Teoretická část zkoušky 24.6.2019

Jméno:

Skupina:

1. (8b) (a) Definujte pojmy číselná řada, konvergentní/divergentní/oscilující řada. 1 0,5

   (b) Formulujte odmocninové (Cauchyovo), podílové (d'Alembertovo), 0.5+0.5 0.5+0.5
   0.5 integrální a Raabeho kritérium konvergence číslených řad s nezápornými koeficienty, včetně limitních verzí (pokud existují). 0.5+0.5

   (c) Alespoň dvě z výše uvedených 4 kritérií dokažte, včetně limitních verzí. 1.5+1.5

2. (7b) a) Definujte pojem cauchyovská posloupnost prvků z metrického prostoru.

   b) Definujte pojem úplného metrického prostoru a úplného lineárního normovaného prostoru.

   c) Uveďte příklad úplného metrického prostoru a příklad metrického prostoru, který není úplný.

   d) Definujte pojem kontraktivního zobrazení a pojem pevného bodu kontraktivního zobrazení.

   e) Formulujte a dokažte větu o pevném bodě kontraktivního zobrazení.

3. (8b) a) Definujte pojem funkcionálu a Gâteauxova diferenciálu funkcionálu.

   b) Definujte pojem lokálního extrému funkcionálu.

   c) Ukažte nutnou podmínku (Eulerovu; tedy 1. řádu) existence lokálního extrému funkcionálu.

   d) Ukažte, že pokud $f(x) \in C([a,b])$ a

   $$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0 \qquad \forall h \in C_0^1([a,b]),$$

   pak $f(x) \equiv 0$ na $[a,b]$.

   e) Odvoďte tvar Euler–Lagrangeovy rovnice pro funkcionál

   $$\Phi[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))dx$$

   na $X = \{u \in C^1([a,b]), u(a) = A, u(b) = B\}$. Vysvětlete!

Početní část zkoušky 24.6.2019

Jméno:

Skupina:

1. (5b) Nalezněte maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y'' + 4y' + 3y = e^{-x}$$

splňující $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{1}{2}$.

2. (7b) V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p z^n,$$

tedy v závislosti na parametru p studujte danou mocninnou řadu, určete její poloměr konvergence a vyšetřete konvergenci řady na kružnici konvergence.

3. (7b) Spočtěte

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

v bodě $u = 2$, $v = 1$, kde

$$\begin{aligned} x &= u + v^2 \\ y &= u^2 - v^2 \\ z &= 2uv. \end{aligned}$$

Návod: Ověřte, že na vhodné množině lze pomocí Věty o implicitní funkci definovat $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$ a spočtěte $\nabla_{x,y} u$ a $\nabla_{x,y} v$ v daném bodě. Poté vyřešte původní úlohu pomocí řetízkového pravidla.

4. (8b) Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$$

na množině $\mathbb{R}^2$. Rozhodněte, o jaké extrémy se jedná.

(1) $y'' + 4y' + 3y = e^{-x}$

(5b) $y(0) = 1 \qquad y'(0) = \frac{1}{2}$

Řešení:

$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

$(\lambda+3)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = -1$ 0,5b

$y_H = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$ 1b

0,5b

$y_p = Axe^{-x} \Rightarrow y_p' = A \cancel{Ae} \; Ae^{-x}(1-x)$

$y_p'' = Ae^{-x}(-1-1+x) = Ae^{-x}(x-2)$

$\Rightarrow Ae^{-x}[x-2+4-4x+3x] = 2Ae^{-x} = e^{-x} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ 1b

$y_O(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^{-x}$

$C_1 + C_2 = 1$

$-3C_1 - C_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\cancel{C_1 = C_2 =}$ } 0,5b

$-2C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2} \qquad C_2 = \frac{3}{2}$ 1b

$\underline{y(x) = -\frac{1}{2} e^{-3x} + \frac{3}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} x e^{-x}}$ $x \in \mathbb{R}$ 0,5b

2

7b

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p z^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^p = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+3)!}}{\frac{2^n\, n!\, n!}{(2n+1)!}} \right|^p = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\cdot(n+1)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)}\right)^p = \frac{1}{2^p}$$ 1b

$\Rightarrow \boxed{R = 2^p}$ 0,5b

$\Rightarrow$ Vrsta K pri $|z| < 2^p$

D pri $|z| > 2^p$ 0,5b

Ostane $|z| = 2^p$

a) $z = 2^p \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{(2n+3)\cancel{(2n+2)}}{\cancel{(2n+2)}(2n+2)}\right)^p = \left(1 + \frac{1}{2(n+1)}\right)^p = 1 + \frac{\frac{p}{2}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$ 2b

