Matematická analýza pro fyziky II

LS 2015/16, MFF UK

6. Cvičení

---

1. Buď $f(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$. Ukažte, že pomocí

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|, (x, y \in \mathbb{R})$$

je na $\mathbb{R}$ definována metrika. Srovnejte konvergenci vzhledem k této metrice s klasickou konvergencí.

Eine Metrik muss folgende 3 Eigenschaften erfüllen:

(a) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(b) $d(x, y) = d(y, x)$
(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Jetzt prüfen wir das nach:

(a) $d(x, y) \geq 0$ ist klar (durch den Betrag). $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ gilt, da arctan eine streng monoton wachsende Funktion ist und damit injektiv.
(b) $d(x, y) = d(y, x)$ ist offensichtlich erfüllt.
(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$: Wir setzen $a^* = \arctan x$,$b^* = \arctan y$ und $c^* = \arctan z$. Klar ist, dass $a^*, b^*, c^* \in \mathbb{R}$. Für beliebige reelle Zahlen gilt aber: $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$ (Dreiecksungleichung im Reellen). Damit gilt es auch für die Werte a^*, b^*, c^*.

Also ist $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ eine Metrik.

Eine Folge $\{x_n\}_n$ heißt nun konvergent gegen x, falls $d(x_n, x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Um die Konvergenzen zu vergleichen, benötigen wir folgende Ungleichung.

$$\left|\frac{\arctan x - \arctan y}{x - y}\right| = \left|\frac{1}{1 + \xi^2}\right| \leq 1 \Rightarrow |\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$$

Nun folgt: Wenn $\{x_n\}_n$ gegen x konvergiert, so strebt $|x_n - x|$ gegen 0 und somit gilt $|\arctan x_n - \arctan x| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Also ist jede konvergente Folge bzgl. der üblichen Metrik auch in dieser Metrik konvergent. Für die Umkehrung benutzen wir einen Satz aus Analysis 1: Ist eine Funktion h stetig, so gilt $x_n \to x \Rightarrow h(x_n) \to h(x)$. Wir wissen, dass die Funktion $\tan x$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ stetig ist. Nun nehmen wir eine Folge aus $\mathbb{R}$ die bezüglich der arctan-Metrik konvergiert, d.h.

$$|\underbrace{\arctan x_n}_{y_n} - \underbrace{\arctan x}_{y}| \to 0$$

Dabei sind $y_n, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $y_n \to y$. Also gilt $\tan y_n \to \tan y$, d.h. $x_n \to x$.

Die Konvergenzbegriffe sind zwar gleich, aber bzgl der arctan-Metrik ist $\mathbb{R}$ nicht mehr vollständig. Z.B. ist $x_n = n$ eine Cauchyfolge, da $|\arctan x_{n+k} - \arctan x_n| \to 0$, aber diese Folge ist nicht konvergent (da der Grenzwert ∞ nicht zu $\mathbb{R}$ gehört).

2. Buď (X, d) metrický prostor. Dokažte pro libovolná $x, y, z, u, v \in X$ platí

a) $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$,
b) $|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v)$.

zu a)

- $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \Leftrightarrow d(x,z) - d(y,z) \le d(x,y)$
- $d(y,z) \le d(y,x) + d(x,z) \Leftrightarrow d(y,z) - d(x,z) \le d(x,y)$
- da beide Ungleichungen immer zutreffen, folgt $|d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y)$

zu b) (* bedeuted Dreiecksungleichung für reelle Zahlen)

$$d(x,u)+d(y,v) \overset{a)}{\ge} |d(x,y)-d(y,u)|+|d(y,u)-d(u,v)| \overset{*}{\ge} |d(x,y)-d(y,u)+d(y,u)-d(u,v)| = |d(x,y)-d(u,v)|$$

3. Ukažte, že pomocí

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &:= |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \\ \text{und } \|x\|_\infty &:= \max\{|x_i| : i = 1,2,3,\ldots,n\} \end{aligned}$$

jsou na $\mathbb{R}^n$ definovány dvě normy $(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$.

