

Klasický variační počet

1. Nechť $\Phi(y) = \int_a^b (y^2 + (y')^2) dx$, $y \in C^1[a, b]$. Spočtěte Gâteaux diferenciály $D\Phi(y; h)$, $D^2\Phi(y; h, k)$ a $D^3\Phi(y; h, k, l)$.
2. Spočtěte první Gâteaux a Fréchet diferenciál funkcionálu $\Phi(y) = \int_0^1 x^2(y^4 - (y')^2) dx$ na $C^1[0, 1]$.
3. Spočtěte první a druhý Gâteaux diferenciál funkcionálu $\Phi(y) = \int_0^1 [x^2 \sin(\pi y) + (y')^3 + y''y''' + ye^{-(y'')^2}] dx$ na $C^3[0, 1]$.
4. Spočtěte první Gâteaux diferenciál funkcionálu $\Phi(y_1, y_2) = \int_0^1 [xy_1^2 + (y_1')^2(y_2')^2 + (y_2')^6] dx$ na $C^1[0, 1] \times C^1[0, 1]$.
5. Ukažte, že funkcionál $\Phi(y) = \int_{-1}^1 x^2(y')^2 dx$ nemá na množině $M = \{y \in C^1[-1, 1]; y(-1) = -1, y(1) = 1\}$ minimum.
Návod: Uvažujte funkce $y_a(x) = \arctg(x/a)/\arctg(1/a)$.
6. Ukažte, že funkcionál $\Phi(y) = \int_{-1}^1 x^{\frac{2}{5}}(y')^2 dx$ nemá na množině $M = \{y \in C^1[-1, 1]; y(-1) = -1, y(1) = 1\}$ minimum.
Návod: Uvažujte řešení Euler–Lagrangeovy rovnice.
7. Najděte extremály (tj. řešení příslušné Euler–Lagrangeovy rovnice) pro funkcionál $\Phi(y) = \int_0^{2\pi} [(y')^2 - y^2] dx$ na množině $M = \{y \in C^1[0, 2\pi]; y(0) = y(2\pi) = 1\}$.
8. Nechť $\Phi(y) = \int_0^1 y^2(x^n - y) dx$ pro n přirozené dostatečně velké číslo a nechť $M = \{u \in C^1[0, 1]; u(0) = u(1) = 0\}$.
 - a) Ukažte, že jediným řešením Euler–Lagrangeovy rovnice ležícím v množině M je $y_0 = 0$.
 - b) Ukažte, že $D^2\Phi(y_0; h, h) > 0$ pro $h \in M$, $h \neq 0$.
 - c) Ukažte, že y_0 není bodem extrému funkcionálu, tj. v libovolném okolí bodu y_0 (v metrice $C^1[0, 1]$) existují body $y_1, y_2 \in M$ tak, že $\Phi(y_1) < \Phi(y_0) = 0 < \Phi(y_2)$.

Nalezněte extrémy následujících funkcionalů na množinách spojitě diferencovatelných funkcí až do hranice splňujících níže uvedené hraniční podmínky.

9. $\Phi(y) = \int_1^2 [x(y')^4 - 2y(y')^3] dx, y(1) = 0, y(2) = 1$
10. $\Phi(y) = \int_2^3 \frac{x^3}{(y')^2} dx, y(2) = 4, y(3) = 9$
11. $\Phi(y) = \int_0^1 [(y')^2 + x^2] dx, y(0) = -1, y(1) = 1$
12. $\Phi(y) = \int_0^a [1 - e^{-(y')^2}] dx, y(0) = 0, y(a) = b, a > 0$
13. $\Phi(y) = \int_0^1 y(y')^2 dx, y(0) = p > 0, y(1) = q > 0.$

V následujících úlohách hledejte minimum funkcionalu $\Phi(y)$ na spojitě diferencovatelných funkcích, splňujících dané hraniční podmínky a vazební podmínku $g(y) = \text{const}$

14. $\Phi(y) = \int_0^\pi (y')^2 dx, y(0) = y(\pi) = 0, g(y) = \int_0^\pi y^2 dx = 1$
15. $\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2 dx, y(0) = 1, y(1) = 6, g(y) = \int_0^1 y dx = 3$
16. $\Phi(y) = \int_0^1 [x^2 + (y')^2] dx, y(0) = y(1) = 0, g(y) = \int_0^1 y^2 dx = 2$
17. $\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2 dx, y(0) = 0, y(1) = \frac{\pi}{4}, g(y) = \int_0^1 [y - (y')^2] dx = \frac{1}{12}.$

Klasický variační počet - aplikace ve fyzice

18. Nechť Lagrangian L nezávisí explicitně na čase, tj. $L = L(x, \dot{x})$. Ukažte, že podél libovolné extrémály platí zákon zachování energie, tj.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \{E(x_0(t), \dot{x}_0(t))\} = 0.$$

$$(E = \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L).$$

19. Nechť pro pevné $i = \{1, 2, \dots, N\}$ Lagrangian nezávisí na x_i . Potom podél libovolné extrémály platí zákon zachování hybnosti, tj.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \right\} = 0.$$

20. Hamiltonův princip v klasické mechanice tvrdí, že mechanická soustava popsaná souřadnicemi q_1, q_2, \dots, q_N se bude pohybovat tak, aby akce

$$S = \int_P^Q L \, dt \quad L = T(t, q, \dot{q}) - U(t, q)$$

(T, U dané funkce, reprezentující kinetickou a potenciální energii soustavy) byla stacionární, tj. bude-li vektorová funkce $q(t)$ řešit Euler–Lagrangeovy rovnice. Napište tyto rovnice.

21. Pomocí zákona zachování energie (viz výše) ukažte, že pro extrémály akce S dané Lagrangianem $L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$ je parametr t přirozený parametr, tj.

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{ij} g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \right\} = 0.$$

Sestavte Hamiltonovy rovnice pro následující funkcionály

$$22. \quad J(y_1, y_2) = \int_0^\pi (2y_1 y_2 - 2y_1^2 + (\dot{y}_1)^2 - (\dot{y}_2)^2) \, dt$$

$$23. \quad J(y) = \int_a^b \sqrt{t^2 + y^2} \sqrt{1 + (\dot{y})^2} \, dt$$

$$24. \quad J(y_1, y_2) = \int_a^b (t^2 + y_1 (\dot{y}_1)^2 + y_2 (\dot{y}_2)^2) \, dt.$$