Matematická analýza pro fyziky II

LS 2015/16, MFF UK

2. Cvičení

1. Určete součet následujících řad.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right]$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)(z+n+1)}$, $-z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$

zu a:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{2^n}+\frac{(-1^n)}{3^n}\right]=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=3\Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}-1\Big)+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}_{\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}-1=\frac{11}{4}$$

zu b:

$$s_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(z+n)\,(z+n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{z+n+1}\right)=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+N+1}\overset{N\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{z+1}$$

2. Vyšetřete (absolutní) konvergenci následujících řad.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{n!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\,5^n}{2^n\,3^{n+1}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n-2n^n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$ g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^k}$, $k\in\mathbb{Z}$

zu a:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{6^{n+1}n!}{(n+1)!6^n}=\frac{6}{n+1}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

$\Longrightarrow\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{n!}$ ist nach Quotientenkriterium absolut konvergent und damit auch konvergent.[1] **zu b:**

$$\sqrt[n]{\frac{(n+1)5^n}{2^n3^{n+1}}}=\frac{5}{6}\cdot\sqrt[n]{\frac{(n+1)}{3}}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{5}{6}<1$$

$\Longrightarrow\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\,5^n}{2^n\,3^{n+1}}$ ist nach Wurzelkriterium absolut konvergent und damit auch konvergent.

zu c:

$$a_n=\frac{n^n}{(n+1)^n-2n^n}=\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-2}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{e-2}\qquad\Longrightarrow\qquad(a_n)_{n=1}^{\infty}\text{ ist keine Nullfolge.}$$

Deshalb kann $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n-2n^n}$ nicht konvergieren und ist demzufolge divergent.

zu d:

---

[1] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{n!}=e^6$

$$\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} \geq \frac{1}{2n} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$ durch eine divergente Minorante als divergent erwiesen.

<u>zu e:</u> Nach der Ungleichung zwischen dem Harmonischen und Geometrischen Mittel folgt:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n} \cdot 1^{n-1}} \geq \frac{n}{n+n-1} = \frac{1}{2-\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ ist somit keine Nullfolge.}$$

Deshalb kann $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ nicht konvergieren und ist demzufolge divergent.

<u>zu f:</u>

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)!\; n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)!} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} < 1$$

$\Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$ ist nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent und damit auch konvergent.

<u>zu g:</u>

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^k} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^k\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}\right)} \leq 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k \cdot \sqrt{n}} = 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{k+\frac{1}{2}}}$$

$\Longrightarrow$ Für $k \geq 1$ (sogar für $k > \frac{1}{2}$, wäre nicht $k \in \mathbb{Z}$ vorausgesetzt) ist die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^k}$ absolut konvergent und damit auch konvergent, denn es gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ ist für $\alpha > 1$ konvergent.

3. Ukažte, že následující řady mají uvedené součty

$a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$, $\quad b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$, $\quad c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{4}$,

$d)\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\ln(k^{\ln(k+1)})} = \frac{1}{\ln 2}$, $\quad e)\ \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$, $\quad |x| < 1$, $\quad f)\ \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$, $\quad |x| < 1$.

Zu a)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{4k^2-1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N+1}\right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Zu b)

In Analogie zu der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ suchen wir eine Darstellung

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} = \frac{A(k+1)(k+2) + Bk(k+2) + Ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)},$$

also

$$(A+B+C)k^2+(3A+2B+C)k+2A=1.$$

Aus den Gleichungen $A+B+C=0, 3A+2B+C=0, 2A=1$ folgt $A=\frac{1}{2}, B=-1, C=\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+2}.$$

Die Reihe kann man also umschreiben

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+2}\right)$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)+\cdots=\frac{1}{4}.$$

Zu c)

Folgt analog zu b):

Der Ansatz

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{A}{k+1}+\frac{B}{k+2}+\frac{C}{k+3}=\frac{A(k+2)(k+3)+B(k+1)(k+3)+C(k+1)(k+2)}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

führt zu $A=-\frac{1}{2}, B=2, C=-\frac{3}{2}$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}+2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}\left(-\frac{3}{2}+2-\frac{1}{2}\right)+\cdots=\frac{1}{4}.$$

Zu d)

Wir schreiben die Glieder um:

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\ln(k^{\ln(k+1)})}=\frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k+1)\ln k}=\frac{\ln(k+1)-\ln k}{\ln(k+1)\ln k}=\frac{1}{\ln k}-\frac{1}{\ln(k+1)}.$$

Es ist also eine teleskopische Reihe und die Summe ist gleich $\frac{1}{\ln 2}$.