Ukažte, že posloupnost $\{x^n\}$ konverguje k x^0 vzhledem k $\|.\|_1$, právě když konverguje k x^0 i vzhledem k $\|.\|_\infty$.

Načrtněte pro tyto normy v $\mathbb{R}^2$ množiny $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \|x\| \le 1\}$.

Die Dreiecksungleichungen für die beiden Ausdrücke beruhen auf der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag. Die anderen Normeigenschaften sind mehr oder weniger trivial. Der Vergleich der beiden Konvergenzbegriffe beruht auf den Ungleichungen

$$||x||_\infty \le ||x||_1 \le n||x||_\infty \ .$$

4. Buď (X,d) metrický prostor. Dokažte, že sjednocení libovolně mnoha a průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina. Dokaže, že průnik libovolně mnoha a sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

5. Buď (X,d) metrický prostor a $(x_n)_{n\ge1}$ konvergentní posloupnost v X. Dokažte, že její limita je určena jednoznačně.

6. Nechť $1 \le p < \infty$. Pak

$$\ell_p = \Big\{(x_n)_{n\ge1} : \|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\Big)^{1/p} < \infty\Big\}$$

a

$$\ell_\infty = \Big\{(x_n)_{n\ge1} : \|x\|_\infty := \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\Big\}.$$

Dokažte, že $\ell_1 \subset \ell_2 \subset \ell_\infty$ a obě tyto inkluze jsou vlastní.

*Podaří se Vám najít posloupnost bodů $(x^n)_{n\ge1}$ z ℓ_1 (tedy posloupnost posloupností!) a $x \in \ell_1$ takové, aby

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\|_\infty = 0,$$

ale (x^n) nekonverguje k x v ℓ_1.

7. Buď $-\infty < a < b < \infty$. Vybavme prostor spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$ normou

$$\| f \| := \Big(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\Big)^{1/2}.$$

(i) Ukažte, že $\| \cdot \|$ je skutečně norma na této množině.

(ii) Ukažte, že takto normovaný prostor není úplný (tj. není Banachův).

Zu (i):

Es ist zu zeigen, daß

(a) $||f|| = 0 \implies f(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$,

(b) $||\lambda f|| = |\lambda| \cdot ||f||$ für alle stetige Funktionen f und alle $\lambda \in \mathbb{R}$,

(c) $||f+g|| \leq ||f|| + ||g||$ für alle stetige Funktionen f und g.

Zu (a) Wir nehmen an, es gibt ein $x_0 \in (a,b)$, so daß $f(x_0) \neq 0$. Dann gibt es ein δ-Umgebung des Punktes x_0, wo $|f|$ größer ist als $\dfrac{|f(x_0)|}{2}$. Folglich ist

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \geq \delta \frac{|f(x_0)|^2}{4} > 0.$$

Zu (b) - trivial

Zu (c) Es gilt (Höldersche Ungleichung)

$$\int_a^b |f(x)| \cdot |g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Wir multiplizieren diese Ungleichung mit 2 und addieren zu beiden Seiten den Ausdruck

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx + \int_a^b |g(x)|^2 dx.$$

So erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx &\leq \int_a^b |f(x)|^2 dx + \int_a^b |g(x)|^2 dx + 2\int_a^b |f(x)| \cdot |g(x)| dx \\ &\leq \left[\left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}\right]^2.\end{aligned}$$

Zu (ii):

Wir beweisen es für $a=-1$, $b=1$. Natürlich kann man alle die Betrachtungen durch entsprechende Dilatationen und Translationen auch für beliebige $a<b$ durchführen.

Sei für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}, \\ nx & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

und

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x<0, \\ 0 & x=0, \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

Die Dreiecksungleichung liefert

$$||f_n - f_m|| \leq ||f_n - \operatorname{sgn}|| + ||\operatorname{sgn} - f_m|| = \sqrt{\frac{2}{3n}} + \sqrt{\frac{2}{3m}}. \tag{1}$$

Die Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist also eine Cauchy-Foglge bzg. der Norm $||\cdot||$.

