Teoretická část zkoušky 10.6.2019

Jméno:

Skupina:

1. (8b) (a) Definujte pojem číselná řada.
   (b) Formulujte a dokažte nutnou podmínku konvergence číselných řad.
   (c) Znáte situaci, za které je nutná podmínka současně postačující? Formulujte a dokažte příslušné tvrzení.
   (d) Definujte pojem absolutní a neabsolutní konvergence. Rozhodněte, zda platí (tj. buď tvrzení dokažte, nebo nalezněte protipříklad)
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje
   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně

2. (7b) (a) Definujte pojem otevřená/uzavřená množina v metrickém prostoru.
   (b) Uveďte příklad podmnožiny metrického prosotru, která je otevřená a uzavřená současně.
   (c) Ukažte, že libovolné sjednocení a konečný průnik otevřených množin je otevřená množina.
   (d) Definujte pojem izolovaný bod a hromadný bod podmnožiny metrického prostoru.
   (e) Ukažte, že pro libovolnou podmnožinu A metrického prostoru $\mathcal{M}$ platí (A' je množina všech hromadných bodů A, ∂A je hranice A)

   - $\partial A \setminus A = A' \setminus A$
   - $\partial A \cup A = A' \cup A$.

3. (8b) (a) Definujte konvexní množinu.
   (b) Formulujte a dokažte větu o střední hodnotě pro funkce více proměnných.
   (c) Pro funkce více proměnných definujte pojem parciální derivace druhého (a vyššího) řádu.
   (d) Dokažte, za jakých předpokladů je pořadí derivování záměnné.

Početní část zkoušky 10.6.2019

Jméno:

Skupina:

1. (7b) Nechť
$$g(y) = \begin{cases} y \ln y \ln|\ln y|, & y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \\ 0, & y = 0, 1. \end{cases}$$
Nalezněte všechna maximální řešení rovnice
$$y' = \frac{g(y)}{1+x^2}$$
splňující počáteční podmínku
a) $y(0) = 0$ b) $y(0) = \mathrm{e}^{-2}$ c) $y(0) = \mathrm{e}^{-1}$
d) $y(0) = 1$ e) $y(0) = \mathrm{e}$ f) $y(0) = \mathrm{e}^2$.

2. (6b) V závislosti na parametrech p, $q \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci mocninné řady
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{(n+1)^p \ln^q(n+2)},$$
v komplexní rovině včetně kružnice konvergence.

3. (7b) Ověřte, že vztahy
$$\mathrm{e}^{\frac{1}{uv}-1} - \ln(ux + vy + \mathrm{e}) = 0$$
$$\mathrm{e}^{\frac{-1}{uv^2}+1} - \ln(uy + vx + \mathrm{e}) = 0$$
zaručují na nějakém okolí bodu $u = v = 1$, $x = y = 0$ existenci funkcí $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ a spočtěte $\nabla u(0, 0)$ a $\nabla v(0, 0)$.

4. (7b) Nalezněte všechny lokální extrémy funkce
$$f(x, y) = (2x + 2y + 3)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$
na $\mathbb{R}^2$. Ověřte, o jaké extrémy se jedná.

(1)

10.6 2b

Nechť
$$g(y) = \begin{cases} y \ln y \ln(|\ln y|) & y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \\ 0 & y = 0,1 \end{cases}$$

Nalezněte řešení na
$$y' = \frac{g(y)}{1+x^2}, \qquad y(0) = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{e} \\ 1 \\ e \\ e^2 \end{cases} \quad \frac{1}{e^2}$$

<u>Řešení:</u>

Zřejmě je $g(y)$ spojitá fce na $\mathbb{R}$ (ne však lipschitzovsky spojitá)

$g(y) = 0$ pro $y \in \{0; \frac{1}{e}; 1; e\}$ 1b

Odtud lze 4 řešení:
$$\left.\begin{array}{l} y \equiv 0 \\ y \equiv \frac{1}{e} \\ y \equiv 1 \\ y \equiv e \end{array}\right\} 2b$$

Dále:
$$\frac{dy}{y \ln y \ln|\ln y|} = \frac{dx}{x^2+1}$$
$$\ln|\ln|\ln y|| = \operatorname{arctg} x + C$$
$$\ln|\ln y| = K e^{\operatorname{arctg} x}$$
$$|\ln y| = e^{K e^{\operatorname{arctg} x}}$$
$$y = e^{\pm e^{K e^{\operatorname{arctg} x}}} \qquad 2b$$

Protože $\operatorname{arctg} x$ je omezená na $\mathbb{R}$ – zřejmě nikdy nelze řešení napojit na konstantní řešení (přestože pravá strana není lipschitzovsky spojitá!) 1b

Tedy
$$\left.\begin{array}{lll} y(0) = 0 & \Rightarrow & y \equiv 0 \\ y(0) = \frac{1}{e} & \Rightarrow & y \equiv \frac{1}{e} \\ y(0) = 1 & \Rightarrow & y \equiv 1 \\ y(0) = e & \Rightarrow & y \equiv e \end{array}\right\} x \in \mathbb{R}$$

$y(0) = \frac{1}{e^2} \Rightarrow K = \ln 2$ a $y(x) = e^{-e^{\ln 2\, e^{\operatorname{arctg} x}}}$ $x \in \mathbb{R}$

