Matematická analýza pro fyziky II

LS 2015/16, MFF UK

3. Cvičení

1. Řešte následující diferenciální rovnice;

$a)\quad y' = e^{2x-y}$ $\qquad b)\quad y' = \sin(x-y)$ substituce: $z(x) = x - y(x)$

$c)\quad y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$ $\qquad d)\quad y' - y\cdot\cos x = 3\cos x$

$e)\quad x^3 + y - 2xy' = 0$ $\qquad f)\quad y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$ substituce $z(x) = \frac{y(x)}{x}$

zu a) Multiplikation mit e^y und Integration liefert

$$\int e^y\,dy = \int e^{2x}\,dx \quad\Longrightarrow\quad e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C \quad\Longrightarrow\quad y = \ln\Big(\frac{1}{2}e^{2x} + C\Big)\,.$$

zu b) Mit $z = x - y$ gilt $z' = 1 - y'$, also erhalten wir

$$1 - z' = \sin z \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{dz}{1-\sin z} = \int dx\,. \tag{1}$$

Die linke Seite ist

$$\int\frac{dz}{1-\sin z} = \int\frac{1+\sin z}{1-\sin^2 z}\,dz = \int\Big(\frac{1}{\cos^2 z} + \frac{\sin z}{\cos^2 z}\Big)\,dz = \tan z + \frac{1}{\cos z} + c\,.$$

Setzen wir dies in (1) ein, so bekommen wir die implizite Lösung

$$\tan z + \frac{1}{\cos z} = x + C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.$$

Als Sonderlösung bekommen wir $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Mit den Formeln $\sin z = \dfrac{2\tan\frac{z}{2}}{1+\tan^2\frac{z}{2}}$ und $\cos z = \dfrac{1-\tan^2\frac{z}{2}}{1+\tan^2\frac{z}{2}}$ folgt

$$x + C = \tan z + \frac{1}{\cos z} = \frac{\sin z + 1}{\cos z} = \frac{\dfrac{2\tan\frac{z}{2}}{1+\tan^2\frac{z}{2}} + 1}{\dfrac{1-\tan^2\frac{z}{2}}{1+\tan^2\frac{z}{2}}} = \frac{2\tan\frac{z}{2} + 1 + \tan^2\frac{z}{2}}{1-\tan^2\frac{z}{2}} = \frac{(1+\tan\frac{z}{2})^2}{(1+\tan\frac{z}{2})(1-\tan\frac{z}{2})} = \frac{1+\tan\frac{z}{2}}{1-\tan\frac{z}{2}}$$

$$\Longrightarrow\quad \tan\frac{z}{2} = \frac{x+C-1}{x+C+1}\,.$$

Damit kann man nun y ausrechnen:

$$y = x - z = x - 2\cdot\arctan\frac{x+C-1}{x+C+1}\,.$$

zu c) Nach den Additionstheoremen gilt

$$y' = \sin\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2} = 2\sin\frac{(x-y)-(x+y)}{4}\cos\frac{(x-y)+(x+y)}{4} = -2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}$$

Division durch $\sin\frac{y}{2}$ und Integration liefert

$$\int \frac{dy}{\sin\frac{y}{2}} = -2\int \cos\frac{x}{2}\,dx = -4\sin\frac{x}{2} + c\,. \tag{2}$$

Die linke Seite ist

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{\sin\frac{y}{2}} &= \int \frac{\sin^2\frac{y}{2}+\cos^2\frac{y}{2}}{2\sin\frac{y}{4}\cdot\cos\frac{y}{4}}\,dy = \frac{1}{2}\int\frac{\sin\frac{y}{4}}{\cos\frac{y}{4}}\,dy + \frac{1}{2}\int\frac{\cos\frac{y}{4}}{\sin\frac{y}{4}}\,dy \\ &= -2\ln\left|\cos\frac{y}{4}\right| + 2\ln\left|\sin\frac{y}{4}\right| + c = \ln\left(\tan^2\frac{y}{4}\right) + c\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Einsetzen in Gleichung (2) ergibt

$$\ln\left(\tan^2\frac{y}{4}\right) = -4\sin\frac{x}{2} + C\,,\quad C\in\mathbb{R} \quad\Longrightarrow\quad y = 4\cdot\left[\arctan\left(e^{\tilde{C}-2\sin\frac{x}{2}}\right) + k\pi\right]\quad \tilde{C}\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}$$

Als Sonderlösung ergibt sich $y = 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

zu d) Zunächst lösen wir die homogene Gleichung:

$$y_h' - y_h\cos x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{dy_h}{y_h} = \int\cos x\,dx \quad\Longrightarrow\quad \ln|y_h| = \sin x + c \quad\Longrightarrow\quad y_h = Ce^{\sin x}$$

Das Prinzip der Variation der Konstanten besagt nun, dass die Lösungen der inhomogenen Gleichung

$$y' - y\cos x = 3\cos x \tag{4}$$

durch den Ansatz $y = C(x)e^{\sin x}$ bestimmt werden kann. Setzen wir dies ein, so bekommen wir

$$\begin{aligned}&C'(x)e^{\sin x} + C(x)\cos x e^{\sin x} - C(x)e^{\sin x}\cos x = 3\cos x \\ \Longrightarrow\quad &C'(x) = 3\cos x\, e^{-\sin x} \quad\overset{\int}{\Longrightarrow}\quad C(x) = -3e^{-\sin x} + D\,,\quad D\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Also ist

$$y = \left(-3e^{-\sin x} + D\right)e^{\sin x} = -3 + De^{\sin x}\,,\quad D\in\mathbb{R}$$

zu e) Zuerst berechnen wir die homogenen Lösungen:

$$y_h - 2xy_h' = 0 \quad\Longrightarrow\quad 2\int\frac{dy_h}{y_h} = \int\frac{dx}{x} \quad\Longrightarrow\quad 2\ln|y_h| = \ln|x| + c \quad\Longrightarrow\quad y_h = C\sqrt{|x|}$$

