$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n5^n}}$$ zadání

$w = z-3$

Hledáme poloměr konvergence.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n5^n}} = \frac{1}{5} \Rightarrow R = 5$$

POKUD EXISTUJE!

našli jsme poloměr konvergence, tedy víme:

$|w| = |z-3| < 5$ konverguje

$|w| = |z-3| > 5$ diverguje

Teď potřebujeme vyšetřit abs(w)=5 zvlášť. To uděláme tak, že řekneme že w=Re^(i*fí), pak to dosadíme do té původní rovnice. Nezapomeňme, že v té je to ve tvaru w^n

$w, z \in \mathbb{C}$ $\quad w = Re^{i\varphi} = 5e^{i\varphi}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}(5e^{i\varphi})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n} 5^n e^{in\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n} =$$

Použijeme identitu e^(i*fí*n)=cos(nfí)+i*sin(nfí)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi + i \sin n\varphi}{n}$$

pokud $\cos n\varphi$ a $\sin n\varphi$ mají omezené součty, pak konvergují

$\varphi \in [0, 2\pi)$ $\cos 0$ neomezené částečné součty

pro $R=5$ $\quad \varphi \neq 0$ konverguje

$\varphi = 0$ diverguje

Pro tu identitu má cos i sin vždy omezené součty, ale pokaždé ještě musíme dát POZOR NA COS(0)! Tedy na fí=0. Tam je to většinu ještě potřeba vyšetřit zvlášť, prostě dosadit za fí nulu a vypočítat tu řadu (např Gaussem, teď už není mocninná)

Jestli to po mě bude někdo číst - na zkoušku musíš umět Gausse

② $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} z^n, \quad a \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} a^n$$

tedy R je závislé na parametru a

$a \in (0,1)$ $\quad \lim \cdot = 0 \Rightarrow R = \infty$

$a = 1$ $\quad R = 1$

$a > 0$ $\quad \lim \cdot = \infty \Rightarrow R = 0$ (konvergence v nule)

vyšetříme pro a=1 - jediný případ, kdy nevíme

konvergence $a=1$ $\quad z = Re^{i\varphi} = e^{i\varphi}$ $\quad \varphi \in [0, 2\pi)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a^{n^2}}_{1} e^{in\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\varphi}$$

, omezené částečné součty, ale nekonverguje (osciluje)

$\varphi \in (0, 2\pi)$

pro $\varphi = 0$ diverguje

1^n pro n jdoucí do nekonečna je jedna

opět fí=0 musíme vyšetřit zvlášť

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+b^n}{n} z^n \quad a,b \in \mathbb{R}$

hledáme R pomocí toho podílu, ne už limity s odmocninou

- poloměr konvergence (podílové kritérium)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{a^n+b^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left|\frac{n}{n+1}\right|}_{\to 1}\left|\left(\frac{a^{n+1}}{a^n+b^n}+\frac{b^{n+1}}{a^n+b^n}\right)\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}+\frac{b}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^n}\right|$$

- $|a|>|b|$: $\quad \frac{b}{1+\underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)^n}_{>1}} \to 0 \qquad \frac{a}{1+\underbrace{\left(\frac{b}{a}\right)^n}_{<0\ \to 0}} = a$

$\Rightarrow \lim = |a| \Rightarrow R = \frac{1}{|a|}$

- $|a|=|b|$: $\quad \frac{1}{R} = \left|\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right| = |a| = |b| \rightarrow R = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|b|}$

- $|a|<|b|$: $\quad R = \frac{1}{|b|}$

V sešitu pomocí limity s odmocninou, jednodušeji. Za úvahy R=min(Rb,Ra). Protože si tu mocninnou řadu rozdělíme na dvě, vyšetříme zvlášť.

