Matematická analýza pro fyziky II

LS 2015/16, MFF UK

8. Cvičení

1. Rovnicí $z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0$ ja dána implicitní funkce $z = z(x, y)$ v okolí bodu $(1, 1)$ s hodnotami v okolí 1. Najděte její Taylorův polynom druhého řádu.

$$F(x,y,z) := z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0 \ , \quad F(1,1,1) = 0 \ , \quad F_z(1,1,1) = 3z^2 + y\Big|_{(1,1,1)} = 4 \neq 0$$

Der Satz über implizite Funktionen kann angewendet werden. Analog zu Aufgabe 1 wird die Gleichung $F(x, y, z(x, y)) = 0$ nach x und y (mehrfach) differenziert. Druch Umstellen erhält man die partiellen Ableitungen von $z(x, y)$.

$$\begin{aligned}
z_x(1,1) = -\frac{F_x(1,1,1)}{F_z(1,1,1)} = 1 \ , \quad z_y(1,1) = -\frac{F_y(1,1,1)}{F_z(1,1,1)} &= \frac{1}{4} \\
z_{xx} = -\frac{1}{F_z}\left[F_{xx} + z_x F_{xz} + z_x(F_{zx} + F_{zz} z_x)\right] \ , \quad z_{xx}(1,1) &= 0 \\
z_{yy} = -\frac{1}{F_z}\left[F_{yy} + z_y F_{yz} + z_y(F_{zy} + F_{zz} z_y)\right] \ , \quad z_{yy}(1,1) &= \frac{9}{32} \\
z_{xy} = -\frac{1}{F_z}\left[F_{xy} + z_y F_{xz} + z_x(F_{zy} + F_{zz} z_y)\right] \ , \quad z_{xy}(1,1) &= -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Damit folgt für das Taylorpolynom zweiter Ordnung von z:

$$\begin{aligned}
T_2 z(x,y) &= z(1,1) + z_x(1,1)\cdot(x-1) + z_y(1,1)\cdot(y-1) + \frac{1}{2} z_{xx}(1,1)\cdot(x-1)^2 + \frac{1}{2} z_{yy}(1,1)\cdot(y-1)^2 \\
&\quad + z_{xy}(1,1)\cdot(x-1)(y-1) \\
&= x + \frac{y-1}{4} + \frac{9}{64}(y-1)^2 - \frac{(x-1)(y-1)}{8}
\end{aligned}$$

2. Najděte rovnici tečné roviny k funkci $z(x, y)$ definované implicitně pomocí rovnice $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$ v okolí bodu $(2, 2, 1)$ dotýkající se grafu funkce v bodě $(2, 2)$.

$$F(x,y,z) := 2^{x/z} + 2^{y/z} - 8$$

$$F(2,2,1) = 0 \ , \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(2,2,1) = -2^{x/z}\cdot\frac{x\ln 2}{z^2} - 2^{y/z}\cdot\frac{y\ln 2}{z^2}\Bigg|_{(2,2,1)} = -16\ln 2 \neq 0$$

Die Vorraussetzungen für die Anwendung des Satzes über implizite Funktionen sind gegeben. In einer Umgebung von $(2, 2)$ existiert $z(x, y)$, gegeben durch F. Die Gleichung der Tangentialebene ist dabei die Taylorentwicklung 1. Ordnung von dieser Funktion $z(x, y)$.

$$\begin{aligned}
z(2,2) = 1 \ , \quad \frac{\partial z}{\partial x}(2,2) &= -\frac{F_x(2,2,1)}{F_z(2,2,1)} = \frac{1}{16\ln 2}\cdot\frac{2^{x/z}\ln 2}{z}\Bigg|_{(2,2,1)} = \frac{1}{4} \\
\frac{\partial z}{\partial y}(2,2) &= -\frac{F_y(2,2,1)}{F_z(2,2,1)} = \frac{1}{16\ln 2}\cdot\frac{2^{y/z}\ln 2}{z}\Bigg|_{(2,2,1)} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Gleichung der Tangentialebene:

$$z = z(2,2) + \frac{\partial z}{\partial x}(2,2)\cdot(x-2) + \frac{\partial z}{\partial y}(2,2)\cdot(y-2) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y$$

