Matematická analýza pro fyziky II

LS 2015/16, MFF UK

1. Cvičení

1. Spočtěte : a) $\int\limits_0^{\ln 2} x\, e^{-x} dx$ b) $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$ c) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$ d) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx$

<u>Návod</u> : V **d)** *použijte substituci* $t = x + \frac{1}{x}$.

<u>zu a)</u> $\int\limits_0^{\ln 2} x\, e^{-x} dx = \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -xe^{-x} \Big|_0^{\ln 2} - \int\limits_0^{\ln 2} -e^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^{\ln 2} + \int\limits_0^{\ln 2} e^{-x} dx$

$$= -xe^{-x} \Big|_0^{\ln 2} + \left(-e^{-x} \Big|_0^{\ln 2} \right) = -\ln 2 e^{-\ln 2} - e^{-\ln 2} + e^0 = -\ln 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 =$$

$\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$

<u>zu b)</u> $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{bmatrix} = x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} -2 \int\limits_0^{2\pi} x \sin x dx =$ $\begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix}$

$$= \underbrace{x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi}}_{=0} -2 \left(-x\cos x \Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} -\cos x dx \right) = 2x\cos x \Big|_0^{2\pi} - \underbrace{2\sin x \Big|_0^{2\pi}}_{=0} = 4\pi$$

<u>zu c)</u> $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx = -\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x dx + \int\limits_1^{e} \ln x dx$ $\left(\text{NR:} \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1)\right)$

$\Longrightarrow \int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx = -x(\ln x - 1) \Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + x(\ln x - 1) \Big|_1^{e} = 2 - \frac{2}{e}$ **<u>zu d)</u>**

$$I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx = \underbrace{\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_1^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx}_{I_2}$$

$I_1 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$. Mit der Substitution $t = x + 1/x$ ergibt sich $x^2 - tx + 1 = 0$. Also $x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(t \pm \sqrt{t^2 - 4}\right)$. Das Integral wurde gerade so zerlegt, dass bei I_1 die kleinere Lösung von Interesse ist, d.h.:

$$x = \frac{1}{2}\left(t - \sqrt{t^2 - 4}\right), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right)$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_{\frac{5}{2}}^{2} e^t \left(1 + \frac{1}{2}\left(t - \sqrt{t^2-4}\right) - \frac{2}{t - \sqrt{t^2-4}}\right) \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{5}{2}}^{2} e^t \left(1 - \sqrt{t^2-4}\right)\left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right) dt \end{aligned}$$

Für I_2 gilt mit obiger Substitution:

$$x = \frac{1}{2}\left(t + \sqrt{t^2-4}\right), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{2}^{\frac{5}{2}} e^t \left(1 + \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2-4}) - \frac{2}{t + \sqrt{t^2-4}}\right) \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{2}^{\frac{5}{2}} e^t \left(1 + \sqrt{t^2-4}\right)\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I = I_1 + I_2 &= \frac{1}{2} \int\limits_{2}^{\frac{5}{2}} e^t \left(-1 + \frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + \sqrt{t^2-4} - t + 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + \sqrt{t^2-4} + t\right) dt \\ &= \int\limits_{2}^{\frac{5}{2}} e^t \left(\frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + \sqrt{t^2-4}\right) dt \\ &= \int\limits_{2}^{\frac{5}{2}} \left(e^t \sqrt{t^2-4}\right)' dt \\ &= \left[e^t \sqrt{t^2-4}\right]_2^{\frac{5}{2}} = e^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

2. Pomocí Riemannova integrálu spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

$$\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

Die Summe kann als Untersumme der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ bezüglich des Intervalls $[1,2]$ interpretiert werden. Dabei wird $[1,2]$ in n äquidistante Teilintervalle $I_i := \left[1 + \dfrac{i-1}{n}, 1 + \dfrac{i}{n}\right]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, der Länge $\dfrac{1}{n}$ zerlegt.