- konvergence na poloměru konvergence
  - $|a|>|b|$ $\quad R=\frac{1}{|a|} \quad z=\frac{1}{|a|}e^{i\varphi} \quad \varphi\in[0,2\pi)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n+b^n}{n}\frac{1}{|a|^n}e^{in\varphi}$

$a>0$: $\sum\frac{a^n}{|a|^n}e^{in\varphi} = \sum e^{in\varphi} \rightarrow$ K pro $\varphi\neq 0$, D pro $\varphi = 0$

$a<0$: $\sum\frac{a^n}{|a|^n}e^{in\varphi} = \sum(-1)^n e^{in\varphi} \rightarrow$ K pro $\varphi\neq\pi$, D pro $\varphi=\pi$

  - $|a|=|b|$
    - $a=-b$: $\sum\frac{(-1)^n+1}{n}e^{in\varphi}$ K pro $\varphi\neq 0$ a $\varphi\neq\pi$, D pro $\varphi=0$ a $\varphi=\pi$
    - $a=b$, $a>0$: $\sum\frac{2}{n}e^{in\varphi}$ K pro $\varphi\neq 0$, D pro $\varphi=0$

      $a<0$: $\sum\frac{2(-1)^n}{n}e^{in\varphi}$ K pro $\varphi\neq\pi$, D pro $\varphi=\pi$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(z-1)^n \quad w=z-1$

- $\exists?\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \Rightarrow R=\frac{1}{e}$
  $\Rightarrow |z-1|<\frac{1}{e}$ konverguje

- konvergence na kolomění L abs(z-1)=abs(w)= $\frac{1}{e}e^{i\varphi}$

$\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}\underbrace{e^{i\varphi n}}_{oscilace}$

? nutná podmínka konvergence ?

$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{e^n}=$

Použijeme Heineho větu

$=\lim_{n\to\infty}e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n}$ Heine

$\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+x)-\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}}\overset{T.R}{=}$

$e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots\right)-1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$ není splněna nutná podmínka konvergence. $\Rightarrow |z+1|=\frac{1}{e}$ nekonverguje

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p} \quad p\in\mathbb{R}$

Poloměr K jsme získali tím podělením

- $\exists?\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{n^p}=1\Rightarrow R=1$ $\quad |z|<1$ K $\quad |z|>1$ D

Vyšetříme pro abs(z)=1

- $z=e^{i\varphi}$ kruh $R=1$

$\sum\frac{e^{in\varphi}}{n^p}$

- **nutná podmínka** není splněna pro $p\leq 0$

jelikož lim as n approaches infinity of an se neblíží nule

- absolutní konvergence
  $\left|\frac{e^{in\varphi}}{n^p}\right|<\frac{2}{n^p}$ $\quad p>1$ absolutní k.
- $p\in(0,1]$ $\quad \frac{e^{in\varphi}}{n^p}=\frac{\cos n\varphi+i\sin n\varphi}{n^p}\xrightarrow{\varphi\neq 0}$
  $\Rightarrow$ konverguje neabsolutně pro $\varphi\neq 0$

① $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \quad p \in \mathbb{R}$

$\exists!\ \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}\frac{(2n+1)!}{2^n (n!)^2}\right)^p =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}\right)^p = \left(\frac{1}{2}\right)^p \to R = 2^p$

• konvergence pro $R = 2^p e^{i\varphi}$

$\sum (-1)^n 2^{np} e^{in\varphi}\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p =$

$= \sum (-1)^n e^{in\varphi}\left(\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p$

Gauss: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{A_k}{n^{1+\varepsilon}}$

→ absolutní konvergence   gauss

$|(-1)^n e^{in\varphi}| \le 1 \qquad \tilde a_n = \left(\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p$

$\frac{\tilde a_n}{\tilde a_{n+1}} = \left(\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\frac{(2n+3)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2}\right)^p = \left(\frac{(2n+3)(2n+2)}{4(n+1)^2}\right)^p =$

spíš 2/2n+3/2n, ne?

tedy tedy spíš místo 1 bude 3?