3. Určete maxima a minima funkce $f(x,y) = 4x^2 - 3xy$ na kruhu $K = \{(x,y): \ x^2 + y^2 \leq 1 \ \}$.

Zunächst werden Extrempunkte im Innern von K nach dem bekannten Verfahren gesucht.

$$grad\ f(x,y) = (8x - 3y, -3x) \stackrel{!}{=} (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0)$$

$$H_{f(0,0)} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det H_{f(0,0)} < 0 \ \Rightarrow H_{f(0,0)} \text{ indefinit } \Rightarrow \ (0,0) \text{ kein Extrempunkt}$$

Nun wird das Verhalten von f auf dem Rand $\partial K := \{(x,y): \ x^2 + y^2 = 1\}$ untersucht.
Wir parametrisieren den Rand mit

$$x(\varphi) = \cos\varphi, \qquad y(\varphi) = \sin\varphi, \qquad \varphi \in [-\pi, \pi]$$

und definieren eine neue Funktion $\tilde{f}$ durch

$$\tilde{f}(\varphi) = f(x(\varphi), y(\varphi)), \quad \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Offensichtlich gilt

$$\max_{\varphi \in [-\pi,\pi]} \tilde{f}(\varphi) = \max_{(x,y) \in \partial K} f(x,y).$$

Wir suchen also Extrempunkte von $\tilde{f}$.
Die Gleichung

$$\tilde{f}(\varphi)' = -8\cos\varphi \sin\varphi + 3\sin^2\varphi - 3\cos^2\varphi = 0$$

führt auf

$$\tan(2\varphi) = -\frac{3}{4}.$$

Diese Gleichung hat 4 Lösungen in $[-\pi, \pi]$:

$$\varphi_j = -\frac{1}{2}\arctan\frac{3}{4} + j\frac{\pi}{2}, \quad j = -1, 0, 1, 2.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi_0 = \sin 2\varphi_2 &= -\frac{3}{5}, \quad \cos 2\varphi_0 = \cos 2\varphi_2 = \frac{4}{5}, \\ \sin 2\varphi_{-1} = \sin 2\varphi_1 &= \frac{3}{5}, \quad \cos 2\varphi_{-1} = \cos 2\varphi_1 = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

in

$$\tilde{f}(\varphi) = 2(\cos(2\varphi) + 1) - \frac{3}{2}\sin 2\varphi$$

ein und stellen fest, dass

$$\max_{(x,y)\in K} f(x,y) = \max_{(x,y)\in \partial K} f(x,y) = \frac{9}{2}, \qquad \min_{(x,y)\in K} f(x,y) = \min_{(x,y)\in \partial K} f(x,y) = -\frac{1}{2}.$$

Andere Lösungsmethode für die Aufgabe

$$\max_{(x,y)\in \partial K} f(x,y)$$

liefert folgender Satz (Lagrangesche Multiplikatorenregel):
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Die Funktionen

$$f: \Omega \to \mathbb{R}, \qquad g: \Omega \to \mathbb{R}$$

seien stetig diff'bar, und f besitze in ξ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$. Ferner sei $g'(\xi) \neq 0$. Dann existiert eine Zahl λ, mit denen die Gleichung

$$f'(\xi) + \lambda g'(\xi) = 0$$

besteht.

