① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ $\quad a_n \to 0$ ✓

→ absolutní konvergence?

sin(nx) je vždy menší roven jedné. Absolutní konvergence => klasická konvergence

$\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ $\quad \sum \frac{1}{2^n}$ konverguje a tedy

$\sum \frac{\sin nx}{2^n}$ konverguje absolutní.

② $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{4^n}$

$\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{4^n}\right| \leq \frac{1}{4^n}$ $\quad \sum \frac{1}{4^n}$ konverguje =>

=> $\sum \cdot$ konverguje absolutní

non negative $\lfloor x \rfloor$

non positive $\lceil x \rceil$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$

→ nekonverguje absolutní

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	15	16	...	24	25
$[\sqrt{n}]$	1	1	1	2	2	2	2	2	3		3	4		4	5

$$-\left(\overbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}^{A_1}\right) + \left(\overbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}^{A_2}\right) - \left(\overbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{15}}^{A_3}\right) +$$

$$+\left(\underbrace{\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{24}}_{A_4}\right) - \left(\frac{1}{25}+\ldots\right)$$

$$A_k = \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{\text{největší člen}} + \ldots + \frac{1}{\underbrace{(k+1)^2-1}_{k^2+2k}} < \frac{2k+1}{k^2} \to 0$$

$A_k - A_{k+1}$ klesá nebo roste?

$$A_k - A_{k+1} = \sum_{m=0}^{2k} \frac{1}{k^2+m} - \sum_{m=0}^{2(k+1)} \frac{1}{(k+1)^2+m}$$

$$= \sum_{m=0}^{2k} \left(\frac{1}{k^2+m} - \frac{1}{(k+1)^2+m}\right) - \frac{1}{(k+1)^2+2k+1} - \frac{1}{(k+1)^2+2k+2}$$

$$= \sum_{m=0}^{2k} \frac{k^2+2k+1+m-k^2-m}{\underbrace{(k^2+m)((k+1)^2+m)}_{(2k+1)\text{ členů, odhad pro nejmenší člen } m=2k}} - \frac{1}{k^2+4k+2} - \frac{1}{k^2+4k+3} <$$

$< \dfrac{(2k+1)^2}{(k^2+2k)(k^2+4k+1)} - \dfrac{1}{k^2+4k+2} - \dfrac{1}{k^2+4k+3}$

pro k dostatečně velké > 0

$\sim \frac{4k^2}{k^4} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2}(4-1-1)$ (pro ~~k~~ k velké)

→ řada $\sum (-1)^k A_k$ konverguje dle Leibnizova kritéria.

→ S_n n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$

Pro n libovolné najdeme $k^2 \le n < (k+1)^2$.
Součet řady S_n leží mezi k-tým a (k+1)-ním součtem řady $\sum (-1)^k A_k$. a tedy původní řada konverguje a má stejný součet, jako řada $\sum (-1)^k A_k$.

④ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\underbrace{-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}\underbrace{+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}}-\dots$

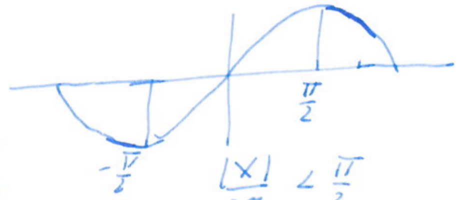
$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{3k+1}+\frac{(-1)^k}{3k+2}+\frac{(-1)^k}{3k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k}$

$\frac{1}{3k}$ je monotónně klesající
$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{3k}=0$
⇒ řada $\sum\frac{1}{3k}$ konverguje dle Leibnizova kritéria. Konvergence je neabsolutní $\sum\frac{1}{n}$ diverguje.
(výsledný součet dává smysl)

– aritmetika řad

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{2^n}_{\text{roste}} \underbrace{\sin\frac{x}{3^n}}$ $x\in\mathbb{R}$

$x>0$ klesá pro $n\to\infty$, lim: 0
$x<0$ roste pro $n\to\infty$, lim: 0



$\frac{|x|}{3^n} < \frac{\pi}{2}$

$\frac{2}{\pi}|x| < 3^n$

$\log_3 \frac{2}{\pi}|x| < n$

$n_0 > \log_3 \frac{2}{\pi}|x|$

? konverguje absolutně!