Da f im betrachteten Bereich monoton fallend ist, gilt: $\inf\limits_{x\in I_i} f(x) = f(x_i) = \dfrac{1}{1+\frac{i}{n}}$.

Damit wird obige Summe tatsächlich zur Untersumme. Im Grenzwert $n \to \infty$ strebt das Feinheitsmaß der Zerlegung gegen 0, die Untersumme strebt dabei gegen das Unterintegral der Funktion. Da f stetig, damit Riemann-integrierbar ist, folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\int\limits_1^2\frac{dx}{x}=\ln 2$$

3. Spočtěte

$$a)\quad \int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}\qquad\qquad b)\quad \int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\;dx$$

$$c)\quad \int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}\qquad\qquad d)\quad \int\limits_{-1/2}^{1/2}\cos x\ln\frac{1+x}{1-x}\;dx$$

zu a)

Die Funktion $(2\sin x-\cos x+5)^{-1}$ ist 2π-periodisch. Zum Berechnen des Integrals genügt es über eine Periode zu integrieren.

$$\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$$

Zunächst werde eine Stammfunktion mittels bekannter Substitution $\tan\frac{x}{2}=t$ gesucht.

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\int\frac{1}{\frac{4t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}\cdot\frac{2\;dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{3t^2+2t+2}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}$$
$$=\frac{3}{5}\int\frac{dt}{\left(\frac{3t+1}{\sqrt5}\right)^2+1}=\frac{1}{\sqrt5}\;\arctan\left(\frac{3t+1}{\sqrt5}\right)+C=\frac{1}{\sqrt5}\;\arctan\left(\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt5}\right)+C=:F(x)$$

Das obige Integral kann nicht einfach als $2[F(\pi)-F(-\pi)]$ berechnet werden, da F an diesen Stellen nicht definiert ist. Es kann jedoch als Grenzwert verstanden werden.

$$\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\lim_{\epsilon\to0+}2[F(\pi-\epsilon)-F(-\pi+\epsilon)]=2\left(\frac{\pi}{2\sqrt5}-\frac{-\pi}{2\sqrt5}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt5}$$

Ein Begründung dieses Grenzübergangs liefert folgende Abschätzung:

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}-\int\limits_{-\pi+\epsilon}^{\pi-\epsilon}\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}\right|\le\int\limits_{\pi-\epsilon}^{\pi}\left|\frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\right|dx+\int\limits_{-\pi}^{-\pi+\epsilon}\left|\frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\right|dx$$
$$\le\int\limits_{\pi-\epsilon}^{\pi}\frac{dx}{2}+\int\limits_{-\pi}^{-\pi+\epsilon}\frac{dx}{2}=\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

zu b)

$1+\cos 2x=1+\cos^2x-\sin^2x=\cos^2x+\sin^2x+\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x$

$$\Rightarrow\quad\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\;dx=\int\limits_0^{\pi}\sqrt2\,|\cos x|\;dx=\sqrt2\left(\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\;dx-\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos x\;dx\right)=\sqrt2\left(\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right)=2\sqrt2$$

zu c)

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} \overset{(\tan\frac{x}{2}=t)}{=} \int\limits_0^1 \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\ dt}{1+t^2} = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

zu d)

$\cos x$ ist gerade. ($\cos x = \cos[-x]$)

Dagegen gilt: $h(x) := \ln\dfrac{1+x}{1-x} = -\ln\dfrac{1-x}{1+x} = -h(-x)$

$\Rightarrow \quad h(x)$ ist ungerade.

Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist wieder eine ungerade Funktion. Das Integral einer ungeraden Funktion über ein Intervall symmetrisch zur 0 verschwindet, folglich:

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}\ dx = 0$$

4. Riemannova funkce

Buď $R(x) = 0$ pokud x je iracionální, a $f(x) = \dfrac{1}{q}$ pokud $x = \dfrac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ a p, q nesoudělné.) Ukažte, že R je na $[0,1]$ riemannovsky integrovatelná.

