§2 Limita, spojitost a derivace funkce jedné reálné proměnné

6 přednášek

Značení: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $D_f \supset (a,b) \ni x_0$

V celé kapitole (a vlastně i v celém zbytku semestru) budeme uvažovat funkce

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad \text{tj. } x \to (f_1(x), f_2(x)) = f_1(x) + i f_2(x)$$
$$\text{či } \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to f(x)$$

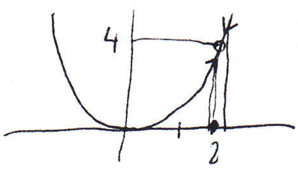
(tj. druhý případ lze brát jako speciální případ komplexních funkcí, kde $\operatorname{Im} f \equiv 0$).

(2 přednášky)

2.1. Limita funkce

Pojem limity je základním pojmem matematické analýzy. Na jeho základě se potom definují pojmy jako spojitost funkce, derivace funkce, integrál funkce, součty nekonečných řad atd. Proto je třeba věnovat pochopení tohoto pojmu velkou pozornost.

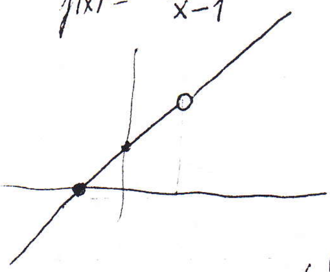
Př. 1 a) Uvažujme $f(x) = x^2$ a sledujme, co se stane s $f(x)$ jestliže x bude „libovolně blízko k 2". Vidíme, že $f(x)$ je libovolně blízko číslo 4, jestliže x je libovolně blízko 2. Všimněme si, že se nic nezmění, pokud dodefinujeme $f(2) = 0$ (např.), a budeme se zajímat jen body $x \neq 2$.



b)

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1 \quad \text{pro } x \neq 1$$

Vidíme, $f(x)$ je pro x libovolně blízko od 1 (ale nikdy není již rovno 1!) je libovolně blízko 2.



c)
$$D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Je možno říci, že $D(x)$ se blíží k nějaké hodnotě, když $x \to 1$ např.? Víme, že v libovolném okolí libovolného čísla je nekonečně mnoho racionálních a nekonečně mnoho iracionálních čísel. Tedy ať jsme libovolně blízko k $x=1$, vždy jsou body, kde $D(x) = 1$ i body, kde $D(x) = 0$. Zdá se, že říci, že $D(x)$ jde k něčemu pro x blížící se k 1 nemá moc smysl.

To, co jsme vyšetřovali výše, bylo vlastně vyšetřování limit daných funkcí. Než uvedeme přesnou definici, všimněme si následujícího

- limita funkce je pojem lokální, určuje chování funkce na „libovolně malém" okolí vyšetřovaného bodu.
- limita nezávisí na chování funkce ve vyšetřovaném bodě, pouze na jeho okolí
- pokud limita existuje (a), b)), pak se funkce chová na redukovaném okolí bodu „kultivovaně", pokud neexistuje (c)), pak se může chovat „docela divoce".

Definice 1 (limita funkce)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ (nebo $\mathbb{C}^*$) a nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Potom říkáme, že A je limitou funkce f pro x jdoucí k x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in U^*_\delta(x_0)$ je $f(x) \in U_\varepsilon(A)$. Symbolicky

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U^*_\delta(x_0)): (f(x) \in U_\varepsilon(A)).$$

Pozn.: Budeme v další této kapitole předpokládat, že jakmile mluvíme o limitě funkce v bodě x_0, potom existuje jisté $U^*_\delta(x_0) \subset D_f$. pro celé U^*_δ D_f : Mohlo by se stát, že např. nejvýše spočetná množina na okolí x_0 není z D_f. Pak lze definici modifikovat, že místo $x \in U^*_\delta(x_0)$ budeme psát $\forall x \in U^*_\delta(x_0) \cap D_f$. —"— $\cap D_f$ V dalším se již k tomu budu vracet jen tam, kde by mohly nastat nejasnosti.