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\left|\sin\frac{x}{3^n}\right| = \sum_{n=1}^{n_0} 2^n\left|\sin\frac{x}{3^n}\right| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^n \sin\frac{|x|}{3^n}$

lim n -> inf. of sin(x)/x=1

$\dfrac{2^n\sin\frac{|x|}{3^n}}{2^n\frac{|x|}{3^n}} \to 1$

Stačí uvažovat $\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}|x|$

→ řada konverguje např. dle $\sqrt{}$ kri

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$ konverguje

6) $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n}+1}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}-1}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-1-(\sqrt{2n}+1)}{(\sqrt{2n}+1)(\sqrt{2n+1}-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}-2}{(\sqrt{2n}+1)(\sqrt{2n+1}-1)}$$

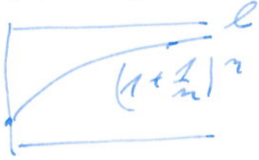
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}{(\sqrt{2n}+1)(\sqrt{2n+1}-1)}-\underbrace{\sum\frac{2}{(\sqrt{2n}+1)(\sqrt{2n+1}-1)}}_{\text{diverguje}}$$

$\simeq \frac{1}{n}$

$$=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1-2n}{(\sqrt{2n}+1)(\sqrt{2n+1}-1)(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})}}_{\text{kladné členy, chování}\ \sim\ \frac{1}{n^{3/2}}\ \text{– konvergují}}-\underbrace{\sum\frac{2}{(\sqrt{2n}+1)(\sqrt{2n+1}-1)}}_{\text{diverguje (záporné členy)}}$$

→ řada diverguje

7) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n}=\underbrace{\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n}}_{\frac{1}{n}\ \text{klesá a}\ \to 0\ \to\ \text{konvergence dle Leibnize}}+\underbrace{\sum\frac{1}{n}}_{\text{diverguje dle int. krit.}}}_{\text{diverguje}}$$



$$e^{\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{1/x}}{e}}$$

8) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}\overset{\text{Heineho}}{\underset{\text{věta}}{\Longleftrightarrow}}\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)^2}}{e^{1/x}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$$

T.P. v $x_0=0$: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\dots$

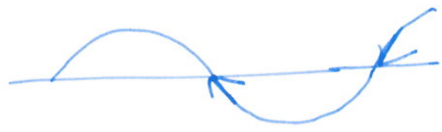
$$\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-\ln e\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+O(x^3)\right)-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(-\frac{x}{2}+O(x^2)\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}=\frac{1}{\sqrt{e}}\Rightarrow|a_n|\to\frac{1}{\sqrt{e}}\neq0\to\text{řada diverguje}$$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$ $\quad k\in\mathbb{R}$

$\to n^2 \gg k^2 \quad \sin \pi n \to 0$



n velké

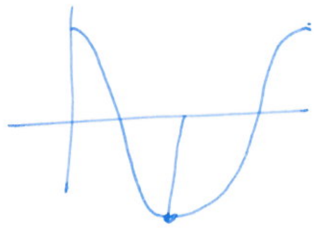
$\sin(\pi(\sqrt{n^2+k^2}+n-n))$

pro n velké chování jde n
porovnáme s n

použili jsme identitu sin(x+y)=sinx*cosy+cosx*siny

$\sin(\pi(\sqrt{n^2+k^2}-n))\underbrace{\cos(\pi n)}_{(-1)^n} + \cos(\pi(\sqrt{n^2+k^2}-n))\underbrace{\sin\pi n}_{0}$

$= (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}-n)$



$\begin{cases} \sin\pi\sqrt{n^2+k^2}-n = \sin\pi\frac{n^2+k^2-n^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n} = \\ = \sin\pi\frac{k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n} \end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\pi\frac{k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}$

když $\pi\frac{k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n} < \frac{\pi}{2}$ klesající

$\to$ absolutní konvergence $\left|\sin\pi\frac{k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}\right| \sim \frac{1}{n}$

$\to$ diverguje

$\to$ neabsolutní konvergence

$\boxed{\frac{k^2}{\sqrt{x^2+k^2}+x}}$ klesající funkce

$\underbrace{\underbrace{\sin\pi\frac{k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}}_{\text{klesající}}}_{\text{klesající}}$