Wir suchen also Lösungen folgendes Systems:

$$\begin{aligned}
H(x, y, \lambda) &:= 4x^2 - 3xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \\
\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, \lambda) &= 8x - 3y + 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial H}{\partial y}(x, y, \lambda) &= -3x + 2\lambda y \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) &= x^2 + y^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Fasst man die ersten beiden Gleichungen als Gleichungssystem zur Bestimmung von x und y auf, so existiert nur eine nichttriviale Lösung (also $(x, y) \neq (0, 0)$ klar, da $(0, 0) \notin \partial K$), falls die Koeffizientendeterminante verschwindet.

$$\begin{vmatrix} 8 + 2\lambda & -3 \\ -3 & 2\lambda \end{vmatrix} = (8 + 2\lambda)2\lambda - 9 \stackrel{!}{=} 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 + 4\lambda - \frac{9}{4} = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \qquad \lambda_2 = -\frac{9}{2}$$

Erster Fall:

$$\begin{aligned}
8x - 3y + 2\lambda_1 x = 8x - 3y + x = 0 \;&\Leftrightarrow\; y = 3x \\
1 = x^2 + y^2 = 10x^2 \quad &\Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}, \;\; y = \pm\frac{3}{\sqrt{10}} \\
f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}, \pm\frac{3}{\sqrt{10}}\right) &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Zweiter Fall:

$$\begin{aligned}
8x - 3y + 2\lambda_2 x = 8x - 3y - 9x = 0 \;&\Leftrightarrow\; x = -3y \\
1 = x^2 + y^2 = 10y^2 \quad &\Rightarrow \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}, \;\; x = \mp\frac{3}{\sqrt{10}} \\
f\left(\mp\frac{3}{\sqrt{10}}, \pm\frac{1}{\sqrt{10}}\right) &= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Aus dem Vergleich der Funktionswerte und dem Wissen, dass die Extrema der stetigen Funktion f auf der kompakten Kreisscheibe angenommen werden müssen, folgt:
$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}, \pm\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ sind die (zwei) Minima, $\left(\mp\frac{3}{\sqrt{10}}, \pm\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ die Maxima der Funktion in K.

4. Spočtěte vzdálenost bodu $(1, -1, 0)$ od rotačního hyperboloidu

$$H \;=\; \{(x, y, z) : \; x^2 + y^2 - z^2 = 1 \}.$$

V eukleidovské normě je vzdálenost bodu (x_0, y_0, z_0) a množiny K definován jako

$$d = \inf_{(x,y,z)\in K} |(x_0, y_0, z_0) - (x, y, z)| = \inf_{(x,y,z)\in K} \underbrace{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}_{=:r(x,y,z)}.$$

Da r offensichtlich nichtnegativ und stetig ist und für beliebig große Beträge von x,y und z gegen Unendlich strebt, ist klar, dass das Infimum tatsächlich angenommen wird. Nach diesem Punkt wird gesucht. Da die Funktion r^2 streng monoton wachsend in r ist, für $r \geq 0$, ist ein Minimum von r immer auch ein Minimum von r^2. Daher wird im folgenden das Minimum der Funktion $r^2(x, y, z)$ unter der Nebenbedingung $(x, y, z) \in H$ gesucht

Wir parametrisieren die Fläche H durch

$$x = \cosh\varphi\cos\theta, \quad y = \cosh\varphi\sin\theta, \quad z = \sinh\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

und definieren

$$\tilde{f}(\varphi, \theta) = (\cosh\varphi\cos\theta - 1)^2 + (\cosh\varphi\sin\theta + 1)^2 + \sinh^2\varphi.$$

Die Bedingung

$$grad\tilde{f} = 0$$

führt auf

$$\cos\theta + \sin\theta = 0$$

und

$$\sinh\varphi \cdot (2\cosh\varphi - \cos\theta + \sin\theta) = 0.$$

Die einzige Lösung ist

$$\varphi = 0, \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

und durch Einstetzen folgt

$$d = \sqrt{2} - 1.$$

Lösung durch Lagrangesche Multiplikatorenregel:

$$\begin{aligned}
L(x, y, z, \lambda) &:= (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - z^2 - 1\right) \\
\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z, \lambda) &= 2x - 2 + 2\lambda x \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(1+\lambda) - 1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z, \lambda) &= 2y + 2 + 2\lambda y \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(1+\lambda) + 1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z, \lambda) &= 2z - 2\lambda z \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad z(1-\lambda) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) &= x^2 + y^2 - z^2 - 1 \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