Variation der Konstanten $y = C(x)\sqrt{|x|}$ liefert

$$\begin{aligned}0 = x^3 + C(x)\sqrt{|x|} - 2x\left(C'(x)\sqrt{|x|} + \frac{C(x)}{2\sqrt{|x|}}\right) &= x^3 - 2C'(x)x\sqrt{|x|} \\ C'(x) = \frac{1}{2}|x|^{3/2}\cdot\operatorname{sgn} x \quad\overset{\int}{\Longrightarrow}\quad C(x) &= \frac{1}{5}|x|^{5/2} + D\,,\quad D\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Also gilt

$$y = \frac{1}{5}|x|^3 + D\sqrt{|x|}$$

zu f) Mit der Substitution $z = \frac{y}{x}$, $y' = (zx)' = z'x + z$ erhalten wir

$$z'x + z = z + \sin z \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{dz}{\sin z} = \int\frac{dx}{x}$$

Mit Gleichung (3) aus Aufgabe 5c) folgt daraus

$$\ln\left|\tan\frac{z}{2}\right| = \ln|x| + c \quad \Longrightarrow \quad \tan\frac{z}{2} = Cx\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Also ist

$$y = xz = 2x\big[\arctan(Cx) + k\pi\big]\,, \quad C \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Als Sonderlösung hat man $z = k\pi$, also $y = k\pi x$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

2. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice:

a) $y'' - 2y' + y = e^x$
b) $y'' - y = f(x)$ s $f(x) = x$, $f(x) = \sin x$
c) $y'' + y = f(x)$ s $f(x) = x$, $f(x) = \sin x$

zu a) Zuerst lösen wir die homogene Gleichung $y'' - 2y' + y = 0$ mit dem Ansatz der Vorlesung $y = e^{\lambda x}$. Dabei ensteht folgendes Polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, welches die doppelte Nullstelle $\lambda_0 = 1$ hat. Laut Vorlesung ergeben sich somit folgende Basislösungen:

$y_1 = e^x$ und $y_2 = xe^x$. Also ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y_H = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot xe^x$. Nun benötigen wir nur noch eine Lösung der inho mogenen Gleichung. Diese finden wir durch Variation der Konstanten. Wir setzten dazu

$$c_1(x) \cdot e^x + c_2(x) \cdot xe^x \tag{5}$$

in die inhomogene Differentialgleichung ein. Die Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ erfüllen nun folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$

Es folgt also:

$$c_1(x) = \int c_1'(x)dx = \int -xdx = -\frac{x^2}{2} \text{ und } c_2(x) = \int c_2'(x)dx = \int 1dx = x.$$

Setzt man diese gefundenen Lösungen in (5) ein, so ergibt sich folgende spezielle Lösung der Differentialgleichung:

$$y_S = -\frac{x^2}{2}e^x + x^2e^x = \frac{x^2}{2}e^x.$$

Die allgemeine Lösung ist nun

$$y_A = y_H + y_S = \frac{x^2}{2}e^x + c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot xe^x.$$

zu b) Analog zu a) löst man zuerst die homogene Gleichung mit dem Ansatz $e^{\lambda x}$. Dabei ergeben sich die Nullstellen $\lambda_0 = \pm 1$. Also sind die Basislösungen $y_1 = e^x$ und $y_2 = e^{-x}$. Die homogene Lösung lautet: $y_H = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$. Nach der Variation der Konstanten (wie in a) ergibt sich das System

$$\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Es folgt also:

$$c_1(x) = \int c_1'(x)dx = \int \frac{f(x)}{2}e^{-x}dx \text{ und } c_2(x) = \int c_2'(x)dx = -\int \frac{f(x)}{2}e^x dx.$$

- $f(x) = x$ ergibt $c_1 = \frac{-x-1}{2}e^{-x}$ und $c_2 = \frac{-x+1}{2}e^{x}$. Damit ist $y_S = \frac{-x-1}{2}e^{-x}e^{x} + c_2 = \frac{-x+1}{2}e^{x}e^{-x} = -x$ eine spezielle Lösung. Es ergibt sich die allgemeine Lösung als:

$$y_A = y_S + y_H = -x + c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}.$$

- $f(x) = \sin x$ ergibt $c_1 = \frac{e^{-x}}{4}(-\sin x - \cos x)$ und $c_2 = \frac{e^x}{4}(\sin x - \cos x)$. Damit ist $y_S = -\frac{\sin x}{2}$ eine spezielle Lösung. Es ergibt sich die allgemeine Lösung als:

$$y_A = y_S + y_H = -\frac{\sin x}{2} + c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}.$$

zu c) Analog zu a) löst man zuerst die homogene Gleichung mit dem Ansatz $e^{\lambda x}$. Dabei ergeben sich die Nullstellen $\lambda_0 = \pm i$. Da wir aber an reellen Funktionen interessiert sind, ergeben sich nach Vorlesung die Basislösungen $y_1 = \sin x$ und $y_2 = \cos x$ und damit die homogene Lösung $y_H = c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Mit Variation der Konstanten ergibt das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Es folgt also:

$$c_1(x) = \int c_1'(x)dx = \int f(x)\cos x dx \text{ und } c_2(x) = \int c_2'(x)dx = \int -f(x)\sin x dx.$$