$\frac{d}{dx} = -\frac{k^2}{x(\sqrt{k^2+x^2}+x)+k^2}$

a $\lim \sin\pi\frac{k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n} = 0$ $\quad x\geq 1 \to \frac{df(x)}{dx} < 0 \quad \forall x\geq 1$

$\to$ konverguje dle Leibnitzova kritéria

(10) $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln\ln\ln n}$ ↗ absolutní: divergence

$\sum \frac{(-1)^n}{\ln\ln\ln n}$ $\ln\ln\ln n \to 0$, klesající
⇒ konvergence dle Leibnize

$\sqrt[n]{n}$ $\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{x}} = \frac{d}{dx} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x - \frac{1}{x^2}\right) =$

pomocí první derivace jsme zjistili, že n^(1/n) je klesající

$= -x^{\frac{1}{x}-2}(\ln x - 1)$ $x \geq e$
→ klesající
→ $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$

→ omezená a monotónní

$\sum \underbrace{\frac{(-1)^n}{\ln\ln\ln n}}_{K \text{ dle } L} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\substack{\text{omezená} \\ \text{monotónní}}}$ } ⇒ Konvergence dle Abela

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{100}}{n} \sin\frac{\pi}{4}n$ $\sum \sin\frac{\pi}{4}n$ omezené částečné součty

$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^{100}}{n} \overset{H.V}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^{100}}{x} \overset{L'H}{=} \frac{\frac{1}{x}100\ln x^{99}}{1} =$

$\overset{99\times L'H}{=} 0$ splněna nutná podmínka konvergence

$f(x) = \frac{(\ln x)^{100}}{x}$ $f'(x) = \frac{100(\ln x)^{99}\cdot\frac{1}{x}\cdot x - \ln^{100}x}{x^2} =$
$= \ln^{99}(x)\frac{(100 - \ln x)}{x^2}$

$\frac{(\ln n)^{100}}{n}$ monotónní pro $n > 100$
a → 0
$\sum \sin\frac{\pi}{4}n$ omezené částečné součty } ⇒

⇒ konvergence dle Dirichleta

absolutní konvergence

$\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{2}n\right)\frac{(\ln n)^{100}}{n} = \sin^2\frac{\pi}{4}n \frac{(\ln n)^{100}}{n} \leq \left|\sin\frac{\pi}{4}n\right| \frac{(\ln n)^{100}}{n} \leq \frac{(\ln n)^{100}}{n}$

$\sum \underbrace{\frac{1}{2}\frac{(\ln n)^{100}}{n}}_{D} \underbrace{- \frac{1}{2}\sum\cos\frac{\pi}{2}n \frac{(\ln n)^{100}}{n}}_{K}$ ⇒ celá diverguje

12 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\ln \ln n}$ omezení část. součty

$\sin(n+\frac{1}{n}) = \underbrace{\sin n}_{\text{omezení část. součty}} \underbrace{\cos \frac{1}{n}}_{\text{omezená monotónní rostoucí}} + \underbrace{\sin \frac{1}{n}}_{\text{omezení monotónní klesající}} \underbrace{\cos n}_{\text{omezení část. součty}}$

použili jsme identitu sin(x+y)=sinx*cosy+cosx*siny

→ absolutní konvergence

$\frac{|\sin(n+\frac{1}{n})|}{\ln \ln n} \to \frac{|\sin \frac{n^2+1}{n}|}{\ln \ln n}$ diverguje dle srov. krit.

→ neabsolutní konvergence

$\sum \frac{\sin n \cos \frac{1}{n}}{\ln \ln n} + \frac{\sin \frac{1}{n} \cos n}{\ln \ln n}$

$\sum \left| \boxed{\frac{\sin \frac{1}{n} \cdot 1}{\ln \ln n}} \right| \cdot \cos n$ → omezení klesající, → omezená lesbí

→ $\frac{\sin \frac{1}{n}}{\ln \ln n}$ omezená klesající

→ $\cos n$ omezení částečné součty

⇒ konvergence dle Dirichleta

$\sum \frac{\cos \frac{1}{n} \cdot 1}{\ln \ln n} \cos n$

$\sum \frac{1}{\ln \ln n} \cdot \cos n$ konvergence dle Dirichleta

$\sum \frac{\cos n}{\ln \ln n} \underbrace{\cos \frac{1}{n}}_{\text{omezená monotónní}}$ → konvergence dle Abela