Úmluva:

V této kapitole se nadále omezíme na situaci, kdy $A \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) (tj. vlastní limita) a $x_0 \in \mathbb{R}$ (tj. limita ve vlastním bodě). Otázkou nevlastních limit a limit v nevlastních bodech se budeme zabývat později.

Symbolický zápis existence limity lze přepsat do mnoha ekvivalentních forem. Doporučuji si domyslet, že zápisy jsou skutečně ekvivalentní:

Připomínám – $x_0 \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): (\forall x \in \mathbb{R}): \overset{\text{ostrá}}{(0 < |x - x_0| < \delta)} \Rightarrow \overset{\text{ostrá}}{|f(x) - A| < \varepsilon}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon$$

$$\exists \varepsilon_1 > 0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1]\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon$$

$$\exists K > 0 : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| \leq K\varepsilon.$$

Vraťme se k příkladům výše

a) Chceme ukázat, že $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$. Zvolme si libovolné $\varepsilon > 0$, libovolně velmi malé, ale pevné. Hledáme $\delta > 0$ tak, že pro

$x \in (2-\delta, 2+\delta) \setminus \{2\}$ je $x^2 \in (4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$

Předpokládejme, že $\varepsilon < 4$. Potom je-li $x \in (\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$, je $x^2 \in (4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$

tedy $x \in (2 - 2 + \sqrt{4-\varepsilon},\ 2 - 2 + \sqrt{4+\varepsilon})$

Označme $\delta_1 = 2 - \sqrt{4-\varepsilon}$

$\delta_2 = \sqrt{4+\varepsilon} - 2$

Potom $x \in (2-\delta_1, 2+\delta_2) \Rightarrow x^2 \in (4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$.

Stačí tedy zvolit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Analogicky lze ukázat, že je-li
$P(x)$ polynom, tj.
$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k,$$
a je-li $x_0 \in \mathbb{R}$, potom $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

ad b) Protože pro $x \neq 1$ je $f(x) = x+1$ a v definici limity nezáleží na hodnotě $f(x)$ v bodě x_0, stačí vyšetřovat funkci $f(x) = x+1$ s $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Je-li tedy dáno $\varepsilon > 0$, libovolně malé, my hledáme $\delta > 0$ tak, aby
$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$$
ale $f(x) = x+1$, tj. $|f(x)-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \varepsilon$ a stačí tedy volit $\delta = \varepsilon$, popř. $\delta < \varepsilon$.

Případ c) nám naznačoval, že limita nemusí vždy existovat. Pokusme se nyní ukázat, že skutečně
$$\lim_{x \to 1} D(x) \text{ neexistuje.}$$
Znegujme tedy výrok, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$. Tedy: $(\forall A)$
$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x \in \mathcal{U}^*_\delta(x_0) \; f(x) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(A)$$
neboli
$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \text{ je } |f(x) - A| \geq \varepsilon.$$
Zřejmě $D(x)$, pokud by nějaká limita existovala, musí být rovna jen 0 nebo 1.
Ukažme, že $\lim_{x \to 1} D(x) \neq 0$. Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Potom v libovolném redukovaném okolí bodu 1 existuje alespoň jedno racionální x_1 a tedy $D(x_1) = 1 > \frac{1}{2}$. Analogicky se ukáže, že $\lim_{x \to 1} D(x) \neq 1$ a tedy nutně $\lim_{x \to 1} D(x)$ neexistuje. * (Pokud bychom uvažovali jiné číslo, např. $A \in \mathbb{R}$, pak stačí brát $\varepsilon < \frac{\min\{|A|, |A-1|\}}{2}$. Pak je $\forall x \in \mathbb{R} \; |f(x) - A| > \varepsilon$)

~~Ukažme pro Riemannovu funkci~~
$$\cancel{R(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ iracionální nebo } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{když } x = \frac{p}{q} \neq 0 \; p, q \text{ nesoudělné}, \; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}. \end{cases}}$$
~~Ukažme, že~~ $\cancel{\lim_{x \to 1} R(x) = 0}$. ~~R v bodě 1.~~

až později !!

Věta 1 (o jednoznačnosti limity)
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom $\exists$ nejvýše jedna limita f v bodě x_0.