Finden Sie eine Folge von Zerlegungen Z_n, so dass die entsprechenden Obersummen gegen Null konvergieren. Die Untersummen sind alle Null. Dadurch ist $\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x = 0$. Eine mögliche Wahl ist z.B.

$$Z_n = \{0, \frac{1}{n!}, \frac{2}{n!}, \dots, 1\}.$$

Die entsprechende Obersummen sind dann kleiner als

$$\frac{3}{n!}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\cdot k + \frac{n!}{n!}\cdot\frac{1}{n} \to 0.$$

5. Spočtěte plochu množiny ohraničené křivkou

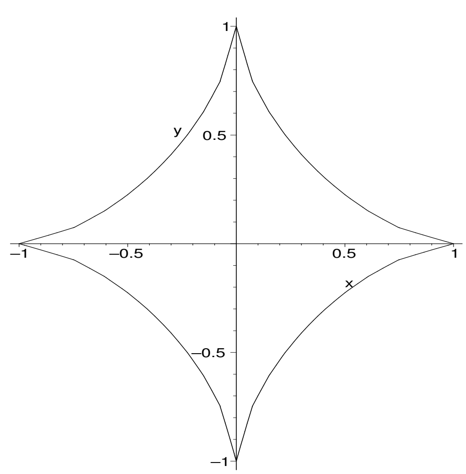
$$\mathcal{K} := \Big\{(x,y): \quad x^{2/3} + y^{2/3} = 1\Big\}.$$

Udělejte si nejprve obrázek. Tato křivka se nazývá asteroida.

Návod: Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ platí

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x\ \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx\,.$$

Skizze:



Die Fläche ist symmetrisch, Subst. $x^{1/3} = \sin t$:

$$F = 4 \cdot \int_0^1 (1 - x^{2/3})^{3/2} \mathrm{d}x = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^3 3 \sin^2 t \cos t \mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\int (\cos t)^3 \sin^2 t \cos t \mathrm{d}t &= \int (\cos^4 t - \cos^6 t) \mathrm{d}t = \\ &= \int \cos^4 t \mathrm{d}t - \frac{\sin t \cos^5 t}{6} - \frac{5}{6} \int \cos^4 t \mathrm{d}t = \\ &= -\frac{\sin t \cos^5 t}{6} + \frac{1}{6} \left\{ \frac{\sin t \cos^3 t}{4} + \frac{3}{4} \int \cos^2 t \mathrm{d}t \right\} = \\ &= -\frac{\sin t \cos^5 t}{6} + \frac{\sin t \cos^3 t}{24} + \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{2} \cos t \sin t + \frac{t}{2} \right\}\end{aligned}$$

$$F = 4F_1 = 4 \cdot 3 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t \mathrm{d}t = 12 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

6. Vyšetřete konvergenci nebo divergenci následujících nevlastních integrálů:

$$a) \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3 + x}}, \qquad b) \int_0^\infty x^n e^{-\sqrt{x}} \mathrm{d}x, \qquad c) \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t, \qquad d) \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t} \mathrm{d}t.$$

Zu a)

Die Funktion ist stetig, also Riemann-integrierbar auf jedem Interval $[1, N]$. Auf $[1, \infty)$ gilt

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

und Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$ konvergiert. Also konvergiert auch Integral in a).

Zu b)

$n \in \mathbb{N}$ ist ein Parameter. Bei Null ist die Funktion stetig und beschränkt, Konvergenz von

$$\int_0^\infty x^n e^{-\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

ist also äquivalent zu Konvergenz von

$$\int_1^\infty x^n e^{-\sqrt{x}} \mathrm{d}x.$$

Finden Sie eine Konstante c_n, so daß auf $[1, \infty]$ folgende Abschätzung gilt:

$$x^n e^{-\sqrt{x}} \leq c_n x^{-2}.$$

Das Integral in b) konvergiert also für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zu c)

Wir zeigen, daß die Funktion $F : t \to \displaystyle\int_0^t f(s) \mathrm{d}s$ das Cauchy-Prinzip erfüllt, wenn $s \to \infty$ strebt. Wir müssen also

$$|F(u) - F(v)| = \left| \int_u^v \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \right|$$

von oben abschätzen für $v > u$ gross. Durch partielle Integration ergibr sich aber

$$\int_u^v \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_u^v - \int_u^v \frac{\cos x}{x^2} \mathrm{d}x,$$

also gilt

$$\left|\int_u^v \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\int_u^v \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\left[-\frac{1}{x}\right]_u^v = \frac{2}{u}.$$

Das Integral ist konvergent.