12) absolutní konvergence rozhodni

$$\frac{|\sin(n+\frac{1}{n})|}{\ln\ln n} \geq \frac{\sin^2(n+\frac{1}{n})}{\ln\ln n} = \frac{1}{2}\frac{(1-\cos 2(n+\frac{1}{n}))}{\ln\ln n} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\ln\ln n} - \frac{1}{2}\frac{\cos 2n \cos\frac{2}{n} - \sin 2n \sin\frac{1}{n}}{\ln\ln n}$$

$$\sum \frac{|\sin(n+\frac{1}{n})|}{\ln\ln n} \geq \sum \frac{\sin^2(n+\frac{1}{n})}{\ln\ln n} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sum \frac{1}{\ln\ln n}}_{D} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum \frac{\cos 2n \cos\frac{2}{n}}{\ln\ln n}}_{} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum \frac{\sin 2n \sin\frac{1}{n}}{\ln\ln n}}_{}$$

↓ mon

↓ kles

$\sum \frac{\cos 2n}{\ln\ln n}$ → K dle Dirichleta

$\underbrace{\sum \frac{\cos\frac{2}{n}}{\ln\ln n} \cos 2n}_{}$ K dle Abela

$\sin 2n$ omezené částečné součty

$\frac{\sin\frac{1}{n}}{\ln\ln n}$ ↘ kles, $\lim \to 0$

→ K dle D

D − K + K ⇒ D řada

⇒ absolutní diverguje

(13) $\sum \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}$

→ absolutní konvergence

$$\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{\frac{1-\cos 2n}{2}}{n} \to \underbrace{\sum \frac{1}{n}}_{D \text{ dle integrálního}} - \underbrace{\sum \frac{\cos 2n}{n}}_{K \text{ dle Dirichlet}}$$

→ divergence

→ neabsolutní konvergence

$$\sum (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = \sum \frac{(-1)^n \frac{1}{2}(1-\cos 2n)}{n} =$$

$$= \underbrace{\sum \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{n}}_{K \text{ dle Leibnitz}} - \sum \frac{(-1)^n \cos 2n}{2n} = \sum \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n} - \underbrace{\sum \frac{\cos(\pi+2)n}{2n}}_{K \text{ dle D}}$$

$$\underbrace{(-1)^n}_{\cos \pi n} \cos 2n = \cos \pi n \cos 2n + \underbrace{\sin \pi n}_{0} \sin 2n = \underbrace{\cos(\pi+2)n}_{\text{omezené částečné součty}}$$

→ řada konvergentní neabsolutní

(14) $\sum \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$

$$\cos \frac{\pi(n^2-1+1)}{n+1} = \cos \frac{\pi((n-1)(n+1)+1)}{n+1} = \cos\left(\pi(n-1) + \frac{\pi}{n+1}\right) =$$

$$= \cos \pi(n-1) \cos \frac{\pi}{n+1} + \underbrace{\sin \pi(n-1)}_{0} \sin \frac{\pi}{n+1}$$

$$\underbrace{\sum \frac{1}{\ln^2 n} \underbrace{\cos \pi(n-1)}_{(-1)^{n-1}}}_{K \text{ dle Leibnitze}} \underbrace{\cos \frac{\pi}{n+1}}$$ rozumné monotónní

ještě omezená, ne? To je důležitý

$\lim \frac{1}{\ln n} = 0$, klesající

$$\sum \underbrace{\frac{1}{\ln^2 n} (-1)^{n-1}} \underbrace{\cos \frac{\pi}{n+1}}$$ konvergentní dle Abela

alternativa.

$$\sum \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1} = \sum \frac{1}{\ln^2 n} \overbrace{\cos(\pi(n-1))}^{(-1)^{n-1}} + \sum \frac{1}{\ln^2 n}\left(\cos \frac{\pi n^2}{n+1} - \cos \pi(n-1)\right)$$

konv Leibniz

Lagrangeova věta o střední hodnotě

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{a-b}$$

spojitá na $[a,b]$, dif na (a,b)

$$\sum \frac{1}{\ln^2 n}\left|\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi(n-1)\right| = \sum \frac{\pi}{\ln^2 n}\left|\frac{n^2-(n^2-1)}{n+1}\right| =$$

