Početní část zkoušky 4.6.2019

Jméno:

Skupina:

1. (8b) Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = -2x\sqrt{1-y^2}$$

splňující počáteční podmínku
a) $y(0) = 1$ b) $y(0) = 0$ c) $y(0) = -1$.

2. (6b) V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\operatorname{arctg}(n^n + 1)}{n^\alpha \ln(n^2 + 2)},$$

v komplexní rovině včetně kružnice konvergence.

3. (6b) Ověřte, že vztahy

$$u^2 v - \cos x + \ln v = 0$$
$$\ln u + x^3 - xv^2 - \sin(uvx) = 0$$

zaručují na nějakém okolí bodu $u = v = 1$, $x = 0$ existenci funkcí $u = u(x)$, $v = v(x)$ a spočtěte $u'(0)$ a $v'(0)$.

4. (7b) Nalezněte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = 3x + 2y + \ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$$

na množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$. Ověřte, o jaké extrémy se jedná.

(1) $y' = -2x\sqrt{1-y^2}$ $y(0) = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$

(13)

Řádné řešení: $y = \pm 1$ 1

a dále $-\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2x\,dx$ 0,5

$\Rightarrow \arccos y = x^2 + C$

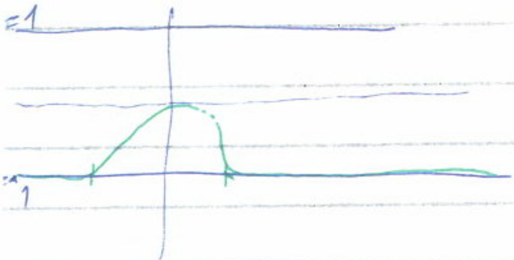
$\boxed{y = \cos(x^2 + C)}$ 1

Pozorování: na $x<0$ f-ce je neklesající
$x>0$ f-ce je nerostoucí } 1

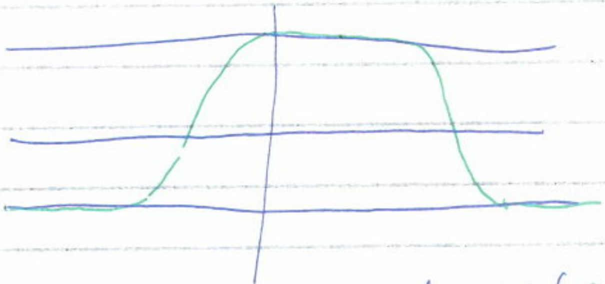
ad a) $y(0)=0$ $y(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$

tedy $y = \cos\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)$ $x \in \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$

dle mého na $y \equiv -1$ $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}, +\infty\right)$ } 1,5



ad b) $y(0) = 1$ Řádné řešení $y \equiv 1$ kombinovat s druhým řešením kosinem



- $x_0 \le -\sqrt{\pi}$
- $x_1 \ge 0$

takové $(\Delta x)_0 > 0$: $(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = -\pi$

takové $(\Delta x)_1 > 0$: $(x_1 + \Delta x)^2 - x_1^2 = \pi$

takové $C_0 > 0$, $C_1 > 0$:

$x_0^2 + C_0 = \pi$

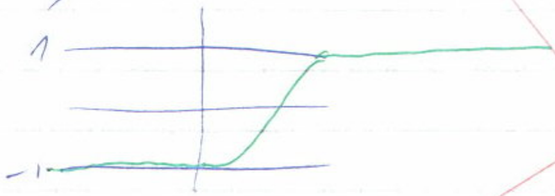
$x_1^2 - C_1 = 0$

$$y(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, x_0] \\ \cos(x^2 + C_0) & x \in (x_0, x_0 + (\Delta x)_0) \\ 1 & x \in (x_0 + (\Delta x)_0, x_1] \\ \cos(x^2 - C_1) & x \in [x_1, x_1 + (\Delta x)_1] \\ -1 & x \in (x_1 + \Delta x_1, +\infty) \end{cases}$$

Buď $x_0 \in \mathbb{R}$ … $-\infty$ (dává 1. a 2. řádek)

nebo $x_1 = +\infty$ (dává 4. a 5. řádek)

či $x_0 = -\infty$, $x_1 = +\infty$ $(y(x) \equiv 1)$. } 1,5 ad c) Musí být pořád -1 ·· od $(-\infty, 0]$ a nelze se vrátit zpět



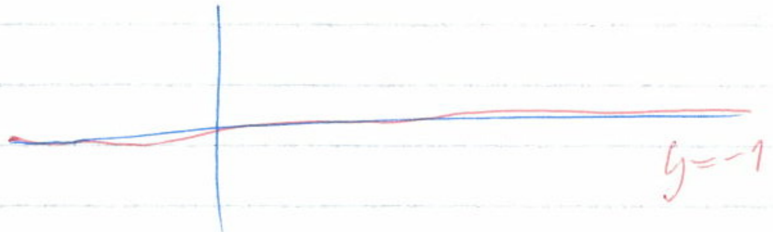
$x_1 \geq 0$, $C_1 > 0$: $x_1^2 + C_1 = -\pi$