Důkaz

Pozn.: ať D_f obsahuje okolí x_0

Nechť existují dvě limity A_1, A_2, $A_1 \neq A_2$. Tedy
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A_1 \text{ tj. } \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_1 \; 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon.$$
$$= A_2 \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_2 \; 0 < |x - x_0| < \delta_2 \; |f(x) - A_2| < \varepsilon$$

Položme $\varepsilon = \frac{|A_1-A_2|_{\mathbb{C}}}{4}$ a zvolme $x \in U^*_{\delta_1}(x_0) \cap U^*_{\delta_2}(x_0)$. Potom

$$|A_1-A_2|_{\mathbb{C}} = |A_1 - f(x) + f(x) - A_2|_{\mathbb{C}} \le |f(x)-A_1|_{\mathbb{C}} + |f(x)-A_2|_{\mathbb{C}} < 2\varepsilon = \frac{|A_1-A_2|_{\mathbb{C}}}{2},$$ což dává spor. ■

V některých případech se jeví jako rozumné sledovat funkci pouze ve „jednom směru". Zaveďme značení pro pravé resp. levé prstencové okolí,

$$U^{*,+}_{\delta}(x_0) = (x_0, x_0+\delta)$$
$$U^{*,-}_{\delta}(x_0) = (x_0-\delta, x_0)$$

analogicky pro $U^+_\delta(x_0)$, $U^-_\delta(x_0)$. Potom

Definice 2 (jednostranné limity)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (popř. $\mathbb{R}$). Nechť $A \in \mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) a $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom A je limitou f pro x jdoucí k x_0 $\left\{\begin{matrix}\text{zprava}\\ \text{zleva}\end{matrix}\right\}$, píšeme $\left\{\begin{matrix} A = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \\ = \lim_{x\to x_0^-} f(x)\end{matrix}\right\}$, jestliže

pro všechna $\varepsilon > 0$ $\exists \delta$ tak, že pro všechna $\left\{\begin{matrix} x\in U^{*,+}_\delta(x_0) \\ x \in U^{*,-}_\delta(x_0)\end{matrix}\right\}$ je $|f(x)-A| < \varepsilon$.

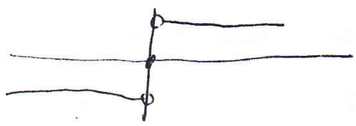
(tj. $A = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \iff \forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x \in U^{*,+}_\delta(x_0)\ \ |f(x)-A|<\varepsilon$, analogicky pro limitu zleva).

Pozn: Věta 1 zřejmě platí i pro případ jednostranných limit. Dokažte doma!

Příklad 2

Uvažujme tzv. znaménkovou funkci

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0. \end{cases}$$



Potom $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sign} x = 1$

$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sign} x = -1$. (Ověřte si sami z definice!)

Zkuste též doma: $f(x) = [x]$, kde $[x]$ je nejmenší celé číslo menší nebo rovno x a ukažte, že pro $k \in \mathbb{Z}$ $\lim_{x\to k^+} [x] = k$, $\lim_{x\to k^-} [x] = k-1$.

Otázkou je, zda existuje $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Odpověď dává následující věta:

Věta 2 Limita $f(x)$ pro $x \to x_0$ existuje a rovná se A právě když existují obě jednostranné limity $f(x)$ pro $x\to x_0^\pm$ a rovnají se A.

~~Důkaz~~

(Tedy $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$).

Důkaz

$\Rightarrow$ Jestliže pro jisté $\varepsilon > 0$ najdeme δ, že $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A|_{\mathbb{C}} < \varepsilon$, potom zřejmě též $|f(x) - A|_{\mathbb{C}} < \varepsilon$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ resp. $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ a tudíž jednostranné limity existují a rovnají se A.

$\Leftarrow$ Nechť tedy $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$. ~~Potom~~ Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom existují δ_1 a $\delta_2 > 0$ tak, že

$$x \in (x_0 - \delta_1, x_0) \Rightarrow |f(x) - A|_{\mathbb{C}} < \varepsilon$$

$$x \in (x_0, x_0 + \delta_2) \Rightarrow |f(x) - A|_{\mathbb{C}} < \varepsilon.$$

Položme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Potom $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} = \mathcal{U}^*_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - A|_{\mathbb{C}} < \varepsilon$. ∎

Z Věty 2 tedy plyne, že $\lim_{x \to 0} \operatorname{sign} x$ neexistuje, neboť jednostranné limity sice existují, ale nerovnají se sobě.

