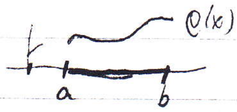
6. Newtonův a Riemannův integrál

6.0 Úvod

$\frac{1}{2}$ přednášky

Uvažujme následující úlohu: Nechť máme hmotnou tyč, která má zadanou hustotu $\rho = \rho(x)$, $x \in [a,b]$



a cílem je najít hmotnost tyče. Je-li ρ = const, pak $m = \rho(b-a)$. Je-li nekonstantní, pak

a) Fixujme nějaký bod $x \in (a,b)$ a předpokládejme na chvíli, že nějak („vědomím") umíme měřit hmotnost libovolné části tyče $[a,x]$, $x \in (a,b]$; ať je to $m(x)$. Potom hmotnost části tyče mezi y a x je rovna

$\tilde{m} = m(y) - m(x)$ a chceme-li měřit „střední" hustotu na úseku (x,y), potom

$$\rho_{stř.} = \frac{m(y)-m(x)}{y-x}$$

Tedy hustota v bodě x bude $\lim_{y \to x} \frac{m(y)-m(x)}{y-x} = m'(x)$,

neboli $\rho(x) = m'(x)$.

Tedy hmotnost tyče je primitivní fce k ρ. Ta je ale určena nejednoznačně – až na konstantu.
Ovšem $m_{tyč} = m(b) - m(a)$ a tudíž konstanta se odečte.

Neboli – Nechť $R(x)$ je primitivní fce k $\rho(x)$. Potom

$m_{tyč} = R(b) - R(a)$, kde $R = \int \rho(x)\,dx$. → to je v podstatě definice Newtonova integrálu.

b) Zkusme na to jít jinak. Představme si, že jsme schopni rozdělit tyč na malé části a spočítat hmotnost části tyče mezi x a $\Delta x + x$

$$\Delta m_i = \rho(z)(\Delta x)$$

přičemž z je nějaká hodnota mezi x a $x+\Delta x$. Můžeme brát např. největší hodnotu v intervalu, nejmenší, libovolnou.

Potom $\tilde{m}_{tyč} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$, je-li počet dílků n.

Je zřejmé, že když n se bude zvětšovat, pak $\tilde{m}_{tyč}$ se bude blížit ke skutečné hmotnosti tyče, neboli

$\rho \Delta x$!

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(z_i)(\Delta x)_i .$$ ⟹ Představme plochu pod grafem

V jakém smyslu se bere limita, upřesníme později. Toto je základní myšlenka Riemannova integrálu. Ukážeme později, že oba přístupy dávají pro „rozumné" fce stejné hodnoty a tudíž oba integrály jsou smysluplné.

(V průběhu semestru si ukážeme ještě jiný přístup – tzv. Lebesgueův integrál. Zde je myšlenka ještě paradoxnější – dělíme na intervaly ne osu x, ale osu y; pomocí tohoto přístupu lze integrovat větší počet funkcí).

6.1. Newtonův integrál

Definice 1 (Zobecněná primitivní fce)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Potom F nazveme zobecněnou primitivní fcí k f na intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$, jestliže a) F je spojitá na (a,b)

b) $F'(x) = f(x)$ na $(a,b) \setminus K$, kde $K \cap (-n,n)$ je konečná množina $\forall n \in \mathbb{N}$.

(Tj. je-li (a,b) omezený interval, je $F'(x) = f(x)$ na $I \setminus K$, K konečná, pro $I = (-\infty,\infty)$ připouštíme nejvýše spočetně mnoho takových bodů).

Definice 2 (Newtonův integrál)

Nechť F je zobecněná primitivní funkce k f na (a,b). Nechť $F(b^-) = \lim_{x\to b^-} f(x)$ a $F(a^+) = \lim_{x\to a^+} F(x)$ existují a jsou vlastní. Položme $[F(x)]_a^b = F(b^-) - F(a^+)$. ~~...~~ Potom Newtonovým integrálem na (a,b) nazveme

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b .$$

Pozorování a) * F je určena až na aditivní konstantu – ta ale $F(b^-) - F(a^+)$ odečte, tj. definice dává hodnotu Newtonova integrálu jednoznačně.

b) V definici ~~není vyloučeno~~ vylučujeme situace, kdy je ~~tato~~ jedna z limit nekonečná. Více se občas, což nekoníz, ~~, že hodnota integrálu je $+\infty$ nebo $-\infty$. V takovém~~ budeme uvažovat pouze v souvislosti s ~~Riem~~ Lebesgueovým integrálem.

* F, G zobec. prim. k f, pak $F - G = C$, neboť $(F-G)' = 0$ na $(a,b)\setminus K$ a věta Lagrange.

Příklad 1 Spočtěte:

a) $(N)\int_0^1 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_0^1 = \lim_{x\to 1^-}(x\ln x - x) - \lim_{x\to 0^+}(x\ln x - x) = -1 - 0 = -1$

b) $(N)\int_0^\infty x e^{-x}\,dx = [-(x+1)e^{-x}]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} -(x+1)e^{-x} + \lim_{x\to 0^+}(x+1)e^{-x} = 1$

c) $(N)\int_0^1 x^\alpha\,dx = $

- $\alpha \neq -1$: $\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}\left(\lim_{x\to 1^-} x^{\alpha+1} - \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+1}\right) = \frac{1}{\alpha+1}$ pro $\alpha > -1$; neex. pro $\alpha < -1$
- $\alpha = -1$: $[\ln x]_0^1 = \lim_{x\to 1^-} \ln x - \lim_{x\to 0^+} \ln x = +\infty$ neex. pro $\alpha = -1$

d) $(N)\int_1^\infty x^\alpha\,dx = $

- $\alpha \neq -1$: $\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^\infty = \frac{1}{\alpha+1}\left(\lim_{x\to\infty} x^{\alpha+1} - \lim_{x\to 1} x^{\alpha+1}\right) = \frac{-1}{\alpha+1}$ pro $\alpha < -1$; neex. $\alpha > -1$
- $\alpha = -1$: $(\ln x)_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln x - \lim_{x\to 1^+} \ln x = +\infty$ neex. pro $\alpha = -1$.

Pozn. Někdy se říká, že integrál diverguje, je-li „$(N)\int_a^b f(x)\,dx = \pm\infty$" (tj. připouštíme, že ~~limita~~ $[F]_a^b$ může být i nekonečno. Potom, je-li konečná, pak se mluví o konvergentním integrálu, je-li nekonečná, integrál diverguje a pokud limity neexistují nebo $F(b^-) - F(a^+)$ je výraz typu $\infty - \infty$, potom integrál neexistuje.

6.2. Definice Riemannova integrálu (1/2 přednášky)

Definice 3

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$. Dělením D intervalu $[a,b]$ nazveme $n+1$ čísel x_i, $i=0,\dots,n$ takových, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Číslo $\nu(D) = \max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i - x_{i-1}|$ nazveme normou dělení. Dělení D' se nazývá zjemněním D, jestliže $D \subset D'$ (tj. každý bod dělení D je bodem dělení D').

Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je daná omezená funkce, $[a,b]$ omezený interval. Označme

$m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ $\qquad M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

$m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ $\qquad M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ $\qquad i=1,\dots,n.$

Zřejmě platí: $-\infty < m \le m_i \le M_i \le M < \infty$ $\quad i = 1,\dots,n$.

Definice 4

Číslo $s(f,D) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ se nazývá dolní Riemannův součet
$S(f,D) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ se nazývá horní Riemannův součet
fce f na intervalu $[a,b]$.

Zřejmě: $-\infty < m(b-a) \le s(f,D) \le S(f,D) \le M(b-a) < \infty$.

