

3. Cvičení

1. Řešte následující diferenciální rovnice;

a) $y' = e^{2x-y}$

b) $y' = \sin(x-y)$ substituce: $z(x) = x - y(x)$

c) $y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}$

d) $y' - y \cdot \cos x = 3 \cos x$

e) $x^3 + y - 2xy' = 0$

f) $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$ substituce $z(x) = \frac{y(x)}{x}$

2. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice:

a) $y'' - 2y' + y = e^x$

b) $y'' - y = f(x)$ s $f(x) = x$, $f(x) = \sin x$

c) $y'' + y = f(x)$ s $f(x) = x$, $f(x) = \sin x$

3. Najděte řešení diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou:

a) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2, & x_1(0) &= 0 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 2x_2, & x_2(0) &= 5 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 - 4x_2, & x_1(0) &= 3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2, & x_2(0) &= 1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 + 2x_2, & x_1(0) &= 2 \\ \dot{x}_2 &= -5x_1 + x_2, & x_2(0) &= 2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 + x_2 - 36t, & x_1(0) &= -2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + x_2 - 2e^t, & x_2(0) &= 3 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -5x_1 + 2x_2 + e^t, & x_1(0) &= 0 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 6x_2 + e^{2t}, & x_2(0) &= 0 \end{aligned}$

4. Řešte diferenciální rovnice

a) $y''' - y' = e^{2x}$

b) $y'' - y = (1+x)e^{2x}$

c) $y''' - 7y' + 6y = 0$

d) $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$

e) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (x > 0)$

5. Řešte diferenciální rovnice

a) $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$

b) $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' + y = 4 \cos(\ln(1+x))$

6. Necht' f je funkce spojitá na \mathbb{R} a $a \in \mathbb{R}$. Uka'zte, že řešení okrajové úlohy

$$y'' + a^2 y = f(x), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

je dáno

$$y(x) = \frac{1}{a} \int_0^x f(t) \sin a(x-t) dt.$$

7. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $\dot{x} = Ax$ s:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 8 & 12 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $\dot{x} = Ax$ s:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Buď $0 < k < \omega_0$. Určete řešení okrajové úlohy

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = \cos \omega_0 t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

10. Řešte diferenciální rovnice - separace proměnných

- a) $y' = xy^2$
- b) $y' = -y \ln x \ln y$
- c) $y' = \left(\frac{2y+3}{4x+5} \right)$
- d) $y' = (y+3) \tan x$
- e) $y' = -\frac{xy}{1+x^2}$
- f) $y' = y^2 \cos x$
- g) $y' = \frac{-e^{y^2}}{x^2 y}$
- h) $y' = \frac{1-y^2}{x}$

11. Řešte diferenciální rovnice - speciální pravé strany

- a) $y'' + y = 4 \sin x$
- b) $y'' - y = e^x \cos x$
- c) $y'' + y' + y = e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x$
- d) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$
- e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$
- f) $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$
- g) $y'''' - 2y''' + y'' = e^x + 1$
- h) $y'''' + y = (x+1)^4$

12. Řešte diferenciální rovnice - Eulerova rovnice

a) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

b) $x^3 y''' + 2x^2 y'' + xy' - y = 0$

c) $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$

d) $x^2 y'' - xy' + 5y = 0$

e) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 2 \ln x$

f) $x^2 y'' - xy' + y = x^2 \ln x$

g) $x^2 y'' - xy' + y = x \ln x$

h) $x^3 y''' + 4x^2 y'' + xy' - y = \frac{2 \ln x}{x}$

13. Řešte diferenciální rovnice - Variace konstant

a) $y'' + y = \tan x$

b) $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$

c) $y'' + y = \cos^{-3} x$

d) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

e) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$

f) $4y'' - 4y' + y = e^{x/2} \sqrt{1-x^2}$