

## 4. Cvičení

---

1. Řešte následující rovnice v okolí počátku rozvojem do řady

a)  $xy + e^x = y$ ,

b)  $\ln(1+x) - xy = y$ ,

c)  $(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

d)  $y'' - xy' - 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

e)  $xy'' + 2y' + xy = 0, y(0) = 1$

f)  $xy'' - xy' - y = 0, y'(0) = 1$

g)  $x^2y'' - x^2y' + (x-2)y = 0, y''(0) = 2$

2. Řešte diferenciální rovnice - separace proměnných

a)  $x(x+1)y(y+1) - y' = 0; \quad y(0) = -1$

b)  $y' = \frac{2xy^2}{1-x^2}, \quad y(0) = 1$

c)  $y' = \frac{y}{x}, \quad x > 0$

d)  $y' = \frac{y^2}{x^2}, \quad x > 0$

e)  $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}y' = 0$

f)  $2\sqrt{y} = y'$

g)  $(1+x^2)(1+y^2)y' + 2xy(1-y^2) = 0, \quad (0, -2)$

h)  $y' \tan(x) - y = 1, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad (\frac{\pi}{6}, 0)$

i)  $y' = \frac{x}{y}$

j)  $y' = \frac{y}{x}$

k)  $y' = \tan x \tan y$  s  $x, y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$  a  $k \in \mathbb{N}$

l)  $y' + 2xy = 0$

3. Řešte diferenciální rovnice - substituce

a)  $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$

b)  $y + (2\sqrt{xy} - x)y' = 0 \quad y(2) = 0$

c)  $y^2 - 4xy + 4x^2y' = 0$

d)  $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$

e)  $xy' = y \ln \left( \frac{y}{x} \right)$

f)  $xyy' = x^2 + y^2$  s počáteční podmínkou  $y(1) = 1$

g)  $x^2 + xy + y^2 = x^2y'$

h)  $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

i)  $y' = \frac{x+2y}{x}$

j)  $y' = \frac{y}{x+y}$

4. Řešte diferenciální rovnice - variace konstant

a)  $x^3 + y - 2xy' = 0$

- b)  $xy' - 2y = e^x(x - 2)$
- c)  $y' - y \cos x = 3 \cos x$
- d)  $xy' + 2y = x^2$
- e)  $y' = y \tan(x) + 1$  s počáteční podmínkou  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}$
- f)  $y' - \frac{y}{x} = -\sqrt{x}$  s počáteční podmínkou  $y(1) = 3$
- g)  $(1 + x^2)y' + xy = 1$  s počáteční podmínkou  $y(0) = 1$ .
- h)  $y' + \frac{1}{2x}y = \sqrt{x} \sin(x)$  s  $y(\pi) = 2\sqrt{\pi}$
- i)  $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
- j)  $y' = \frac{\sin x}{\cos x}y + \cos x$

5. Řešte diferenciální rovnice

- a)  $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$
- b)  $y'' - y = (1 + x)e^{2x}$
- c)  $y''' + 7y' + 6y = 0$
- d)  $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$
- e)  $x^2y'' + xy' + y = 0$
- f)  $x^2y'' + 6xy' + 6y = e^x$  s  $y(x) = -1$  a  $y'(1) = 2$
- g)  $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$
- h)  $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$  s  $y(1) = 1$  a  $y'(1) = 0$
- i)  $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$
- j)  $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$
- k)  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x, \quad x > 0$
- l)  $y''' - y' = e^{2x}$

6. Řešte Clairantovu diferenciální rovnici

$$y = xy' + y' - y'^2$$

$$y = xy' + y'^2$$

$$y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$$

7. Řešte d'Alembertovu diferenciální rovnici

$$y = x(1 + y') + y'^2$$

$$y = \frac{xy'^2}{2(y' + 2)}$$

$$y = x + (y')^3 - 3y'$$

8. Diferenciální rovnice

$$y' = g(x)y + h(x)y^\alpha$$

se nazývá Bernoulliho DR. Proveďte substituci

$$z = y^{1-\alpha}.$$

Jaké lineární diferenciální rovnici  $z(x)$  odpovídá?

Řešte Bernoulliho diferenciální rovnici:

$$xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$$

$$y^{n-1}(ay' + y) = x, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \neq 0, 1, \quad a \in \mathbb{R}.$$