Matematická analýza pro fyziky II

LS 2015/16, MFF UK

8. Cvičení

1. Rovnicí $z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0$ ja dána implicitní funkce $z = z(x, y)$ v okolí bodu $(1, 1)$ s hodnotami v okolí 1. Najděte její Taylorův polynom druhého řádu.

2. Najděte rovnici tečné roviny k funkci $z(x, y)$ definované implicitně pomocí rovnice $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$ v okolí bodu $(2, 2, 1)$ dotýkající se grafu funkce v bodě $(2, 2)$.

3. Určete maxima a minima funkce $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$ na kruhu $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \}$.

4. Spočtěte vzdálenost bodu $(1, -1, 0)$ od rotačního hyperboloidu

$$H = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1 \}.$$

V eukleidovské normě je vzdálenost bodu (x_0, y_0, z_0) a množiny K definována jako

$$d = \inf_{(x,y,z)\in K} |(x_0, y_0, z_0) - (x, y, z)| = \inf_{(x,y,z)\in K} \underbrace{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}_{=:r(x,y,z)}.$$

5. Najděte kandidáty na lokální extrémy funkce f s udanou vazbou

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \ , \text{ kde } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a > b > c > 0)$$

6. Najděte lokální extrémy funkcí:

   a) $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ na $\mathbb{R}^2$

   b) $f(x, y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}$ na $\mathbb{R}^2$

   c) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ na $\mathbb{R}^3$

7. Najděte lokální extrémy následujících funkcí v uvedených oblastech:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}, \qquad M = \mathbb{R}^2$$
$$f(x, y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y), \qquad M = \mathbb{R}^2$$
$$f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2), \qquad M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$
$$f(x, y) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z, \qquad M = \mathbb{R}^3$$
$$f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \qquad M = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$$
$$f(x, y) = x^2y^3(6 - x - y), \qquad M = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$$

8. Najděte $\sup f$ a $\inf f$ na M pro:

$$f(x, y) = 1/x + 1/y, \qquad M = \{(x, y) : 1/x^2 + 4/y^2 = 1\}$$
$$f(x, y) = y, \qquad M = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 = Kxy\}, K > 0$$
$$f(x, y) = x + y, \qquad x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$$
$$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad M = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 = 1\}$$
$$f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2, \qquad M = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 = 1\}$$