$\lambda = -1$ erfüllt die beiden ersten Gleichungen nicht. Für $\lambda \neq -1$ gilt aus diesen Gleichungen aber immer: $x = -y$.

$$z \neq 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2} = -y \;\Rightarrow \text{(NB)} \quad z^2 = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow z \notin \mathbb{R}$$

Die einzigen extrempunktverdächtigen Stellen werden also für $z = 0$ berechnet und lauten $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Werden diese Werte in $r^2(x, y, z)$ eingesetzt, erkennt man, dass das Minimum tatsächlich für das obere Vorzeichen gilt und somit erhält man den Abstand:

$$d = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2} = \sqrt{2} - 1$$

Aus den Symmetrien des Rotationshyperboloiden (Rotationssymmetrie um z-Achse, Symmetrie bezüglich der Ebene $z = 0$) folgt natürlich auch ohne Rechnung, dass der gesuchte Punkt auf dem Hyperboloiden den gleichen Winkel zur x-Achse einschlien muss, wie der Punkt, dessen Abstand gesucht ist. Also für $(1, -1, 0)$ gilt auch $x = -y$ und das Problem könnte von vornherein um eine Dimension reduziert werden.

5. Najděte kandidáty na lokální extrémy funkce f s udanou vazbou

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \ , \ \text{kde} \ \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a > b > c > 0)$$

Kandidaten für relative Extrempunkte der Funktion $f(x,y,z)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = 0$ sind stationäre Punkte der Funktion

$$H(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

Hier:

$$\begin{aligned}
H(x,y,z,\lambda) &= x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) \\
\frac{\partial H}{\partial x}(x,y,z,\lambda) &= 2x + \frac{2x\lambda}{a^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) = 0 \\
\frac{\partial H}{\partial y}(x,y,z,\lambda) &= 2y + \frac{2y\lambda}{b^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad y\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) = 0 \\
\frac{\partial H}{\partial z}(x,y,z,\lambda) &= 2z + \frac{2z\lambda}{c^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad z\left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right) = 0 \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

$x = y = z = 0$ ist mit der Nebenbedingung nicht verträglich. Da $a > b > c$, diese also verschieden sind, kann λ höchstens so gewählt, dass einer der obigen Faktoren verschwindet. Daher können nicht zwei oder gar alle drei Koordinaten $\neq 0$ sein.
Es bleibt als einzige Möglichkeit zum Lösen des Gleichungssystems, dass genau zwei der Koordinaten (x,y,z) verschwinden und λ entsprechend gewählt wird.

$$\begin{aligned}
\lambda = -a^2 \quad &\Rightarrow \quad y = z = 0 \ , \quad \text{mit Nebenbedingung:} \ \ x = \pm a \\
\lambda = -b^2 \quad &\Rightarrow \quad x = z = 0 \ , \quad y = \pm b \\
\lambda = -c^2 \quad &\Rightarrow \quad x = y = 0 \ , \quad z = \pm c
\end{aligned}$$

Mögliche Extrempunkte von f unter der gegebenen Nebenbedingung können also höchstens bei $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ oder $(0, 0, \pm c)$ liegen.
Bemerkung: Da die Nebenbedingung eine kompakte Menge beschreibt und f dort stetig ist, ist von vornherein klar, dass f sein Minimum und Maximum annimmt. Welche dieser Punkte das sind, wird einfach durch Vergleich der Funktionswerte klar:

$$f(\pm a, 0, 0) = a^2 > f(0, \pm b, 0) = b^2 > f(0, 0, \pm c) = c^2$$

Die Nebenbedingung beschreibt einen Ellipsoid. Die auf diesem Ellipsoid globalen Extrema von f befinden sich also bei $(\pm a, 0, 0)$ (Maxima) und $(0, 0, \pm c)$ (Minima). Dass $(0, \pm b, 0)$ keine Extremstellen sind, kann man sich am Funktionsverlauf in der x-y-Ebene bzw. y-z-Ebene verdeutlichen:

$$z = 0: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \Rightarrow \ x^2 = a^2 - y^2 \frac{a^2}{b^2} \ \Rightarrow \ f(x,y,0) = a^2 + \frac{y^2}{b^2} \underbrace{(b^2 - a^2)}_{<0} \geq b^2 = f(0, \pm b, 0) \ (\text{Min.})$$

$$x = 0: \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ \Rightarrow \ z^2 = c^2 - y^2 \frac{c^2}{b^2} \ \Rightarrow \ f(0,y,z) = c^2 + \frac{y^2}{b^2} \underbrace{(b^2 - c^2)}_{>0} \leq b^2 = f(0, \pm b, 0) \ (\text{Max.})$$

Stellt man sich einen Ellipsoiden vor, ist es anschaulich klar, dass der Abstand vom Koordinatenursprung (f beschreibt ja dessen Quadrat) auf den Achsen mit minimaler und maximaler Halbachse extremal wird. (siehe Abbildung)

6. Najděte lokální extrémy funkcí:

a) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ na $\mathbb{R}^2$

b) $f(x,y) = (4x^2+y^2)e^{-x^2-4y^2}$ na $\mathbb{R}^2$

c) $f(x,y,z) = x^3+y^2+z^2+12xy+2z$ na $\mathbb{R}^3$

Praktisches Vorgehen bei der Ermittlung von Extremstellen von Funktionen in mehreren Variablen $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Abgesehen davon, dass f lokale Extrema eventuell auch in Randpunkten von Ω bzw. an Stellen, in denen f nicht differenzierbar ist, besitzen kann, so dass diese gesondert untersucht werden müssen – siehe zum Beispiel Aufgabe a), sind in Hinblick auf lokale Extremstellen vor allem die Punkte $x^0 \in \Omega$ von Interesse, für die gilt:

(1) $\operatorname{grad} f(x^0) = 0$ (notwendige Bedingung)

(2) Für diese Punkte ist die *Hesse*–Matrix von f : $Hf(x^0) := \begin{bmatrix} D_1D_1f(x^0) & D_1D_2f(x^0) & \cdots & D_1D_nf(x^0) \\ D_2D_1f(x^0) & D_2D_2f(x^0) & \cdots & D_2D_nf(x^0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_nD_1f(x^0) & D_nD_2f(x^0) & \cdots & D_nD_nf(x^0) \end{bmatrix}$ zu berechnen.

(3) Ist die auf diese Weise vorliegende Matrix $Hf(x^0)$ positiv definit, so besitzt f an der Stelle x^0 ein lokales Minimum und entsprechend, falls $Hf(x^0)$ negativ definit ist, so liegt an der Stelle x^0 ein lokales Maximum vor. Nur diese beiden Fälle sind hinrichend für das Vorliegen eines lokalen Extremums.

(4) Bleibt zu überprüfen, ob die Hesse–Matrix von f an der Stelle x^0 eine dieser beiden Eigenschaften besitzt. Dazu gibt es mehrere unterschiedliche Kriterien:

- Ein Matrix A ist genau dann positiv bzw. negativ definit, wenn alle ihre Eigenwerte, d.h. alle n Nullstellen des charakteristischen Polynoms: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ (I: n-dim- Einheitsmatrix) echt positiv bzw. echt negativ sind.