Nehmen wir an, daß der Raum der stetigen Funktionen mit der Norm $||\cdot||$ vollständig ist. Dann gibt es eine *stetige* Funktion f mit $||f_n - f|| \to 0$. Für die muss aber gelten

$$||f - \operatorname{sgn}|| \leq \underbrace{||f - f_n||}_{\to 0} + \underbrace{||f_n - \operatorname{sgn}||}_{\to 0}$$

und folglich $||f - \operatorname{sgn}|| = 0$. Analog zu (i)(a) zeigt man, dass dann $f(x) = -1$ für $x \in (-1,0)$ und $f(x) = 1$ für $x \in (0,1)$. Das kann aber keine stetige Funktion erfüllen.

Bemerkung: Man überlegt sich, daß die Dreiecksungleichung auch für unstetige Riemann-integrierbare Funktionen gilt. Das berechtigt (1).

8. Buď $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$, $1 \le x \le 2$.
(i) Ukažte, že f je kontraktivní zobrazení $[1,2]$ do téhož intervalu. Určete Lipschitzovskou konstantu tohoto zobrazení
(ii) Kolik iterací je zapotřebí, abychom z bodu $x_0 = 1.5$ dosáhli pevného bodu tohoto zobrazení s přesností alespoň 10^{-3}?

Zu (i): Es gilt

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}, \qquad f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0, \qquad f(1) = \frac{3}{2}, \qquad f(2) = \frac{4}{3}.$$

Die Funktion f ist also monoton und $f([1,2]) = [\frac{4}{3}, \frac{3}{2}] \subset [1,2]$.

Die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}\right| = \frac{|x-y|}{(x+1)(y+1)} \le \frac{1}{4}|x-y|$$

zeigt, daß die Kontraktionskonstante kleiner gleich $\frac{1}{4}$ ist. Durch $x = 1, y = 1+\varepsilon$ zeigt man, daß das auch die beste Konstante ist.

Zu(ii):

Die Fixpunktgleichung lautet

$$1 + \frac{1}{x+1} = x,$$

also $x = \sqrt{2}$. Iterationsfehler

$$|x_k - \sqrt{2}| \le \frac{\alpha^k}{1-\alpha}|x_1 - x_0|,$$

wobei $x_0 = \frac{3}{2}$ und $x_1 = \frac{7}{5}$. Wir suchen also $k \in \mathbb{N}$, so daß

$$\frac{\alpha^k}{1-\alpha}|x_1 - x_0| = \frac{1}{4^{k-1}}\frac{1}{30} < \frac{1}{10^3}.$$

Das ist für alle $k \ge 4$ erfüllt.

9. Pro funkci f spojitou na intervalu $[0, 1/2]$ uvažujeme zobrazení

$$\mathcal{K}f(x) := 1 + \int_0^x f(t)\,dt\,, \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2}\,.$$

$\mathcal{K}$ tedy přiřazuje každé funkci f jinou funkci, a sice $\mathcal{K}f$. Ukažte:
(i) $\mathcal{K}$ zobrazuje Banachův prostor spojitých funkcí na $[0, 1/2]$ (s maximovou normou) do sebe samého.
(ii) $\mathcal{K}$ je kontraktivní. Určete jeho Lipschitzovskou konstantu.
(iii) Spočtěte pevný bod zobrazení $\mathcal{K}$ pomocí vhodných iterací. Zvolte jako počáteční vektor funkci $f(x) \equiv 0$.
Nápověda: V jakém vztahu je derivace pevného bodu a toho pevný bod sám?
(iv) Zvolte jako počáteční vektor funkci $f(x) = \sin x$ a udejte počet iterací, které zaručují chybu nejvýše $\le 10^{-3}$.

Zu(i): Nach dem Hauptsatz der D/I Rechnung ist $\mathcal{K}f$ stetig.

Zu(ii):

$$||\mathcal{K}f - \mathcal{K}g|| = \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]}\left|\int_0^x f(t) - g(t)dt\right| \le \frac{||f-g||}{2}.$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ ist auch die beste Konstante $(f(x) = 1, g(x) = 0)$.