Věta 3 (limita pro komplexní funkci)

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$. Potom pro $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A_1 + i A_2 \iff \lim_{x \to x_0} f_1(x) = A_1 \text{ a } \lim_{x \to x_0} f_2(x) = A_2.$$

Důkaz

$\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom pro $x \in \mathcal{U}^*_\delta(x_0)$ je

$$|f(x) - A|_{\mathbb{C}} = |f_1(x) - A_1 + i(f_2(x) - A_2)|_{\mathbb{C}} < \varepsilon.$$

Zřejmě ale též

$$|f_1(x) - A_1| \le |f_1(x) - A_1 + i(f_2(x) - A_2)|_{\mathbb{C}} < \varepsilon$$

$$|f_2(x) - A_2| \le \quad \text{— " —} \quad < \varepsilon,$$

což plyne z nerovnosti

$$\left.\begin{matrix} |\mathrm{Re}\, z| \\ |\mathrm{Im}\, z| \end{matrix}\right\} \le |z|_{\mathbb{C}} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$\Leftarrow$ Nechť δ_1, δ_2 jsou z definice limity pro f_1, resp. f_2. Potom pro $x \in \mathcal{U}^*_\delta(x_0)$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ je

$$|f(x) - A|_{\mathbb{C}} = |f_1(x) - A_1 + i(f_2(x) - A_2)|_{\mathbb{C}} = \sqrt{(f_1(x) - A_1)^2 + (f_2(x) - A_2)^2} \le \sqrt{2} \sqrt{\max\{(f_1(x) - A_1)^2, (f_2(x) - A_2)^2\}}$$

$$\le \sqrt{2}\, \varepsilon.$$ ∎

Věta 4 (limita absolutní hodnoty)

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$. Potom $\lim_{x \to x_0} |f(x)|_{\mathbb{C}} = |A|_{\mathbb{C}}$.

Důkaz

Zvolme $\varepsilon > 0$. Víme, že $|f(x) - A|_{\mathbb{C}} < \varepsilon$ pro $x \in \mathcal{U}^*_\delta(x_0)$ pro jisté $\delta > 0$. Současně ale $\big||f(x)|_{\mathbb{C}} - |A|_{\mathbb{C}}\big| \le |f(x) - A|_{\mathbb{C}}$ a tudíž i $\big||f(x)|_{\mathbb{C}} - |A|_{\mathbb{C}}\big| < \varepsilon$. ∎

(Prověřte si analogicky jako důkaz Tvrzení 1.11 b), s využitím Tvrzení 1.15)

Příklad 3

Obrácená věta neplatí. Stačí uvažovat např.

$f(x) = \operatorname{sign} x$, $\lim_{x\to 0} \operatorname{sign} x$ neexistuje, ale

$\lim_{x\to 0} |\operatorname{sign} x| = 1.$

Je-li ale $A = 0$, potom zřejmě $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)|_{\mathbb{C}} = 0$ (plyne z definice). Potom též

Cvičení: Ukažte, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)-A|_{\mathbb{C}} = 0$.

Věta 5

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Jestliže f má v x_0 limitu (vlastní), pak je f na jistém okolí $x_0 \in \mathbb{R}$ omezená.

Důkaz

(Připomínám, mluvíme jen o vlastní limitě!) Chceme tedy dokázat, že

$$\exists K > 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in \mathcal{U}^*_\delta(x_0) : |f(x)|_{\mathbb{C}} \le K$$

Důkaz

K číslu $\varepsilon = 1$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in \mathcal{U}^*_\delta(x_0) : |f(x) - A|_{\mathbb{C}} < 1.$

Tedy

$$|f(x)|_{\mathbb{C}} = |f(x) - A + A|_{\mathbb{C}} \le |f(x)-A|_{\mathbb{C}} + |A|_{\mathbb{C}} < 1 + |A|_{\mathbb{C}}.$$

