Matematická analýza pro fyziky II

LS 2015/16, MFF UK

5. Cvičení

1. Řešte Ricattiovu diferenciální rovnice
$$y' = y^2 + \frac{1}{2x^2}$$
Návod: Substituujte $u = \frac{1}{y}$.
Lösen Sie die Ricattische Differentialgleichung
$$y' = y^2 + \frac{1}{2x^2}$$
Hinweis: Substitutieren Sie $u = \frac{1}{y}$.
$$\begin{aligned} u' &= -\frac{y'}{y^2} \\ y' &= \frac{-u'}{u^2} \\ u' &= -1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{x}\right)^2 \end{aligned}$$
Substitution: $z = \frac{u}{x}$
$$\begin{aligned} z' &= \frac{u'x - zx}{x^2} = \frac{u' - z}{x} \\ u' &= xz' + z \\ xz' + z &= -1 - \frac{1}{2}z^2 \\ z' &= \frac{1 + \frac{1}{2}z^2 + z}{x} \\ \int \frac{\mathrm{d}z}{1 + (z+1)^2} &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{2x} \\ \arctan(z+1) &= -\frac{1}{2}\ln|x| + c \\ \frac{u}{x} + 1 = \frac{1}{xy} + 1 &= \arctan\left(c - \frac{1}{2}\ln|y|\right) \end{aligned}$$

2. Řešte diferenciální rovnice
$$\begin{aligned} xy' + y &= y^2 \ln x \\ 3y^2y' - ay^3 &= x + 1 \\ y' + 2xy &= 2x^3y^3 \end{aligned}$$
LĂ¶sen Sie die Differentialgleichung
$$xy' + y = y^2 \ln x$$
Bernoulli-Dgl fĂĽr $a = 2$.
$$\begin{aligned} y' &= -\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x}\ln x \\ z &= y^{1-2} = \frac{1}{y} \\ z' &= -\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{xy} - \frac{\ln x}{x} = \frac{z}{x} - \frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

Homogene Lösung: $z' = \frac{z}{x}$ und $z = cx$.
Variation der Konstanten. $z = c(x)x$

$$\begin{aligned} c'(x)x + c(x) &= c(x) - \frac{\ln x}{x} \\ c'(x) &= -\frac{1}{x^2}\ln x \\ c(x) &= \int \frac{-1}{x^2}\ln x \mathrm{d}x = \frac{1}{x}(\ln x + 1) \end{aligned}$$

Spezielle Lösung:

$$z = 1 + \ln x$$

Allgemeine Lösung:

$$y = \frac{1}{cx + 1 + \ln x}$$

$$3y^2y' - ay^3 = x + 1$$

Bernoulli-Dgl

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{a}{3}y + \frac{x+1}{3y^2} \\ z &= y^{1-(-2)} = y^3 \\ z' &= 3y^2y' = ay^3 + x + 1 = az + x + 1 \end{aligned}$$

Homogene Lösung: $z = ce^{ax}$.
Variation der Konstanten. $z = c(x)e^{ax}$

$$\begin{aligned} c'(x)e^{ax} + ac(x)e^{ax} &= ac(x)e^{ax} + x + 1 \\ c'(x) &= (x+1)e^{-ax} \\ c(x) &= -\frac{x+1}{a}e^{-ax} - \frac{1}{a^2}e^{-ax} \end{aligned}$$

Spezielle Lösung:

$$z = -\frac{x+1}{a} - \frac{1}{a^2}$$

Allgemeine Lösung:

$$a^2y^3 = ce^{ax} - a(x+1) - 1$$

$$y' + 2xy = 2x^3y^3$$

Bernoulli-Dgl

$$\begin{aligned} y' &= -2xy + 2x^3y^3 \\ z &= y^{1-3} = \frac{1}{y^2} \\ z' &= 4xz - 4x^3 \end{aligned}$$

Homogene Lösung: $z = ce^{2x^2}$.
Variation der Konstanten. $z = c(x)e^{2x^2}$

$$\begin{aligned} c'(x)e^{2x^2} + 4xc(x)e^{2x^2} &= 4xc(x)e^{2x^2} - 4x^3 \\ c'(x) &= -4x^3)e^{-2x^2} \\ c(x) &= x^2e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2} \end{aligned}$$

Spezielle Lösung:

$$z = x^2 + \frac{1}{2}$$

Allgemeine Lösung:

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}}}$$

3. Řešte okrajové úlohy

a)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

s počáteční podmínkou $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & +4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

s počáteční podmínkou $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

s počáteční podmínkou $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösen Sie das Anfangswertproblem

a)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

zur Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & +4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

zur Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

zur Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a)

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+2) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}}$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -3$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + B \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Einsetzen des Anfangswertes:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A = 1 = B$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

b)

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+1) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$\text{EW:} \quad \lambda = 1 \quad \text{doppelt}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

weitere Lösung: $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] e^t$.

Allgemeine Lösung:

$$\left[A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + bt \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] e^t$$

Einsetzen der Anfangsbedingung:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = 0, \quad B = 1$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ 1+t \end{pmatrix} e^t$$

c)

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+2) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6$$

$$\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-13}$$

$$\lambda_1 = 2+3i \quad \lambda_2 = 2-3i$$

Allgemeine (reelle) Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[A \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ -\cos 3t - 3\sin 3t \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ 3\cos 3t - \sin 3t \end{pmatrix} \right] e^{2t}$$

Einsetzen des Anfangswertes:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = 1 = B$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\sin 3t + \cos 3t) \\ 2\cos 3t - 4\sin 3t \end{pmatrix} e^{2t}$$

4. Určete obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic

a)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungproblems

a)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{aligned}
0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 \\
\lambda_{1/2} &= 1 \\
\lambda_3 &= 7 \\
\lambda_{1/2}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\lambda_3: \quad \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] e^t + C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{7t}$$

b)

$$\begin{aligned}
0 = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 \\
\lambda_{1/2} &= -1 \\
\lambda_3 &= 3 \\
\lambda_{1/2}: \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\lambda_3: \quad \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^t + C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{3t}$$

c)

$$0 = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 12 & -2 \\ -3 & -4-\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$$

$$\lambda_{1/2/3} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -2 \\ -3 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -2 \\ -3 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -2 \\ -3 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left\{ A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + B \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right.$$

$$\left. + C \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\} e^{2t}$$