- Da $Hf(x^0)$ aufgrund des Satzes von Schwarz eine reelle symmetrische Matrix ist, kann auch folgendes Kriterium angewandt werden:

$$\Delta_k := \det \begin{bmatrix} \boxed{D_1D_1f(x^0)} & \cdots & \boxed{D_1D_kf(x^0)} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{D_kD_1f(x^0)} & \cdots & \boxed{D_kD_kf(x^0)} \end{bmatrix} \quad k = 1,\ldots,n : \quad Hf(x^0) \text{ ist positiv definit} \iff \Delta_k > 0 \quad (\forall k = 1,\ldots,n)$$

- Der Fall n=2 lässt sich vollständig klassifizieren:

  (a) $\det Hf(x^0) > 0 \wedge f_{xx}(x^0) > 0 \implies f$ hat ein lokales Minimum

  (b) $\det Hf(x^0) > 0 \wedge f_{xx}(x^0) < 0 \implies f$ hat ein lokales Maximum

  (c) Im Fall: $\det Hf(x^0) < 0$ liegt kein Extremum vor, sondern ein *Sattelpunkt*

  (d) Im Fall: $\det Hf(x^0) = 0$ ist keine Entscheidung möglich, d.h. er muss gesondert untersucht werden

zu a)

Es gilt: $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2} \leq f(0,0) = 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \implies f$ hat ein lokales Maximum in $(0,0)$.
f ist in $(0,0)$ jedoch nicht differenzierbar, denn f_x bzw. f_y existieren in $(0,0)$ nicht.

z.B. $f_x(x,y) = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{bmatrix} = -\cos\varphi$

zu b)

- $f_x(x,y) = xe^{-x^2-4y^2}\left(-8x^2-2y^2+8\right)$
- $f_y(x,y) = ye^{-x^2-4y^2}\left(-8y^2-32x^2+2\right)$
- $f_{xx}(x,y) = e^{-x^2-4y^2}\left(16x^4-40x^2+4x^2y^2-2y^2+8\right)$
- $f_{xy}(x,y) = e^{-x^2-4y^2}\left(64x^3y+16xy^3-68xy\right)$
- $f_{yy}(x,y) = e^{-x^2-4y^2}\left(64y^4+256x^2y^2-40y^2-32x^2+2\right)$

Bestimmung möglicher Extremstellen: $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= xe^{-x^2-4y^2}\left(-8x^2-2y^2+8\right) = 0 \\ f_y(x,y) &= ye^{-x^2-4y^2}\left(-8y^2-32x^2+2\right) = 0 \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} x\left(-8x^2-2y^2+8\right) &= 0 \\ y\left(-8y^2-32x^2+2\right) &= 0 \end{aligned}\right.$$

Fallunterscheidung:

- $\underline{x=0:}$ $\implies y=0 \vee -8y^2+2=0 \implies y=\pm\frac{1}{2} \implies \boxed{P_1=(0,0)}$ $\boxed{P_2=(0,\frac{1}{2})}$ $\boxed{P_3=(0,-\frac{1}{2})}$
- $\underline{y=0:}$ $\implies x=0$ (bereits erfasst) $\vee\ -8x^2+8=0 \implies x=\pm 1 \implies$ $\boxed{P_4=(1,0)}$ $\boxed{P_5=(-1,0)}$

Weitere Fälle gibt es nicht, denn:

$$0=-8x^2-2y^2+8=-8y^2-32x^2+2 \iff 24x^2+6y^2+6>0 \ \ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

Überprüfung und Qualifizierung der Extremwerte mit Hilfe der *Hesse*-Matrix:

$Hf(P)=\begin{bmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{xy}(P) & f_{yy}(P) \end{bmatrix}$

	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}
$P_1=(0,0)$	-8	2	0
$P_2=(0,\frac{1}{2})$	$\frac{15}{2e}$	$-\frac{4}{e}$	0
$P_3=(0,-\frac{1}{2})$	$\frac{15}{2e}$	$-\frac{4}{e}$	0
$P_4=(1,0)$	$-\frac{16}{e}$	$-\frac{30}{e}$	0
$P_5=(-1,0)$	$-\frac{16}{e}$	$-\frac{30}{e}$	0

$\implies Hf(P_1)=\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \implies f$ besitzt im Punkt P_1 ein lokales Minimum, da $\det Hf(P_1)>0$ und $f_{xx}(P_1)=8>0$

$\implies Hf(P_{2/3})=\begin{bmatrix} \frac{15}{2e} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{e} \end{bmatrix} \implies f$ besitzt in den Punkten P_2 und P_3 kein lokales Extremum, da die Eigenwerte der Matrix: $\lambda_1=\frac{15}{2e}$ und $\lambda_2=-\frac{4}{e}$ unterschiedliches Vorzeichen haben.