- $f(x) = x$ ergibt $c_1 = \cos x + x \sin x$ und $c_2 = -\sin x + x\cos x$. Damit ist $y_S = x$ eine spezielle Lösung. Es ergibt sich die allgemeine Lösung als:

$$y_A = y_S + y_H = -x + c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

- $f(x) = \sin x$ ergibt durch partielle Integration:

$$c_1 = \int \sin x \cos x dx = \sin x \sin x - \int \cos x \sin x dx = \frac{\sin^2 x}{2}$$

und

$$c_2 = \int -\sin^2 x dx = \sin x \cos x + \int \cos^2 x dx = \sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = \frac{\sin x \cos x}{2} - \frac{x}{2}.$$

Damit ist $y_S = \frac{\sin x - x\cos x}{2}$ eine spezielle Lösung. Es ergibt sich die allgemeine Lösung als:

$$y_A = y_S + y_H = \frac{\sin x - x \cos x}{2} + c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

3. Najděte řešení diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou:

a) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2\,, & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 2x_2\,, & x_2(0) = 5 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 - 4x_2\,, & x_1(0) = 3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2\,, & x_2(0) = 1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 + 2x_2\,, & x_1(0) = 2 \\ \dot{x}_2 &= -5x_1 + x_2\,, & x_2(0) = 2 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 + x_2 - 36t\,, & x_1(0) = -2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + x_2 - 2e^t\,, & x_2(0) = 3 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -5x_1 + 2x_2 + e^t\,, & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 6x_2 + e^{2t}\,, & x_2(0) = 0 \end{aligned}$

a) $\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 \\ &= (\lambda + 3)(\lambda - 2) \end{aligned}$

$\lambda_1 = -3$ führt zu $4c_1 + c_2 = 0$ und wir wählen $\vec{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.
$\lambda_2 = 2$ führt zu $-c_1 + c_2 = 0$ und wir wählen $\vec{v}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Als allgemeine Lösung ergibt sich $x(t) = A \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) e^{-3t} + B \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) e^{2t}$.
Das AWP führt zu $A = B = 1$

b) $det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$.

Hier soll der Lösungsvorschlag mit dem modifizierten Ansatz vorgestellt werden:
$x(t) = \begin{pmatrix} a_1+b_1 t \\ a_2+b_2 t \end{pmatrix} e^t$. Die Differentialgleichung führt zu:

$$a_1 e^t + b_1 e^t + b_1 t e^t = (3a_1 - 4a_2)e^t + (3b_1 - 4b_2)te^t$$
$$a_2 e^t + b_2 e^t + b_2 t e^t = (a_1 - a_2)e^t + (b_1 - b_2)t \cdot e^t .$$

Die zweite Gleichung ist entbehrlich. Der Koeffizientenvergleich ergibt: bei

$$\begin{array}{lll} t \cdot e^t & -2b_1 + 4b_2 & = 0 \\ e^t & -2a_1 + 4a_2 & = -b_2 \end{array}$$

wählen wir $b_2 = B$ und $a_2 = A$ erhalten wir darüberhinaus $b_1 = 2B$ und $a_1 = 2A + B$
und somit $x(t) = \begin{pmatrix} 2A + B + 2Bt \\ A + Bt \end{pmatrix} e^t = A \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) e^t + B \left(\begin{smallmatrix} 1+2t \\ t \end{smallmatrix}\right) e^t$.

Das AWP führt zu $A = B = 1$.

c) $det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = (\lambda - 2 - 3i)(\lambda - 2 + 3i)$
$\lambda_1 = 2 + 3i$ führt zu $(1 - 3i)c_1 + 2c_2 = 0$ und wir wählen $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i-1 \end{pmatrix}$ $\lambda_2 = 2 - 3i$ ergibt einen konjungierten Eigenvektor. Eine reelle Lösungsdarstellung ist
$x(t) = A \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ -\cos 3t - 3\sin 3t \end{pmatrix} e^{2t} + B \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ 3\cos 3t - \sin 3t \end{pmatrix} e^{2t}$.
Das AWP führt zu $A = B = 1$.

d) $det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$ aus $\lambda_1 = 3$ erhalten wir $c_1 + c_2 = 0$ und wir wählen $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ aus $\lambda_2 = 2$ erhalten wir $2c_1 + c_2 = 0$ und wir wählen $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und somit ergibt sich als allgemeine Lösung des homogenen Problems
$x_H(t) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t}$.
Als Ansatz für eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems wählen wir obige Darstellung mit variablen A und B.
Eingesetzt in eine Differentialgleichung ergibt sich das folgende Gleichungssystem für die Ableitungen von $A(t)$ und $B(t)$:

$$\begin{array}{rcl} A'(t)e^{3t} + B'(t)e^{2t} & = & -36t \\ -A'(t)e^{3t} - 2B'(t)e^{2t} & = & -2e^t \\ \text{woraus } A'(t) & = & -72t\, e^{-3t} - 2e^{-2t} \\ \text{und } B'(t) & = & 2e^{-t} + 36t\, e^{-2t} \end{array}$$

folgt.
Die Integration und die Zusammenfassung der Lösungsbestandteile ergibt:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)e^{3t} + B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)e^{2t} + (24t\, e^{-3t} + 8e^{-3t} + e^{-2t})\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)e^{3t} \\ & & +(-2e^{-t} - 18t\, e^{-2t} - 9e^{-2t})\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)e^{2t} \\ & = & A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)e^{3t} + B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)e^{2t} + \begin{pmatrix} 6t-1-e^t \\ 12t+10+3e^t \end{pmatrix} \end{array}$$