Věta 1:

Nechť D_1, D_2 jsou dvě libovolná dělení intervalu $[a,b]$. Potom
$$s(D_1) \le S(D_2).$$

Důkaz

Krok 1 Nechť D^* je zjemněním dělení D. Potom
$$s(f,D) \le s(f,D^*) \quad \text{a} \quad S(f,D^*) \le S(f,D).$$
Ukážeme nerovnost pro $s(f,D)$ pokud přidáme jeden bod, říkejme y mezi x_j a x_{j+1}.

Potom $s(f,D) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i (x_{i+1} - x_i) = \sum\limits_{i=1}^{j} m_i (x_i - x_{i-1}) + m_j (x_{j+1} - x_j) + \sum\limits_{i=j+2}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$

$\le \sum\limits_{i=1}^{j} m_i (x_i - x_{i-1}) + \tilde m_{j,1} (y - x_j) + \tilde m_{j,2} (x_{j+1} - y) + \sum\limits_{i=j+2}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = s(f,D^*)$.

neboť $\tilde m_{j,i} \ge m_j$ $\quad i=1,2$

(Když se dodělá indukce, pro S je postup analogický). → nebo raději $s(f,D^*) - s(f,D) = \tilde m_{j,1}(y - x_j) + \tilde m_{j,2}(x_{j+1} - y) - m_j(x_{j+1} - y) \ge 0$ neb $m_j \le \tilde m_{j,1}, \tilde m_{j,2}$.

Krok 2 Nechť D_1, D_2 jsou libovolná dvě dělení $[a,b]$ a nechť D^* je zjemnění, které vznikne spojením $D_1 \cup D_2$ (tj. to společné zjemnění). Potom

$$s(f,D_1) \le s(f,D^*) \le S(f,D^*) \le S(f,D_2).$$

víme ~~plyne~~, že pro f omezenou je

$$s(f,D_1) \le M(b-a)$$
$$S(f,D) \ge m(b-a)$$

a navíc dolní součet je vždy menší nebo roven hornímu součtu. Tedy pro

Definice 5 (Riemannův součet)

Dolní Riemannův integrál pro f na intervalu $[a,b]$ definujeme $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup_D s(f,D)$

a horní Riemannův integrál pro f —||— $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_D S(f,D)$.

máme

$$m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Příklad 2

a) Nechť $f(x) = K$ na $[a,b]$. Potom zřejmě $s(f,D) = K\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = K(b-a) = S(f,D)$

a tudíž $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = K(b-a)$

b) Nechť $f(x) = D(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ (Dirichletova fce).

Potom $s(f,D) = 0$, $S(f,D) = 1$ (neboť každý interval obsahuje jak racionální, tak iracionální čísla)

a tudíž

$$0 = \underline{\int_0^1} f(x)\,dx < \overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1.$$

Tedy ne pro každou omezenou fci je dolní integrál stejný jako horní integrál.

Definice 6 (Riemannův integrál)

Řekneme, že funkce f má Riemannův integrál, značíme $(R)\int_a^b f(x)\,dx$, jestliže

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Tedy pro omezenou fci Riemannův integrál obecně existovat nemusí (Př. 2 b)), ale může (Př. 2 a)). Definice má rovněž smysl pro omezenou fci na omezeném intervalu. Na druhou stranu, Newtonův integrál nepožadoval ani omezenost f, ani omezenost intervalu. Cílem bude ukázat, že pokud oba integrály existují pak se sobě rovnají. Ale dříve si ukážeme, za jakých podmínek Riemannův integrál existuje.

6.3. Kritéria existence Riemannova integrálu   nebyl 1/2 pravý

Lemma 1

Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Potom
$$(R)\int_a^b f(x)\,dx \ \exists \iff \forall \varepsilon>0\ \exists D: \ (S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon.$$

Důkaz

$\Rightarrow$ Víme, že $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ a tedy z definice suprema a infima existují D_1 a D_2 tak, že
$$S(f,D_1) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad s(f,D_2) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} \ \text{tj.}$$
$$S(f,D_1) - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx < s(f,D_2)+\frac{\varepsilon}{2}.$$
Označme D společné zjemnění D_1 a D_2. Potom
$$S(f,D) \le S(f,D_1) < s(f,D_2)+\varepsilon \le s(f,D)+\varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Z definice horního a dolního integrálu plyne
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \le S(f,D) < \varepsilon + s(f,D) \le \varepsilon + \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad \forall \varepsilon>0, \text{ tj.}$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \le \underline{\int_a^b} f(x)dx,$$ ale z vlastností integrálů nutně plyne rovnost. ∎

Věta 2 (spojité fce)

Nechť f je spojitá na $[a,b]$ (tj. $f\in C([a,b])$). Potom $R\int_a^b f(x)\,dx \ \exists$.

Důkaz

Víme, že f je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$, tj. $\forall \eta>0\ \exists \delta>0,\ \forall x,y\in[a,b],\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\eta$.
Zvolme tedy $\varepsilon>0$ libovolný ale pevný. K číslu $\eta := \frac{\varepsilon}{(b-a)}$ nalezneme δ tak, že
$$|f(x)-f(y)|<\eta \quad \text{pro } |x-y|<\delta.$$
Zvolme dělení takové, že $\nu(D)<\delta$. Potom máme na každém $[x_{i-1},x_i]$ platí
$$(M_i - m_i) < \eta, \quad M_i = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad m_i = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad \text{a tedy}$$
$$S(f,D) - s(f,D) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1}) < \eta \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$
čímž jsme větu dokázali. ∎

Podmínku spojitosti lze ještě zeslabit

Věta 3 (spojité fce až na konečně mnoho bodů)

Nechť f je spojitá funkce na $[a,b]\setminus K$, kde K je konečná množina, a nechť f je omezená na $[a,b]$. Potom $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ existuje.

Důkaz ~~Tato věta zatím nebudeme dokazovat, plyne totiž z obecnějšího výsledku, kterou si dokážeme za chvíli (V. o int. po části / na konci)~~

Dokážeme tuto větu pro případ $f\in C([a,b))$ resp. $f\in C((a,b])$, f omezená na $[a,b]$. Obecný případ potom plyne použitím věty o Riemannově integrálu na sjednocení intervalů – viz V8

Nechť tedy $f\in C([a,b))$, (druhý případ je naprosto analogický). Opět použijeme lemma 1. Zvolme $\varepsilon>0$

Pak ať $y_1 < y_2 < \dots < y_k \in [a,b]$ st $f\in C((y_i,y_{i+1}))$. $|f|\le L$ na $[a,b]$. Položme $\delta_i = \min\left(\frac{\varepsilon}{4kL}, \frac{y_i-y_{i-1}}{4}, \frac{y_{i+1}-y_i}{4}\right)$ $i=2,\dots,k-1$, $\delta_1 = \min\left(\frac{\varepsilon}{4kL}, \frac{y_2-y_1}{4}\right)$, $\delta_k = \min\left(\frac{\varepsilon}{4kL}, \frac{y_k-y_{k-1}}{4}\right)$. Pak $[a,b]\setminus\bigcup_{i=1}^k (y_i-\delta_i, y_i+\delta_i)$ je nejvýše $k+1$ uzavřených intervalů.

$\forall i=1..k-1\ \exists D_i$ dělení $[y_i+\delta_i, y_{i+1}-\delta_{i+1}]$: $(S(f,D_i)-s(f,D_i)) \le \frac{\varepsilon}{2(k+1)}$, nebo-li $D_0=\{a\}$ pokud $a\in(y_1-\delta_1, y_1+\delta_1)$, jinak $\exists D_0$ dělení $[a, y_1-\delta_1]$ s vlastností výše, podobně pro dělení D_k mezi y_k a b a $y_k+\delta_k$.

