Matematická analýza pro fyziky II

LS 2015/16, MFF UK

6. Cvičení

---

1. Buď $f(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$. Ukažte, že pomocí

$$d(x,y) = |f(x) - f(y)|, (x, y \in \mathbb{R})$$

je na $\mathbb{R}$ definována metrika. Srovnejte konvergenci vzhledem k této metrice s klasickou konvergencí.

2. Buď (X,d) metrický prostor. Dokažte pro libovolná $x,y,z,u,v \in X$ platí

a) $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$,
b) $|d(x,y) - d(u,v)| \leq d(x,u) + d(y,v)$.

3. Ukažte, že pomocí

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &:= |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \\ \text{und } \|x\|_\infty &:= \max\{|x_i| : i = 1,2,3,\ldots,n\} \end{aligned}$$

jsou na $\mathbb{R}^n$ definovány dvě normy $(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$.

Ukažte, že posloupnost $\{x^n\}$ konverguje k x^0 vzhledem k $\|.\|_1$, právě když konverguje k x^0 i vzhledem k $\|.\|_\infty$.

Načrtněte pro tyto normy v $\mathbb{R}^2$ množiny $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \|x\| \leq 1\}$.

4. Buď (X,d) metrický prostor. Dokažte, že sjednocení libovolně mnoha a průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina. Dokaže, že průnik libovolně mnoha a sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

5. Buď (X,d) metrický prostor a $(x_n)_{n\geq 1}$ konvergentní posloupnost v X. Dokažte, že její limita je určena jednoznačně.

6. Nechť $1 \leq p < \infty$. Pak

$$\ell_p = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} : \|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \Big)^{1/p} < \infty \right\}$$

a

$$\ell_\infty = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} : \|x\|_\infty := \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty \right\}.$$

Dokažte, že $\ell_1 \subset \ell_2 \subset \ell_\infty$ a obě tyto inkluze jsou vlastní.

*Podaří se Vám najít posloupnost bodů $(x^n)_{n\geq 1}$ z ℓ_1 (tedy posloupnost posloupností!) a $x \in \ell_1$ takové, aby

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\|_\infty = 0,$$

ale (x^n) nekonverguje k x v ℓ_1.

7. Buď $-\infty < a < b < \infty$. Vybavme prostor spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$ normou

$$\| f \| := \Big(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \Big)^{1/2}.$$

(i) Ukažte, že $\| \cdot \|$ je skutečně norma na této množině.
(ii) Ukažte, že takto normovaný prostor není úplný (tj. není Banachův).

8. Buď $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$, $1 \leq x \leq 2$.
(i) Ukažte, že f je kontraktivní zobrazení $[1,2]$ do téhož intervalu. Určete Lipschitzovskou konstantu tohoto zobrazení
(ii) Kolik iterací je zapotřebí, abychom z bodu $x_0 = 1.5$ dosáhli pevného bodu tohoto zobrazení s přesností alespoň 10^{-3}?

9. Pro funkci f spojitou na intervalu $[0,1/2]$ uvažujeme zobrazení

$$\mathcal{K}f(x) := 1 + \int_0^x f(t)\,dt\,, \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2}\,.$$

$\mathcal{K}$ tedy přiřazuje každé funkci f jinou funkci, a sice $\mathcal{K}f$. Ukažte:
(i) $\mathcal{K}$ zobrazuje Banachův prostor spojitých funkcí na $[0,1/2]$ (s maximovou normou) do sebe samého.
(ii) $\mathcal{K}$ je kontraktivní. Určete jeho Lipschitzovskou konstantu.
(iii) Spočtěte pevný bod zobrazení $\mathcal{K}$ pomocí vhodných iterací. Zvolte jako počáteční vektor funkci $f(x) \equiv 0$.
Nápověda: V jakém vztahu je derivace pevného bodu a toho pevný bod sám?
(iv) Zvolte jako počáteční vektor funkci $f(x) = \sin x$ a udejte počet iterací, které zaručují chybu nejvýše $\le 10^{-3}$.

10. Nahraďte v předchozí úloze zobrazení $\mathcal{K}$ pomocí

$$\mathcal{K}^* f(x) := 1 + \int_0^x t\, f(t)\,dt\,, \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2}\,,$$

dokažte existenci pevného bodu a najděte jej!

11. Buď

$K = \{f \in C([0,1]) : ||f|| \le 1\}$,
$A = \{f \in C([0,1]) : f$ je monotónní neklesající$\}$,
$B = \{f \in C([0,1]) : f$ je 1-Lipschitzovsky spojitá, t.j.$|f(x) - f(y)| \le |x-y|$ pro všechna $x, y \in [0,1]\}$.

Ukažte:

(a) A a B jsou uzavřené v $C([0,1])$.

(b) $A^\circ = B^\circ = \emptyset$.

(c) $K \cap A$ není kompaktní.

(d)* $K \cap B$ je kompaktní.

12. Buď (X,d) metrický prostor. Ukažte, že

a) Dokažte, že sjednocení libovolně mnoha a průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.
b) Dokažte, že průnik libovolně mnoha a sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.
c) Pro uzavřené a disjunktní množiny A a B existují vždy také otevřené a disjunktní množiny U a V s $A \subset U$ a $B \subset V$.
d) Vzdálenost dvou uzavřených disjunktních množin může být nula.
e) Ale $d(A,K) > 0$, pokud je A uzavřená, K kompaktní a $A \cap K = \emptyset$.
f) Pro každou množinu $M \ne \emptyset$ a každé $\epsilon > 0$ je množina $U := \{x \in X : d(x,M) < \epsilon\}$ otevřená.

13. Buď (X,d) úplný metrický prostor a $(A_k)_{k=0}^\infty$ posloupnost neprázdných uzavřených množin a $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset ...$ a diam $A_k \to 0$ $(k \to \infty)$. Ukažte, že $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} A_k \ne \emptyset$.
Je možné předpoklad diam $A_k \to 0$ $(k \to \infty)$ vynechat?

14. Buď (X,d) metrický prostor a $\{x_n\}$ cauchyovská posloupnost v X, která má podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ s $x_{n_k} \to x$, $x \in X$. Dokažte, že pak i $\{x_n\}$ konverguje k x.

15. Dokažte:

a) Úplný podprostor metrického prostoru je uzavřený.

b) Uzavřený podprostor úplného metrického prostoru je úplný.

c) Kompaktní prodprostor je úplný.

16. Dokažte: Zobrazení $f : X \to Y$ $(X, Y$ metrické prostory) je právě tehdy spojité, pokud je vzor $f^{-1}(G) = \{x \in X : \quad f(x) \in G\}$ každé otevřené (uzavřené) podmnožiny G prostoru Y otevřená (uzavřená) podmnožina prostoru X.

17. Pro kompaktní podmnožinu M metrického prostoru X definujeme $d(x, M) = \inf_{z \in M} d(x, z)$, $x \in X$. Dokažte:

    a) $d(x, M) > 0$ pro $x \notin M$. b) Infinum se nabývá. c) Funkce $f(x) = d(x, M)$ je spojitá.