Zu(iii):

$$
\begin{aligned}
f_0 &= 0\\
f_1(x) &= \mathcal{K} f_0 = 1\\
f_2(x) &= \mathcal{K} f_1 = 1 + x\\
f_3(x) &= \mathcal{K} f_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}\\
f_4(x) &= \mathcal{K} f_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}\\
&\vdots\\
f_{n+1}(x) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}
\end{aligned}
$$

Diese Folge konvergiert offensichtlich gegen $f(x) = e^x$. Diese Funktion erfüllt wirklich die Identität

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt.$$

Zu(iv):

Durch Induktion beweisst man

$$f_{n+1} = \mathcal{K} f_n = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+n)!} x^{2j+n}.$$

Folglich ist

$$||e^x - f_k(x)|| \leq \underbrace{||e^x - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j}{j!}||}_{\leq \sup\limits_{x \in [0,\frac{1}{2}]} \frac{e^x}{k!} = \frac{\sqrt{e}}{k!}} + \underbrace{||\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+n)!} x^{2j+n}||}_{\frac{2^{-k+1}}{(k+1)!}}$$

Für alle $k \geq 7$ ist der Fehler schon kleiner als 10^{-3}.

10. Nahraďte v předchozí úloze zobrazení $\mathcal{K}$ pomocí

$$\mathcal{K}^* f(x) := 1 + \int_0^x t\, f(t)\, dt\,, \qquad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\,,$$

dokažte existenci pevného bodu a najděte jej!

Wir suchen eine Funktion y mit

$$y(0) = 1, \qquad y(x) = 1 + \int_0^x ty(t)dt,$$

also $y'(x) = xy(x)$. Die Lösung kann man erraten: $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.

Man kann auch $f_0(x) = 0$ setzen und durch Induktion

$$f_{n+1} = \mathcal{K} f_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2j}}{2^j j!}$$

beweisen.

11. Buď

$$\begin{aligned} K &= \{f \in C([0,1]) : ||f|| \le 1\}, \\ A &= \{f \in C([0,1]) : f \quad \text{je monotónní neklesající}\}, \\ B &= \{f \in C([0,1]) : f \quad \text{je 1-Lipschitzovsky spojitá, t.j.} |f(x)-f(y)| \le |x-y| \quad \text{pro všechna} \;\; x,y \in [0,1]\}. \end{aligned}$$

Ukažte:

(a) A a B jsou uzavřené v $C([0,1])$.

(b) $A^\circ = B^\circ = \emptyset$.

(c) $K \cap A$ není kompaktní.

(d)* $K \cap B$ je kompaktní.

Zu a)

Wir zeigen, daß A abgeschlossen ist. Sei $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ eine Folge Funktionen aus A, die in dem Raum $C([0,1])$ konvergiert, d.h. $f_n \rightrightarrows f$. Es ist zu zeigen, daß f in A liegt. Für $x < y$ folgt aber sofort

$$0 \le f_n(x) - f_n(y) \to f(x) - f(y),$$

f ist also auch monoton nicht fallend, folgend liegt sie in A.

Wir zeigen, daß B abgeschlossen ist. Sei $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ eine Folge Funktionen aus B, die in dem Raum $C([0,1])$ konvergiert, d.h. $f_n \rightrightarrows f$. Es ist zu zeigen, daß f in B liegt. Für alle $x,y \in [0,1]$ gilt aber

$$|x-y| \ge |f_n(x) - f_n(y)| \to |f(x) - f(y)|.$$

Zu b)

Sei $f \in A^\circ$. Es gibt also $\varepsilon > 0$, so daß $B(f,\varepsilon) \subset A$. Wir bezeichnen $a = f(1) - f(0) \ge 0$. Dann gilt

$$a = f(1) - f(0) = f(1) - f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0).$$

Es gibt also ein $k \in \{0,1,2,\dots n-1\}$ mit

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \le \frac{a}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{(für } n \text{ gross genug).}$$

Wir betrachten die Funktion

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \;\le \frac{k}{n} \\ -\frac{3}{4}n\varepsilon(t - \frac{k}{n}), & \frac{k}{n} \le t \le \frac{k+1}{n} \\ -\frac{3}{4}\varepsilon, & \frac{k+1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

Es gilt

(a) $||g|C([0,1])|| = \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$.