$(\Delta x)_1 > 0$: $(x_1 + (\Delta x)_1)^2 - x_1^2 = \pi$

$$y(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, x_1] \\ \cos(x^2 + C_1) & x \in (x_1, x_1 + (\Delta x)_1) \\ 1 & x \in [x_1 + (\Delta x)_1, +\infty) \end{cases}$$

a $x_1 = +\infty$ (tj. $y(x) = -1$).

ii)



je jediné řešení

$y(0) = -1$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\operatorname{arctg}(n^n+1)}{n^\alpha \ln(n^2+2)}$

(6,5)

$\sqrt[n]{\frac{\operatorname{arctg}(n^n+1)}{n^\alpha \ln(n^2+2)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \Rightarrow \boxed{R=1}$ 1

Řada konverguje absolutně pro $|z|<1$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ 0,5

Nyní $|z|=1$

i) $\alpha \geq 0$ $\quad \frac{\operatorname{arctg}(n^n+1)}{n^\alpha \ln(n^2+2)} \to 0$ 0,5 a monot., kombinace Abela a Dirichleta 0,5

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n^\alpha \ln(n^2+2)}$ K pro $\varphi \neq 2k\pi$, $\alpha \geq 0$ díky D. $\Longrightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\varphi} \operatorname{arctg}(n^n+1)}{n^\alpha \ln(n^2+2)}$ K pro $\varphi \neq 2k\pi$, $\alpha \geq 0$ díky A.

0,5 1

(ii) $\alpha > 1$ $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\operatorname{arctg}(n^n+1)}{n^\alpha \ln(n^2+1)}$ K absolutně pro $|z| \leq 1$ 1.

neboť $\frac{\operatorname{arctg}(n^n+1)}{n^\alpha \ln(n^2+1)} \sim \frac{1}{n^\alpha \ln n}$ 0,5

(iii) Jde $\alpha \in [0,1]$, $z=1 \to$ řada

$\sum_{n=0} \frac{\operatorname{arctg}(n^n+1)}{n^\alpha \ln(n^2+1)}$ D 1 $\quad$ neboť $\frac{\operatorname{arctg}(n^n+1)}{n^\alpha \ln(n^2+1)} \sim \frac{1}{n^\alpha \ln n}$ 0,5 1

Závěr:

Řada K pro $|z|<1$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

K pro $|z|=1$, $z \neq 1$ $\quad \forall \alpha \in [0,+1]$ (neabsolutně) 0,5

K pro $|z|=1$ $\quad \forall \alpha \in (1,+\infty)$ (absolutně)

NENÍ tady ale vyšetřený ten bod fí=0 !! To by mělo být, ne? To je ale celkem triviální

3 $u^2 v - \cos x + \ln v = 0 \quad (= F_1(x,u,v))$

6b $\ln u + x^3 - x v^2 - \sin(uvx) = 0 \quad (= F_2(x,u,v))$

Podmínky: • F_1, F_2 jsou hladké fce

2b
- • $F_1(1,1,0) = 0$
- $F_2(1,1,0) = 0$
- • $\frac{DF(0,1,1)}{D(u,v)} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$

$\Rightarrow$ $\exists$ okolí $U_\delta(0)$ a $U_\Delta(1,1)$ takové, že pro každé $x \in U_\delta(0)$ $\exists!$ $(u,v) \in U_\Delta(1,1)$:

1b $u = u(x)$

$v = v(x)$

Derivace

1b $2uv \frac{du}{dx} + u^2 \frac{dv}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = 0$

$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} - v^2 - 2x \frac{dv}{dx} - \cos(uvx) \left(\frac{du}{dx} vx + \frac{dv}{dx} ux + uv \right) = 0$

1b $2 \frac{du}{dx}(0) + \frac{dv}{dx}(0) + \frac{dv}{dx}(0) = 0$

1b $\boxed{\frac{du}{dx}(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}(0) = -2}$

(4) $f(x,y) = 3x + 2y + \ln(x^2+y^2) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus (x,0),\ x \in \mathbb{R}$

2b

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 + \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}$$

1b

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 + \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{3(x^2+y^2) + 2x - y}{(x^2+y^2)}$$

$$0 = \frac{2(x^2+y^2) + 2y + x}{(x^2+y^2)}$$

$$3(x^2+y^2) + 2x - y = 0 \qquad / \cdot (-2)$$
$$2(x^2+y^2) + 2y + x = 0 \qquad / \cdot 3$$

$$-4x + 2y + 6y + 3x = 0$$

0,5b $\boxed{x = 8y}$

$$\Rightarrow \quad 3y^2(1+64) + 15y = 0$$

$$15y(13y+1) = 0$$

0,5b $\boxed{y = 0}$ .. NE

1b $\boxed{y = -\frac{1}{13}}$, $\boxed{x = \frac{-8}{13}}$ stac. bod

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2) + 2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(x^2+y^2) + 2y^2}{} = \frac{y^2 - x^2 - 4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 4y^2 - 2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2) - 2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

2b

Zvratkuca: $x = -8$, $y = -1$:

$$\begin{pmatrix} -126+16 & -63-32 \\ -95 & +126-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -110 ; & -95 \\ -95 ; & +112 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{~~neg. def.~~}$$

indef.

1b

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{v } \left[-\frac{8}{13}; -\frac{1}{13}\right] \text{ je } \text{~~lokálne minimum~~}}$ 1b

je sedlový bod

celkový nejde