Zu d)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t \geq \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin^2 t\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^\pi \sin^2 t\mathrm{d}t \cdot \frac{1}{\pi}\cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k+1} = \infty.$$

Das Integral ist also divergent.

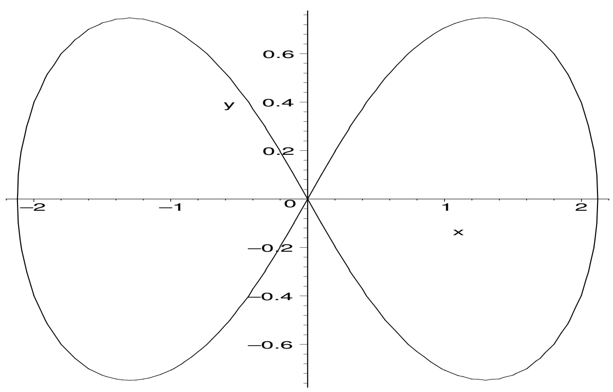
7. (i) Spočtěte plochu *elipsy*

$$\mathcal{K} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}, \quad a,b>0.$$

(ii) Spočtěte plochu ohraničenou *Bernoulliho lemniskátou*:

$$\mathcal{K} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)\right\}, \quad a>0.$$

Návod:



Odvoďte parametrické vyjádření v polárních souřadnicích.

$$r = a\sqrt{2\cos(2\varphi)}, \quad r\in(0,\sqrt{2}a).$$

Integrujte pak od nuly do $\sqrt{2}a$ délku paprsku, který je omezen lemniskátou, tedy $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}a} r\varphi(r)\mathrm{d}r$.

Zu (i):

Die Fläche ist symmetrisch:

$$F = 4F_1$$

wobei F_1 die Fläche von

$$(\{\,(x,y) : x,y>0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\,\})$$

ist.

Also ist (Subst. $s = x/a$)

$$F = 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x = 4ab\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\mathrm{d}s = 4ab\frac{\pi}{4} = \pi ab.$$

Zu (ii):

Die Fläche ist wieder symmetrisch, wir betrachten also nur den Teil, wo $x, y > 0$. Die Polarkoordinaten werden durch

$$\tan\varphi = \frac{x}{y}, \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

definiert. Also

$$x^2 = \frac{r^2}{1+\tan^2\varphi}, \quad y^2 = \frac{\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi} r^2.$$

Die parametrische Darstellung lautet also

$$r^4 = 2a^2 r^2 \frac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi} = 2a^2 r^2 \cos(2\varphi), \qquad \frac{r^2}{2a^2} = \cos 2\varphi.$$

Nach dem Hinweis integrieren wir also (Subst. $s = \dfrac{r^2}{2a^2}$)

$$\int_0^{\sqrt{2}a} r\varphi(r)\mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{2}a} r\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{2a^2}\mathrm{d}r = \frac{a^2}{2}\int_0^1 \arccos(s)\mathrm{d}s = \frac{a^2}{2}.$$

Die gesamte Fläche ergibt sich dann als $4 \cdot \dfrac{a^2}{2} = 2a^2$.

