~~...~~ segam ekstrem 1/2

$y=0$ $|x|=a$ 2 sedl. (leži na robu elipse)

$1-\frac{2x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \wedge 1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{2y^2}{b^2}=0$ 1b

a $x>0$ a $x<0$ in $y>0$ $y<0$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}$ 0,5b 4 sedl.

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{3} = \frac{y^2}{b^2}$$ 0,5 (simetrija za člene $x\cdot y>0$ a $x\cdot y<0$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-3xy}{a^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} - \frac{x^3y}{a^4}\frac{1}{\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-3xy}{b^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} - \frac{xy^3}{b^4}\frac{1}{\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} - \frac{y^2}{b^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} - \frac{x^2}{a^2}\frac{1}{\sqrt{\ }} - \frac{x^2y^2}{a^2b^2}\frac{1}{\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)^3}$$

1b

$x=\frac{a}{\sqrt{3}}$ $y=\frac{b}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{b}{a}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} - \frac{b}{a\cdot 9}\frac{1}{(\sqrt{\frac{1}{3}})^3} = \boxed{-\frac{2b}{a}\cdot\sqrt{3}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2a}{b}\sqrt{3}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{-\frac{2}{\sqrt{3}}}$

1b

$40\cdot C^2 = 4\cdot 3 - \frac{4}{3} > 0$

- $x = y$ ⇒ lok. maks (~~neg.~~ def.)
- $x = -y$ lok. min (pozit. def.)

a jih slobodno [illegible]

⇒ Lokalni ekstrem $f(x,y)$ na $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$ je v [illegible]

- lokalni = globalni maks $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $f(x,y) = \frac{ab}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$
- lokalni = globalni min $\frac{x}{a} = -\frac{y}{b} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $f(x,y) = -\frac{ab}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}$.