Zu e)

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots$$

ist eine geometrische Reihe. Wenn man zwei diese Reihen miteinander multipliziert und Cauchy-Produkt bildet, bekommt man

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{j=0}^{\infty}x^j\sum_{l=0}^{\infty}x^l=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}x^jx^{k-j}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k(k+1).$$

Alle Rechnungen sind für $|x|<1$ zugelassen, insbesondere ist die geometrische Reihe auch absolut konvergent.

Zu f)

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k-\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

4. Zjistěte, zda následující řady (absolutně) konvergují

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}},\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}},\quad c)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{(\ln k)^k},\qquad d)\ \sum_{k=2}^{\infty},\frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$$

$$e)\ \sum_{k=1}^{\infty}k^4e^{-k^2},\qquad f)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{4k}{3k}},\qquad g)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n},\quad h)\ \sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{2^{-2n}}{n^3}.$$

Zu a)

Für $\alpha \leq 0$ gehen die Glieder nicht gegen Null und die Reihe ist divergent. Für $\alpha > 0$ ist es eine alternierende Reihe und konvergiert nach dem Leibnitz-Kriterium.

Zu b) Aus $\sqrt[n]{n} \to 1$ folgt, dass die Glieder nicht gegen Null gehen und die Reihe ist divergent.

Zu c) Aus

$$\sqrt[k]{\frac{k}{(\ln k)^k}} = \frac{\sqrt[k]{k}}{\ln k} \to 0$$

folgt (nach dem Wurzel-Kriterium), dass die Reihe konvergiert.

Zu d)

Die Reihe ist konvergent nach dem Majoranten-Kriterium.

$$\frac{1}{(\ln k)^{\ln k}} < \frac{1}{k^2}$$

ist äquivalent zu

$$e^{\ln k \cdot \ln(\ln k)} > e^{2\ln k}$$

und zu

$$\ln k \ln(\ln k) > 2\ln k$$

und das gilt, falls $\ln(\ln k) > 2$, d.h. $k > e^{e^2}$, also $k > 1619$.

Zu e)

Aus dem Wurzel-Kriterium folgt, dass die Reihe konvergent ist.

$$\sqrt[k]{k^4e^{-k^2}} = k^{4/k}e^{-k} \to 1\cdot 0 = 0.$$

Zu f)

$$\binom{4k}{3k} = \frac{(4k)!}{(3k)!k!} = \frac{(4k)(4k-1)(4k-2)\dots(3k+1)}{k(k-1)\dots 2\cdot 1} \geq \left(\frac{3k}{k}\right)^k = 3^k$$

Die Reihe ist also konvergent nach dem Majoranten-Kriterium (Vergleich mit $\sum 3^{-k}$).

Zu g)

Die Reihe ist konvergent nach dem Leibnitz-Kriterium.

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n} \to 0,$$

es bleibt also nur überprüfen, ob die Glieder monoton-fallend sind:

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(1+\frac{1}{n})^n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\\ &= \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\cdot\frac{[n(n+2)]^n}{[(n+1)^2]^n} < 1.\end{aligned}$$

Zu h)

Aus der Abschätzung 11.3.(1) folgt

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} < \frac{2n \cdot 2^{2n}}{e}.$$

Nach dem Majoranten-Kriterium (Vergleich mit $\sum k^{-2}$) ist die Reihe konvergent.

5. Vyšetřete (absolutní) konvergenci následujících řad.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!} \cdot \sin(n!)$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}, \quad p \in \mathbb{R}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

Zu a)

$$a_n = \sqrt[n]{n}\frac{n^n}{(n+\frac{1}{n})^n} = \sqrt[n]{n}\left(1 - \frac{1}{n^2+1}\right)^n \to 1 \cdot 1 = 1.$$

Die Reihe ist also divergent.