Položme $D = D_0\cup D_1\cup\dots\cup D_k$. Pak $S(f,D)-s(f,D) \le \sum_{i=0}^{k} (S(f,D_i)-s(f,D_i)) + \sum_{i=1}^{k} 2\delta_i \left(\sup_{x\in(y_i-\delta_i, y_i+\delta_i)\cap[a,b]} f(x) - \inf f(x)\right) \le \varepsilon$

a k tomuto ε vezmeme $\alpha\in(a,b)$: $(b-\alpha) < \frac{\varepsilon}{4L}$, kde $L = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Protože $f\in C([a,\alpha])$, existuje $(R)\int_a^\alpha f(x)dx$, tj. $\exists D$, dělení intervalu $[a,\alpha]$ takové, že $S(f,D)-s(f,D) < \frac{\varepsilon}{2}$. Přidejme bod b k tomuto dělení a označme toto dělení D'.

Potom

$$S(f,D')-s(f,D') = S(f,D)-s(f,D) + \left(\sup_{x\in[\alpha,b]} f(x) - \inf_{x\in[\alpha,b]} f(x)\right)(b-\alpha) < \frac{\varepsilon}{2} + 2L\cdot\frac{\varepsilon}{4L} = \varepsilon. \blacksquare$$

Věta 4

Nechť f je ~~omezená~~ monotonní (a tedy i omezená) na $[a,b]$. Potom existuje $R\int_a^b f(x)dx$.

Důkaz ~~- špatně: Pokusíme se spojit, ... „skočit" v dělících bodech, ... f~~ OK

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že f je neklesající. Potom $f(x)\in[f(a), f(b)]$ $\forall x\in[a,b]$.

Zvolme D ekvidistantní dělení, tj. $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$. Potom $M_i = f(x_i)$, $m_i = f(x_{i-1})$ a

$S(f,D)-s(f,D) = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^n f(x_i) - f(x_{i-1})\right) = \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)) < \varepsilon$ pro $n > \frac{1}{\varepsilon}(f(b)-f(a))(b-a)$. $\blacksquare$

6.4. Ekvivalentní definice Riemannova integrálu

1 hodina

Přidělení podle přístupu Darbouxa. Nyní si ukážeme jiný postup, jehož autorem byl skutečně Riemann.

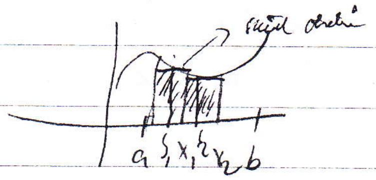
Definice 7

Nechť D je dělení $[a,b]$, $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$. Označme $N(D) = \{\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n),\ \xi_i\in[x_{i-1},x_i], i=1,\dots,n\}$.

Je-li $\xi\in N(D)$, potom

$$\sigma(f,D,\xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazveme Riemannovým integrálním součtem funkce f na intervalu $[a,b]$.



Definice 8

Nechť $\delta>0$. Označme $U_\delta = \{(D,\xi);\ \nu(D)<\delta,\ \xi\in N(D)\}$. Potom

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f,D,\xi) = A\in\mathbb{R}$$

pokud $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0,\ \forall(D,\xi)\in U_\delta : |\sigma(f,D,\xi)-A|<\varepsilon$.

V podstatě jde o limitu. Proto platí následující vlastnosti

Cvičení Ukažte, že

1) $\lim_{\nu(D)\to 0}\sigma(f,D,\xi) = A \iff \forall(D^k,\xi^k);\ \nu(D^k)\to 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\sigma(f,D^k,\xi^k) = A$ (Heineho věta)

2) $\lim_{\nu(D)\to 0}\sigma(f,D,\xi)$ existuje $\iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0,\ \forall(D^1,\xi^1),(D^2,\xi^2)\in U_\delta : |\sigma(f,D^1,\xi^1)-\sigma(f,D^2,\xi^2)|<\varepsilon$ (Bolzano-Cauchy)

3) Nechť $\lim_{\nu(D)\to 0}\sigma(f_i,D,\xi) = A_i$, $i=1,2$ a $\lambda\in\mathbb{R}$. Potom $\lim_{\nu(D)\to 0}\sigma(f_1+f_2,D,\xi) = A_1+A_2$, $\lim_{\nu(D)\to 0}\sigma(\lambda f_i,D,\xi) = \lambda A_i$. (Limita součtu a ...)

4) $\exists U_\delta,\ \forall(D,\xi)\in U_\delta : \sigma(f,D,\xi)\le\sigma(g,D,\xi) \Rightarrow \lim_{\nu(D)\to 0}\sigma(f,D,\xi) \le \lim_{\nu(D)\to 0}\sigma(g,D,\xi)$ (pokud limity $\exists$) (limitní přechod v nerovnosti)

Pozor. 3) – součin ne!

Věta 5 (Ekvivalentní definice Riemannova integrálu)

(R) $\int_a^b f(x)dx$ existuje a rovná se $A \iff \lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f,D,\xi) = A$.

Důkaz

$\Leftarrow$ ~~(Podle tvrzení 2 (B.C. podmínka)~~ $\cancel{\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : (D,\xi) \text{ a } (D,\xi')\in\mathcal{U}_\delta \Rightarrow |\sigma(f,D,\xi)-\sigma(f,D,\xi')|<\frac{\varepsilon}{2}}$ ~~Potom ale i~~ $\cancel{\sup_\xi \sigma(f,D,\xi) - \inf_\xi \sigma(f,D,\xi) \le \frac{\varepsilon}{2}}$ ~~(Dokažte si!), tj.~~ $\cancel{S(f,D)-s(f,D)\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon}$ ~~a tedy Riemannův integrál existuje. Zbývá dokázat, že je roven A.)~~

~~Předpokládejme tedy, že je $>A$ (důkaz menšího je analogický)~~. Zvolme $\frac{\varepsilon}{4}>0$ a vezměme si odpovídající $\delta>0$ z definice $\mathcal{S}$ (tj. $|\sigma(f,D,\xi)-A|<\frac{\varepsilon}{4}\ \forall (D,\xi)\in\mathcal{U}_\delta$).

Potom $\sigma(f,D,\xi) > A - \frac{\varepsilon}{4}$ (jinak dostáváme spor). Zvolme posloupnost ξ^k takovou, že $\lim_{k\to\infty} f(\xi_i^k) = m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ – zkonstruujeme z definice infima. Potom ale

$$s(f,D) = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\xi_i^k)(x_i-x_{i-1}) = \lim_{k\to\infty}\sigma(f,D,\xi^k) \ge A-\frac{\varepsilon}{4} > A-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Analogicky dokážeme, že $S(f,D) < A+\frac{\varepsilon}{2}$, tedy nutně ~~(protože Riemannův integrál existuje, ale to asi nepotřebujeme vidět!)~~ $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = A$.

$\Rightarrow$ (těžší implikace)

Zvolme $\varepsilon>0$

Víme, že existují Riemannovy součty dolní i horní tak, že $s(f,D_1) > A-\frac{\varepsilon}{2}$ resp. $S(f,D_1) < A+\frac{\varepsilon}{2}$. Budeme chtít ukázat, že $\sigma(f,D,\xi)\in(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ $\forall (D,\xi)\in\mathcal{U}_\delta$ pro jisté $\delta>0$. Ukážeme pouze první nerovnost, druhá se dokáže analogicky, tj. $A-\varepsilon<\sigma(f,D,\xi)$ $\forall (D,\xi)\in\mathcal{U}_\delta$. Víme tedy, že i $\sigma(f,D_1,\xi) > A-\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall \xi\in N(D)$. Potíž je, že zde nemůžeme použít monotónii, neboť neplatí, že $\forall D: \nu(D)<\nu(D_1)$ je $\sigma(f,D,\xi) > s(f,D_1)$: to platí pouze $\forall D$ takové, že D je zjemnění D_1. Ukážeme ale, že když zvolíme δ dost malé, nebude $\sigma(f,D,\xi)$ „o moc menší než" $s(f,D_1)$.