Das AWP führt zu $A = -10\,, B = 10\,.$

e) $det\begin{pmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 1 & -6-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 11\lambda + 28 = (\lambda+4)(\lambda+7)\,,$

aus $\lambda_1 = -4$ erhalten wir $-c_1 + 2c_2 = 0$ und wir wählen $\vec{v}_1 = \binom{2}{1}$

aus $\lambda_2 = -7$ erhalten wir $2c_1 + 2c_2 = 0$ und wir wählen $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Somit ergibt sich als allgemeine Lösung des homogenen Problems:

$$x_H = A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7t}$$

Die Variation der Konstante führt zum Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lcl} A'(t)2e^{-4t} & + \quad B'e^{-7t} & = \quad e^{t} \\ A'(t)e^{-4t} & + \quad B'e^{-7t} & = \quad e^{2t} \end{array}$$

mit den Lösungen $A' = \dfrac{1}{3}e^{5t} + \dfrac{1}{3}e^{6t}$ sowie

$$B' = -\frac{2}{3}e^{9t} + \frac{1}{3}\,e^{8t}\,.$$

Nach Integration und Zusammenfassung der Bestandteile ergibt sich:

$$\begin{aligned} x(t) \; &= \; A\tbinom{2}{1}e^{-4t} \; +B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-7t}\left(\tfrac{1}{15}e^{5t} + \tfrac{1}{18}\,e^{6t}\right)\tbinom{2}{1}\;e^{-4t} \\ &\qquad\qquad\quad + \left(-\tfrac{2}{27}\,e^{9t} + \tfrac{1}{24}\,e^{8t}\right)\tbinom{1}{-1}e^{-7t} \\ &= \; A\tbinom{2}{1}e^{-4t} \; +B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-7t}\begin{pmatrix} \frac{7}{40}\,e^{t} + \frac{1}{27}\,e^{2t} \\ \frac{1}{40}\,e^{t} + \frac{7}{54}\,e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das AWP wird dem Leser überlassen.

4. Řešte diferenciální rovnice

   a) $y''' - y' = e^{2x}$

   b) $y'' - y = (1+x)e^{2x}$

   c) $y''' - 7y' + 6y = 0$

   d) $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$

   e) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x \quad (x > 0)\,.$

   a) charakteristisches Polynom: $\lambda^3 - \lambda$
   Nullstellen: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$
   allgemeine Lösung des homogenen Problems: $y_H(x) = c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{-x}$
   Ansatz für $y_s(x)$: $y_s(x) = be^{2x}$
   spez. Lösung des inhomogenen Problems: $y_s(x) = \frac{1}{6}e^{2x}$

   b) charakteristisches Polynom: $\lambda^2 - 1 = 0$
   Nullstellen: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$
   allgemeine Lösung des homogenen Problems: $y_H(x) = c_1e^{x} + c_2e^{-x}$
   Ansatz für $y_s(x)$: $y_s(x) = (ax+b)e^{2x}$
   spez. Lösung des inhomogenen Problems: $y_s(x) = (\frac{1}{3}x - \frac{1}{9})e^{2x}$

c) charakteristisches Polynom: $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$
Nullstellen: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 2$
allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + c_3 e^{2x}$

d) charakteristisches Polynom: $\lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = 0$
Nullstellen: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2/3} = 2i,\ \lambda_{4/5} = -2i$
allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + c_4 x \cos 2x + c_5 x \sin 2x$

e) charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + 4\lambda + 4$
Nullstellen: $\lambda_{1/2} = -2$
allgemeine Lösung des homogenen Problems: $y_H(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$
Gleichungssystem nach Variation der Kostanten:

$$\begin{aligned} c_1' + x c_2' &= 0 \\ -2c_1' + (1-2x)c_2' &= \ln x \end{aligned}$$

Lösung des Gleichungssystems und Intergration:

$$\begin{aligned} c_2' = \ln x \quad &\Rightarrow \quad c_2 = x(\ln x - 1) \\ c_1' = -x \ln x \quad &\Rightarrow \quad c_1 = -\tfrac{x^2}{4}(2\ln x - 1) \end{aligned} \quad)$$

allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y(x) &= (c_1 + c_2 x)e^{-2x} - \tfrac{x^2}{4}(2\ln x - 1)e^{-2x} + x^2(\ln x - 1)e^{-2x} \\ &= (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + x^2 e^{-2x}(\tfrac{1}{2}\ln x + \tfrac{1}{4}) \end{aligned}$$

5. Řešte diferenciální rovnice

a) $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$

b) $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' + y = 4\cos(\ln(1+x))$

a) Der Ansatz $y(x) = x^\lambda$ zeigt, dass

$$\lambda(\lambda - 1) + 5\lambda + y = (\lambda + 2)^2 = 0$$

woraus $y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 (\ln x) x^{-2}$ folgt. Man beachte die Modifikation des Vorfaktors für die 2. Lösung

b) Aufgrund der Struktur der Vorfaktoren erfährt der Ansatz eine leichte Änderung:
$y_H(x) = (1+x)^\lambda$, woraus $\lambda(\lambda-1) + \lambda + 1 = \lambda^2 + 1 = 0$ folgt mit $\lambda_{1/2} = \pm i$.
Da erst später geklärt wird, was x^i ist, untersuchen wir hier die transformierte Gleichung, wobei

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dg}{dt} \cdot \frac{1}{(x+1)} = \dot{g}\frac{1}{x+1} \text{ und} \\ y'' &= \ddot{g}\frac{1}{(1+x)^2} - \dot{g}\frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Die transformierte Gleichung lautet nun $\ddot{g} + g = 4\cos t$ wobei $t = \ln(t+1)$
mit $g_H(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$.
Der Ansatz $g_0 = t(b_1 \cos t + b_2 \sin t)$ $(m = 1)$ liefert $b_1 = 0$ und $b_2 = 2$ und somit die Lösung $g(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 2t \sin t$ woraus