Zu b)

Wir schätzen a_n ab ($n \geq 3$):

$$|a_n| \leq \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!} = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n! \cdot (n+1) \cdot (n+2) \ldots (2n)} \leq \frac{n \cdot n!}{n! \cdot (n+1) \cdot (n+2) \ldots (2n)}$$
$$= \frac{n}{(n+1) \cdot (n+2) \ldots (2n)} \leq \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Aus Majoranten-Kriterium folgt, dass die Reihe absolut konvergiert.

Zu c)

Zu d)

Wir schreiben die a_n um:

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)} = \left[\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n\right]^{n-1}$$

Aus $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n = e^{-2}$ folgt, dass $\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n < \frac{1}{2}$ für $n \geq n_0$ und für diese n gilt dann $a_n \leq 2^{-(n-1)}$.

Aus Majoranten-Kriterium folgt dann (absolute) Konvergenz der Reihe

Zu e)

Aus Wurzel-Kriterium folgt

$$\sqrt[n]{a_n} = e^{-\frac{\sqrt[3]{n}}{n}} \to 0$$

und Konvergenz der Reihe.

6. Dokažte následující tvrzení.

a) Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ konverguje právě když konverguje posloupnost (x_n).

b) Pokud $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a $x_n \geq 0$, tak konverguje i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$.

c) Pokud konverguje řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a $x_n \geq 0$, tak konverguje i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\sqrt{x_n}$.

zu a:

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} (x_{n+1} - x_n) = x_{N+1} - x_1 \quad \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \quad \lim_{N\to\infty} x_N - x_1$$

zu b:

Da $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert und $x_n \geq 0$ ist, bildet $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge.

$\Longrightarrow \quad \exists n_0$ mit $x_n \leq 1$ für $n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad x_n^2 \leq x_n, \quad .$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \sum_{n=1}^{n_0-1} x_n^2 + \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n^2 \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} x_n^2 + \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n < \infty$$

zu c:

Man weis, dass die Reihen: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent sind. Daher konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{n^2}\right)$.
Da aber nach der Ungleichung zwischen dem Arithmetischen und dem Geometrischen Mittel gilt:

$$\frac{\sqrt{x_n}}{n} = \sqrt{x_n \cdot \frac{1}{n^2}} \leq \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{n^2}\right)$$

konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sqrt{x_n}$.

7. Formální Caychyův součin řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ je definován jako $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$.

   a) Dokažte, že pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$: $\quad 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\ \alpha^{2m}}{(2m)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (2\alpha)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

   b) Spočtěte Cauchyův součin $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$. Co lze říct o konvergenci této řady?

$2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\ \alpha^{2m}}{(2m)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (2\alpha)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ folgt aus b) wenn man $\alpha = \beta$ setzt.

zu b:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \beta^{2n}}{(2n)!}\right) + \overbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \beta^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \alpha^{2n}}{(2n)!}\right)}^{\textit{vertauschen}} =$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \beta^{2n}}{(2n)!}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \alpha^{2n}}{(2n)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \beta^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) =$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ \alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\frac{(-1)^{n-k}\ \beta^{2(n-k)}}{(2(n-k))!}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ \alpha^{2k}}{(2k)!}\,\frac{(-1)^{n-k}\ \beta^{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)!}\right) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\alpha^{2k+1}\beta^{2(n-k)}}{(2k+1)!(2(n-k))!}+\frac{\alpha^{2k}\beta^{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)!(2k)!}\right]=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{2n+1}{2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{2(n-k)}+\binom{2n+1}{2k}\alpha^{2k}\beta^{2(n+k)+1}\right]=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{2n+1}{k}\alpha^{k}\beta^{2n+1-k}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\alpha+\beta)^{2n+1}$$

zu c:

Setzt man $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}_{a_n}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}_{b_n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ so gilt nach dem formalen Cauchy-Produkt:

$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_nb_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}\quad\Longrightarrow\quad|c_n|\geq(n+1)\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}}=1$

Damit kann das Cauchy-Produkt der Reihen $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ nicht konvergent sein.

8. Pokud vynecháme z řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ všechna n, která obsahují ve svém dekadickém rozvoji alespoň jednu devítku, tak tato řada již konverguje.