8. Ukažte, že

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x}{\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{t}} = 1.$$

Es gilt

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{2t} = \infty.$$

Wir können also die Regel von L'Hospital anwenden. Dabei gilt

$$\left(\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right)' = e^{\frac{t^2}{2}}, \qquad \left(\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{t}\right)' = \frac{t^2 e^{\frac{t^2}{2}} - e^{\frac{t^2}{2}}}{t^2}.$$

Also gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x}{\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{t^2-1} = 1.$$

9. Určete

$$a) \quad \frac{d}{dx}\left(\int\limits_{x^2}^{x^3} \ln t \; dt\right) \qquad\qquad b) \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int\limits_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\; dt$$

zu a)

$x > 0$: $\ln t$ ist im betrachteten Bereich stetig. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

$$\int\limits_{x^2}^{x^3} \ln t\; dt = F(x^3) - F(x^2) \qquad \text{mit} \quad \frac{dF(t)}{dt} = \ln t$$

Mit Anwendung der Kettenregel folgt also:

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{x^2}^{x^3} \ln t\; dt\right) = \frac{d}{dx}\left[F(x^3) - F(x^2)\right] = \left.\frac{dF(u)}{du}\right|_{u=x^3} \cdot \frac{d(x^3)}{dx} - \left.\frac{dF(u)}{du}\right|_{u=x^2} \cdot \frac{d(x^2)}{dx}$$
$$= 3x^2 \ln x^3 - 2x \ln x^2 = (9x^2 - 4x)\ln x$$

zu b)

Zur Berechnung des Grenzwertes soll die Regel von L'Hospital angewandt werden. Die Ableitung der Funktion im Zähler (also des Integrals) wird dabei genauso begründet wie in Aufgabe a).

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int\limits_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\; dt \overset{(L'Hosp.)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin\sqrt{x^2}}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin|x|}{x}$$

Wegen $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ und $\sin(-x) = -\sin x$ folgt für rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^3} \int\limits_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\; dt = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^3} \int\limits_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\; dt = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0-}\frac{-\sin x}{x} = -\frac{2}{3}$$

10. Buď $f : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ dána.
(i) Plyne z $\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$ vždy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$?
(ii) Plyne z $\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$ vždy existence limity $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$?
(iii) Buď f navíc stejnoměrně spojitá. Plyne pak z $\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$ vždy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$?

Zu (i) und (ii):

Nein. Man betrachtet z.B. die Funktion (*Machen Sie sich eine Skizze!*)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(2^k \cdot x)\chi_{[\pi 2^k, \pi 2^k + \frac{\pi}{2^k}]}(x).$$

Zu (iii): Ja.

Sei f gleichmäßig stetig mit $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 0$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine monotone Folge $x_n \to \infty$, so daß $f(x_n) > \epsilon, n = 1, 2, \ldots$. Man kann voraussetzen, daß $|x_{n+1} - x_n| = x_{n+1} - x_n > 1$ für alle $n = 1, 2, \ldots$.

Aus der gleichmäßige Stetigkeit folgt die Existenz von einem $1 > \delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für} \quad |x - y| < \delta.$$

Auf jedem Interval $(x_n - \delta, x_n + \delta)$ ist also f größer als $\frac{\epsilon}{2}$. Insgesamt gilt

$$\int_0^\infty f(x)dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f(x)dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} 2\delta\frac{\epsilon}{2} = \infty,$$

also ein Widerspruch.

11. Vyšetřete konvergenci nebo divergenci následujících nevlastních integrálů

$$a) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx \qquad b) \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx \qquad c) \int_0^\infty \frac{\sin(1/x)\arctan x}{x} dx \qquad d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}.$$

Zu a)

Die Funktion ist stetig auf $(0,1)$ und beschränkt auf jedem $(\epsilon, 1-\epsilon), 0 < \epsilon < 1/2$. Wir untersuchen also nur Konvergenz von

$$\int_0^\epsilon \ldots \qquad \text{und} \qquad \int_{1-\epsilon}^1 \ldots.$$

Wir sagen, daß $f(x) \approx g(x)$ bei x_0 ist, falls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existiert und ungleich Null und ungleich $\pm\infty$ ist. In dem Sinne ist

$$\frac{\ln x}{1-x^2} \approx \ln x, \qquad x \to 0^+.$$

Aus der Konvergenz des Integrals $\int_0^\epsilon \ln x \; dx$ (siehe Aufg. 5b) folgt dann auch die Konvergenz von $\int_0^\epsilon \frac{\ln x}{1-x^2} \; dx$. Ebenso gilt

$$\frac{\ln x}{1-x^2} \approx \frac{\ln x}{1-x} \approx -1, \qquad x \to 1^-.$$

Das Integral $\int_{1-\epsilon}^1 \frac{\ln x}{1-x^2} \; dx$ ist also auch konvergent. Insgesamt ist $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ konvergent.

