Matematická analýza pro fyziky II

LS 2015/16, MFF UK

7. Cvičení

1. Rozhodněte, zda jsou funkce

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y - y^3}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pro} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^4)}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pro} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x^2}y}{e^{-2/x^2}+y^2} & \text{pro} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0 \text{ und } y \in \mathbb{R} \end{cases}$

spojité v bodě $(0,0)$.

a) Bei Verwendung von Polarkoordinaten r und φ ergibt sich für $r > 0$

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi)$$

und damit die Abschätzung $|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)| \leq 4r$. Es ist abzulesen, dass sich für gegebenes positives ε durch $\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon/4$ die Ungleichung $|f(x,y)| < \varepsilon$ erzwingen läßt die Funktion ist also im Nullpunkt stetig.

b) Die Stetigkeit ist abzulesen von der Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) &= \frac{1}{r^2}|\sin(r^3\cos^3\varphi + r^4\sin^4\varphi)| \leq \\ &\leq \frac{1}{r^2}|r^3\cos^3\varphi + r^4\sin^4\varphi| \leq r(|\cos^3\varphi| + r|\sin^4\varphi|) < 2r \end{aligned}$$

für $0 < r < 1$.

c) Die Funktion f ist im Punkt $(0,0)$ nicht stetig, denn für $x \longrightarrow 0$ konvergiert der Punkt $(x, e^{-1/x^2})$ gegen $(0,0)$, aber für die Funktionswerte gilt

$$f(x, e^{-1/x^2}) = \frac{e^{-1/x^2}e^{-1/x^2}}{e^{-2/x^2} + e^{-2/x^2}} = \frac{1}{2}\ .$$

2. Ukažte, že platí $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1$.

Die Ungleichung $(x-y)^2 \geq 0$ impliziert

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

und damit für (x,y) mit $0 < x^2+y^2 < 1$ die Abschätzung

$$0 \leq x^2y^2 \leq \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)^2 \leq x^2+y^2$$

und folglich

$$1 = \left(x^2+y^2\right)^0 \geq \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2} \geq \left(x^2+y^2\right)^{x^2+y^2}$$

Wegen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{(x^2+y^2)} = \lim_{t\to 0+} t^t = 1$$

folgt daraus die Behauptung.

3. Je dána funkce $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

   Ukažte, že platí $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad$ pro $\quad (x,y,z) \neq (0,0,0)$.

   Mit $\; r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}\;$ erhält man

$$f_x(x,y,z) = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3} \quad \text{und}$$

$$f_{xx}(x,y,z) = -\frac{r^3 - x\cdot 3\,r^2\cdot\dfrac{x}{r}}{r^6} = 3x^2\cdot\frac{1}{r^5} - \frac{1}{r^3}$$

   und analog

$$f_{yy}(x,y,z) = 3y^2\cdot\frac{1}{r^5} - \frac{1}{r^3}\;,\; f_{zz}(x,y,z) = 3z^2\cdot\frac{1}{r^5} - \frac{1}{r^3}$$

   also

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \frac{3}{r^5}(x^2+y^2+z^2) - \frac{3}{r^3} = 0.$$

4. Spočtěte všechny parciální derivace prvního řádu funkcí

$$a)\; f(x,y,z) := z\cdot\arctan(x/y) \qquad b)\; f(x,y,z) := x^{(y^z)}$$

   Zu a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{y}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{xz}{y^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \arctan(x/y).$$

   Zu b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = zy^{z-1}x^{y^z}\ln x.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^{y^z}y^z\ln x\cdot\ln y.$$

5. Spočtěte smíšené parciální derivace druhého řádu funkcí

$$a)\; f(x,y) := \arccos\sqrt{(y/x)} \qquad b)\; f(x,y) := x^{(y^2)}$$

$$a)\; \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{y}(x-y)^{3/2}} \qquad b)\; \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 2yx^{y^2-1} + 2y^3x^{y^2-1}\ln x.$$

6. V kterých směrech existuje derivace funkce $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ v bodě $(0,0)$?

Sei $\nu=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ Richtungsvektor.