   Wir betrachten die natürclichen Zahlen, die in ihrer dekadyschen Darstellung genau k Ziffern haben. Das sind insgesamt $9\cdot 10^{k-1}$. Wenn die weglässt, die eine (oder mehrere) 9 in dieser Darstellung haben, bleiben $8\cdot 9^{k-1}$ übrig (und jedes ist grösser als 10^{k-1}).

   Die Reihe aus der Aufgabe ist also kleiner als

$$\sum_{k=1}^{\infty}8\cdot 9^{k-1}\cdot\frac{1}{10^{k-1}}=8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9^{k-1}}{10^{k-1}}<8\cdot 10=80.$$

   Die Reihe ist also konvergent und die Summe ist kleiner als 80.

9. Zkonstruujte divergentní přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

   Zunächst weis man, dass die Reihe $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ divergiert. Daher existiert eine Folge $(b_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $b_k\in\mathbb{N}$, $(b_0=0)$ so dass $\sum_{n=1}^{b_k}\frac{1}{2n}\geq k$ gilt. Beispielsweise ist $b_1=4$, denn $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}>1$. Man ordne daher gemäss dieser Vorschrift $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ so um, dass folgende Reihe entsteht:

$$\underbrace{-1+\sum_{i=1}^{b_1}\frac{1}{b_0+2i}}_{>0}\underbrace{-\frac{1}{3}+\sum_{i=1}^{b_2}\frac{1}{b_1+2i}}_{>1}\underbrace{-\frac{1}{5}+\sum_{i=1}^{b_3}\frac{1}{b_2+2i}}_{>2}\underbrace{-\frac{1}{7}+\sum_{i=1}^{b_4}\frac{1}{b_3+2i}}_{>3}+-\ldots=\infty$$

   Offenbar ist diese Reihe eine Umordnung von $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, die divergent ist.

10. Vyšetřete (absolutní) konvergenci následujících alternujících řad.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n+1}{n^2+1}$

zu a:

$a_n = (-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \quad\Longrightarrow\quad |a_n| = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ streng monoton. Also konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ $(\star)$ nach dem Leibnizkriterium. Da andererseits aber stets $\dfrac{1}{n}\leq\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ gilt, ist die Reihe $(\star)$ nicht absolut konvergent, denn $\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ist eine divergente Minorante.

zu b:

Da $\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$ nach dem Leibnizkriterium. Sie konvergiert jedoch nicht absolut, denn es gilt:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq 3 \quad\Longrightarrow\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\sqrt[n]{3} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{n}\leq\sqrt[n]{3}-1$$

zu c:

$a_n=\dfrac{n+1}{n^2+1}$ ist eine monoton fallenden Nullfolge, denn es gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+2}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{n+1}=\frac{n^3+2n^2+n+2}{n^3+3n^2+4n+2}<1$$

Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n+1}{n^2+1}$ ist jedoch nicht absolut konvergent:

$$\frac{n+1}{n^2+1}\geq\frac{n}{n^2+n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}.$$

11. Budiž $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel. Dokažte:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje $\quad\Longleftrightarrow\quad$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^k a_{2^k}$ konverguje.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ konverguje $\quad\Longrightarrow\quad$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(na_n)=0$

Sei $\displaystyle s_N=\sum_{n=1}^{N}a_n$ und $\displaystyle\widetilde{s}_K=\sum_{k=0}^{K}2^k a_{2^k}$. Man wähle N und K so, dass $2^{K-1}\leq N\leq 2^K-1$ gilt.

„$\Longleftarrow$“ $s_N\leq s_{2^K-1}=a_1+\underbrace{a_2+a_3}+\underbrace{a_4+a_5+a_6+a_7}+\underbrace{a_8+\cdots+a_{15}}+\cdots+\underbrace{a_{2^{K-1}}+\cdots+a_{2^K-1}}$

$\Rightarrow\ s_N\leq a_1+2a_2+2^2a_4+2^3a_8+\cdots+2^{K-1}a_{2^{K-1}}\leq\widetilde{s}_{K-1} \quad\Longrightarrow\quad s_N\leq\widetilde{s}_{K-1}$

„$\Longrightarrow$“ $s_N\geq s_{2^{k-1}}=a_1+a_2+\underbrace{a_3+a_4}+\underbrace{a_5+a_6+a_7+a_8}+\underbrace{a_9+\cdots+a_{16}}+\cdots+\underbrace{a_{2^{K-2}+1}+\cdots+a_{2^{K-1}}}$

$\Rightarrow\ s_N\geq\dfrac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+4a_8+8a_{16}+\cdots+2^{K-2}a_{2^{K-1}}\geq\dfrac{1}{2}\widetilde{s}_{K-1} \quad\Longrightarrow\quad s_N\geq\dfrac{1}{2}\widetilde{s}_{K-1}$

Da $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nichtnegartiver Zahlen ist, sind diese Abschätzungen zulässig.