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cos[\ln(1+x)] + c_2 \sin[\ln(1+x)] \\ &\quad + 2\ln(1+x)\sin[\ln(1+x)] \qquad \text{folgt.} \end{aligned}$$

6. Nechť f je funkce spojitá na $\mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}$. Ukažte, že řešení okrajové úlohy

$$y'' + a^2 y = f(x),\ y(0) = y'(0) = 0$$

je dáno

$$y(x) = \frac{1}{a}\int\limits_0^x f(t)\sin a(x-t)dt.$$

Analog zu 1c) bestimmt man zuerst die Lösung der homogenen Gleichung. Es ergeben sich die Lösungen $y_1 = \cos ax$ und $y_2 = \sin ax$ und damit als Lösung der homogenen Gleichung $y_H = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$. Mit Variation der Konstanten erhällt man:

$$\begin{pmatrix} \sin ax & \cos ax \\ a\cos ax & -a\sin ax \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix},$$

woraus folgt, dass $c_1 = -\frac{1}{a}\int\limits_0^x f(t)\sin at dt = -\frac{F_1(x)}{a}$ $c_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_0^x f(t)\cos at dt = \frac{F_2(x)}{a}$. Also ergibt sich die allgemeine Lösung als:

$$y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax - \frac{\cos ax}{a}\int\limits_0^x f(t)\sin at dt + \frac{\sin ax}{a}\int\limits_0^x f(t)\cos at dt. \tag{6}$$

(<u>Bemerkung:</u> Das hier das Integral bei 0 beginnt ist willkürlich. Man könnte es auch z.B. bei -5 oder 100 starten lassen, erhält dabei aber eine andere Integrationskonstante, die sich mit c_1 bzw. c_2 zusammenfassen lässt. Die weitere Rechnung verläuft unabhängig davon.)

Aus $y(0) = 0$ folgt demnach $c_1 = \frac{1}{a}F_1(0)$. Wenn man nun (6) ableitet ergibt sich:

$$y' = -ac_1 \sin ax + ac_2 \cos ax - \frac{\cos ax}{a}(f(x)\sin ax) + \sin ax \int\limits_0^x f(t)\sin at dt + \frac{\sin ax}{a}(f(x)\cos ax) + \cos ax \int\limits_0^x f(t)\cos at dt$$

Nun folgt aus $y'(0) = 0$, dass $c_2 = -\frac{F_2(0)}{a}$ ist. Setzt man das in (6) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{a}F_1(0)\cos ax - \frac{\cos ax}{a}\underbrace{\int\limits_0^x f(t)\sin at}_{F_1(x)} - \frac{F_2(0)}{a}\sin ax + \frac{\sin ax}{a}\underbrace{\int\limits_0^x f(t)\cos at dt}_{F_2(x)} \\
&= -(F_1(x) - F_1(0))\frac{\cos ax}{a} + (F_2(x) - F_2(0))\frac{\sin ax}{a} \\
&= -\frac{\cos ax}{a}\int\limits_0^x f(t)\sin at dt + \frac{\sin ax}{a}\int\limits_0^x f(t)\sin at dt \\
&= \frac{1}{a}\int\limits_0^x f(t)\left(-\cos ax \sin at + \cos at \sin ax\right) dt \\
&= \frac{1}{a}\int\limits_0^x f(t)\sin a(x-t)dt
\end{aligned}$$

7. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $\dot{x} = Ax$ s:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 8 & 12 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

a) $det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-7)$ führt zu $\lambda_1 = 1$ mit $k_1 = 2$.

Wegen $rg(A-\lambda_1 I) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 1$

gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren mit $c_1 + c_2 + 2c_3$ und wir wählen

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aus $\lambda_2 = 7$ ergibt sich $\begin{array}{rl} -5c_1 & +c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_1 & -c_2 + 2c_3 = 0 \end{array}$ wählen wir $c_1 = 1$, so folgt

$\begin{array}{rrr} c_2 & +2c_3 = & 5 \\ -5c_2 & +2c_3 = & -1 \end{array}$ und somit $c_2 = 1$ und $c_3 = 2$.

Das ergibt die Lösung

$$x(t) = \left[A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] e^t + C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{7t}$$

b) Aus $det(A-\lambda I) = det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3$ erhalten wir

$\lambda_1 = -1$ mit $k_1 = 2$ und
$\lambda_2 = 3$ mit $k_2 = 1$.

Wegen $rg(A-\lambda_1 I) = 1$ gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren mit $-c_1 + c_2 - 2c_3 = 0$ und wir wählen

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus $\lambda_2 = 3$ ergibt sich $\begin{array}{r} -5c_1 + c_2 - 2c_3 = 0 \\ c_1 - 5c_2 + 2c_3 = 0 \end{array}$

Wählen wir $c_1 = 1$ ergibt sich $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und somit die Lösung

$$x(t) = \left[A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] e^{-t} + C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

c) $det(A-\lambda I) = det\begin{pmatrix} 8-\lambda & 12 & -2 \\ -3 & -4-\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-2)^3$.