Für welche $\varphi\in[0,2\pi)$ existiert $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{|0+t\cos\varphi||0+t\sin\varphi|}-0}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{|t|}{t}\sqrt{|\cos\varphi\cdot\sin\varphi|}$?

Also für $\varphi=0\,,\varphi=\dfrac{\pi}{2}\,,\varphi=\pi$ und $\varphi=\dfrac{3}{2}\pi$ existieren die Richtungsableitungen.

7. Budiž $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{pro}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{pro}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Ukažte, že:

a) V bodě $(0,0)$ existují derivace ve všech směrech.

b) f není spojitá v $(0,0)$.

a) Sei $\nu=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ Richtungsvektor. Dann gilt

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2\cos^2\varphi\cdot t\sin\varphi}{t(t^4\cos^4\varphi+t^2\sin^2\varphi)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi}{t^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{für}\quad \varphi=0,\dfrac{\pi}{2}\,,\pi\,,\dfrac{3}{2}\pi\\[2ex] \dfrac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} & \text{sonst}\end{cases}$$

d. h. es existieren alle Richtungsableitungen von f.

b) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)\,,$$

d. h. f ist bei $(0,0)$ nicht stetig.

8. Funkce $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ je *diferencovatelná* v bodě $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, pokud existuje lineární zobrazení $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{|f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)-L(h_1,h_2)|}{||(h_1,h_2)||}=0.$$

Nechť $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pro}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{pro}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Je f diferencovatelná v bodě $(0,0)$?

Wegen $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=0$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{j\to 0}\dfrac{0}{y}=0$ gilt

$$\frac{R(x,y)}{||(x,y)||}=\frac{f(x,y)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

mit $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\dfrac{R(x,y)}{||(x,y)||}=\dfrac{1}{2}\neq 0$, d. h. f ist im Punkt $(0,0)$ nicht differenzierbar.

9. Najděte tečnou rovinu k funkci $f(x,y)=x^y$ v bodě $(1,1,1)$!

   Sei $(x_0,y_0)=(1,1)$.

   Die Tangentialebene lautet

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+f(x_0,y_0)=z\}$$

   In unserem Fall ergibt sich

$$1\cdot(x-1)+0\cdot(y-1)+1=z,$$

   d. h. $x=z$.

10. Buď $f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{pro} \quad (x,y)=(0,0) \\ xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

   Spočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$.

$$\begin{aligned}
f_x(0,y) &= \lim_{x\to 0}\frac{xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{x} = \lim_{x\to 0} y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -y \\
f_{xy}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{-y-0}{y} = -1 \\
f_y(x,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{y} = \lim_{y\to 0} x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = x \\
f_{yx}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x} = 1
\end{aligned}$$

11. Buď

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad f(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha\beta,\beta\gamma,\gamma\alpha)$$

   a

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad F(x,y)=(x^2+y^2,x^2-y^2,2xy).$$

   a) Utvořte $f\circ F$.

   b) Spočtěte Jacobiho matici $J_{f\circ F}$ v bodě $(1,1)$.

   c) Spočtěte Jacobiho matice $J_F(1,1)$ a $J_f(2,0,2)$ a utvořte jejich součin.

$$f\circ F(x,y)=f(F(x,y))=\left((x^2+y^2)(x^2-y^2),2xy(x^2-y^2),2xy(x^2+y^2)\right).$$

$$J_{f\circ F}(x,y)=\begin{pmatrix} 4x^3, & -4y^3 \\ 6x^2y-2y^3, & 2x^3-6xy^2 \\ 6x^2y+2y^3, & 2x^3+6xy^2 \end{pmatrix},\qquad J_{f\circ F}(1,1)=\begin{pmatrix} 4, & -4 \\ 4, & -4 \\ 8, & 8 \end{pmatrix}$$

$$J_F(1,1)=\begin{pmatrix} 2, & 2 \\ 2, & -2 \\ 2, & 2 \end{pmatrix},\quad J_f(2,0,2)=\begin{pmatrix} 0, & 2, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 2, & 0, & 2 \end{pmatrix}$$

   und

$$\begin{pmatrix} 0, & 2, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 2, & 0, & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2, & 2 \\ 2, & -2 \\ 2, & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4, & -4 \\ 4, & -4 \\ 8, & 8 \end{pmatrix}.$$

12. a) Nechť je dáno n bodů $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$.