Zu b)

Bei Null gilt wieder

$$\frac{\ln x}{1+x^2} \approx \ln x, \qquad x \to 0^+$$

und das Integral $\int_0^\epsilon \frac{\ln x}{1+x^2} \; dx$ ist konvergent. Die Konvergenz von $\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} \; dx$ folgt aus der Abschätzung

$$\frac{\ln x}{1+x^2} \le c \frac{1}{x^{3/2}}, \qquad x > 1$$

und Konvergenz von $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} \; dx$.

Zu c)

Wir diskutieren wieder Konvergenz bei Null und bei ∞. Für $0 < x < \epsilon$ gilt

$$\left| \frac{\sin(1/x)\arctan x}{x} \right| \le \frac{\arctan x}{x} \approx 1, \qquad x \to 0^+.$$

Weiter gilt

$$\frac{\sin(1/x)\arctan x}{x} \approx \frac{\sin(1/x)}{x} \approx \frac{1}{x^2}, \qquad x \to \infty.$$

Das Integral ist also konvergent.

Zu d)

Die einzige Singularität liegt bei Null vor. Es gilt

$$\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} \approx \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \qquad x \to 0^+$$

und das Integral $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \; dx$ ist konvergent. Folglich ist auch $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} \; dx$ konvergent.

12. Spočtěte

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \qquad b) \int_0^1 \ln x \; dx \qquad c) \int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \; dx \qquad d) \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \; dx.$$

Zu a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \arctan t - \lim_{t\to-\infty} \arctan t = \pi.$$

Zu b)

Die Stammfunktion zu $\ln x$ auf $(0,1)$ ist $F(x) = x\ln x - x$.

$$\int_0^1 \ln x \; dx = \lim_{x\to 1} F(x) - \lim_{x\to 0} F(x) = -1.$$

Zu c)

Die Stammfunktion ist (partielle Integration!)

$$F(x) = -\frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\frac{x^2 \ln x}{1+x^2}$$

und

$$\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \; dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to 0^+} F(x) = 0.$$

Zu d)

Nach der Subst. $t = \arctan x$ ergibt sich

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \; dx = \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} \; dt = \int_0^{\pi/2} t\cos t \; dt = \frac{\pi}{2} - 1.$$

13. Buď f spojitá na $[0,\infty)$, a nechť existuje $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. Dokažte, že pak $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt = A$.

Es gilt:

$$\left|\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt - A\right| = \left|\frac{1}{x}\int\limits_0^{x_0} (f(t)-A)\,dt - \frac{1}{x}\int\limits_{x_0}^{x} (f(t)-A)\,dt\right| = \frac{1}{x}\int\limits_0^{x_0} \underbrace{|f(t)-A|}_{\le C}\,dt + \frac{1}{x}\int\limits_{x_0}^{x} |f(t)-A|$$

Wählt man x_0 so, dass $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $x > x_0$, dann gilt:

$$\frac{1}{x}\int\limits_0^{x_0} \underbrace{|f(t)-A|}_{\le C}\,dt + \frac{1}{x}\int\limits_{x_0}^{x} |f(t)-A| \le \underbrace{\frac{Cx_0}{x}}_{\le\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\frac{x-x_0}{x}}_{\le 1}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon \text{ für hinreichend großes } x > x_0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

14. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $f(x) = e^{-|x|}$.