Vezměme tedy $(D,\xi)\in\mathcal{U}_\delta$ a budeme hledat podmínku na δ. Označme E společné zjemnění D a D_1. Platí zřejmě $s(f,D)\le s(f,E)$ a $s(f,D)\le\sigma(f,D,\xi)$. Budeme zkoumat, jak moc se může lišit $\sigma(f,D,\xi)$ a $s(f,D)$. Platí tedy

$$s(f,D_1) - \sigma(f,D,\xi) \le s(f,E) - s(f,D)$$

Ukážeme-li, že (*) $\boxed{s(f,E)-s(f,D)<\frac{\varepsilon}{2}}$ pro jisté δ, potom tedy $s(f,D_1)-\sigma(f,D,\xi)<\frac{\varepsilon}{2}$ a tedy pro $\delta>0$, $(D,\xi)\in\mathcal{U}_\delta$:

$\sigma(f,D,\xi) > s(f,D_1) - \frac{\varepsilon}{2} > A - \varepsilon$.

Dokažme (*). Dělení E vzniklo tak, že jsme do D přidali dělicí body D_1; nechť tedy n v D_1 značí počet bodů. Pokud D_1 obsahovalo n bodů, bylo v D zasaženo nejvýše n intervalů. Ostatní se proto nezmění a hodnoty jsou v součtu odečteny. Každý bod nám přidal nejvýše dva nové intervaly v D – tedy v E je nejvýše $2n$ intervalů odlišných od D. ~~Sčítanců~~ Máme tedy $2n$ sčítanců typu $\inf_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x)\,(x_{j+1}-x_j)$; nyní $|x_{j+1}-x_j|<\delta$ a $|m_j|\le K$. Naopak D obsahuje nejvýše n odlišných intervalů a proto

$|s(f,E) - s(f,D)| \le$ ~~...~~ $2n \cdot v(D^*) K + n \cdot v(D) K = 3n\, v(D) \cdot K$.

Volme-li tedy $v(D) = \delta < \frac{\varepsilon}{6nK}$, je

$|s(f,E) - s(f,D)| < \frac{\varepsilon}{2}$,

což jsme chtěli dokázat. (obdobně pro S) □

~~Výše uvedené definice nad množinou (na rozdíl od Darbouxovy definice)~~ jednodušší ~~definovat integrál i pro komplexní fce. Totiž pro $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$~~

Pro $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ můžeme definovat

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b f_1(x)\,dx + i \int_a^b f_2(x)\,dx$$

a $\sigma(f,D,\xi) = \sigma(f_1,D,\xi) + i\, \sigma(f_2,D,\xi)$

a tedy vše, co bylo uvedeno výše, zůstává v platnosti i pro komplexní funkce.

Pozn: Riemannova definice je vhodná pro zobecňování

6.5. Vlastnosti Riemannova integrálu - vlastnosti, operace

Věta 6 (Integrál součtu a násobku)

Nechť existují $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ a $(R)\int_a^b g(x)\,dx$ a $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Potom též existují Riemannovy integrály součtu resp. násobku a platí

(i) $(R)\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = (R)\int_a^b f(x)\,dx + (R)\int_a^b g(x)\,dx$

(ii) $(R)\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha (R)\int_a^b f(x)\,dx$.

Důkaz

Je triviálním důsledkem Cvičení 3 ze Def. 8 a Věty 5. / Lemma 1 stačí se zjemněním a epsilonem.

Dk(ii): Lemma 1 pro f: $\exists D: |S(f,D) - s(f,D)| < \varepsilon$, ale dále $\Rightarrow |S(\alpha f,D) - s(\alpha f,D)| < |\alpha| \varepsilon$ kdyby $\alpha < 0$

Věta 7 (Monotonie integrálu a integrál absolutní hodnoty)

(i) Podobný součet odhadu shora je odhad součtu shora celkově.

Nechť existují Riemannovy integrály pro f, g a h na intervalu $[a,b]$. Potom

(i) Je-li $h \ge 0$ na $[a,b]$, pak $(R)\int_a^b h(x)\,dx \ge 0$ (~~(i') je-li $h > 0$ na (a,b), pak $(R)\int_a^b h(x)\,dx > 0$~~)

(ii) Je-li $f \le g$ na $[a,b]$, pak $(R)\int_a^b f(x)\,dx \le (R)\int_a^b g(x)\,dx$

(iii) Existuje $(R)\int_a^b |f(x)|\,dx$ a platí $\left|(R)\int_a^b f(x)\,dx\right| \le (R)\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Důkaz

(i) Je-li $h \ge 0$, potom její libovolný integrální součet je nezáporný a tedy výsledek podle Cvičení 4 ~~...~~ vychází ≥ 0, q.e.d.

(ii) Je triviálním důsledkem toho, že $(g-f)(x) \ge 0$ na $[a,b]$ a tedy $(R)\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx \ge 0$, a Věty 6.

(iii) Dokažme nejprve, že $(R)\int_a^b |f(x)|\,dx$ existuje. Pro jednoduchost nechť f je z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ (je-li do $\mathbb{C}$, čtenáři si modifikaci snadno provedou).

Protože

$$\big||f(x)|-|f(y)|\big| \le |f(x)-f(y)|,$$

je

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)| - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)| \le \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad \left(\big||f(x)|-|f(y)|\big| \le |f(x)-f(y)| \le \sup_{x\in} f(x) - \inf_{x\in} f\right)$$

a nalevo vezmu $\sup_{x,y}$

a tedy $S(D,|f|) - s(D,|f|) \le S(D,f) - s(D,f)$, dle Lemma 1.

Z existence Riemannova integrálu pro f plyne $\forall \varepsilon>0\ \exists D:\ S(D,f)-s(D,f)<\varepsilon$, a tudíž stejná nerovnost platí i pro $|f|$, tj. $R\int_a^b |f(x)|\,dx$ existuje.

Nerovnost (iii) plyne z (ii), neboť $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|\quad \forall x\in[a,b]$. ∎

Lemma 2: $A\subset\mathbb{R}, B\subset\mathbb{R}$, $A+B \overset{def}{=} \{x+y: x\in A, y\in B\}$

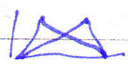
Pak $\sup A+\sup B = \sup(A+B)$ Př: $(0,1)+[0,1) = [0,2)$

Dk: $x+y\le \sup A+\sup B \Rightarrow$ "$\ge$"

$\forall\varepsilon>0\ \exists x\ge\sup A-\varepsilon, \exists y\ge \sup B-\varepsilon \Rightarrow x+y\ge \sup A+\sup B-2\varepsilon$ $\Rightarrow$ "$\le$"

Cvičení: Dokažte V6 a V7 (i) bez použití V5!

Pozn: $\sup_{x\in}(f+g) \le \sup f(x) + \sup g(x)$



Věta 8 (Součet Riemannových integrálů na dvou intervalech a existence Riemannova integrálu na podintervalech). Nechť f je omezená fce na $[a,b]$, $a<c<b$. Potom

(i) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$ (ii) $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$

a (iii) $(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx$

platí, kdykoliv má jedna strana smysl. Navíc, je-li $a\le c\le d\le b$, a $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ existuje, potom též $(R)\int_c^d f(x)\,dx$ existuje.