Also konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

zu b :

Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert bildet die Folge ihrer Partialsummen eine Cauchyfolge.

$$\Longrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon)\ \forall\, p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0(\varepsilon): \ |s_{n+p} - s_n| = a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Aufgrund der Monotonie von $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ gilt: $\quad pa_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Wählt man $p = n$, so gilt $na_{2n} < \frac{\varepsilon}{2}$ bzw. $2na_{2n} < \varepsilon$.
Wählt man hingegen $p = n+1$, so gilt: $(n+1)a_{2n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$, woraus zunächst $(2n+2)a_{2n+1} < \varepsilon$ und endlich $(2n+1)a_{2n+1} < \varepsilon$ folgt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

12. Ukažte, že :

a) $\displaystyle\sum_{m,n=2}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^m} = \frac{1}{1+p}$ pro $p > -1$, **b)** $\displaystyle\sum_{m=2,n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^m} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$.

zu a:

$$\sum_{m,n=2}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^m} = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^m} = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2}\frac{1}{(p+n)^m} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^m} =$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{p+n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2 - (p+n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(p+n)(p+n-1)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{p+n-1} - \frac{1}{p+n}\right] = \frac{1}{p+1}$$

zu b:

$$\sum_{m=2,n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^m} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)^m} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)^m} - \frac{1}{2n} - 1\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2n}} - \frac{1}{2n} - 1\right] =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2n}\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

13. Spočtěte součty následujících řad

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \qquad\qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

zu a) Wir kennen die Darstellung der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{für alle } x \in (-1,1). \tag{1}$$

Für die Summe der Ableitungen

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \qquad \text{gilt wegen dem Quotientenkriterium} \quad \frac{(k+1)|x|^k}{k|x|^{k-1}} \to |x| < 1.$$

Nach dem Satz von Weierstraß ist die Summe gleichmäßig konvergent auf $[a, b] \subset (-1, 1)$ und es gilt:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

Nun differenzieren wir unsere Ausgangsformel (1) und erhalten:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-x}\right)' &= \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} && | \cdot x \\ \Rightarrow \qquad x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)' &= \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k} \end{aligned}$$

und nochmaliges differenzieren gibt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \left(x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)' &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2x^{k-1} && | \cdot x \\ \Rightarrow \qquad x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)' &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2x^{k} \end{aligned}$$

Dies gilt für alle $x \in (-1, 1)$ und die absolute Konvergenz beim zweiten differenzieren wird wieder mit dem Quotientenkriterium und dem Satz von Weierstraß begründet. Zum Schluß erhält man:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^k = x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)' = \frac{x+x^2}{(1-x)^3} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

zu b) Nach einer Substitution in (1), $n = k + 1$, ergibt sich

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

Auch hier konvergiert die Summe gleichmäßig auf $[a, b] \subset (-1, 1)$ und somit dürfen wir beide Seiten integrieren:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1-t}dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}dt \\ -\ln(1-x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

14. Určete konvergenční rádius mocninných řad

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{5}\right)^n \qquad b) \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + a^n)x^n \qquad c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-2)^n}{n^3}x^n \qquad e) \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}x^{2n} \qquad f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

zu a) Damit die Reihe konvergiert, erhalten wir mit dem Quotientenkriterium:

$$\frac{\left|\frac{x^2}{5}\right|^{n+1}}{\left|\frac{x^2}{5}\right|^{n}} = \left|\frac{x^2}{5}\right| < 1 \quad \text{also} \quad |x| < \sqrt{5}. \text{ Somit ist der Konvergenzradius } R = \sqrt{5}.$$

zu b) Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}(n^2+a^n)x^n = \sum_{k=0}^{\infty} n^2x^n + \sum_{k=0}^{\infty} a^nx^n \quad \text{und nun berechnen wir mit Hilfe der Formel}$$

$$R = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1} \quad \text{die Konvergenzradien beider Reihen.} \tag{2}$$