$y(0) = e^2 \Rightarrow K = \ln 2$ a $y(x) = e^{e^{\ln 2\, e^{\operatorname{arctg} x}}}$ $x \in \mathbb{R}$

2b

10.6. (6.5)

(2) V závislosti na parametrech $p, q \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci řady na ... v $\mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{(n+1)^p \ln^q(n+2)}$$

Řešení $\sqrt[n]{(n+1)^p \ln^q(n+2)} \to 1$ 1b

$R = 1 \Rightarrow \forall p, q \in \mathbb{R}$ řada K na $|z|<1$ (i absolutně). 0.5b

Zbývá dořešit $|z|=1$

a) $z=1$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p \ln^q(n+2)}$ pomocí odhadů / int. kritéria

K pro $p>1$, $q \in \mathbb{R}$

$p=1$, $q>1$

jinak diverguje 2b

b) $|z|=1$, $z \neq 1$

Pomocí Dirichleta (případně kombinace Abela)

potřebuji aby $\frac{1}{(n+1)^p \ln^q(n+2)} \searrow 0$

$\Rightarrow p>0$, $q \in \mathbb{R}$ → $q<0$ konkrétně Abel

$p=0$, $q>1$ (jinak nesplněna nutná podmínka) 2b

Závěr

Řada K (absolutně) pro $|z|<1$ $\forall p, q \in \mathbb{R}$

K pro $|z|=1$, $z \neq 1$ $p>0$, $q \in \mathbb{R}$ nebo $p=0$, $q>0$

$z=1$ $p>1$, $q \in \mathbb{R}$ nebo $p=1$, $q>1$. 0.5

10.6 (3)

Ověřte, že vztahy

$$e^{\frac{1}{uv}-1} = \ln(xu+vy+e)$$

$$e^{-\frac{1}{uv^2}+1} = \ln(yu+xv+e)$$

určují na okolí bodu $u=v=1$, $x=y=0$ ∃ fce $u=u(x,y)$ a $v=v(x,y)$.

Spočtěte $\nabla u(0,0)$ a $\nabla v(0,0)$.

Důkaz

- LS = PS v $[0,0,1,1]$ o.k.
- fce C^1 (jsou C^∞)
- $\det \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{uv}-1}\cdot\left(-\frac{1}{u^2v}\right) - \frac{1}{xu+vy+e}\cdot x, & e^{\frac{1}{uv}-1}\left(-\frac{1}{v^2u}\right) - \frac{1}{xu+yv+e}\cdot y \\ e^{-\frac{1}{uv^2}+1}\,\frac{1}{u^2v^2} - \frac{1}{yu+xv+e}\cdot y, & e^{-\frac{1}{uv^2}+1}\,\frac{2}{uv^3} - \frac{1}{yu+xv+e}\cdot x \end{pmatrix}(0,0,1,1)$

$$= \det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad 1b$$

⟹ Ano

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{e} \quad 1b$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \frac{2}{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{3}{e} \quad 1b$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{e}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{e} \quad 1b$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2}{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3}{e} \quad 1b$$

~~9,3b~~ 5

(4) Nalezněte lok. extrémy fce $(2x+2y+3)\,e^{-(x^2+y^2)}$ na $\mathbb{R}^2$

1b

Řešení

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-(x^2+y^2)}\left(2-2x(2x+2y+3)\right) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-(x^2+y^2)}\left(2-2y(2x+2y+3)\right) = 0 \quad 1b$$

$$\Rightarrow \quad 1 = x(2x+2y+3)$$
$$1 = y(2x+2y+3)$$

$$\Rightarrow \quad x = y \quad 1b$$
$$\Rightarrow \quad 1 = x(4x+3)$$
$$4x^2+3x-1=0$$
$$x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{8} = \frac{-3\pm 5}{8} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{4} \end{cases} \quad 1b$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-(x^2+y^2)}\left[-8x-4y-6-2x\left[2-2x(2x+2y+3)\right]\right]$$
$$= [x=y] = e^{-2x^2}\left[-12x-6-2x\left[2-8x^2-6x\right]\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = e^{-(x^2+y^2)}\left[-4x-2y\left[2-2x(2x+2y+3)\right]\right]$$
$$= [x=y] = e^{-2x^2}\left[-4x-2x\left[2-8x^2-6x\right]\right] \quad 1{,}5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-(x^2+y^2)}\left[-4x-8y-6-2y\left[2-2y(2x+2y+3)\right]\right]$$
$$= [x=y] = e^{-2x^2}\left[-12x-6-2x\left[2-8x^2-6x\right]\right]$$

$x=y=-1$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6+2(2-8+6) = 6$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 4+2\cdot 0 = 4$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$ je pozit. def. $\Rightarrow$ lok. minimum 1b

$x=y=\frac{1}{4}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left[-3-6-\frac{1}{2}\left[2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right]\right] = -9$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \left[-1-\frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)\right] = -1$

$$\begin{pmatrix} -9 & -1 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$$ je neg. def. $\Rightarrow$ lok. maximum 1b

v $[-1,-1]$ lok. minim.
v $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ lok. maxim. $\quad$ 0,5