$= \left(\frac{(1+\frac{3}{2n})(1+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})^2}\right)^p = \left(\frac{1+2\frac{1}{2n}+\frac{2}{2n}}{(1+\frac{1}{n})}\right)^p = \left(1+\frac{1}{2n(1+\frac{1}{n})}\right)^p$

3?

$= 1 + p\frac{1}{2n(1+\frac{1}{n})} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{p}{2}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\frac{p}{2} > 1$ K, $p > 2$

$\frac{p}{2} \le 1$ D, $p \le 2$ D

$\frac{1}{2n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \left(1-\frac{1}{n}+\dots\right)\frac{1}{2n}$

Pro velká n jde k nule

Vyšší členy než 1/n nás tu nezajímají

Neabsolutní konvergence pro 2>p>0 ???

→ neabsolutní konvergence $2 \ge p > 0$ $\left(\ \right)^p$ $p>0$ nemění směr → nevo ↘

→ $\tilde{\tilde a}_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ (via [illegible])

→ klesající a limita → 0

→ $(-1)^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \cos n\pi(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) =$

$= \cos n\pi\cos n\varphi + \underbrace{\sin n\pi}_{0}\sin n\varphi + i(\cos n\pi\sin n\varphi + \underbrace{\sin n\pi\cos n\varphi}_{0}) =$

$= \cos n(\pi+\varphi) + i\sin(n(\pi+\varphi))$

omezený čás. součty pro $\varphi \in [0, 2\pi)$

$\pi + \varphi = 2\pi$

$\varphi = \pi$ →

→ není omez. částečný součty

→ K pro $\varphi \neq \pi$, D pro $\varphi = \pi$

Byl tenhle rozpis toho e^(i*fí*n) vůbec nutný? Nestačí říct, že ta věc nahoře je klesající, jde k nule, a tohle pro fí není nula osciluje a je omezené? Tedy dle Dirichleta nebo Abela to konverguje?

Houby, mám špatnou úvahu. Ono je tam to (-1)^n, to s tím trochu zamíchá. Musíme to nějak složit, což p. Běhounková udělala tak, že na to naroubovala tu identitu cos(x+y)=cosxcosy+sinxsiny a sin(x+y)=podobně. Je tam dost hezký trik v tom, že vždy tu druhou polovinu toho rozepsaného výrazu může jen tak vytvořit z ničeho, protože se to vlastně rovná nule.

Díky tomu rozepsání už nemáme jen standardní podmínku fí se nesmí rovnat nule, ale fí se nesmí rovnat pí.

Dost dobrý, tohle bych sám nevymyslel

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{3x}{2+x^2}\right)^n$ $x \in R$ obecněná řada

poloměr konvergence

$\exists ?$ $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \left|\frac{3x}{2+x^2}\right|^{n+1}}{n^2 \left|\frac{3x}{2+x^2}\right|^n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}_{\to 1} \left|\frac{3x}{2+x^2}\right| = \left|\frac{3x}{2+x^2}\right|$

$\to \left|\frac{3x}{2+x^2}\right| < 1$ aby řada konvergovala

$\to \boxed{x \geq 0}$ $\frac{3x}{2+x^2} < 1$

$0 < x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ a $x \geq 0$

0, 1, 2, >0

$x \in (0,1)$ a $(2,\infty)$ konverguje

- hraniční body

$x = 0$ triviální

$x = 1$ $\sum n^2 \left(\frac{3}{3}\right)^n = \sum n^2$ diverguje

$x = 2$ $\sum n \left(\frac{6}{6}\right)^n = \sum n^2$ diverguje

$x \in \langle 0,1)$ a $(2,\infty)$ konverguje

$\to x < 0$ $\frac{-3x}{2+x^2} < 1$

$0 < (x+2)(x+1)$

>0, <0, >0; −2, −1, 0

$x \in (-\infty,-2)$ a $(-1,0)$ konverguje

$x = -1$ $\sum n^2 \left(\frac{-3}{3}\right)^n = \sum n^2(-1)^n$ osc.