(b) Folglich ist $f + g \in B(f,\varepsilon)$.

(c) $(f+g)\left(\frac{k+1}{n}\right) - (f+g)\left(\frac{k}{n}\right) < \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3}{4}\varepsilon < 0$.

$f + g$ liegt also *nicht* in A, ein Widerspruch.

Sei $f \in B^\circ$ und $\varepsilon > 0$ mit $B(f,\varepsilon) \subset B$. Dann ist für

$$g(t) = \begin{cases} 3t, & 0 \le t \le \frac{\varepsilon}{6}, \\ \frac{\varepsilon}{2}, & \frac{\varepsilon}{6} \le t \le 1, \end{cases}$$

$f+g \in B(f,\varepsilon)$, aber
$$|(f+g)\left(\frac{\varepsilon}{6}\right) - (f+g)(0)| \geq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}.$$
$f+g$ liegt also *nicht* in B, ein Widerspruch.

Zu c)

Man betrachtet die Folge
$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2^n}, \\ 2^n(t - \frac{1}{2^n}), & \frac{1}{2^n} \leq t \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \\ 1, & \frac{1}{2^{n-1}} \leq t \leq 1. \end{cases}$$
Alle $f_n, n = 1, 2, \ldots$ liegen in A und $||f_n - f_m|| = 1$, falls $n \neq m$. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ besitzt also keine konvergente Teilfolge.

Zu d)

Die Aufgabe folgt aus dem Satz von Arzelà-Ascoli (siehe z.B. D. Werner, Funktionalanalysis, 5. Auflage, Seite 68).

Direkte Lösung von dieser Aufgabe kopiert eigentlich den Beweis von diesem Satz. Man betrachtet die Folge
$$\begin{aligned} &x_{0,0} = 0, \quad x_{0,1} = 1, \\ &x_{1,0} = 0, \quad x_{1,1} = \frac{1}{2}, \quad x_{1,2} = 1, \\ &x_{2,0} = 0, \quad x_{2,1} = \frac{1}{4}, \quad x_{2,2} = \frac{1}{2}, \quad x_{2,3} = \frac{3}{4}, \quad x_{2,4} = 1 \\ &\quad usw. \end{aligned}$$
Weiter betrachten wir eine beliebige Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B \cap K$.

Man sieht, daß die Folge $f_1(0), f_2(0), f_3(0), \ldots$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen ist. Nach dem Satz von Weierstrass (Analysis I.) besitzt sie eine konvergente Teilfolge, $f_1^0(0), f_2^0(0), f_3^0(0), \ldots, f_n^0(0) \to f(0)$. Man kann zusätzlich voraussetzen, daß $|f_n^0(0) - f(0)| \leq \dfrac{1}{2^n}$. Die Folge $f_1^0(1), f_2^0(1), f_3^0(1), \ldots$ ist wieder eine beschränkte Folge reeller Zahlen und besitzt eine konvergente Teilfolge, z.B. $f_1^1(1), f_2^1(1), f_3^1(1), \ldots, f_n^1(1) \to f(1)$, wieder mit $|f_n^1(1) - f(1)| \leq \dfrac{1}{2^n}$. Induktiv konstruiert man Folgen $f_1^k, f_2^k, f_3^k, \ldots$ mit Folgenden Eigenschaften:

(a) $f_1^k, f_2^k, f_3^k, \ldots$ ist eine Teilfolge der Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(b) $f_i^k(x_{k,n})$ ist konvergent für $i \to \infty$ und $n = 0, 1, \ldots, 2^k$ und den Grenzwert bezeichnet man $f(x_{k,n})$.

(c) $|f_i^k(x_{k,n}) - f(x_{k,n})| \leq \dfrac{1}{2^i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $n = 0, 1, \ldots, 2^k$.

Dadurch wird gleichzeitig eine neue Funktion f auf den Stellen $x_{k,n}$ definiert.