Somit ergibt sich $R_1 = \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^2|}\right)^{-1} = 1$ und $R_2 = \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a^n|}\right)^{-1} = |a|^{-1}$ und damit ist der Konvergenzradius der Ausgangsreihe gegeben durch:

$$R = \min\{R_1, R_2\} = \min\left\{1, \frac{1}{|a|}\right\}.$$

zu c) Wir verwenden hier die Formel

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \qquad \text{zur Bestimmung des Konvergenzradius.} \tag{3}$$

$$\text{Also gilt:} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n(n+1)!e^{n+1}}{n!e^n(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot e$$
$$= e \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e \cdot e^{-1} = 1.$$

zu d) Man kann die Summe wieder aufspalten und erhält:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-2)^n}{n^3}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^3}x^n \quad \text{und somit gilt für die Konvergenzradien mit (2)}$$

$$R_1^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{3}{n^3}} = 1$$
$$R_2^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = 2$$

also insgesamt

$$R = \frac{1}{2}.$$

zu e) Durch die Substitution $k = 2^n$ bringen wir die Potenzreihe erstmal in Normalform:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}x^{2^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}x^k \quad \text{und nun erhalten wir mit (2):}$$

$$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1 \quad \text{also} \quad R = 1.$$

zu f) Hier wenden wir auch einfach nur (2) an und erhalten:

$$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{also} \quad R = \frac{1}{e}.$$

15. a) Dokažte *Cauchyovo (=Leibnitzovo, kondenzační) kriterium:* Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost reálných čísel. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje.

b) Ukažte pomocí tohoto kritéria:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.

Zu a)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = 2\cdot a_2 + 4\cdot a_4 + 8\cdot a_8 + \dots = 2\left(\underbrace{a_2}_{\le a_1+a_2} + \underbrace{2\cdot a_4}_{\le a_3+a_4} + \underbrace{4\cdot a_8}_{\le a_5+a_6+a_7+a_8} + \dots\right) \le 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \underbrace{a_2+a_3}_{\le 2a_2} + \underbrace{a_4+a_5+a_6+a_7}_{\le 4a_4} + a_8 + \dots \le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}.$$

Zu b)

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert genau dann wenn $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot 2^{-n\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)}$ konvergiert, also wenn $\alpha > 1$ (geometrische Reihe).
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ konvergiert genau dann wenn $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n(\log 2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\log 2)^\alpha} = \frac{1}{(\log 2)^\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert, also wenn $\alpha > 1$.

16. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}, \qquad b)\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q},$$

wobei $p > 0, q \ge 0$ vorgegebene reelle Zahlen sind. Zeigen Sie auch, daß der Wert der Reihe in a) kleiner ist als $\frac{\pi+2}{4}$.

Zu a)

Die Funktion

$$f : t \to \frac{e^t}{1+e^{2t}}$$

ist monoton fallend auf $(0,\infty)$. Folglich gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}} \le \frac{e^0}{1+e^0} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + [\arctan e^x]_0^{\infty} = \frac{\pi+2}{4}.$$

Die Reihe ist also konvergent. Außerdem haben wir die Abschätzung für die Summe erhalten.

Zu b)

Die Funktionen

$$x \to x, \quad x \to \ln(x), \quad x \to \ln(\ln(x))$$

sind alle monoton auf $(2, \infty)$.

1. Fall $q = 0$:

$$\int_{\ln 3}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^p} = \int_3^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \leq \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^p}$$

Die Reihe konvergiert also genau dann, wenn das Integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^p}$ konvergiert, also für $p > 1$.

2. Fall $q > 0$:

Man zeigt, dass die Reihe genau dann konvergiert, wenn das Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q}$$

konvergiert, also wenn $p > 1$, oder $p = 1$ und $q > 1$.

17. Leibnitz: Nechť posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí a konverguje k nule. Pak řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ konverguje.