$x = -2$ $\sum n^2 \left(\frac{-6}{6}\right)^n = \sum n^2(-1)^n$ osc.

$\to x \in (-\infty,-2) \cup (-1,1) \cup (2,\infty)$ konverguje

(9) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ TŘ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^n}{(2n!)} = \cos y$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$\sin^2 x$ je reálně analytická pokud je $\cos 2x$ reálně analytická

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \cdot 2^{2n} + \frac{\cos(\xi)^{2n+1}}{(2n+1)!} X^{2n+1} 2^{2n+1}$$

a $R_N \Rightarrow 0$ aby byla fce reálně analytická

$$|R_N| \le \left| \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \overset{\text{Stirling}}{\sim} \frac{(2x)^{2n+1}}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{x}{e}(2n+1)\right)^{2n+1}}$$

$\to 0$ nebo užít $\frac{e}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$ $e\left(\frac{n}{e}\right)^n < \frac{n!}{e} < n\left(\frac{n}{e}\right)$

(11) $\int_0^x \frac{\operatorname{atan} t}{t}\, dt$

$$(\operatorname{atan} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

R: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{2n+2}}{|x|^{2n}} = |x|^2 = 1 \to$ pro $|x|<1$ $x < 1$

$$\operatorname{atan} x = \int \sum_{0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\, dx \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n}\, dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$$

v $x=0$ $\operatorname{atan} 0 = 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$

abelova věta: konverguje v krajních bodech → fce konverguje i na $\langle 0, R\rangle$! součet je spojitá fce na uzavřeném intervalu

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ konverguje pro $x = 1$ i -1

$$\int_0^x \frac{\operatorname{atan} t}{t}\, dt = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

→ konverguje na $x=1$ (dokonce absolutně)
→ konverguje na $\langle 0, 1\rangle$

(10) $\sqrt{1+x^2}$

$$(1+y)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} y^n \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!\,(k-n)!}$$

zobecněný binomický rozvoj

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (x^2)^n$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\overbrace{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(+\frac{1}{2}-n+1\right)}^{(-1)^{\max(2,n+1)} + \text{vytknout } \frac{1}{2}}}{\underbrace{n(n-1)\cdot\dots\cdot 1}_{n \text{ členů}}} =$$

$$\boxed{2n-3 \le 0 \to (2n-3)!! = 1}$$

$$= \frac{(2n-3)(2n-5)\cdot\dots\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{n(n-1)\dots 1}(-1)^{\max(2,n+1)} =$$

$$= \frac{(2n-3)!!}{2n(2n-2)\dots 2}(-1)^{\max(2,n+1)} = \frac{(2n-3)!!}{2n!!}(-1)^{\max(2,n+1)}$$

$$(1+x^2)^{1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} + \dots + \underbrace{\sum_{m=n+1}^{\infty} x^{2m}(-1)^{m+1}\frac{(2m-3)!!}{\underbrace{2m!!}}}$$

$x \le 1$ pro $x < 1$ absolutní

$x = 1$ neabsolutní

$$\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} < \frac{1}{\sqrt{2m+1}}$$

$$\frac{(2m-3)!!(2m-1)}{(2m)!!(2m-1)} \le \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{1}{2m-1} < \frac{1}{\sqrt{2m+1}}\frac{1}{2m-1}$$

$(1+y)^{1/2}$ $\qquad$ $\cancel{R^n = \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(-1)^{n+2}\frac{1}{(1+y)^{\frac{2n-1}{2}}}(y-0)^{n+1} \quad n>2}$

$\to 0$

obecně

$$f^{(n)} = \frac{(2n-3)!!}{2^n}(-1)^{n+1}\frac{1}{(1+y)^{\frac{2n-1}{2}}}$$

$$R_n = \underbrace{\frac{(2n-3)!!}{2^n(n+1)!}}_{\to 0}(-1)^{n+1}\frac{1}{(1+\xi^2)^{\frac{2n-1}{2}}}x^{2(n+1)}$$

