Matematická analýza pro fyziky II

LS 2015/16, MFF UK

2. Cvičení

1. Určete součet následujících řad.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right]$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)(z+n+1)}$, $-z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$

2. Vyšetřete (absolutní) konvergenci následujících řad.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{n!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\,5^n}{2^n\,3^{n+1}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n-2n^n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$ g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^k}$, $k\in\mathbb{Z}$

3. Ukažte, že následující řady mají uvedené součty

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}$, *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}$, *c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{4}$,

d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\ln(k^{\ln(k+1)})}=\frac{1}{\ln 2}$, *e)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k=\frac{1}{(1-x)^2}$, $|x|<1$, *f)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}kx^k=\frac{x}{(1-x)^2}$, $|x|<1$.

4. Zjistěte, zda následující řady (absolutně) konvergují

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$, *c)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{(\ln k)^k}$, *d)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty},\frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k^4e^{-k^2}$, *f)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{4k}{3k}}$, *g)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n}$, *h)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{2^{-2n}}{n^3}$.

5. Vyšetřete (absolutní) konvergenci následujících řad.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}\cdot\sin(n!)$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$, $p\in\mathbb{R}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$.

6. Dokažte následující tvrzení.

a) Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ konverguje právě když konverguje posloupnost (x_n).

b) Pokud $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ konverguje a $x_n\geq 0$, tak konverguje i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$.

c) Pokud konverguje řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ a $x_n\geq 0$, tak konverguje i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\sqrt{x_n}$.

7. Formální Caychyův součin řad $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ je definován jako $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k\,b_{n-k}$.

a) Dokažte, že pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$: $\quad 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\ \alpha^{2m}}{(2m)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (2\alpha)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

b) Spočtěte Cauchyův součin $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$. Co lze říct o konvergenci této řady?

8. Pokud vynecháme z řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ všechna n, která obsahují ve svém dekadickém rozvoji alespoň jednu devítku, tak tato řada již konverguje.

9. Zkonstruujte divergentní přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

10. Vyšetřete (absolutní) konvergenci následujících alternujících řad.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ $\qquad$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sqrt[n]{3} - 1\right)$ $\qquad$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\ \frac{n+1}{n^2+1}$

11. Budiž $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel. Dokažte:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\iff$ $\sum_{n=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konverguje.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies$ $\lim_{n\to\infty} (na_n) = 0$

12. Ukažte, že :

a) $\sum_{m,n=2}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^m} = \frac{1}{1+p}$ pro $p > -1$, $\quad$ **b)** $\sum_{m=2,n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^m} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$.

13. Spočtěte součty následujících řad

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

14. Určete konvergenční rádius mocninných řad

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{5}\right)^n \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + a^n)x^n \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-2)^n}{n^3} x^n \qquad e)\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} x^{2^n} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

15. a) Dokažte *Cauchyovo (=Leibnitzovo, kondenzační) kriterium:* Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost reálných čísel. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje.

b) Ukažte pomocí tohoto kritéria:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.

16. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}, \qquad b) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q},$$

kde $p > 0, q \geq 0$ jsou daná reálná čísla. Ukažte taky, že součet řady v a) je menší než $\dfrac{\pi+2}{4}$.

17. Leibnitz: Nechť posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí a konverguje k nule. Pak řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ konverguje.

Dirichlet: Nechť řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty a nechť posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je monotonní a konverguje k nule. Pak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Abel: Nechť řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a nechť posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je monotonní a omezená. Pak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Zjistěte, zda konvergují následující řady:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}, \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan n}{\log(n)}, \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}, \qquad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n}{n^2+1}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}, \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}, \qquad g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1/n)}{\ln\ln n}, \quad h) \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}.$$