RHS $= \sup_{D \text{ dělení } [a,b] \text{ obs. } c} s(f,D)$ dle Lemmatu 2

DK(i): "$\ge$" $\Leftarrow$ vlevo uvažuji větší množinu dělení (ii) podobně

"$\le$" $\Leftarrow$ každé dělení vlevo lze zjemnit přidáním c

Důkaz

Krok 1 Identity pro horní a dolní integrál

Ukážeme rovnost pouze pro dolní integrál. Mějme D dělení intervalu $[a,b]$ a označme D' dělení $D\cup\{c\}$. a z dělení D' vytvoříme dělení D_1 intervalu $[a,c]$ a D_2 intervalu $[c,b]$. Potom tedy

$$s(f,D) \le s(f,D') = s(f,D_1)+s(f,D_2) \le \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

tj. $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$.

Vezmeme nyní D_1 a D_2 libovolná dělení intervalů $[a,c]$ resp. $[c,b]$ a označme $D=D_1\cup D_2$. Potom

$$s(D_1)+s(D_2) = s(D) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

tj. $\underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, tj. dokázali jsme rovnost.

Krok 2 DK(iii):

Odečtením rovností pro dolní a horní integrál máme

$$\left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\right) = \left(\overline{\int_a^c} f(x)\,dx - \underline{\int_a^c} f(x)\,dx\right) + \left(\overline{\int_c^b} f(x)\,dx - \underline{\int_c^b} f(x)\,dx\right).$$

Všechny členy jsou nezáporné. Existuje-li $(R)\int_a^b f(x)\,dx$, je levá strana 0, tedy oba členy napravo musí být nulové. Analogicky dokážeme zbytek. Dk V1

Dk(iii): iterací (ii): $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$

Krok 3

Z exist. (R) $\int_a^b f(x)dx$

Z kroku 2 plyne ~~z existence~~ $\cancel{(R)\int_a^b f(x)dx}$ ~~existence~~ $\cancel{(R)\int_c^b f(x)dx \ \forall c \in [a,b)}$ ~~a~~ existence $(R)\int_a^d f(x)dx \quad \forall d \in (a,b]$. Potom, úplně stejně ~~ex~~ lze existence $(R)\int_c^d f(x)dx \quad \forall c \in [a,d)$. ∎

Doposud jsme uvažovali pouze existenci integrálu pro $-\infty < a < b < +\infty$. Zavedeme následující úmluvu:

$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^a f(x)dx = 0$

$a, b \in \mathbb{R},\ a < b \quad (R)\int_b^a f(x)dx = -(R)\int_a^b f(x)dx.$

Potom

Cvičení Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$ $\alpha = \min\{a,b,c\}$ a $\beta = \max\{a,b,c\}$. Potom, pokud existuje $(R)\int_\alpha^\beta f(x)dx$, existují i následující tři integrály a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Cvičení Nechť $d_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{jinak} \\ 1 & x = c \end{cases}$ Potom $\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$. Návod: použijte libovolnou definici.

Uvedeme následující „užitečnou větu" ;)

Definice: charakteristická funkce $\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

Věta 9

Hodnota Riemannova integrálu se nezmění, pokud změníme fci v konečném počtu bodů.

Důkaz (Bacha na existenci!)

Nechť $f(x) = g(x)$ na $[a,b] \setminus \{c\}$. Libovolný ~~konečný~~ počet bodů se dokáže pomocí indukce. ~~Definujme~~ Platí

$f(x) = g(x) + d_c(x)\,(f(c) - g(c))$. Potom

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) + d_c(x)\,(f(c)-g(c)))dx = \int_a^b g(x)dx + (f(c)-g(c))\int_a^b d_c(x)dx = \int_a^b g(x)dx + 0. \ \blacksquare$$

– Dolní součty vždy 0

Horní ≤ $\Lambda(D)$ [illegible]

Na závěr této kapitoly si ukážeme vztah Riemannova a Newtonova integrálu.

Věta 10 (když fce má oba, dostanu z jednoho druhý)

Jestliže existují $(R)\int_a^b f(x)dx$ a $(N)\int_a^b f(x)dx$, pak se sobě rovnají.

Důkaz

Z existence Newtonova integrálu plyne existence zobecněné primitivní fce F tak, že

$(N)\int_a^b f(x)dx = F(b^-) - F(a^+)$ a $F' = f$ na $[a,b] \setminus K$, K konečná

Existence $(R)\int_a^b f(x)dx$ zaručuje $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall D, \nu(D) < \delta: |\sigma(f,D,\xi) - (R)\int_a^b f(x)dx| < \varepsilon$. ~~$\exists$ dělení D, že $s(f,D) > (R)\int_a^b f(x)dx - \varepsilon$ a $S(f,D) < (R)\int_a^b f(x)dx$~~ $+\varepsilon$.

Nechť $\exists$ Newtonův integrál ~~Potom~~ Nechť D je dělení výše, libovolné s $\nu(D) < \delta$ a D' je zjemnění, obsahující body z K.

Pak $(N)\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^m (F(x_j) - F(x_{j-1})) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j)\,(x_j - x_{j-1}) = \sigma(f, D', \xi)$

Potom tedy

$$(R)\int_a^b f(x)dx - \varepsilon \le (N)\int_a^b f(x)dx \le (R)\int_a^b f(x)dx + \varepsilon, \text{ tj. } \forall \varepsilon > 0$$

$$|(N)\int_a^b f(x)dx - (R)\int_a^b f(x)dx| < \varepsilon.$$

∎

Def 8 $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ ∃ (tj. omezená, z konečna, f je omezená)

Nechť $f: (a,b]\to\mathbb{R}$, Definujeme nyní

$$F(x) \equiv F_a(x) = \begin{cases} 0 & x=a \\ (R)\int_a^x f(x)\,dx & x\in(a,b]. \end{cases}$$

Věta 11 (tzv. hlavní věta diferenciálního a integrálního počtu).

(i) F je spojitá v (a,b) a v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva

(ii) Je-li f spojitá v $x_0\in(a,b)$ (a zprava v a, zleva v b), potom $F'(x_0)=f(x_0)$ ($F'(x_0^+)=f(x_0)$, $x_0=a$ resp. $F'(x_0^-)=f(x_0)$, $x_0=b$). Speciálně, je-li f spojitá v (a,b), potom F' je $(x)=f(x)$ v (a,b).

Důkaz

(i) Nechť $x_0\in[a,b)$, $x>x_0$. Potom

$$F(x)-F(x_0) = \int_a^x f(y)\,dy - \int_a^{x_0} f(y)\,dy = \int_{x_0}^x f(y)\,dy$$

tj. $|F(x)-F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(y)\,dy\right| \underset{(iii)}{\leq} V7 \leq \int_{x_0}^x |f(y)|\,dy \leq L\int_{x_0}^x dy = L(x-x_0)$

$\Rightarrow$ F je spojitá zprava. Spojitost zleva se ukáže analogicky. Tvrzení (i) je dokázáno.