Určete přímku $y = Ax + B$ tak, že $f(A, B) := \sum_{i=1}^{n} (y_i - Ax_i - B)^2$ je minimální.

b) V kterém bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nabývá funkce $f(x) = \sum_{j=1}^{p} \|x - a_j\|^2$ $(a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}^n,\ p \in \mathbb{N})$ své globální minimum?

zu a)

Bestimmung möglicher Extremstellen:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f_A = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - Ax_i - B)(-x_i) = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i x_i - Ax_i^2 - Bx_i) \stackrel{!}{=} 0 \\ \bullet\ f_B = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - Ax_i - B)(-1) = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - Ax_i - B) \stackrel{!}{=} 0 \end{array}\right\} \quad (\star)$$

Mit den Abkürzungen:

- $\vec{1} = \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{n-mal},\ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$
- $\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ und $\left\|\vec{x}\right\|^2 = \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle$ gilt

$$(\star) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} f_A = -2\left[\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle - A\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle - B\left\langle \vec{x}, \vec{1} \right\rangle\right] = 0 \\ f_B = -2\left[\left\langle \vec{y}, \vec{1} \right\rangle - A\left\langle \vec{x}, \vec{1} \right\rangle - nB\right] = 0 \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} A\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle + B\left\langle \vec{x}, \vec{1} \right\rangle = \left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle \\ A\left\langle \vec{x}, \vec{1} \right\rangle + nB = \left\langle \vec{y}, \vec{1} \right\rangle \end{array}$$

Durch dieses lineare Gleichungssystem sind A und B eindeutig bestimmt, denn:

$$\det\begin{pmatrix} \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle & \left\langle \vec{x}, \vec{1} \right\rangle \\ \left\langle \vec{x}, \vec{1} \right\rangle & n \end{pmatrix} = \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle \cdot n - \left\langle \vec{x}, \vec{1} \right\rangle^2 = n\left\|\vec{x}\right\|^2 - \left\langle \vec{x}, \vec{1} \right\rangle^2 \geq n\left\|\vec{x}\right\|^2 - n\left\|\vec{x}\right\|^2 = 0$$

nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung: $\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle^2 \leq \left\|\vec{x}\right\|^2 \cdot \left\|\vec{y}\right\|^2 \qquad (\star\star)$

Man überlegt sich, dass das Gleichheitszeichen dieser Ungleichung nur gilt, wenn alle Komponenten x_i des Vektors $\vec{x}$ gleich sind.

Folglich verschwindet die Determinante nicht, womit die eindeutige Lösbarkeit des obigen linearen Gleichungssystems erwiesen ist.

Überprüfung und Qualifizierung der Extremwerte mit Hilfe der *Hesse*-Matrix:

- $f_{AA} = 2\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle > 0$
- $f_{BB} = 2n$
- $f_{AB} = 2\left\langle \vec{x}, \vec{1} \right\rangle$

$$\Longrightarrow Hf = \begin{pmatrix} 2\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle & 2\left\langle \vec{x}, \vec{1} \right\rangle \\ 2\left\langle \vec{x}, \vec{1} \right\rangle & 2n \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \ \det Hf = 4\left(\left\|\vec{x}\right\|^2 n - \left\langle \vec{x}, \vec{1}\right\rangle^2\right) = 4\left(\left\|\vec{x}\right\|^2 \left\|\vec{1}\right\|^2 - \left\langle \vec{x}, \vec{1}\right\rangle^2\right) > 0$ ebenfalls nach $(\star\star)$