$\implies Hf(P_{4/5})=\begin{bmatrix} -\frac{16}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{30}{e} \end{bmatrix} \implies f$ besitzt in den Punkten P_4 und P_5 ein lokales Maximum, da $\det Hf(P_{4/5})>0$ und $f_{xx}(P_{4/5})<0$

zu c)

- $f_x=3x^2+12y$
- $f_y=2y+12x$
- $f_z=2z+2$
- $f_{xx}=6x$
- $f_{yy}=2$
- $f_{zz}=2$
- $f_{xy}=12$
- $f_{xz}=0$
- $f_{yz}=0$

Bestimmung möglicher Extremstellen: $\operatorname{grad} f(x,y,z)=0$

$$f_x=3x^2+12y \quad =0$$

$$\left.\begin{array}{ll} f_y = 2y + 12x & = 0 \\ f_z = 2z + 2 & = 0 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} y = -6x \\ z = -1 \end{array}\right\} \implies 3x^2 - 72x = 0$$

<u>Fallunterscheidung:</u>

- <u>$x = 0:$</u> $\implies y = 0 \implies \boxed{P_1 = (0, 0, -1)}$
- <u>$x = 24:$</u> $\implies y = -144 \implies \boxed{P_2 = (24, -144, -1)}$

<u>Überprüfung und Qualifizierung der Extremwerte mit Hilfe der *Hesse*-Matrix:</u>

$$Hf(P) = \begin{bmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) & f_{xz}(P) \\ f_{xy}(P) & f_{yy}(P) & f_{yz}(P) \\ f_{xz}(P) & f_{yz}(P) & f_{zz}(P) \end{bmatrix}$$

- In P_1 besitzt f sicher kein Extremum, denn $f(P_1) = -1$ aber $f(x, 0, -1) = x^3 - 1\ldots$
- Für P_2 ergibt sich $Hf(P_2) = \begin{bmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

  Da deren Unterdeterminanten mit $\Delta_1 = 144$, $\Delta_2 = 144$ und $\Delta_3 = 288$ allesamt positiv sind, liegt ein lokales Minimum vor.

7. Najděte lokální extrémy následujících funkcí v uvedených oblastech:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2, \qquad M = \mathbb{R}^2$$
$$f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \qquad M = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$$
$$f(x, y) = x^2 y^3 (6 - x - y), \qquad M = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$$

1.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y = 0$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y = 0$$

Tedy $4x^3 = 2x + 2y = 4y^3$, tedy $x^3 = y^3$ a tedy i $x = y$. Po dosazeni zpet mame $0 = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$ a body s $\nabla f(x, y) = 0$ jsou tedy $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$. Matice parcialnich derivaci je

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2, -2 \\ -2, 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

Je $Hf(1, 1) = Hf(-1, -1) = \begin{pmatrix} 10, -2 \\ -2, 10 \end{pmatrix}$ pozitivne definitni, funkce ma tedy lok. minimum. Matice $Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} -2, -2 \\ -2, -2 \end{pmatrix}$ je indefinitivni. Ale $f(x, x) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x^2 - 2)$ je na okoli nuly zaporna a $f(x, -x) = 2x^4$ je na okoli nuly kladna. V $(0, 0)$ nema funkce tedy lok. extrem.

