Matematická analýza pro fyziky II

LS 2015/16, MFF UK

7. Cvičení

---

1. Rozhodněte, zda jsou funkce

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y - y^3}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pro} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^4)}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pro} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

c) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x^2}y}{e^{-2/x^2}+y^2} & \text{pro} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0 \text{ und } y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

spojité v bodě $(0,0)$.

2. Ukažte, že platí $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1$.

3. Je dána funkce $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
   Ukažte, že platí $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad \text{pro} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0).$

4. Spočtěte všechny parciální derivace prvního řádu funkcí

$$a)\ f(x,y,z) := z \cdot \arctan(x/y) \qquad b)\ f(x,y,z) := x^{(y^z)}$$

5. Spočtěte smíšené parciální derivace druhého řádu funkcí

$$a)\ f(x,y) := \arccos\sqrt{(y/x)} \qquad b)\ f(x,y) := x^{(y^2)}$$

6. V kterých směrech existuje derivace funkce $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ v bodě $(0,0)$?

7. Budiž $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{pro} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pro} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   Ukažte, že:
   a) V bodě $(0,0)$ existují derivace ve všech směrech.
   b) f není spojitá v $(0,0)$.

8. Funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je *diferencovatelná* v bodě $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, pokud existuje lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(x_1+h_1,x_2+h_2) - f(x_1,x_2) - L(h_1,h_2)|}{||(h_1,h_2)||} = 0.$$

   Nechť $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pro} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pro} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   Je f diferencovatelná v bodě $(0,0)$?

9. Najděte tečnou rovinu k funkci $f(x,y) = x^y$ v bodě $(1,1,1)$!

10. Buď $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad (x,y) = (0,0) \\ xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

    Spočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

11. Buď

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)$$

    a

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy).$$

    a) Utvořte $f \circ F$.

    b) Spočtěte Jacobiho matici $J_{f\circ F}$ v bodě $(1,1)$.

    c) Spočtěte Jacobiho matice $J_F(1,1)$ a $J_f(2,0,2)$ a utvořte jejich součin.

12. a) Nechť je dáno n bodů $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

    Určete přímku $y = Ax + B$ tak, že $f(A,B) := \sum_{i=1}^{n} (y_i - Ax_i - B)^2$ je minimální.

    b) V kterém bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nabývá funkce $f(x) = \sum_{j=1}^{p} \|x - a_j\|^2$ $(a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}^n,\ p \in \mathbb{N})$ své globální minimum?

13. Buď $f = (f_1, f_2, f_3)$ a $f_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$. Nechť mají funkce f_1, f_2 a f_3 spojité parciální derivace prvního řádu v každém směru. Pak definujeme rotaci vektorového pole f

$$\operatorname{rot} f := \Big(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big)$$

    a divergenci vektorového pole f

$$\operatorname{div} f := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} .$$

    Odvoďte následující identity:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \text{pro } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) \equiv (0,0,0) \quad \text{pro } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

    a

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) \equiv 0 \quad \text{pro } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

14. Buď $f(\xi, \eta, \zeta)$ spojitě diferencovatelná. Dosazením $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$, $\zeta = 2xy$ definujeme funkci $F(x,y)$. Spočtěte její derivace prvního řádu.

15. Spočtěte Taylorův polynom 2. řádu

    a) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x$ in $(1,-1)$
       Co lze říct o zbytku?

    b) $f(x,y) = x^2 e^{xy}$ v $(0,1)$.

    c) $f(x,y,z) = \sin x \cos y \; e^z$ v $(0,0,0)$

d) $f(x,y) = x^y \quad$ v $(1,1)$.

16. Nechť je dáno zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $f(x,y) \; = \; \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}$.
    a) Spočtěte Jacobiho matici a - tam, kde existuje - její inverzi.
    b) Ukažte, že f je surjektivní a že každý bod z $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ má právě 2 vzory.

17. Nechť je dáno zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $f(x,y) \; = \; \dfrac{1}{x^2+y^2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.
    a) Spočtěte Jacobiho determinant f.
    b) Ukažte, že f je na $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ lokálně i globálně invertovatelné a najděte inverzní zobrazení.
    c) Interpretujte zobrazení f geometricky.

18. Nechť je dáno na $\mathbb{R}^2$ zobrazení

$$\begin{aligned} x &= u(1-v) \\ y &= uv \; . \end{aligned}$$

Spočtěte:

a) obraz jednotkového čtverce $[0,1] \times [0,1]$,
b) Jacobiho determinant,
c) inverzní zobrazení, pokud existuje.