(ii) Nechť $x>x_0$, $x_0\in[a,b)$. Potom

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{(x-x_0)}\left(\int_a^x f(y)\,dy - \int_a^{x_0} f(y)\,dy\right) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(\xi)\,d\xi$$

Tedy

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x \big(f(\xi) - f(x_0)\big)\,d\xi.$$

Zvolme $\varepsilon>0$. Potom dle spojitosti f v x_0 existuje $\delta>0$: $(x\in(x_0,x_0+\delta)\Rightarrow |f(\xi)-f(x_0)|<\varepsilon$. Potom ale

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{(x-x_0)}\int_{x_0}^x |f(\xi)-f(x_0)|\,d\xi < \varepsilon\,\frac{x-x_0}{x-x_0} = \varepsilon.$$

Tedy $F'(x_0^+)=f(x_0)$. Analogicky se postupuje pro derivaci zleva. ∎

Věta 12 (o existenci primitivní fce)

Nechť $-\infty\leq a<b\leq\infty$ a nechť $f: (a,b)\to\mathbb{R}$ je spojitá. Potom existuje primitivní fce k f na (a,b)

Důkaz

Volme $\{a_n\}_{n=1}^\infty \searrow a$ a $\{b_n\}_{n=1}^\infty \nearrow b$. Potom

$$F_n(x) = \int_{a_n}^x f(\xi)\,d\xi \qquad x\in(a_n,b_n)$$

je primitivní fce k f na $[a_n,b_n]$ dle V11. Zvolme $x_0\in(a_1,b_1)$ pevně a položme $\hat{F}_n(x) = F_n(x) - F_n(x_0)$. Potom je ale $\hat{F}_n$ primitivní fce k f na $[a_n,b_n]$ a splňuje $\hat{F}_n(x_0)=0$. Tedy pro $n\neq m$ jsou $\hat{F}_n$ a $\hat{F}_m$ dvě primitivní fce k f na (a_n,b_m) (pro $n<m$ BÚNO) a liší se o konstantu. Ale $\hat{F}_n(x_0)=\hat{F}_m(x_0) \Rightarrow \hat{F}_n=\hat{F}_m$. Můžeme tedy definovat

$$F(x) := \hat{F}_n(x), \quad x\in(a_n,b_n). \quad n\in\mathbb{N}.$$

Protože $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n,b_n) = (a,b)$, je F primitivní fce k f na (a,b). ∎

Poznámka

(a) Je-li speciálně $f \in C[a,b]$, pak je F primitivní k f na $[a,b]$ a tudíž nám předchozí věta dává návod, jak spočítat $(R)\int_a^b f(x)dx$ bez použití pojmu Newtonova integrálu (viz V 10). Máme totiž

$$(R)\int_a^b f(s)ds = F_a(b) - F_a(a) = (F(b)+c) - (F(a)+c) = F(b) - F(a),$$

kde F je libovolná primitivní fce F k f na $[a,b]$.

(b) V 10 Nám umožňuje spočítat

$\frac{d}{dx}\varphi(x)$, kde $\varphi(x) = \int_a^{g(x)} f(s)ds$. Je totiž

$$\varphi(x) = F(g(x)) - F(a),\ \text{tj.}$$

$$\varphi'(x) = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\, g'(x)$$

resp. pro $\psi(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(s)ds$

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = f(g_2(x))\, g_2'(x) - f(g_1(x))\, g_1'(x),$$

za předpokladu, že pravá strana má smysl.

Věta 13 (integrace per partes pro Riemannův integrál)

Nechť f, g ~~jsou~~ a jejich derivace spojité na $[a,b]$. ~~a diferencovatelné na (a,b), přičemž derivace jsou omezené na $[a,b]$~~.

Potom

$$(R)\int_a^b f'g\,dx = [fg]_a^b - (R)\int_a^b fg'\,dx.$$

Důkaz

Za uvedených předpokladů víme, že fg je primitivní fce k $f'g + fg'$ na $[a,b]$ a dle speciálního fg je $[fg]_a^b = (R)\int_a^b (f'g + fg')dx$.

Dle předpokladů víme, že každý integrál zvlášť existuje ~~(konvergují f a g!)~~ a tvrzení vyplývá z linearity integrálu (V6). ■

Věta 14 (Věta o substituci pro Riemannův integrál)

$\boxed{\text{Situace 1}}$: Nechť $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$ a $f \in C([a,b])$, $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$. Potom

$$(R)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = (R)\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

$\boxed{\text{Situace 2}}$: Nechť $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$, $\varphi'(x) \neq 0$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$, $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$, $f \in C([a,b])$. Potom

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Důkaz

(1) Je-li F primitivní k f, pak $F\circ\varphi$ je primitivní k $(f\circ\varphi)\varphi'$, tedy

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = [F\circ\varphi]_\alpha^\beta = (F)_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

(2) Víme, že $(f\circ\varphi)\varphi' \in C[\alpha,\beta]$, existuje primitivní fce Φ k $(f\circ\varphi)\varphi'$ a podle věty o substituci V3.7 2. substituční metoda pro primitivní fce víme, že $\Phi\circ\varphi^{-1}$ je primitivní fce k f. Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\Phi\circ\varphi^{-1}]_a^b = [\Phi]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (f\circ\varphi)\varphi'\,dt.$$ ☒

Pozorování: Výpočet této věty není ani tak moc korektní (jsou to hlavně důsledky, není jich dobré zmatek vést), jako spíše jejich praktické využití. Umožňují totiž přímo transformovat meze při substituci, až dokonce po komplikovanější substituci můžeme vyrazit nějaké počty.

6.6. Vlastnosti Newtonova integrálu

V této kapitole shrneme ~~vlastnosti~~ některé vlastnosti Newtonova integrálu, které jsou buď jednoduché nebo přímo plynou z důkazu dokazovaného. Častá chyba je, že např. pro e^{-x^2} na $\mathbb{R}$ se může ~~bez~~ zeptat domnívat, že Newtonův integrál neexistuje, neboť víš, že neumíme analyticky vyjádřit primitivní fci. To je však něco jiného než že neexistuje – jen její vyjádření není možné pomocí námi nalezených fcí. Nejprve jedno kritérium existence.

Věta 15

Nechť $f \in C((a,b)\setminus K)$, $-\infty < a < b < +\infty$ a K je nanejvýš konečná množina. Nechť f je omezená na (a,b). Potom $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ existuje konečný.

Důkaz

Víme, že existuje zobecněná primitivní fce $F(x) \equiv (R)\int_a^x f(y)\,dy$, $F'(x)=f(x)$ na $(a,b)\setminus K$ (viz V3 a V11). Navíc analogicky jako ve V3 můžeme dokázat, že $\lim_{x\to a^+}F(x)$ a $\lim_{x\to b^-}F(x)$ existují. Tedy $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ existuje. ($\lim_{x\to a^+}F(x)=0$ triv., $\lim_{x\to b^-}F(x)$ pomocí B-C) ☒

Věta 16

Nechť $f \le g$ v (a,b), $a\le b$, a nechť $(N)\int_a^b f\,dx$ a $(N)\int_a^b g\,dx$ existují. Potom $(N)\int_a^b f(x)\,dx \le (N)\int_a^b g(x)\,dx$. Speciálně, je-li $h(x)\ge 0$ a $(N)\int_a^b h\,dx$ existuje, potom $(N)\int_a^b h(x)\,dx \ge 0$.