Die Hesse-Matrix ist positiv definit, also besitzt f in (A, B) ein lokales Minimum.
Dass dies auch global ist, folgt wegen $f(a, b) \longrightarrow \infty$ für $\|(a, b)\| \longrightarrow \infty$.

zu b)

Bestimmung möglicher Extremstellen:

$f(x) = \sum_{j=1}^{p} \|x - a_j\|^2$ mit $a_j = (a_j^1, \ldots, a_j^n) \in \mathbb{R}^n$ und $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow f(x) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}(x^{(i)} - a_j^{(i)})^2$

$$\Longrightarrow f_{x^{(i)}} = \sum_{j=1}^{p} 2(x^{(i)} - a_j^{(i)}) = 0 \ \Longrightarrow \ px^{(i)} = \sum_{j=1}^{p} a_j^{(i)}$$

$$\Longrightarrow x^{(i)} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} a_j^{(i)} \text{ (arithmetisches Mittel)}$$

Überprüfung und Qualifizierung der Extremwerte mit Hilfe der *Hesse*-Matrix:

- $f_{x^{(i)}x^{(j)}} = 2p\delta_{ij}$ wobei δ_{ij} das *Kronecker*-Symbol ist: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$

$$\Longrightarrow Hf(x) = \begin{bmatrix} 2p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2\text{p} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2\text{p} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2\text{p} \end{bmatrix} \text{ ist unabhängig von } x \text{ positiv definit } ^{1}$$

Also liegt in $P = \left(\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} a_j^{(1)}, \ldots, \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} a_j^{(n)}\right)$ ein lokales Minimum vor.

Da $f \longrightarrow \infty$ für $\|x\| \longrightarrow \infty$, besitzt f in P auch sein globales Minimum.

13. Buď $f = (f_1, f_2, f_3)$ a $f_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$. Nechť mají funkce f_1, f_2 a f_3 spojité parciální derivace prvního řádu v každém směru. Pak definujeme rotaci vektorového pole f

$$\operatorname{rot} f := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$$

a divergenci vektorového pole f

$$\operatorname{div} f := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}.$$

Odvoďte následující identity:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \text{pro } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) \equiv (0, 0, 0) \quad \text{pro } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

a

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) \equiv 0 \quad \text{pro } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

[1] Eigenwerte $\lambda_i = 2n > 0$ ($\forall\ i = 1, \ldots, n$)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}\right) = (0,0,0).$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} = 0.$$

14. Buď $f(\xi, \eta, \zeta)$ spojitě diferencovatelná. Dosazením $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$, $\zeta = 2xy$ definujeme funkci $F(x, y)$. Spočtěte její derivace prvního řádu.

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= f(x^2+y^2\,, x^2-y^2\,, 2xy)\\
F_x(x,y) &= f_\xi(x^2+y^2\,, x^2-y^2\,, 2xy)\cdot 2x + f_\eta(x^2+y^2\,, x^2-y^2\,, 2xy)\cdot 2x\\
&\qquad + f_\zeta(x^2+y^2\,, x^2-y^2\,, 2xy)\cdot 2y\\
F_y(x,y) &= f_\xi(x^2+y^2\,, x^2-y^2\,, 2xy)\cdot 2y + f_\eta(x^2+y^2\,, x^2-y^2\,, 2xy)(-2y)\\
&\qquad + f_\zeta(x^2+y^2\,, x^2-y^2\,, 2xy)\cdot 2x
\end{aligned}$$

15. Spočtěte Taylorův polynom 2. řádu

a) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x$ in $(1,-1)$
Co lze říct o zbytku?

b) $f(x,y) = x^2 e^{xy}$ v $(0,1)$.

c) $f(x,y,z) = \sin x \cos y \; e^z$ v $(0,0,0)$

d) $f(x,y) = x^y$ v $(1,1)$.