$\xi \in (-x, x)$ $\qquad \frac{\xi}{x} < 1$

(12) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-1} = f(x)$ $R=1$ pro $x \geq 1$ divergujic

$\to$ pro $|x|<1$ $\to$ rozvoj: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad / \, '$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-1} + 1$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \quad / \cdot x$$

$$x\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-1}$$

$$f(x) = x\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = x\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

$\to$ pro $|x|<1$ (alternativa)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-1} \quad / \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \quad / \int$$

$$\int\left(\frac{f(x)}{x}dx\right) = \sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-1} \quad / \int$$

$$\int\left(\int\frac{f(x)}{x}dx\right) = \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 - x \quad / \, '$$

$$\int \frac{f(x)}{x}dx = \frac{1}{(1-x)^2} - 1 \quad / \, '$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{(1-x)^3} \to f(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = f(x)$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} =$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2^n} \frac{(1)(3)(5)\dots(2n+1)}{\underbrace{n(n-1)(n-2)\dots2\cdot1}_{n}} =$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{(2n+1)!!}{2n(2n-2)(2n-4)\dots4\cdot2} = (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2n!!}$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

naše řada začíná od $n=1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1$$

(14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ pro $x = \frac{1}{2}$

$\rightarrow R = 1$ a řada konverguje pro $x = \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{n=k-1} \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$, pro $|x|<1$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \quad \int$

$\int_0^t \frac{1}{1-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$

$[-\ln 1-x]_0^t = -\ln t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$

$t = \frac{1}{2}: \quad -\ln \frac{1}{2} = \boxed{\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}}$

$\rightarrow$ b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad /'$

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$\int_0^t f'(x) dx = \int_0^t \frac{1}{1-x} dx = [-\ln 1-t]_0^t = -\ln(1-t)$

$t = \frac{1}{2} \qquad \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ → konvergení (ale počítat)

→ mělo by stačit posouvání indexu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n\ )!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} =$$

$$\overset{k:=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $R = \infty$

$$(e^x) = (e^x)' = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right]' =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \overset{n-1=k}{=}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e^1 \\ &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} = e \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e$$

→ alternativa

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad /\ '$$

$$(e^x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} \quad /\ x$$

$$x(e^x)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^n}{n!} \quad /\ '$$

$$(x(e^x)')' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n-1}}{n!} \quad /\ x$$

$$x(x(e^x)')' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$$

$$f(x) = x(xe^x)' = x(e^x + xe^x)$$

$$f(1) = 2e$$

(16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ využijte arctan x

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

konvergence $\sum (-1)^n x^{2n}$

poloměr

pro $x = \pm 1$ osciluje

$$R = \sqrt[n]{|x|^{2n}} < 1$$

$$|x^2| < 1$$

$$|x| < 1$$

→ při $\int$ se zachovává poloměr konvergence

(ale neříká nic pro $x = R$!. → $\sum \frac{(-1)^n}{2n-1}$ k dle L na $[-1,1]$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctan} x + c = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \underline{\underline{n+1=k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$$ → souhlasí naše řada pro $x=1$

$\operatorname{arctan} 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$

→ podle Abelovy věty

$f(x) = \operatorname{arctan} x$ na $(-1,1)$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1}$ na $[-1,1]$

a tedy $f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \operatorname{arctan} x =$

$= \operatorname{arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$ uvažujte $(1+x)e^{-x}-(1-x)e^{x}$