Věta 6

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in \mathcal{U}^*_\delta(x_0) : |f(x)|_{\mathbb{C}} \ge \frac{|A|_{\mathbb{C}}}{2} > 0.$

Důkaz

K číslu $\varepsilon = \frac{|A|_{\mathbb{C}}}{2}$ existuje $\delta > 0$, $\forall x \in \mathcal{U}^*_\delta(x_0) : |f(x) - A|_{\mathbb{C}} < \frac{|A|_{\mathbb{C}}}{2}.$

$|A| \le |A + f(x) - f(x)| \le |A - f(x)| + |f(x)|$

Tedy $\frac{|A|_{\mathbb{C}}}{2} > |f(x) - A|_{\mathbb{C}} \ge$ ~~[illegible]~~ $|A|_{\mathbb{C}} - |f(x)|_{\mathbb{C}} \Rightarrow |f(x)| > \frac{|A|_{\mathbb{C}}}{2}.$

Cvičení: Ukažte, že je-li $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a $\lim_{x\to x_0} f(x) = A > 0$, pak $\exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in \mathcal{U}^*_\delta(x_0)$: $f(x) > 0$.

Věta 7 (algebraické operace s limitami)

Nechť $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$. Potom

(i) $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$

(ii) $\lim_{x\to x_0} (f(x) g(x)) = A \cdot B$, speciálně $\lim_{x\to x_0} \lambda g(x) = \lambda B \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

(iii) je-li $B \neq 0$, pak $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$

Důkaz

(i) Zřejmě $|f(x) + g(x) - A - B| \le |f(x) - A| + |g(x) - B| \le 2\varepsilon.$

(ii) $|f(x)g(x) - AB| = |f(x)(g(x) - B) + (f(x) - A)B| \le |f(x)(g(x)-B)| + |\overset{B}{\cancel{g(x)}}(f(x) - A)|$

$\le |f(x)|\,|g(x) - B| + |B|\,|f(x) - A| \le K\,|g(x) - B| + |B|\,|f(x) - A| < \underset{\text{Věta 5}}{K}\varepsilon + |B|\varepsilon =$

$= \varepsilon(K + |B|).$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, kde δ_1: $\mathcal{U}^*_{\delta_1}(x_0) : |f(x) - A| < \varepsilon$ $\quad \delta_3: \mathcal{U}_{\delta_3}(x_0): |f(x)| \le K.$

δ_2: $\mathcal{U}^*_{\delta_2}(x_0) : |g(x) - B| < \varepsilon$

(iii) Podle (ii) stačí ukázat, že je-li $\lim_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$.

Tedy $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B-g(x)}{g(x)B}\right| = \frac{|g(x)-B|}{|g(x)B|} \le \frac{\varepsilon}{|B||g(x)|} \le \frac{2\varepsilon}{|B|^2}$.
Věta 6,

neboť pro $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $\delta_1: x \in U^*_{\delta_1}(x_0): |g(x)-B| < \varepsilon$

$\delta_2: x \in U^*_{\delta_2}(x_0): |g(x)| > \frac{|B|}{2}$ ∎

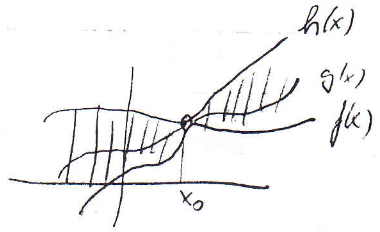
Pozorování
Z předchozí věty plyne, že a) $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$ pro libovolný polynom (je totiž $\lim_{x\to x_1} x = x_0$ a stačí užít z věty o součinu limit a součtu)

b) $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, jsou-li P, Q polynomy a $Q(x_0) \neq 0$. (z (a) a z (iii) předchozí věty).

Cvičení
Je-li $B = 0$, je situace komplikovanější. Ukažte, že $\lim_{x\to x_1} f(x) = A \neq 0$, $\lim_{x\to x_1} g(x) = 0$, potom vlastní $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje.

Pozn.
Je-li i $A = 0$, potom se nedá říct obecně – viz příklad na cvičení, (podobný $A \cdot B = \infty$).