$$= \sum \frac{\pi}{(n+1)\ln^2 n} \text{ konverguje}$$

absolutní konvergence

$$\sum \frac{1}{\ln^2 n}\left|\cos \frac{\pi n^2}{n+1}\right|$$

$$\cos^2 \frac{\pi n^2}{n+1} \le \left|\cos \frac{\pi n^2}{n+1}\right| \le 1$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\frac{\pi n^2}{n+1}\right)+1\right) \le \left|\cos \frac{\pi n^2}{n+1}\right| \le 1$$

$$\cos \frac{2\pi(n^2+1-1)}{n+1} = \cos 2\pi\left((n-1)+\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \underbrace{\cos 2\pi(n-1)}_{1} \cos \frac{1}{n+1} - \underbrace{\sin 2\pi(n-1)}_{0} \sin \frac{1}{n}$$

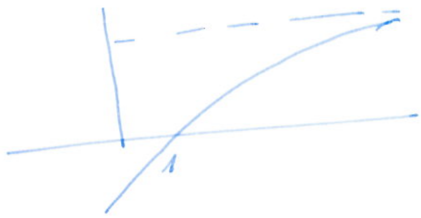
$$\sum \frac{1}{\ln^2 n}\left|\cos \frac{\pi n^2}{n+1}\right| \ge \frac{1}{2}\underbrace{\sum \frac{1}{\ln^2 n}}_{D} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum \frac{\cos\frac{1}{n+1}}{\ln^2 n}}_{D} \Rightarrow D$$

(15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$

absolutní konvergence

$$\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{\sqrt[100]{n}}}_{D} - \underbrace{\frac{2}{(n+1)\sqrt[100]{n}}}_{K}}_{D}$$

$\frac{n-1}{n+1}$. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$



$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$

$\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ K dle Leibnize

$\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ klesající a $\to 0$

$\sum (-1) \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \frac{n-1}{n+1}$ K dle Abela

(16) $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$ $p \in \mathbb{R}$

absolutní konvergence

$\sum \frac{1}{n^p}$

$p \leq 0$ nesplňuje nutnou podmínku

$0 < p \leq 1$ diverguje dle integrálního kritéria

$p > 1$ konverguje dle integrálního

- neabsolutní konvergence

$p > 0$ dle Leibnize

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ $\qquad 0 < x < \pi$

- absolutní konvergence

$p < 0$ osciluje

$p > 1$ konverguje

$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right| < \frac{1}{n^p}$

$\frac{|\sin nx|}{n^p} \geq \frac{\sin^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 2nx}{n^p}\right)$ $\quad 0 < p \leq 1$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n^p}}_{\text{D dle integrálního}} - \frac{1}{2}\underbrace{\sum \frac{\cos 2nx}{n^p}}_{\text{K dle Abela}}}_{D}$$

$\cos 2nx$ ← omezené částečné součty

- neabsolutní konvergence

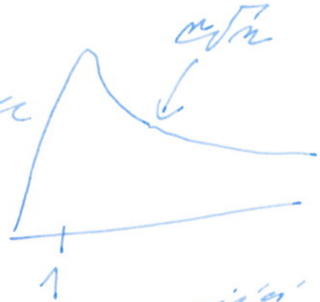
$0 < p < 1$ — omezené částečné součty

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ → konverguje dle Dirichleta

(18) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ $\qquad p \in R$

$p \leq 0$ není splněna nutná podmínka

$(-1)^{n-1} \frac{1}{n^p \sqrt[n]{n}}$



$\sqrt[n]{n}$ klesající

$\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ rostoucí omezená

- absolutní konvergence

$\sum \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ $\qquad n^{p+\frac{1}{n}} \sim n^p$ $\quad (n \to \infty)$

$p > 1$ K dle integrálního K

$0 < p \leq 1$ D dle integrálního K

- neabsolutní konvergence

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\text{K dle Leibnize}} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}}_{\text{K dle A}}$$

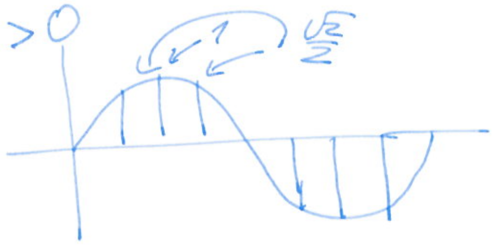
$\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ → omezená monotónní