Weil $n = k = 3$ ist, ist eine Lösungsdarstellung nur mit Eigenvektoren nicht möglich, d. h. wir konstruieren Wurzelvektoren

1.) In $\begin{array}{rcrcrcl} 6c_1 & + & 12c_2 & - & 2c_3 & = & 0 \\ -3c_1 & + & 6c_2 & + & c_3 & = & 0 \\ -c_1 & - & 2c_2 & & & = & 0 \end{array}$

wählen wir $c_2 = -1$ und erhalten $c_1 = 2$ und $c_3 = 0$.

$$
2.)\quad \text{In}\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} 6b_1 & + & 12b_2 & - & 2b & = & 2 & = & c_1 \\ -3b_1 & - & 6b_2 & + & b_3 & = & -1 & = & c_2 \\ -b_1 & - & 2b_2 & & & = & 0 & = & c_3 \end{array}
$$

wählen wir $b_2 = 1$ und erhalten $b_1 = 2$ und $b_3 = -1$.

$$
3.)\quad \text{In}\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} 6a_1 & + & 12a_2 & - & 2a_3 & = & 2 & = & b_1 \\ -3a_1 & - & 6a_2 & + & a_3 & = & -1 & = & b_2 \\ -a_1 & - & 2a_2 & & & = & -1 & = & b_3 \end{array}
$$

wählen wir $a_2 = 1$ und erhalten $a_1 = -1$ und $a_3 = 2$.

Dies führt zu der allgemeinen Lösung

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = e^{2t} \Bigg\{ & A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + B \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
& + C \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \Bigg\}
\end{aligned}
$$

8. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $\dot{x} = Ax$ s:

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

$det(A - 2I) = (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda^2 + 1)$ führt nach den üblichen Rechenschritten zu der Lösung

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= e^t \left\{ A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + B \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right\} \\
&+ C \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t + 2\sin t \\ -\sin t \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -sint - 2\cos t \\ \cos t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

9. Buď $0 < k < \omega_0$. Určete řešení okrajové úlohy

$$
\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = \cos \omega_0 t \ , \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0 \ .
$$

charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + 2k\lambda + \omega_0^2$
Nullstellen: $\lambda_{1/2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2} = -k \pm i\sqrt{\omega_0^2 - k^2}$
allgemeine Lösungen des homogenen Problems: $x_{_H}(t) = e^{-kt}(c_1 \cos \sqrt{\omega_0^2 - k^2}t + c_2 \sin \sqrt{\omega_0^2 - k^2}t$
Ansatz für x_s nach Aufg. 1: $x_s(t) = b_1 \cos \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t$

spez. Lösung des inhomogenen Problems: $x_s(t) = \frac{1}{2k\omega_0} \sin \omega_0 t$

allg. Lösung des inhomogenen Problems: $x(t) = x_H(t) + x_s(t)$
AwP: $c_1 = 0,\ c_2 = \frac{-1}{2k\sqrt{\omega_0^2 - k^2}}$

10. Řešte diferenciální rovnice - separace proměnných

a) $y' = xy^2$
b) $y' = -y \ln x \ln y$
c) $y' = \left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)$
d) $y' = (y+3) \tan x$
e) $y' = -\frac{xy}{1+x^2}$
f) $y' = y^2 \cos x$
g) $y' = \frac{-e^{y^2}}{x^2 y}$
h) $y' = \frac{1-y^2}{x}$

a) $y' = xy^2$
$y(x) = 0$ je jistě řešením. Jinak

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y^2} &= x dx \\ -\frac{1}{y} &= x^2/2 + c \\ y(x) &= -\frac{1}{x^2/2 + c} = -\frac{2}{x^2 + c'}. \end{aligned}$$

b) $y' = -y \ln x \ln y$
$y(x) = 1$ je jistě řešením. Jinak

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y \ln y} &= -\ln x dx \\ \ln(\ln y(x)) &= -x \ln x + x + c \\ y(x) &= \exp(\exp(-x \ln x + x + c)) \end{aligned}$$

c) $y' = \left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)$
$y(x) = -3/2$ je jistě řešením. Jinak

$$\begin{aligned} \frac{dy}{2y+3} &= \frac{dx}{4x+5}, \\ \frac{\ln|2y+3|}{2} &= \frac{\ln|4x+5|}{4} + c \\ \ln|2y+3| &= \frac{\ln|4x+5|}{2} + c' = \ln\sqrt{|4x+5|} + c' \\ 2y+3 &= K\sqrt{|4x+5|}, \quad K \in \mathbb{R} \\ y &= \frac{K}{2}\sqrt{|4x+5|} - \frac{3}{2}, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

d) $y' = (y+3)\tan x$
$y(x) = -3$ je jistě řešením. Jinak

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y+3} &= \tan x dx \\
\ln|y+3| &= -\ln|\cos x| + c = \ln\frac{1}{|\cos x|} + c \\
y(x) + 3 &= \frac{K}{|\cos x|}, \quad K \in \mathbb{R} \\
y(x) &= \frac{K}{|\cos x|} - 3, \quad K \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

e) $y' = -\frac{xy}{1+x^2}$
$y(x) = 0$ je jistě řešením. Jinak

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y} &= -\frac{x}{1+x^2}dx \\
\ln|y| &= -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c = \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c \\
y(x) &= \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}, \quad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

f) $y' = y^2\cos x$
$y(x) = 0$ je jistě řešením. Jinak

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y^2} &= \cos x dx \\
-\frac{1}{y} &= \sin x + c \\
y(x) &= \frac{1}{c - \sin x}
\end{aligned}$$

g) $y' = \frac{-e^{y^2}}{x^2 y}$

$$\begin{aligned}
ye^{-y^2}dy &= -\frac{dx}{x^2} \\
-\frac{1}{2}e^{-y^2} &= \frac{1}{x} + c \\
e^{-y^2} &= -\frac{2}{x} + c' \\
-y^2 &= \ln\Big(c' - \frac{2}{x}\Big) = \ln\frac{c'x-2}{x} \\
y^2 &= \ln\frac{x}{c'x-2} \\
y &= \sqrt{\ln\frac{x}{c'x-2}}.
\end{aligned}$$

h) $y' = \frac{1-y^2}{x}$
$y(x) = \pm 1$ je jistě řešením. Jinak

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{1-y^2} &= \frac{dx}{x} \\
\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| &= \ln|x| + c, \\
\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| &= \ln(x^2) + c', \\
\left|\frac{y+1}{y-1}\right| &= Kx^2, \quad K > 0 \\
\frac{y+1}{y-1} &= Kx^2, \quad K \neq 0 \\
y(1-Kx^2) &= -Kx^2 - 1 \\
y(x) &= -\frac{1+Kx^2}{1-Kx^2}
\end{aligned}$$