Ausgehend von der Formel für mehrdimensionale Taylorpolynome:

$$T_m(f,x,x^0) = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \frac{D^\alpha f(x^0)}{\alpha!}(x-x^0)^\alpha,$$

wobei aufgrund der Anzahl der Variablen der Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ die folgenden Konventionen gelten:

- $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$
- $\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$
- $D^\alpha f(x^0) = D^{\alpha_n}(\ldots(D^{\alpha_2}(D^{\alpha_1} f(x^0))))$
- $(x-x^0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x_n - x_n^0)^{\alpha_n} = (\Delta x_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (\Delta x_n)^{\alpha_n}$

ergibt sich für $m = 2$ und $n = 2$:

$\lvert\alpha\rvert$	α	$\alpha!$	$D^\alpha f(x^0)$	$(x-x^0)^\alpha$
0	$(0,0)$	1	$f(x_0,y_0)$	1
1	$(1,0)$	1	$f_x(x_0,y_0)$	Δx
1	$(0,1)$	1	$f_y(x_0,y_0)$	Δy
2	$(2,0)$	2	$f_{xx}(x_0,y_0)$	$(\Delta x)^2$
2	$(1,1)$	1	$f_{xy}(x_0,y_0)$	$\Delta x \Delta y$
2	$(0,2)$	2	$f_{yy}(x_0,y_0)$	$(\Delta y)^2$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
T_2(f,x,x^0) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x\\
&\qquad + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0,y_0)(\Delta x)^2 + f_{xy}(x_0,y_0)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0,y_0)(\Delta y)^2\\
&= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y\\
&\qquad + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(\Delta x)^2 + 2 f_{xy}(x_0,y_0)\Delta x \Delta y + f_{yy}(x_0,y_0)(\Delta y)^2\right]
\end{aligned}$$

zu a)

Gemäß obiger Formel ist:

$$T_2(f,(x,y),(1,-1)) = 4 + 2(x-1) - 8(y+1) + \frac{1}{2}\left[2(x-1)^2 - 4(x-1)(y+1) + 6(y+1)^2\right]$$

Das Restglied ist Null, da jede partielle Ableitung von f, deren Ordnung größer als 2 ist, verschwindet.

zu b)

$$f(x,y) = x^2 e^{xy} = x^2 \cdot e^x \cdot e^{(y-1)x} = x^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[x(y-1)]^k}{k!}\right) \implies T_2(f,(x,y),(0,1)) = x^2$$

zu c)

$$f(x,y,z) = \sin x \cos y e^z = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots\right)\left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \ldots\right)(1 + z + \ldots) \implies$$
$$T_2(f,(x,y,z),(0,0,0)) = x + xz$$

Bemerkung: Natürlich können b) und c) auch gemäß der Taylorformel berechnet werden.

zu d) Gemäß obiger Formel gilt:

$$T_2(f,(x,y),(1,1)) = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(2(x-1)(y-1)) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1)$$

16. Nechť je dáno zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}$.

a) Spočtěte Jacobiho matici a - tam, kde existuje - její inverzi.

b) Ukažte, že f je surjektivní a že každý bod z $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ má právě 2 vzory.

zu a)

Jacobi-Matrix: $(Df)(x) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$, $\det Df(x) = 4(x^2+y^2) \neq 0$ für $(x,y) \neq (0,0)$.

Also existiert die Inverse der *Jacobi*-Matrix auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$(Df)^{-1}(x) = \frac{1}{\det Df(x)} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2(x^2-y^2)} & \frac{y}{2(x^2-y^2)} \\ \frac{-y}{2(x^2-y^2)} & \frac{x}{2(x^2-y^2)} \end{pmatrix}^2$$

zu b)

Identifiziert man $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x + iy = z \in \mathbb{C}$ und $(x^2 - y^2, 2xy)$ mit $a + bi = \omega \in \mathbb{C}$, so ist f auffaßbar als $f(z) = \omega = z^2$.