2.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y - 50/x^2 = 0$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x - 20/y^2 = 0$$

Dosazenim $x = 20/y^2$ dostaneme $y = 50y^4/400 = y^4/8$, tedy $y^4 - 8y = 0$, tedy $y(y^3 - 8) = 0$. Reseni jsou 0 (nelezi ale v oblasti) a 2. Pro $y = 2$ dostaneme $x = 20/2^2 = 5$. Jde tedy o bod $(5, 2)$. Matice $Hf(5,2) = \begin{pmatrix} 4/5, 1 \\ 1, 5 \end{pmatrix}$ je pozitivne definitni, funkce ma tedy v $(5, 2)$ lok. maximum.

3. Je $f(x, y) = 6x^2y^3 - x^3y^3 - x^2y^4$ a

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 12xy^3 - 3x^2y^3 - 2xy^4 = xy^3(12 - 3x - 2y) = 0$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 18x^2y^2 - 3x^3y^2 - 4x^2y^3 = x^2y^2(18 - 3x - 4y) = 0.$$

Pro $x, y > 0$ je $12 - 3x - 2y = 18 - 3x - 4y = 0$ s resenim $(2, 3)$. Dale je

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12y^3 - 6xy^3 - 2y^4, 36xy^2 - 9x^2y^2 - 8xy^3 \\ 36xy^2 - 9x^2y^2 - 8xy^3, 36x^2y - 6x^3y - 12x^2y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(2,3) = \begin{pmatrix} -162, -108 \\ -108, -144 \end{pmatrix} = -18 \begin{pmatrix} 9, 6 \\ 6, 8 \end{pmatrix}$$

Tato matice je neg. definitni, funkce ma tedy v $(2, 3)$ lok. maximum.

8. Najděte $\sup f$ a $\inf f$ na M pro:

$$f(x,y) = 1/x + 1/y, \qquad M = \{(x,y) : 1/x^2 + 4/y^2 = 1\}$$
$$f(x,y) = y, \qquad M = \{(x,y) : (x^2 + y^2)^2 = Kxy\}, K > 0$$
$$f(x,y) = x + y, \qquad x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$$
$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad M = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 = 1\}$$
$$f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2, \qquad M = \{(x,y) : 4x^2 + y^2 = 1\}$$

1.

$$\nabla f(x,y) = (-1/x^2, -1/y^2), \quad \nabla g(x,y) = (-2/x^3, -2/y^3).$$

$\nabla f(x, y)$ a $\nabla g(x, y)$ jsou kolinearni, pokud ex. $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$-\frac{1}{x^2} = -\frac{2\lambda}{x^3},$$
$$-\frac{1}{y^2} = -\frac{2\lambda}{y^3}.$$

Tedy $x = 2\lambda$ a $y = 8\lambda$. Tyto hodnoty dosadime do $g(x, y) = 1/x^2 + 4/y^2 - 1 = 0$ a dostaneme $1/(4\lambda^2) + 4/(64\lambda^2) = 1$, tedy $\lambda^2 = 5/16$ a $\lambda = \pm\sqrt{5}/4$. Pro $\lambda = \sqrt{5}/4$ dostaneme $(x, y) = (\sqrt{5}/2, 2\sqrt{5})$ a $f(x, y) = \sqrt{5}/2$. Pro $\lambda = -\sqrt{5}/4$ dostaneme $(x, y) = (-\sqrt{5}/2, -2\sqrt{5})$ a $f(x, y) = -\sqrt{5}/2$. Zadne jine lok. extremy funkce f na M nema.

Pokud $x \to \pm\infty$ je $y \to \pm 2$ a $f(x, y) \to \pm 1/2$. Funkce f ma tedy glob. max. na M v $(\sqrt{5}/2, 2/sqrt5)$ a minimum v opacnem bode.

4.

$$2x = \lambda \cdot 2x$$
$$2y = \lambda \cdot 8y.$$

Pro $x \neq 0$ a $y \neq 0$ nema soustava reseni. Pro $x = 0$ je $y = \pm 1/2$ a pro $y = 0$ je $x = \pm 1$. V $(0, \pm 1/2)$ nabyva f lok. i glob. minima k M, a sice $1/4$. V $(\pm 1, 0)$ nabyva f lok. i glob. max. 1.

5.