$R=\infty$ i $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$(1+x)e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}$$

$$-(1-x)e^{x}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$$

odečtení $n=2k$, sečtení $n=2k+1$ — odečtení $n=2k+1$, sečtení $n=2k$

$$-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k)!}=$$

$$-2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}-\frac{x^{2k+1}}{(2k)!}\,\frac{2k+1}{2k+1}\right)=$$

$$=-2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}-(2k+1)\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right)=+4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$f(x)=(1+x)e^{-x}-(1-x)e^{x}=4\sum\frac{k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$f(x=1)=2e^{-1}-(1-1)e^{1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(2k+1)!}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(2k+1)!}=\frac{1}{2e}}$$

18 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

viz př. 13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 \qquad x \to -x$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (-1)^n x^n = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 = f(x)$

$\to f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1$ na $(-1,1)$

$\to f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

?? $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1 \qquad |x| < 1$ konverguje

$\to$ konvergence pro $x = 1$

$\sum (-1)^n \underbrace{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}$

$\to$ klesající

$\to \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n}} \longrightarrow 0$

$\to$ konverguje dle Leibnitze

$\to$ konvergence $x = -1$

$\sum (-1)^n (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ diverguje dle srovnávacího

$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ na $(-1, 1]$

$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

(19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$

využijeme rozvojů

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n x^n \text{ a pak } 2\times\int$$

$$\ln(1+x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \text{ a pak } 1\times\int$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n x^n}{n}}_{\ln(1+x)} \cdot \frac{1}{n+1} \longrightarrow R = 1 \quad \rightarrow K \text{ pro } |x|<1$$

$x=1$ $\frac{(-1)^n}{n(n+1)} \rightarrow K$

$x=-1$ $\frac{1}{n(n+1)} \rightarrow K$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \frac{1}{n+1} \quad \text{pro } x \in [-1, 1]$$

$\rightarrow$ pro $|x|<1$

$$-\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \quad \int$$

$$-\int \ln(1+x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n+1)} \cdot x$$

$$\int \ln(1+x)\,dx = \left| 1+x = y \right| = \int \ln y\,dy = \left| \begin{matrix} f(y) = \ln y & f'(y) = \frac{1}{y} \\ g'(y) = 1 & g(y) = y \end{matrix} \right.$$

$$= -(y \ln y - y + C) = -(y(\ln y - 1) + C)$$

$$-((1+x)(\ln(1+x) - 1) + C) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n+1)} x +$$

$x=0$ $\quad -1 + C = 0 \quad C = 1$

$$-((1+x)\ln(1+x) - 1 - x + 1) = -((1+x)\ln(1+x) - x) = f(x)$$

na $(-1, 1)$

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -((1+1)\ln(1+1) - 1) = -(2\ln 2 - 1) = 1 - 2\ln 2$$

Besselova rovnice $\boxed{x\neq 0}$

(20) $\nu=0$

(21) $\nu=\frac{1}{2}$

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

(20) $$K_0(x)=\ln x\sum_{s=0}^{\infty}a_sx^s+\sum_{s=1}^{\infty}b_sx^s \quad \Big|\ \nu=0$$

$$K_0'(x)=\ln x\sum_{s=1}^{\infty}s a_s x^{s-1}+\sum_{s=0}^{\infty}a_sx^{s-1}+\sum_{s=1}^{\infty}s b_s x^{s-1}$$

$$K_0''(x)=\ln x\sum_{s=2}^{\infty}s(s-1)a_sx^{s-2}+\sum_{s=1}^{\infty}s a_s x^{s-2}+\sum_{s=0}^{\infty}(s-1)a_sx^{s-2}+$$

$$+\sum_{s=2}^{\infty}(s-1)s b_s x^{s-2}$$

$x^2y''+xy'+x^2y$

$$x^2y=\ln x\sum_{s=0}^{\infty}a_sx^{s+2}+\sum_{s=1}^{\infty}b_sx^{s+2}$$

$$=\ln x\sum_{r=2}^{\infty}a_{r-2}x^r+\sum_{r=3}^{\infty}b_{r-2}x^r$$

---

celkem

$$\ln x\sum_{s=2}^{\infty}\underline{s(s-1)a_s}x^s+\sum_{s=1}^{\infty}s a_s x^s+\sum_{s=0}^{\infty}(s-1)a_sx^s+\sum_{s=2}^{\infty}s(s-1)b_sx^s$$

$$+\ln x\sum_{s=1}^{\infty}\underline{s a_s}x^s+\sum_{s=0}^{\infty}a_sx^s+\sum_{s=1}^{\infty}s b_s x^s$$

$$+\ln x\sum_{s=2}^{\infty}\underline{a_{s-2}}x^s+\sum_{s=3}^{\infty}b_{s-2}x^s=0$$