11. Řešte diferenciální rovnice - speciální pravé strany

   a) $y'' + y = 4\sin x$
   b) $y'' - y = e^x \cos x$
   c) $y'' + y' + y = e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x$
   d) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$
   e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$
   f) $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$
   g) $y'''' - 2y''' + y'' = e^x + 1$
   h) $y'''' + y = (x+1)^4$

Řešte diferenciální rovnice - speciální pravé strany

a) $y'' + y = 4\sin x$
   Char. rovnice: $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, FS: $\cos x, \sin x$
   Part. řešení: $y_p(x) = Ax\cos x + Bx\sin x \implies A = -2, B = 0$
   $y(x) = c\cos x + d\sin x - 2x\cos x$

b) $y'' - y = e^x \cos x$
   Char. rovnice: $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, FS: e^x, e^{-x}
   Part. řešení: $y_p(x) = Ae^x\cos x + Be^x\sin x \implies A = -\frac{1}{5}, B = \frac{2}{5}$
   $y(x) = ce^x + de^{-x} + \frac{2}{5}e^x\sin x - \frac{1}{5}e^x\cos x$

c) $y'' + y' + y = e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x$
   Char. rovnice: $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$, FS: $e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2), e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)$
   Part. řešení: $y_p(x) = Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x \implies A = 1, B = -1$
   $y(x) = ce^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) + de^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2) - e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$

d) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$
   Char. rovnice: $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, FS: e^x, e^{4x}
   Part. řešení: $y_p(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) \implies A = -2, B = 2, C = -3$
   $y(x) = ce^x + de^{4x} + e^{2x}(-2x^2 + 2x - 3)$

e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$
   Char. rovnice: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$, FS: e^x, xe^x, x^2e^x
   Part. řešení: $y_{p_1}(x) = Ax^3e^x \implies A = 1/6$
   Part. řešení: $y_{p_2}(x) = Ax + B \implies A = 1, B = -13$
   $y(x) = ce^x + dxe^x + d'x^2e^x + x^3e^x/6 + x - 13$

f) $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$
Char. rovnice: $2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1/2$, FS: $e^{x/2}, e^{-x}, e^{2x}$
Part. řešenís RHS$=e^{2x}$: $y_p(x) = Axe^{2x} \implies A = 1/9$
Part. řešenís RHS$=e^{-2x}$: $y_p(x) = Be^{-2x} \implies B = -1/20$
Part. řešenís RHS$=2$: $y_p(x) = C \implies C = 1$
$y(x) = c_1e^{x/2} + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + xe^{2x}/9 - e^{-2x}/20 + 1$

g) $y'''' - 2y''' + y'' = e^x + 1$
Char. rovnice: $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 1$, FS: $1, x, e^x, xe^x$
Part. řešenís RHS$=e^x$: $y_p(x) = Ax^2e^x \implies A = 1/2$
Part. řešenís RHS$=1$: $y_p(x) = Bx^2 \implies B = 1/2$
$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x + x^2e^x/2 + x^2/2.$

h) $y'''' + y = (x + 1)^4$
Char. rovnice: $\lambda^4 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2,3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$, FS: $e^{\pm x/\sqrt{2}}\sin(x/\sqrt{2}), e^{\pm x/\sqrt{2}}\cos(x/\sqrt{2})$
Part. řešení: $y_p(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E \implies A = 1, B = 4, C = 6, D = 4, E = -23$
$y(x) = span\{FS\} + x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 23$

12. Řešte diferenciální rovnice - Eulerova rovnice

a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$
b) $x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y = 0$
c) $x^2y'' + xy' + 4y = 0$
d) $x^2y'' - xy' + 5y = 0$
e) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\ln x$
f) $x^2y'' - xy' + y = x^2\ln x$
g) $x^2y'' - xy' + y = x\ln x$
h) $x^3y''' + 4x^2y'' + xy' - y = \frac{2\ln x}{x}$

a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$
$y(x) = x^\lambda$, resp. $y(x) = |x|^\lambda$: $\lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$
FS: $\{x, x^2\}$: $y(x) = cx + dx^2$.

b) $x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y = 0$
$y(x) = x^\lambda$, resp. $y(x) = |x|^\lambda$: $0 = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 2\lambda(\lambda-1) + \lambda - 1 = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$,
$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i$, FS: $\{x, \sin(\ln(x)), \cos(\ln(x))\}$: $y(x) = c_1x + c_2\sin(\ln x) + c_3\cos(\ln x)$.

c) $x^2y'' + xy' + 4y = 0$
$y(x) = x^\lambda$, resp. $y(x) = |x|^\lambda$: $\lambda(\lambda-1) + \lambda + 4 = \lambda^2 + 4 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 2i$
FS: $\{\sin(2\ln x), \cos(2\ln x)\}$: $y(x) = c\sin(2\ln x) + d\cos(2\ln x)$.

d) $x^2y'' - xy' + 5y = 0$
$y(x) = x^\lambda$, resp. $y(x) = |x|^\lambda$: $\lambda(\lambda-1) - \lambda + 5 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$
FS: $\{x\sin(2\ln x), x\cos(2\ln x)\}$: $y(x) = cx\sin(2\ln x) + dx\cos(2\ln x)$.

e) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\ln x$
$y(x) = x^\lambda$, resp. $y(x) = |x|^\lambda$: $\lambda(\lambda-1) + 4\lambda + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$
FS: $\{1/x, 1/x^2\}$: $y_H(x) = c/x + d/x^2$.
$y_P(x) = A\ln x + B \implies y_P(x) = (\ln x)/2 - 3/4$

f) $x^2y'' - xy' + y = x^2\ln x$
$y(x) = x^\lambda$, resp. $y(x) = |x|^\lambda$: $\lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = 1$
FS: $\{x, x\ln x\}$: $y_H(x) = cx + dx\ln x$.
$y_P(x) = x^2(A + B\ln x) \implies y_P(x) = x^2(-2 + \ln x)$

g) $x^2y'' - xy' + y = x\ln x$
$y(x) = x^\lambda$, resp. $y(x) = |x|^\lambda$: $\lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = 1$
FS: $\{x, x\ln x\}$: $y_H(x) = cx + dx\ln x$.
$y_P(x) = Ax\ln^3 x \implies y_P(x) = x\ln^3 x/6$

h) $x^3y''' + 4x^2y'' + xy' - y = \frac{2\ln x}{x}$
$y(x) = x^\lambda$, resp. $y(x) = |x|^\lambda$: $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 4\lambda(\lambda-1) + \lambda - 1 = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$,
$(\lambda+1)(\lambda^2-1) = 0 : \lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 1$, FS: $\{1/x, \ln x/x, x\}$: $y_H(x) = c_1/x + c_2\ln x/x + c_3x$.
$y_P(x) = A\ln^3 x/x + B\ln^2 x/x \implies y_P(x) = -\ln^3 x/(6x) - \ln^2 x/(4x)$

13. Řešte diferenciální rovnice - Variace konstant

a) $y'' + y = \tan x$
b) $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x-1}$
c) $y'' + y = \cos^{-3} x$
d) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$
e) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$
f) $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1-x^2}$

a) $y'' + y = \tan x$
Hom: FS: $\{\cos x, \sin x\}$, $y_H = c_1\cos x + c_2\sin x$
$y_P = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$

$$c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0$$
$$c_1'(x)(-\sin x) + c_2'(x)\cos x = \tan x$$

$$c_1'(x) = -\sin^2 x/\cos x$$
$$c_2'(x) = -c_1'(x)\cos x/\sin x = \sin x$$

$$c_1(x) = \sin(x) + \log(\cos(x/2) - \sin(x/2)) - \log(\sin(x/2) + \cos(x/2))$$
$$c_2(x) = -\cos x.$$

b) $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x-1}$
Hom: FS: $\{e^x, e^{-x}\}$, $y_H = c_1e^x + c_2e^{-x}$
$y_P = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0$$
$$c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = \frac{2e^x}{e^x-1}$$

$$c_1'(x) = \frac{1}{e^x-1}$$
$$c_2'(x) = -c_1'(x)e^{2x} = -\frac{e^{2x}}{e^x-1}$$

$$c_1(x) = \ln(1-e^x) - x$$
$$c_2(x) = -e^x - \ln(1-e^x).$$

c) $y'' + y = \cos^{-3} x$
Hom: FS: $\{\cos x, \sin x\}$, $y_H = c_1 \cos x + c_2 \sin x$
$y_P = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$

$$c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0$$
$$c_1'(x)(-\sin x) + c_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos^3 x}$$

$$c_1'(x) = -\sin x / \cos^3 x$$
$$c_2'(x) = -c_1'(x) \cos x / \sin x = 1/\cos^2 x$$

$$c_1(x) = -1/(2\cos^2(x))$$
$$c_2(x) = \tan(x).$$

$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2\cos(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos x} = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{2\sin^2(x)-1}{2\cos x} = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{\cos(2x)}{2\cos x}$

d) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$
Hom: FS: $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$, $y_H = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$
$y_P = c_1(x) e^{-x} + c_2(x) x e^{-x}$

$$c_1'(x) e^{-x} + c_2'(x) x e^{-x} = 0$$
$$c_1'(x)(-e^{-x}) + c_2'(x) e^{-x}(1-x) = e^{-x} \ln x$$

$$c_1'(x) = -x c_2'(x) = -x \ln x$$
$$c_2'(x) = \ln x$$

$$c_1(x) = -\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1)$$
$$c_2(x) = x \ln x - x.$$

$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - \frac{3}{4} e^{-x} x^2 + \frac{1}{2} e^{-x} x^2 \ln x.$

e) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$
Hom: FS: $\{e^x, e^{2x}\}$, $y_H = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$
$y_P = c_1(x) e^x + c_2(x) e^{2x}$

$$c_1'(x) e^x + c_2'(x) e^{2x} = 0$$
$$c_1'(x) e^x + 2c_2'(x) e^{2x} = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$$

$$c_1'(x) = -e^x c_2'(x) = \frac{-e^{2x}}{e^x + 1}$$
$$c_2'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$c_1(x) = -e^x + \ln(e^x + 1)$$
$$c_2(x) = \ln(e^x + 1).$$

f) $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1-x^2}$
Hom: FS: $\{e^{x/2}, xe^{x/2}\}$, $y_H = c_1 e^{x/2} + c_2 x e^{x/2}$
$y_P = c_1(x)e^{x/2} + c_2(x)xe^{x/2}$

$$c_1'(x)e^{x/2} + c_2'(x)xe^{x/2} = 0$$
$$c_1'(x)e^{x/2}/2 + c_2'(x)e^{x/2}(1+x/2) = e^{x/2}\sqrt{1-x^2}$$

$$c_1'(x) = -xc_2' = -x\sqrt{1-x^2}$$
$$c_2'(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$c_1(x) = \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$$
$$c_2(x) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)).$$