Für jedes $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existieren nach dem *Fundamentalsatz der Algebra* genau zwei Lösungen der Gleichung $z^2 = \omega$ in $\mathbb{C}$, d.h. genau zwei Urbilder in für jeden „Wert" von $f(x,y)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Insbesondere ist f daher surjektiv auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

[2]berechnet gemäß der Regel: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

17. Nechť je dáno zobrazení $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $f(x,y) \;=\; \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

a) Spočtěte Jacobiho determinant f.
b) Ukažte, že f je na $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ lokálně i globálně invertovatelné a najděte inverzní zobrazení.
c) Interpretujte zobrazení f geometricky.

zu a) Zur Berechnung der *Jacobi*-Matrix:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Longrightarrow\ (Df)(x) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} y^2-x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ \det Df(x) = \frac{1}{(x^2+y^2)^4}\left((y^2-x^2)(x^2-y^2)-4x^2y^2\right) = \frac{-1}{(x^2+y^2)^2}$$

zu b)

Offenbar existiert $\det Df(x)$ auf ganz $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ und ist dort ungleich Null. Somit ist die Abbildung f dort auch lokal umkehrbar, was aus dem *Satz über die inverse Abbildung* folgt.

Herleitung der Umkehrfunktion

Sei $f(x,y)=(a,b)$ in Polarkoordinatendarstellung gegeben:

$$\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix}\quad \text{und} \quad \begin{matrix} a = R\cos\psi \\ y = R\sin\psi \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow\ f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x,y) = \frac{1}{r^2}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (R\cos\psi, R\sin\psi)$$

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{r}\cos\varphi = R\cos\psi\ \wedge\ \frac{1}{r}\sin\varphi = R\sin\psi$$

$$\Longrightarrow\ R = \frac{1}{r}\ \text{und}\ \varphi = \psi$$

$$\Longrightarrow\ (x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \left(\frac{1}{R}\cos\psi, \frac{1}{R}\sin\psi\right) = \frac{1}{R^2}(R\cos\psi, R\sin\psi) = \frac{1}{a^2+b^2}(a,b) = f^{-1}(a,b)$$

$\Longrightarrow$ f^{-1} existiert auf ganz $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, womit f auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ als global umkehrbar erkannt ist.

zu c) Man überlegt sich, dass die Abbildung f die Spiegelung am Einheitskreis analytisch beschreibt.

18. Nechť je dáno na $\mathbb{R}^2$ zobrazení

$$\begin{aligned} x &= u(1-v) \\ y &= uv\ . \end{aligned}$$

Spočtěte:

a) obraz jednotkového čtverce $[0,1]\times[0,1]$,
b) Jacobiho determinant,
c) inverzní zobrazení, pokud existuje.

$$x = u(1-v) = u - uv = u - y \quad \Rightarrow \quad x+y = u \le 1,\quad \text{da } u\in[0,1]$$

$$y = uv \in [0,1]\ ,\quad x\in[0,1]$$

$$\Rightarrow M_1 := \Big\{(u(1-v), uv) : (u,v)\in[0,1]\times[0,1]\Big\} \subseteq \Big\{(x,y) : 0\le y\le 1-x\ ,\quad x\in[0,1]\Big\} =: M_2$$

Dass auch $M_2 \subseteq M_1$ gilt, ist anhand der Umkehrabbildung gut zu erkennen:

$$\begin{aligned} u &= x + y \\ v &= \frac{y}{u} = \frac{y}{x+y} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \forall (x,y) \in M_2 \backslash \{(0,0)\} \ \exists \ (u,v) \in [0,1] \times [0,1] : u(1-v) = x \ , \quad uv = y$$

$$u = 0 \quad \Rightarrow x = y = 0$$

Jedem Element aus M_2 kann ein Urbild $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$ zugeordnet werden. Damit gilt $M_1 = M_2$ und das Bild ist bestimmt.

Die Funktionaldeterminante sei mit D bezeichnet. Es gilt:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u$$