$\boxed{a_0 = \text{zvol. nenulové}}$

$\boxed{a_1=0}$

$$a_{s-2}+s(s-1)a_s+s a_s=0$$

$$a_s=-\frac{a_{s-2}}{s^2}$$

$s=2m$

$$\boxed{a_{2m}=-\frac{a_{2m-2}}{(2m)^2}}$$

$1\cdot a_1+\overbrace{a_1}^{0}+b_1$

$\boxed{b_1=0}$, b_2

$$b_{s-2}+s a_s+(s-1)a_s+s(s-1)b_s$$

$$+a_s+s b_s=0$$

$$b_{s-2}+2s a_s+s^2b_s=0$$

$$\boxed{b_s=-\frac{b_{s-2}+2s a_s}{s^2}}$$

$$b_2 2(2-1)+2a_2+1\cdot a_2+1\cdot a_2+2b_2=0$$

$$b_2=-a_2$$

$$b_{2m}=-\frac{b_{2m-2}+2(2m)a_{2m}}{(2m)^2}$$

(21) $x^2y''+xy'+(x^2-(\frac{1}{2})^2)y=0 = x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$

$$x^\rho\sum_{n=0}^{\infty}a_s x^s$$

$$y = x^\rho\sum_{s=0}^{\infty}a_s x^s$$

$$y' = x^\rho\sum_{s=0}^{\infty}(\rho+s)\,a_s x^{s-1}$$

$$y'' = x^\rho\sum_{s=0}^{\infty}(\rho+s)(\rho+s-1)a_s x^{s-2}$$

celkem $\sum_{s=0}^{\infty}\left((\rho+s)(\rho+s-1)+(\rho+s)-\frac{1}{4}\right)a_n x^{\rho+s}+$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}a_s x^{\rho+s+2}=0$$

$(\rho+1)\rho+\rho+1=(\rho+1)(\rho+1)$

$$=\left(\rho^2-\frac{1}{4}\right)a_0x^\rho+\left((\rho+1)^2-\frac{1}{4}\right)a_1x^{\rho+1}+$$

$$+\sum_{s=2}^{\infty}a_s x^{\rho+s+2}+\sum_{s=2}^{\infty}\Big(\overbrace{(\rho+s)((\rho+s+1)-(\rho+s))}^{(\rho+s)^2}-\frac{1}{4}\Big)a_n x^{\rho+s}=0$$

x^ρ $\left(\rho^2-\frac{1}{4}\right)a_0=0$ $\rho=\pm\frac{1}{2}$

$$\left((\rho+s)^2-\frac{1}{4}\right)a_n=-a_{n-2}\quad n\geq 2$$

uvažujme $\rho=+\frac{1}{2}$

$a_1=0 \to$ všechny lichá a_n jsou nulové

$a_1=a_3=a_5=\dots=0$

$$a_s=-\frac{a_{s-2}}{(\frac{1}{2}+s)^2-\frac{1}{4}}=-\frac{a_{s-2}}{s^2+s+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{a_{s-2}}{s(s+1)}$$

$s=2m$

$$a_{2m}=-\frac{a_{2m-2}}{2m(2m+1)}\qquad m=1,2,3,\dots$$

a_0 ~~a moi nem~~

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!}\qquad y=x^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_0(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}=$$

$$=x^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_0(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$J_{1/2}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\sin x\quad x>0$$