Dirichlet: Nechť řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty a nechť posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je monotonní a konverguje k nule. Pak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Abel: Nechť řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a nechť posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je monotonní a omezená. Pak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Zjistěte, zda konvergují následující řady:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan n}{\log(n)}, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}, \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n}{n^2+1}$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}, \quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}, \qquad g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1/n)}{\ln \ln n}, \quad h)\ \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}.$$

a) konverguje podle Leibnitzova kriteria.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n)}$ konverguje podle Leibnitzova kriteria, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan n}{\log(n)}$ potom podle Abelova kriteria ($(\arctan n)_{n=1}^{\infty}$) je omezená a monotonní.

Druhé řešení:

$$\left(\frac{\arctan x}{\ln x}\right)' = \frac{\frac{1}{1+x^2}\ln(x) - \arctan x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} < 0$$

pro dostatečně velká $x > 1$ - protože $\dfrac{x \ln(x)}{1+x^2} < \arctan x$. Konvergence pak plyne z Leibnitzova kriteria.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$: $b_n = \frac{1}{n}$ je monotonní a konverguje k nule. Částečné součty

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k = Im\Big(\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\Big) = Im\Big[e^{i}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik}\Big)\Big] = Im\Big[e^{i}\frac{1-e^{in}}{1-e^{i}}\Big]$$
$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \sin k\Big| \leq \Big|e^{i}\frac{1-e^{in}}{1-e^{i}}\Big| \leq \frac{2}{|1-e^{i}|}$$

jsou omezené a konvergence plyne z Dirichletova kriteria.

d) První řešení: Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)$ má omezené částečné součty, posloupnost $(\frac{n}{n^2+1})_n$ je (od nějakého členu) monotonní a konverguje k nule. Konvergence plyne z Dirichletova kriteria.

Druhé řešení: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ je konvergentní (viz c)) a posloupnost $(\frac{n^2}{n^2+1})_n$ je omezená a monotonní, konvergence plyne z Abelova kriteria.

e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos\frac{\pi n^2}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos(\pi(n-1)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}\Big(\cos(\frac{\pi n^2}{n+1}) - \cos(\pi(n-1))\Big)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}\Big(\cos(\frac{\pi n^2}{n+1}) - \cos(\pi(n-1))\Big)$$

První řada konverguje (např. podle Leibnitzova kriteria), druhá řada je (v abs. hodnotě) menší než (podle věty o střední hodnotě)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}\Big|\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi(n-1)\Big| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{\ln^2 n}\Big|\frac{n^2-(n^2-1)}{n+1}\Big| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{(n+1)\ln^2 n},$$

která konverguje.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}$

$$1 : \sin(n)\sin(n^2) = \frac{1}{2}\Big(\cos(n^2-n) - \cos(n^2+n)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\cos(n(n-1)) - \cos(n(n+1))\Big)$$
$$2 : \sum_{k=1}^{n} \sin(k)\sin(k^2) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \cos(k(k-1)) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \cos(k(k+1)) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \cos(k(k-1)) - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} \cos((k-1)k)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(n(n+1)).$$

Tyto částečné součty jsou omezené, řada konverguje podle Dirichletova kriteria.

g)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n+1/n)}{\ln\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n \cos(1/n) + \cos n \sin(1/n)}{\ln\ln n}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln\ln n}\cos(1/n) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n}{\ln\ln n}\sin(1/n)$$

Řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln\ln n}$ a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n}{\ln\ln n}$ konvergují podle Dirichletova kriteria, posloupnosti $(\cos(1/n))_n$ a $(\sin(1/n))_n$ jsou omezené a monotonní, konvergence plyne z Abelova kriteria.

h) Podle Leibnitzova kriteria: Posloupnost $(\sqrt[n]{n}/\ln n)_{n=2}^{\infty}$ je (od nějakého členu) monotonní a konverguje do nuly, protože

$$\left(\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{\ln x}\right)' = \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1/x \cdot x - \ln x}{x^2} \cdot \ln x - e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{x \ln^2 x} \cdot \left(\frac{(1-\ln x)\ln x}{x} - 1\right) < 0$$

pro $x > 1$ dostatečně velké.

Podle Abelova kriteria: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln n}$ je konvergentní podle Leibnitzova kriteria, $(\sqrt[n]{n})_n$ je monotonní a omezená.