$\Rightarrow$ Vrsta K pri $p > 2$

D pri $p \le 2$ (Gauss) 1b

b) Ostali pri $z \neq 2^p$ vrsta K pri $p > 2$, je nujni

$\left(\frac{2^n (n!)^2 \cdot 2^n}{(2n+1)!}\right)^p \to 0$ pri $p > 2$ 0b

a konvergira je monotono

$\Rightarrow$ Dirichlet

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n (n!)^2 2^n}{(2n+1)!}\right)^p e^{in\varphi}$ K pri $p > 0$ 2b

(pri $p \le 0$ ni nujni pogoj K)

Povzetek: $|z| < 2^p$ K (D pri $|R| > 2^p$)

$|z| = 2^p$, $z = 2^p$ K pri $p > 2$ (D pri $p \le 2$)

$|z| = 2^p$, $z \neq 2^p$ K pri $p > 0$ (D pri $p \le 0$)

3 $\quad x = u + v^2$

7,5 $\quad y = u^2 - v^2$

$\quad z = 2uv$

$u=2 \quad v=1 \Rightarrow \quad x = 3 \quad y = 3 \quad z = 4$

Na okolí $x = 3 \quad y = 3 \quad u=2 \quad v=1$ hledám $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$

$$\Rightarrow \vec{F}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} u+v^2-x \\ u^2-v^2-y \end{pmatrix}$$

2,5

- $\vec{F}(3,3,2,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{F}$ hladká
- $J_{\vec F}(3,3,2,1) = \quad \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$

$\Rightarrow \quad u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$: 0,5

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x} = 1$$
$$4\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow 5\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(3,3) = \frac{1}{5}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(3,3) = \frac{2}{5}$$

0,5
$$\frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$4\frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

$$5\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{5} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{10}}$$

1,5

0,5

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) = 2v\frac{\partial u}{\partial x} + 2u\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(3,3) = 2\cdot\frac{1}{5} + 2\cdot 2\cdot\frac{2}{5} = \boxed{2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(2,1) = 2v\frac{\partial u}{\partial y} + 2u\frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(3,3) = 2\cdot\frac{1}{5} + 2\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{10}\right) = \boxed{0}$$

0,5 1,5

4

3 $f(x,y) = (5x+7y-25)\, e^{-(x^2+xy+y^2)}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-(x^2+xy+y^2)} \left[5 - (2x+y)(5x+7y-25)\right] = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-(x^2+xy+y^2)} \left[7 - (2y+x)(5x+7y-25)\right] = 0$ 1b

$\Rightarrow \frac{5}{2x+y} = \frac{7}{2y+x}$

$10y + 5x = 14x + 7y \Rightarrow \underline{y = 3x}$ 1b

$5 - 5x\,(5x + 21x - 25) = 0$

$-26x^2 + 25x + 1 = 0$

$(x-1)(-26x-1) = 0$

$x_1 = 1 \quad y_1 = 3$ $\qquad x_2 = -\frac{1}{26} \quad y_2 = -\frac{3}{26}$ 2b

$[1,3]$ $\qquad [-\frac{1}{26}; -\frac{3}{26}]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-(x^2+xy+y^2)} \left[-2(5x+7y-25) - 5(2x+y)\right] + 0$ (nulov. body)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-(x^2+xy+y^2)} \left[-1\cdot(5x+7y-25) - 7(2x+y)\right] + 0$ –//–

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-(x^2+xy+y^2)} \left[-2(5x+7y-25) - 7(2y+x)\right] + 0$ –//– 2b

$\Rightarrow e^{(\;)}$ nehraje roli

$5x+7y-25 \Big|_{x=1\; y=3} = 1$

$\cancel{5x+7y-25} \Big|_{x=-\frac{1}{26}\; y=-\frac{3}{26}} = -\frac{5}{26} - \frac{21}{26} - 25 = -26$

v $[1,3]$:

$\begin{vmatrix} -2-5\cdot5 & -1-7\cdot5 \\ -36 & -2\cdot1-7\cdot7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -27 & -36 \\ -36 & -51 \end{vmatrix} \Rightarrow$ neg. def. $\Rightarrow$ lok. maximum v $(1,3)$

1b

$[-\frac{1}{26}; -\frac{1}{26}]$:

$$\begin{vmatrix} 52 + \frac{25}{26} & 26 + \frac{35}{26} \\ 26 + \frac{35}{26} & 52 + \frac{49}{26} \end{vmatrix}$$

poz def

pozdv. $\Rightarrow$ min

15

Závěr: v bodě $[1,1]$ lok. max

$[-\frac{4}{26}, -\frac{3}{26}]$ lok. minimum.