Die gesuchte konvergente Teilfolge definiert man dann durch *Diagonalpriznip.* $g_1 = f_1^1, g_2 = f_2^2, g_3 = f_3^3, \ldots$. Wir beweisen jetzt, daß diese Folge gleichmäßig konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Wir finden ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so, daß
$$|g_j(t) - g_k(t)| < \varepsilon$$
für alle $t \in [0,1]$ und alle $j \geq k \geq k_0$ gilt.

Zu jedem $t \in [0,1]$ gibt es ein $x_{k,n}$ mit $|t - x_{k,n}| \leq \dfrac{1}{2^k}$. Wir benutzen folgende Abschätzung
$$|g_j(t) - g_k(t)| \leq \underbrace{|g_j(t) - g_j(x_{k,n})|}_{I} + \underbrace{|g_j(x_{k,n}) - g_k(x_{k,n})|}_{II} + \underbrace{|g_k(x_{k,n}) - g_k(t)|}_{III}.$$

Aus der 1−Lipschitz-Stetigkeit folgt $I \leq \dfrac{1}{2^k}$ und $III \leq \dfrac{1}{2^k}$. II kann man aber durch die Bedingung (c) Abschätzen ($g_j = f_j^j$ ist nähmlich gleich f_J^k für ein $J \geq k$):

$$II = |g_j(x_{k,n}) - g_k(x_{k,n})| \leq |g_j(x_{k,n}) - f(x_{k,n})| + |f(x_{k,n}) - g_k(x_{k,n})| \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k}.$$

Insgesamt ist $|g_j(t) - g_k(t)| \leq \frac{4}{2^k} < \varepsilon$ für k_0 gross genug. Die Folge $\{g_j\}$ konvergiert also gleichmäßig. Den Grenzwert bezeichnen wir wieder mit f und nach (a) liegt f wieder in $B \cap K$.

12. Buď (X, d) metrický prostor. Ukažte, že

a) Dokažte, že sjednocení libovolně mnoha a průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.

b) Dokažte, že průnik libovolně mnoha a sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

c) Pro uzavřené a disjunktní množiny A a B existují vždy také otevřené a disjunktní množiny U a V s $A \subset U$ a $B \subset V$.

d) Vzdálenost dvou uzavřených disjunktních množin může být nula.

e) Ale $d(A, K) > 0$, pokud je A uzavřená, K kompaktní a $A \cap K = \emptyset$.

f) Pro každou množinu $M \neq \emptyset$ a každé $\epsilon > 0$ je množina $U := \{x \in X : d(x, M) < \epsilon\}$ otevřená.

zu a) A_i $i \in I$ seien beliebige offene Mengen. $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ und $B = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. Wir wissen: Eine Menge ist dann offen, wenn es um jedes Element der Menge eine offene Kugel gibt, die noch ganz in der Menge liegt.

- Wir zeigen: A ist offen.

1. Fall: $A = \emptyset$ ist offen

2. Fall: $x \in A \Rightarrow x \in A_i \ \forall i = 1, ..., n \Rightarrow \forall i \ \exists \epsilon_i$ mit $K_{\epsilon_i}(x) \subset A_i$ da A_i offen $\Rightarrow$ für $\epsilon^* = \min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$ folgt $K_{\epsilon^*}(x) \subset A_i \ \forall i \Rightarrow K_{\epsilon^*}(x) \subset A$

- Wir zeigen: B ist offen.

1. Fall: $B = \emptyset$ ist offen

2. Fall: $x \in B \Rightarrow \exists i^*$ mit $x \in A_i \Rightarrow \exists \epsilon$ mit $K_\epsilon(x) \subset A_{i^*}$ da A_{i^*} offen $\Rightarrow K_\epsilon(x) \subset B$

Also finden wir um alle Elemente von A und B offene Kugeln, die ganz in der Menge liegen.

zu b) o.B.d.A. A und B nichtleer. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A^c \cap B^c$ offen

Nun sei $U = \{x \in X : x \in A \text{ oder } d(x, A) < d(x, B)\} = \{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}$ $V = \{x \in X : x \in B \text{ oder } d(x, A) > d(x, B)\} = \{x \in X : d(x, A) > d(x, B)\}$. Diese Mengen sind disjunkt und $A \subset U$ und $B \subset V$. Diese Mengen sind auch offen, denn es gilt:

$x \in U \Rightarrow d(x, A) < d(x, B) \Rightarrow K_{d(x,B)-d(x,A)}(x) \subset U$ (analog für V).

zu c) Z.B. $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \geq y \geq -1, x \geq 0\}$ und $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \geq y \geq e^{-x}, x \geq 0\}$ Beide Mengen sind abgeschlossen und disjunkt, haben aber offensichtlich (im Unendlichen) Abstand 0.

zu d) Nach Aufgabe 5c) der 20. Serie, ist $d(A, x)$ eine Stetige Funktion. Nach der Vorlesung gilt nun: Da K kompakt ist, gilt:

$$\exists x* \in K: \ d(A, x*) = d(A, K).$$

Nun nehem wir an $d(A, x*) = 0$:
$\exists \{x_n\}_n \subset A: \ d(x_n, x^*) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow x^*$ ist Häufungspunkt von $A \Rightarrow x^* \in A$

Das ist aber ein Widerspruch zu $A \cap K = \emptyset$, also muß $d(A, x^*) = d(A, K) > 0$ sein.

zu e) Es gilt:

$$U = \{x \in X : d(x, M) < \epsilon\} = \{x \in X : d(x, y) < \epsilon,\, y \in M\} = \bigcup_{y \in M} \{x \in X : d(x, y) < \epsilon\} = \bigcup_{y \in M} K_\epsilon(y).$$

$\bigcup\limits_{y \in M} K_\epsilon(y)$ ist die Vereinigung offener Kugeln und ist nach a) auch offen.

13. Buď (X, d) úplný metrický prostor a $(A_k)_{k=0}^{\infty}$ posloupnost neprázdných uzavřených množin a $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ a diam $A_k \to 0$ $(k \to \infty)$. Ukažte, že $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} A_k \neq \emptyset$.

   Je možné předpoklad diam $A_k \to 0$ $(k \to \infty)$ vynechat?

   Da A_k nichtleer ist, können wir ein beliebiges Element daraus wählen. So bekommen wir eine Folge $\{x_n\}_n$. Da $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ gilt, folgt

$$\{x_n\}_{n=k}^{\infty} \subset A_k \; \forall k. \tag{2}$$

   Weiterhin wissen wir, dass

$$d(x_n, x_m) \leq \text{diam } A_{\min\{m,n\}}$$

   ist. Da aber diam $A_k \to 0$ $(k \to \infty)$ folgt, dass $\{x_n\}_n$ eine Cauchyfolge ist. Jede Cauchyfolge ist in einem vollständig metrischen Raum konvergent, also wissen wir: $\exists x^* \in X$ mit $x_n \to x$ und damit $d(x_n, x^*) \to 0$. Wegen (2) ist x^* ein Häufungspunkt aller Mengen A_k, also (da A_k abgeschlossen) $x^* \in A_k$. Damit ist aber $x^* \in \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ also $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} A_k \neq \emptyset$.

   diam $A_k \to 0$ $(k \to \infty)$ ist wesentlich, denn: $A_k = \{x \in \mathbb{R} : \; x \geq k\}$ erfüllt alle Voraussetzungen, es gilt lediglich

$$\text{diam } A_k = \infty \; \forall k.$$

   Es gilt jedoch

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k = \emptyset,$$

   da es keine reelle Zahl gibt, die größer als alle natürlichen Zahlen ist.

14. Buď (X, d) metrický prostor a $\{x_n\}$ cauchyovská posloupnost v X, která má podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ s $x_{n_k} \to x$, $x \in X$. Dokažte, že pak i $\{x_n\}$ konverguje k x.

