Matematická analýza pro fyziky II

LS 2015/16, MFF UK

1. Cvičení

1. Spočtěte : a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x\, e^{-x} dx$ b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$ c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$ d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx$

   Návod : *V* **d)** *použijte substituci* $t = x + \frac{1}{x}$.

2. Pomocí Riemannova integrálu spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$$

3. Spočtěte

$$a) \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} \qquad b) \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx$$

$$c) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x} \qquad d) \int_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx$$

4. Riemannova funkce

   Buď $R(x) = 0$ pokud x je iracionální, a $f(x) = \dfrac{1}{q}$ pokud $x = \dfrac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ a p, q nesoudělné.) Ukažte, že R je na $[0, 1]$ riemannovsky integrovatelná.

5. Spočtěte plochu množiny ohraničené křivkou

$$\mathcal{K} := \left\{ (x, y) : \quad x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \right\}.$$

   Udělejte si nejprve obrázek. Tato křivka se nazývá asteroida.
   Návod: Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ platí

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x\, \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx\,.$$

6. Vyšetřete konvergenci nebo divergenci následujících nevlastních integrálů:

$$a) \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3 + x}}, \qquad b) \int_0^{\infty} x^n e^{-\sqrt{x}} \mathrm{d}x, \qquad c) \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t, \qquad d) \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t} \mathrm{d}t.$$

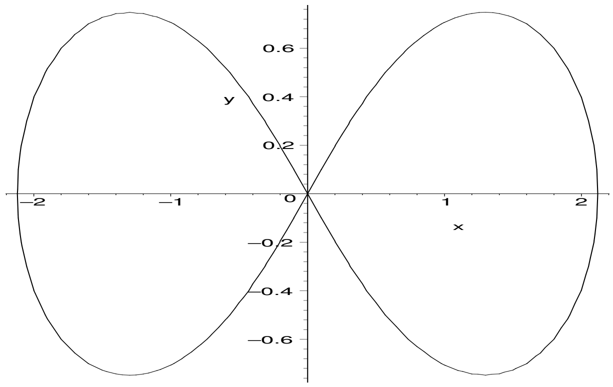
7. (i) Spočtěte plochu *elipsy*

$$\mathcal{K} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b > 0.$$

   (ii) Spočtěte plochu ohraničenou *Bernoulliho lemniskátou*:

$$\mathcal{K} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \right\}, \quad a > 0.$$

   Návod:



Odvoďte parametrické vyjádření v polárních souřadnicích.

$$r = a\sqrt{2\cos(2\varphi)}, \quad r \in (0, \sqrt{2}a).$$

Integrujte pak od nuly do $\sqrt{2}a$ délku paprsku, který je omezen lemniskátou, tedy $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}a} r\varphi(r)\mathrm{d}r$.

8. Ukažte, že

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x}{\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{t}} = 1.$$

9. Určete

$$a)\quad \frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^{x^3} \ln t\ dt\right) \qquad\qquad b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\ dt$$

10. Buď $f:\,[0,\infty)\mapsto[0,\infty)$ dána.
(i) Plyne z $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$ vždy $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?
(ii) Plyne z $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$ vždy existence limity $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$?
(iii) Buď f navíc stejnoměrně spojitá. Plyne pak z $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$ vždy $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

11. Vyšetřete konvergenci nebo divergenci následujících nevlastních integrálů

$$a)\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx \qquad b)\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx \qquad c)\int_0^\infty \frac{\sin(1/x)\arctan x}{x}dx \qquad d)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}.$$

12. Spočtěte

$$a)\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} \qquad b)\int_0^1 \ln x\ dx \qquad c)\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\ dx \qquad d)\int_0^\infty \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\ dx.$$

13. Buď f spojitá na $[0,\infty)$, a nechť existuje $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = A$. Dokažte, že pak $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = A$.

14. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $f(x) = e^{-|x|}$.

15. Budiž f spojitá. Dokažte pomocí vhodné substituce:

a) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\ dt$$ b) $$\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\ dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin t)\ dt$$

Spočtěte s pomocí b) integrál $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\ \sin x}{1+\cos^2 x}\ dx$.

16. Vyšetřete následující integrály na konvergenci

$$a)\ \int_0^{\infty} x\sin x\, dx \qquad b)\ \int_1^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\, dx \qquad c)\ \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx \qquad d)\ \int_0^{\infty} \sin x^2\, dx.$$

17. Budiž $a_1 < \ldots < a_n$. Pro které parametry $p_1 \ldots, p_n$ konverguje integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}\ldots|x-a_n|^{p_n}}?$$

18. Spočtěte nevlastní integrály

$$a)\ \int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} \qquad b)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} \qquad c)\ \int_0^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$