Důkaz

Stačí dokázat druhé tvrzení. Víme, že H' existuje až na množinu konečně mnoha bodů a tam je rovna h. Tedy $H'(x)=h(x)\ge 0$ v $(a,b)\setminus K$, H je spojitá, tedy H je neklesající, tj. $[H]_a^b \ge 0$. ☒ (nejjednodušší – když K nevadí Lagrangeova v. po kouskách)

Věta 17

Nechť $-\infty < c < b \le \infty$. Potom

(i) Je-li f spojitá v $[c,b)$, $g\ge 0$ v $[c,b)$ a $(N)\int_c^b g(x)\,dx$ existuje $\in\mathbb{R}$ a $f(x)=O(g(x))$ pro $x\to b^-$, potom $(N)\int_c^b f(x)\,dx$ existuje $\in\mathbb{R}$.

značí $f \in O(g)$ a $g = O(f)$

$(\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 f(x) \leq g(x) \leq c_2 f(x)\ x \in (b-\delta, b))$

(ii) Pokud $f, g \geq 0$, $f, g \in C[c, b)$ a $f \sim g$ pro $x \to b^-$, pak
$(N)\int_c^b f(x)dx$ existuje $\in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $(N)\int_c^b g(x)dx$ existuje $\in \mathbb{R}$

(iii) Speciálně, jsou-li f, g, h spojité ~~a~~ nezáporné v $[c, b)$ a $f \sim g$ pro $x \to b^-$, pak
$\int_c^b f(x)h(x)dx$ existuje $\Leftrightarrow$ $\int_c^b f(x)g(x)dx$ existuje

Důkaz

Stačí ukázat (i). Víme, že pro G platí zobecněná podmínka pro h g platí, že pro zvolené $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$
$|G(x') - G(x'')| < \varepsilon$ pro $x', x'' \in (b-\delta, b)$, jsou-li $x', x'' \in \mathcal{U}_\delta^{-}(b)$. Dále $G(x') - G(x'') = \int_{x''}^{x'} g(x)dx$.

Na druhou stranu, primitivní funkce k f existuje na (c, b) a tedy
$|F(x') - F(x'')| = \int_{x''}^{x'} f(x)dx$. (v Riemannově, ale též Newtonově smyslu). Pokračujeme Věta 5.15
a toho, že $|f(x)| \leq C|g(x)|$ na okolí bodu b máme
$\left|\int_{x'}^{x''} f(x)dx\right| \leq \int_{x'}^{x''} |f(x)|dx \leq C \int_{x'}^{x''} g(x)dx$

tudíž

$|F(x') - F(x'')| \leq C\,|G(x') - G(x'')|$, tj. F splňuje B.C. podmínku a integrál tedy konverguje ∎

Poznámka Obecně není pravda, že existence jednoho integrálu implikuje existenci druhého. Na jednu stranu,
$(R)\int_0^1 R(x)dx = 0$, kde R je Riemannova fce $- \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pro } x = \frac{p}{q} \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{ nesoudělná} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ Ukážte!
ale R nemá spojitou na množině nenulové míry. $\underline{p, q}$
~~Tato fce~~ Newtonův integrál neexistuje.

Na druhou stranu, Volterra zkonstruoval příklad spojité fce, jejíž derivace je omezená, ale není integrovatelná v Riemannově smyslu. Na druhou stranu Newtonův integrál zde existuje.

Dále víme ~~z definice~~ Riemannova integrálu že pro ~~plyne, že~~ platí, že pokud f je integrovatelná, $|f|$ je integrovatelná též. (Věta 7 (iii)). Uvidíme, že toto není obecně pro Newtonův integrál pravda.

Tj. Riemannův integrál je absolutně konvergentní, newtonův nikoliv (neabsolutní konvergence)

Usnadnění: $(R)\int_a^b f(x)dx$ a $(R)\int_a^b g(x)dx$ ex $\Rightarrow$ $(R)\int_a^b f(x)g(x)dx$ ex.
Dk: (i) $|f| \leq K$ na $[a,b]$, $|g| \leq K$, (ii) lemma: $\exists D: S(g, D) - s(g, D) < \varepsilon$ a $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$
tedy dle (*) $S(fg, D) - s(fg, D) \leq 2K\varepsilon$ (~~[illegible]~~) ∎

6.7. Věty o střední hodnotě (2 pří.)

Věta 18 (1. věta o střední hodnotě)

Nechť $(R)\int_a^b g(x)dx$ a $(R)\int_a^b f(x)~~g(x)~~dx$ existují. Je-li $g \geq 0$ v (a, b) (resp. $g \leq 0$ v (a, b)), pak existuje $C \in [\inf_{(a,b)} f, \sup_{(a,b)} f]$ tak, že
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = C \int_a^b g(x)dx.$$

Je-li f navíc spojitá v $[a, b]$, pak existuje $\xi \in (a,b)$ tak, že
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Speciálně, pro $g \equiv 1$,
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\,(b-a).$$

Lagr.: $F(b) - F(a) = \underbrace{F'(\xi)}_{f(\xi)} \cdot (b-a)$

Pozn.:
* $f(x)g(x) - f(y)g(y) = f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y) \leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \leq K|g(x) - g(y)| + K|f(x) - f(y)|$
to na $[x_{i-1}, x_i]$, přechod k sup a inf: $M^i_{fg} - m^i_{fg} \leq K(M^i_g - m^i_g) + K(M^i_f - m^i_f)$.

Pozn.: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ definuje střední hodnotu fce f na intervalu $[a,b]$ - viz smysl integrálního průměru.

Dk

(i) Dokažme první tvrzení. Protože $m = \inf_{(a,b)} f(x) \le f(x) \le \sup_{(a,b)} f = M$ $x \in [a,b]$ a navíc $g \ge 0$, je tedy

$m\,g(x) \le f(x)g(x) \le M g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

a $m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx.$

Je-li $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, pak je též $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ a tvrzení využití platí. Je-li $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, pak

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M,$$

což dokazuje první tvrzení.

(ii) Protože $f(x)$ je spojitá na $[a,b]$, plyne tvrzení z Darbouxovy věty (V5.4), neboť ~~$\exists\, \xi \in (a,b)$~~ $\forall A \in [m,M]$ $\exists\, \xi \in [a,b]$: $A = f(\xi)$. Když $\xi = a$, potom existuje $\xi_0 \in (a,b)$: $f(\xi_0) = f(a)$.

Je-li $f(\xi) \ne f(a)$ $\forall \xi$, pak buď $f(\xi) > f(a)$ $\forall \xi$ nebo $< f(a)$. Ať navíc $f(\xi) > f(a)$ $\forall \xi > a$.

Je-li $\int_a g(x)\,dx > 0$ (jinak je tvrzení triviální), pak nutně $\int_a^b f(x)g(x)\,dx > f(a)\int_a^b g(x)\,dx$, což dává spor. (Dokaž!)

(iii) Tvrzení plyne triviálně.

* (Neboť $f(x) \ge \varepsilon + f(a)$ na $[c,d] \subset [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx \ge \varepsilon\int_c^d g(x)\,dx + \int_a^b f(a)g(x)\,dx$ a $[c,d)$ vyplývá ze [illegible] (a,b)).
Nalezneme $\int_c^d g(x)\,dx > 0$ a [illegible] $\exists\, \varepsilon > 0$ a $[c,d] \supset [c,d]$: $f(x) \ge \varepsilon + f(a)$ na $[c,d]$ $\int_a^b f(x)g(x)\,dx \ge \varepsilon\int_c^d g(x)\,dx + f(a)\int_a^b g(x)\,dx$
Hledáme na intervalech, protože f spoj.

Věta 19 (2. věta o střední hodnotě)

Nechť $f, g, g' \in C([a,b])$ a g je monotónní (tzn. $g' \ge 0$ nebo $g' \le 0$ v $[a,b]$). Potom existuje $\xi \in (a,b)$ tak, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Důkaz

Nechť F je primitivní fce k f, pak

$$\int_a^b fg\,dx = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg'\,dx \overset{1\,VOSH}{=} F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)\,[g(b)-g(a)] =$$
$$g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Pozn.: Věta platí za slabších předpokladů - $\exists\,(R)\int_a^b f(x)\,dx$ a g je monotonní (pak totiž $(R)\int_a^b f(x)g(x)\,dx\ \exists$), viz Jarník I1. Je-li pak např. $g \ge 0$ a neroste, pak lze volit $g(b) = 0$ a tedy

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx,$$

speciálně pro $f = 1$ $\int_a^\xi g\,dx = g(a)\,(\xi - a).$

Porovnejte toto tvrzení s Větou 18!