Nach der Definition ist

$$\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\cos(-x\xi) + ie^{-|x|}\sin(-x\xi)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos(x\xi)\mathrm{d}x + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\sin(-x\xi)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos(x\xi)\mathrm{d}x.$$

Partielle Integration liefert die Formel ($a \in \mathbb{R}$)

$$\int e^{-x}\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{e^{-x}}{1+a^2}\big(a\sin(ax) - \cos(ax)\big).$$

Diese Funktion hat für $x \to 0$ Grenzwert $-\dfrac{1}{1+a^2}$ und für $x \to \infty$ Null. Insgesamt gilt

$$\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{1+\xi^2}.$$

15. Budiž f spojitá. Dokažte pomocí vhodné substituce:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\ dt$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\ dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin t)\ dt$

Spočtěte s pomocí b) integrál $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\ \sin x}{1+\cos^2 x}\ dx$.

zu a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\ \ dx \ = \left[\begin{array}{l}\underline{\text{Substitution:}}\\ x = \frac{\pi}{2} - t\\ \varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t\\ \varphi'(t) = -1\end{array}\right] = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right))\ \ dt \ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\ \ dt,$ da gilt: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t\ \forall t \in \mathbb{R}$

zu b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\ \ dx \ = \int_0^{\pi} x\, f(\sin(\pi - x)) \ = \left[\begin{array}{l}\underline{\text{Substitution:}}\\ x = \pi - t\\ \varphi(t) = \pi - t\\ \varphi'(t) = -1\end{array}\right] = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t)\ f(\sin(\pi - t))\ dt \ =$ $\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x)\ f(\sin(\pi - x))\ dx$

$\displaystyle\Longrightarrow \int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\ dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\ dx,$ da gilt: $\sin(\pi - x) = \sin x\ \ (\forall x \in \mathbb{R})$

$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\ \sin x}{1+\cos^2 x}\ dx = \int_0^{\pi} x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\ dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\ dx = -\frac{\pi}{2}\ \arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}$

16. Vyšetřete následující integrály na konvergenci

$$a)\ \int_0^{\infty} x\sin x\, dx \qquad b)\ \int_1^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\, dx \qquad c)\ \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx \qquad d)\ \int_0^{\infty} \sin x^2\, dx.$$

zu a) Durch partielle Integration bekommt man

$$\int x \sin x \, dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \sin x + C\,.$$

Damit divergiert

$$\int_0^\infty x \sin x \, dx = \lim_{x\to\infty} \Big(-x\cos x + \sin x\Big)\,.$$

zu b) Das gegebene Integral ist absolut konvergent, da

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot \sin\frac{1}{x}\, dx \le \int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\, dx$$

konvergiert. Hier wurde die Ungleichung $\sin\frac{1}{x} \le \frac{1}{x}$ benutzt.

zu c) Für $x \to 0^+$ gibt es keine Probleme, da

$$\left|\frac{\sin^2 x}{x}\right| < \left|\frac{x^2}{x}\right| = |x| \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x} = 0\,.$$

Trotzdem divergiert das Integral, denn

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\, dx$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sin^2 x\, dx = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\right)}_{=\infty}\underbrace{\left(\int_0^{\pi}\sin^2 x\, dx\right)}_{=\frac{\pi}{2}=c} = \infty\,.$$

zu d) Mit der Substitution $t = x^2$ erhält man

$$\int \sin x^2\, dx = \int \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt\,.$$

Man braucht also nur zu untersuchen, ob das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt$ konvergiert. Sei $A > 0$. Dann gilt für $n\pi \le A < (n+1)\pi$ die Gleichung

$$\int_0^A \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt = \underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt}_{:=S(n)} + \int_{n\pi}^{A}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt\,,$$

wobei

$$\left|\int_{n\pi}^{A}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt\right| \le \frac{\pi}{2\sqrt{n\pi}} \quad\longrightarrow\quad 0\,.$$

Demnach genügt es zu prüfen, ob

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,, \quad \text{mit} \quad a_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt$$

konvergiert. Dies ist aber nach der LEIBNIZschen Regel der Fall, denn a_k ist alternierend und

$$|a_k| = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}\, dt = \int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{t+(k-1)\pi}}\, dt$$

strebt für $k \to \infty$ monoton fallend gegen 0.