(19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$

- absolutní konvergence

$\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}\right| < \frac{1}{n^p-1} \sim \frac{1}{n^p}$ $\quad p>1$ konvergence (absolutní) hrubý odhad

- neabsolutní konvergence $1 \geq p > 0$



$k=4n-3 \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$
$k=4n-2 \quad 1$
$k=4n-1 \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{4}}{\sin n\frac{\pi}{4}+n^p} = \sum_{k=1} \frac{\sin\frac{4k-3}{4}\pi}{\sin\frac{4k-3}{4}\pi+(4k-3)^p} + \frac{\sin\frac{4k-2}{4}\pi}{\sin\frac{4k-2}{4}\pi+(4k-2)^p} + \frac{\sin\frac{4k-1}{4}\pi}{\sin\frac{4k-1}{4}\pi+(4k-1)^p}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{4k-2}{4}\pi}{\sin\frac{4k-2}{4}\pi+(4k-2)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(-1)^{k+1}+(4k-2)^p} = \left|\begin{array}{l} 2l+1=k \\ 2l+2=k \end{array}\right.$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{1+(8l+2)^p} - \frac{1}{-1+(8l+6)^p} =$$

$$(8l+2+4)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\binom{p}{k}}_{\frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}} (8l+2)^{p-k} 4^k =$$

$$= (8l+2)^p + 4\underbrace{\binom{p}{1}}_{p}(8l+2)^{p-1} + 4^2\underbrace{\binom{p}{2}}_{\frac{p(p-2)}{2}}(8l+2)^{\overbrace{p-2}^{}} + \dots$$

$p-1$ záporná nebo 0

$$\frac{(8l+6)^p-1-1-(8l+2)^p}{(1+(8l+2)^p)((8l+2+4)^p-1)} = \frac{-2+4p(8l+2)^{p-1}+\frac{4^2}{2}p(p-2)(8l+2)^{p-2}+\dots}{-1-(8l+2)^p+(8l+2+4)^p+(8l+2)^p(8l+6)^p}$$

$1 \geq p \geq 0 \quad \sim \quad \frac{-2}{l^{2p}}$ nejvyšší člen / nejvyšší člen $\qquad \frac{l^0}{l^{2p}} \qquad 2p>1$

$p>\frac{1}{2}$

řada konverguje pro $p>\frac{1}{2}$

→ ostatní řady s $\frac{\sqrt{2}}{2}$ podobně

(20) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}\right)^p \qquad p \in \mathbb{R}$

→ viz důkaz mat. indukcí

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

→ absolutní konvergence

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n+2)}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right)^p = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p \to 1$$

nelze rozhodnout

Raabe

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = q \qquad \begin{array}{l} q > 1 \; K \\ q < 1 \; D \end{array}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{p}{2n+1} + O\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right) - 1\right) = \frac{p}{2}$$

$p > 2 \quad K$

$p < 2 \quad D$

$p = 2$ nelze rozhodnout

Gauss

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = p + \frac{q}{n} + \frac{L_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

$p > 1 \quad K$

$p < 1 \quad D$

$p = 1$ a $q > 1$ K

$p = 1$ a $q \leq 1$ D

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p = 1 + \frac{p}{2(n+\frac{1}{2})} + \frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\frac{p}{2} > 1 \quad \to p > 2 \quad K$

$\frac{p}{2} \leq 1 \quad \to p \leq 2 \quad D$

→ neabsolutní konvergence

$p \leq 0$ není splněna nutná podmínka k

$p > 2$ konvergenci i absolutní

$0 < p \leq 2$ $\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n}$ → klesající a $\lim a_n = 0$

→ konvergence dle Leibnize

• „divergentní" přerovnání

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

uvažujme $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ (bereme jen kladné sudé členy)

najdeme posloupnost $\{b_k\}_0^{\infty}$ rostoucí $(b_0 = 0)$ a $b_k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{b_k} \frac{1}{2n} \geq k \qquad b_1 = 4 \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8} > 0$$

$$\underbrace{-1 + \sum_{i=1}^{b_1} \frac{1}{b_0+2i}}_{>0} \underbrace{- \frac{1}{3} + \sum_{i=1}^{b_2} \frac{1}{b_1+2i}}_{>1} \underbrace{- \frac{1}{5} + \sum_{i=1}^{b_3} \frac{1}{b_2+2i}}_{>2} - \frac{1}{7} + \ldots = \infty$$