   Es sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine natürliche Zahl K mit $d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$ für $k > K$ und eine natürliche Zahl N mit $d(x_n, x_m) < \; frac\varepsilon 2$ für $n, m > N$. Aus der Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ wählen wir ein Element mit $k > K$ und $n_k > N$. Dann gilt für $n > N$

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

15. Dokažte:

   a) Úplný podprostor metrického prostoru je uzavřený.

   b) Uzavřený podprostor úplného metrického prostoru je úplný.

   c) Kompaktní prodprostor je úplný.

   a) Es sei $\{x_n\}$ eine Folge aus M, die gegen ein Element x des metrischen Raumes konvergiert. Weil sie konvergiert, ist sie eine Cauchy-Folge, und weil M vollständig ist, muss sie gegen ein Element aus M konvergieren. Da der Grenzwert eindeutig bestimmt ist, liegt also der Grenzwert x in M.

   b) Es sei $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge in M. Da der gesamte Raum vollständig ist, muss sie konvergieren. Weil M abgeschlossen ist, muss dieser Grenzwert zu M gehören.

   c) Es sei $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge in M. Da M kompakt ist, enthält sie eine Teilfolge, die gegen ein Element x in M konvergiert. Dann konvergiert auch die gesamte Folge $\{x_n\}$ gegen x (siehe Aufgabe 2).

16. Dokažte: Zobrazení $f : X \to Y$ $(X, Y$ metrické prostory) je právé tehdy spojité, pokud je vzor $f^{-1}(G) = \{x \in X : \quad f(x) \in G\}$ každé otevřené (uzavřené) podmnožiny G prostoru Y otevřená (uzavřená) podmnožina prostoru X.

Es sei f stetig, G offen und $x_0 \in f^{-1}(G)$. Wir wählen eine positive Zahl ε mit $y \in G$ für alle y mit $d_Y(y, f(x_0)) < \varepsilon$. Ferner wählen wir eine positive Zahl δ mit $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für alle x mit $d_X(x, x_0) < \delta$. Dann impliziert $d_X(x, x_0) < \delta$ die Ungleichung $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ und somit $f(x) \in G$, d. h. $x \in f^{-1}(G), f^{-1}(G)$ ist also offen. Umgekehrt sei $x_0 \in X, \varepsilon > 0$ und $G = \{y : d_Y(y, f(x_0)) < \varepsilon\}$. Bekanntlich ist G offen und damit auch $f^{-1}(G)$. Offenbar ist $x_0 \in f^{-1}(G)$. Wir wählen eine positive Zahl δ mit $\{x : d_X(x, x_0) < \delta\} \subset f^{-1}(G)$. Dann impliziert $d_X(x, x_0) < \delta$ die Aussage $f(x) \in G$ und damit $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, also ist f stetig im Punkt x_0, der beliebig vorgegeben war. Die analoge Charakterisierung der Stetigkeit mit abgeschlossenen Mengen beruht dann auf der Tatsache, dass das Komplement des Urbildes einer Menge das Urbild des Komplementes dieser Menge ist.

17. Pro kompaktní podmnožinu M metrického prostoru X definujeme $d(x, M) = \inf_{z \in M} d(x, z)$, $x \in X$. Dokažte:

a) $d(x, M) > 0$ pro $x \notin M$. b) Infinum se nabývá. c) Funkce $f(x) = d(x, M)$ je spojitá.

a) Das Gegenteil $d(x, M) = 0$ würde entsprechend der Definition des Infimum die Existenz einer Folge $\{x_n\}$ in M mit $\lim_{n \to \infty} d(x, x_n) = 0$ implizieren. Weil M abgeschlossen ist, würde daraus $x \in M$ folgen, was $x \notin M$ widerspräche.

b) Jede stetige Funktion auf kompakter Menge nimmt ihr Infimum Infimum an, insofern ist b) eine Folgerung aus c).

c) Wir zeigen die Stetigkeit im Punkt x_0. Aus der Dreiecksungleichung

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \quad \forall y \in M$$

folgt zunächst

$$d(x, M) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y)$$

und danach auch

$$d(x, M) \leq d(x, x_0) + d(x_0, M),$$

oder

$$d(x, M) - d(x_0, M) \leq d(x, x_0).$$

Aus Symmetriegründen muss dann genauso

$$d(x_0, M) - d(x, M) \leq d(x, x_0)$$

gelten, insgesamt also

$$|d(x, M) - d(x_0, M)| \leq d(x, x_0).$$

Daraus ist die Stetigkeit von f im Punkt x_0 abzulesen.