* $\int_a^b g = I > 0$: $c := \min\left(a + \frac{I}{4L}, a + \frac{b-a}{4}\right)$, $d := \max\left(b - \frac{I}{4L}, b - \frac{b-a}{4}\right)$, kde $L = \sup_{\langle a,b\rangle} g(x)$. Pak $\emptyset \ne [c,d] \subset (a,b)$ a $\int_c^d g > 0$. Pak $\min_{[c,d]} f(x) = f(a) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. $\int_c^d f(x)g(x) - \int_c^d f(a)g(x) \ge \int_c^d (f(x) - f(a))\,g(x) \ge \varepsilon\int_c^d g(x) > 0$ ↯

Příklad 3 Ukážeme, že (i) $(N)\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx < \infty$, ale
(ii) $(N)\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ diverguje ($=+\infty$)

Tedy Newtonův integrál je nevlastní konvergentní integrál.

Řešení

Protože $\frac{\sin x}{x} \in C((0,\infty))$, existuje na $(0,\infty)$ primitivní fce, označme ji F (analogicky je ale nalezli nyní).

Proto
$$(N)\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to 1+} F(x) = \lim_{k\to\infty} F(k) - F(1) = \lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Zkoumejme
$$(N)\int_1^k \frac{\sin x}{x}.$$

a) 1VOSH: $\frac{1}{x} \geq 0$: $\int_1^k \frac{\sin x}{x} = \sin \xi_k \int_1^k \frac{1}{x}\,dx = \sin \xi_k \ln k$, odkud ale nic nevidíme.

b) 2VOSH $g' = -\frac{1}{x^2} \leq 0$. Proto
$$\int_1^k \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{x}\Big|_{x=1} \int_1^{\xi_k} \sin x\,dx + \frac{1}{k}\int_{\xi_k}^{k} \sin x\,dx = \cos 1 - \cos \xi_k + \frac{1}{k}(\cos \xi_k - \cos k)$$
$\Rightarrow \left|\int_1^k \frac{\sin x}{x}\,dx\right| < 3$ pro $k \geq 2$. To ovšem stále nestačí. Ovšem
$$\int_{k_1}^{k_2} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{k_1}(\cos k_1 - \cos \xi_k) + \frac{1}{k_2}(\cos \xi_k - \cos k_2) \leq \left(\frac{2}{k_1} + \frac{2}{k_2}\right) \xrightarrow[k_1,k_2\to\infty]{} 0.$$

Tedy podle B.C. podmínky existuje $\lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Na druhou stranu, zkoumejme $\int_1^k \frac{|\sin x|}{x}\,dx$. Označme $L(k) = \int_1^k \frac{|\sin x|}{x}\,dx$.

Zřejmě je $L(k)$ neklesající, tj. $\lim_{k\to\infty} L(k)$ existuje. Ukážeme, že $\lim_{k\to\infty} L(k) = +\infty$. Platí totiž
$$\int_1^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} \geq \int_\pi^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} = \sum_{i=2}^{k} \int_{(i-1)\pi}^{i\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i\pi} \int_{(i-1)\pi}^{i\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i} \to \infty$$

(Jinak: $\geq \frac{2}{\pi}\int_2^k \frac{1}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}(\ln k - \ln 2) \to \infty$ pro $k \to \infty$).

Př: Spočtěte $\int_0^1 x\,dx$ dle Riemannovy defce. Ř: $f(x)$ je spojitá $\Rightarrow (R)\int$ ex, $x_i := \frac{i}{n}$, $\xi_i := x_i$
a $\sigma(f,D,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{i}{n} = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)\cdot n}{2n^2} \to \frac{1}{2}$

PŘ: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2} + \dots + \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f,D,\xi)$,
kde $D = \{\frac{i}{n}, i = 0\dots n\}$, $\xi_i = x_i$ a $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, ale $(R)\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = (N)\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

Př: $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$, $p > 0$ $= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot(\frac{1}{n})^p + \frac{1}{n}\cdot(\frac{2}{n})^p + \dots + \frac{1}{n}(\frac{n}{n})^p = \lim_{n\to\infty} \sigma(f,D,\xi)$,
kde $D = \{\frac{i}{n}, i = 0\dots n\}$, $\xi_i = x_i$ a $f(x) = x^p$, ale $(R)\int_0^1 x^p\,dx = (N)\int_0^1 x^p\,dx = [\frac{x^{p+1}}{p+1}]_0^1 = \frac{1}{p+1}$

Věta (substituce pro (N*)∫) {N*.. vyjímečná množ. K je konečná}

$f: Df \supset (a,b) \to \mathbb{R}$, $\phi(t): (\alpha,\beta) \xrightarrow{na} (a,b)$ a $\phi'(t) > 0$, $\phi(t) \in \mathbb{R}$, $\forall t \in (\alpha,\beta)$. Pak

$$(N) \int_a^b f(x)\,dx = (N) \int_\alpha^\beta f(\phi(t)).\,\phi'(t)\,dt$$ má-li jedna strana smysl.

Dk: (i) Nechť $F(x)$ je zobecněná* primitivní fce k $f(x)$ na (a,b), tj F spojitá a $F' = f$ na $(a,b)\setminus K$, K konečná. Pak $F(\varphi(x))$ je spojitá na (α,β) a $\frac{d}{dx}(F(\varphi(x))) = F'(\varphi(x)).\varphi'(x)$ na $(\alpha,\beta)\setminus \varphi^{-1}(K)$, tedy je to zobecněná primitivní fce k $f(\varphi(x)).\varphi'(x)$. a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b_-} F(t) - \lim_{t\to a_+} F(t) = \lim_{s\to\beta_-} F(\varphi(s)) - \lim_{s\to\alpha_+} F(\varphi(s)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

(ii) Nechť $\Psi(x)$ je zobecněná prim. fce k $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na (α,β), tj Ψ spojitá a $\Psi'(x) = f(\varphi(x)).\varphi'(x)$ na $(\alpha,\beta)\setminus L$, kde L je konečná. Pak dle V3.7 je $\Psi\circ\varphi^{-1}$ primitivní k f na jednotlivých podintervalech $(a,b)\setminus\varphi(L)$ a navíc je zřejmě spojitá na (a,b). Tedy

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \lim_{s\to\beta_-} \Psi(s) - \lim_{s\to\alpha_+}\Psi(s) = \lim_{t\to b} \Psi(\varphi^{-1}(t)) - \lim_{t\to a_+} \Psi(\varphi^{-1}(t)) = \int_a^b f(x)\,dx. \;\square$$

Motivace k této větě: substituce $t = \operatorname{tg} x$ a $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ Riemannovský větu o substituci nezvládne protože "zlomí" když přejdou na $\pm\infty$.

Př: $\int_0^{8\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx$ spoj. na $[0,8\pi]$, omez. $\Rightarrow \exists\,(R)\int$
$\Rightarrow \exists\,(N)\int \in \mathbb{R}$

(i) "Nejstarší postup" Prim. fce (s lepením) a limity na krajích tedy vše jako (N)∫

(ii) Pomocí Riemann: f periodická, sudá $\Rightarrow I = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx$, tedy už zvládneme!

(iii) Riem + Věta: $I = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos^2 x} = 16\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+2} = \dots$