17. Budiž $a_1 < \ldots < a_n$. Pro které parametry $p_1 \ldots, p_n$ konverguje integrál

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1} \ldots |x-a_n|^{p_n}}?$$

Es gibt genau dann keine Störung der Konvergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1} \cdots |x-a_n|^{p_n}} \tag{1}$$

bei $x = a_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, wenn $p_i < 1$ ist. Die Konvergenz bei $x \to \pm\infty$ wird genau dann nicht gestört, wenn $p_1 + \cdots + p_n > 1$ ist. Also tritt die Konvergenz genau dann ein, wenn $p_i < 1$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $p_1 + \cdots + p_n > 1$. Dies soll nun noch genauer begründet werden.

Wir bezeichnen den Integranten des Integrals (1) mit $f(x)$ und wählen $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ so, dass $b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < a_n < b_n$ gilt. Offensichtlich konvergiert das Integral (1) genau dann, wenn die Teilintegrale auf den Intervallen $(-\infty, b_0]$, $[b_0, b_1], \ldots, [b_{n-1}, b_n]$, $[b_n, \infty)$ konvergieren. Die Behauptung ist also

$$\int_{b_{i-1}}^{b_i} f(x)\, dx \quad \text{konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad p_i < 1\,, \tag{2a}$$

$$\int_{-\infty}^{b_0} f(x)\, dx \quad \text{bzw.} \quad \int_{b_n}^{\infty} f(x)\, dx \quad \text{konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad p_i < 1\,. \tag{2b}$$

Zur Behauptung (2a): Bekanntermaßen konvergiert das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ genau dann, wenn $p < 1$ ist. Also gilt

$$\int_{b_{i-1}}^{b_i} \frac{dx}{|x-a_i|^{p_i}} \quad \text{konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad p_i < 1\,.$$

Die Funktion

$$\frac{1}{|x-a_1|^{p_1} \cdots |x-a_{i-1}|^{p_{i-1}} |x-a_{i+1}|^{p_{i+1}} \cdots |x-a_n|^{p_n}}$$

ist stetig auf dem Intervall $[b_{i-1}, b_i]$, besitzt dort also ein Maximum M und ein Minimum $m > 0$. Folglich gilt die Abschätzung

$$\underbrace{\int_{b_{i-1}}^{b_i} \frac{m\, dx}{|x-a_i|^{p_i}}}_{<\infty \,\Leftrightarrow\, p_i<1} \leq \int_{b_{i-1}}^{b_i} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1} \cdots |x-a_n|^{p_n}} \leq \underbrace{\int_{b_{i-1}}^{b_i} \frac{M\, dx}{|x-a_i|^{p_i}}}_{<\infty \,\Leftrightarrow\, p_i<1}\,.$$

Mit dem Majoranten- und Minorantenkriterium folgt die Aussage (2a).

Die Behauptung (2b) folgt analog.

18. Spočtěte nevlastní integrály

$$a) \quad \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} \qquad b) \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} \qquad c) \quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

zu a) Um den Betrag aufzuheben, zerlegen wir das Integral und erhalten so

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \arcsin x\Big|_0^1 + \operatorname{arcosh} x\Big|_1^2$$
$$= \frac{\pi}{2} - 0 + \operatorname{arcosh} 2 - \underbrace{\operatorname{arcosh} 1}_{=0} = \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}).$$

zu b) Mit der Substitution $t = \frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}$ und der Rekursionsformel aus der 14. Serie, Aufgabe 1 bekommt man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,dx}{\left[\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^2}$$
$$= \frac{4}{3\sqrt{3}} \left(\frac{t}{t^2+1} + \arctan t \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

zu c) Mit der Substitution $t = \sqrt{1-x}$, $dt = -\frac{1}{2t} dx$ erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \int_1^0 \frac{-2t}{(1+t^2)t}\,dt = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$$