Věta 8 (o dvou strážnících, sendvičová)
Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Nechť $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a nechť na jistém okolí $U^*_\delta(x_0)$
$f(x) \le g(x) \le h(x)$.
Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A$. Potom též $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$.



Důkaz
Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom pro $x \in U^*_{\Delta_1}(x_0)$: $A-\varepsilon \le f(x) \le A+\varepsilon$

$x \in U^*_{\Delta_2}(x_0)$: $A-\varepsilon \le h(x) \le A+\varepsilon$

a tudíž pro $x \in U^*_\delta(x_0) \cap U^*_{\Delta_1}(x_0) \cap U^*_{\Delta_2}(x_0)$

$A-\varepsilon \le f(x) \le g(x) \le h(x) \le A+\varepsilon$

$\Rightarrow |g(x)-A| \le \varepsilon$. ∎

Příklad 3
Víme, že $\lim_{x\to 1} D(x)$ neexistuje, ale $\lim_{x\to 1} D(x)(x-1) = 0$. Ukažme, dle Věty 8

$\underbrace{-|x-1|}_{\downarrow 0} \le D(x)(x-1) \le \underbrace{|x-1|}_{\downarrow 0}$.

Obecně:

Věta 9
Nechť $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a nechť $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, a nechť $\exists\, \delta > 0$ tak, že $|f(x)| < K$ pro $x \in U^*_\delta(x_0)$.
Potom
$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Důkaz

Zřejmě pro $x \in U^*_\delta(x_0)$ je

$$0 \le |f(x)g(x)| \le K|g(x)|$$

a tudíž

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)g(x)| = 0,$$ což je ekvivalentní tomu, že $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$. ∎

Uvažujme nyní $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ a nechť

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}, \quad \lim_{y\to A} g(y) = B$$

Otázkou je, zda

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = B.$$

Příklad 5

Nechť $f(x) = D(x)\cdot x$

$$g(y) = \begin{cases} 1 & y=0 \\ y^2 & y\neq 0. \end{cases}$$

Potom $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$,

ale $\lim_{x\to 0} g(f(x))$ neexistuje, neboť v libovolném okolí $U^*_\delta(0)$ jsou body

pro které $g(f(x)) = 1 \quad (x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$

$g(f(x)) = x^2 \quad x\in\mathbb{Q}.$

Proto se musí přidat další předpoklad

Věta 10 (o limitě složené funkce)

Nechť $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ a nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{y\to A} g(y) = B$ a nechť $\exists \delta_1^*, \ \forall x\in U^*_{\delta_1}(x_0): f(x)\neq A$. Potom

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = B.$$

Důkaz

Chceme ukázat, že $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0: \ \forall x\in U^*_\delta(x_0): g(f(x))\in U_\varepsilon(B)$.

Víme:
a) $\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta>0, \ \forall y\in U^*_\Delta(A): g(y)\in U_\varepsilon(B)$

b) $\forall\Delta>0\ \exists\delta_2>0, \ \forall x\in U^*_{\delta_2}(x_0): f(x)\in U_\Delta(A)$

c) $\exists\delta_1>0: \ \forall x\in U^*_{\delta_1}(x_0): f(x)\neq A$

Z b), c) pro $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$:

$$\forall\Delta>0\ \exists\delta>0, \ \forall x\in U^*_\delta(x_0): f(x)\in U^*_\Delta(A)$$

a tudíž a) + b), c) dává ~~předem~~, že $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = B$. ∎

1/2 přednášky

2.2 Spojitost funkcí

Definice 3

Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ a $x_0\in\mathbb{R}$. Řekneme, že *f je spojitá v bodě x_0*, jestliže $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. (Řekneme, že f je spojitá v $(a,b)\subset D_f$, jestliže f je spojitá $\forall x\in(a,b)$)
(matoucí) ~~po uzavřeném intervalu krajní body místo limit bereme příslušné jednostranné limity~~

$(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in U_\delta(x_0): f(x)\in U_\varepsilon(f(x_0)))$

Všimněme si, že požadujeme vlastnosti

(i) f je definována v x_0

(ii) existuje $\lim_{x\to x_0} f(x) = A\in\mathbb{C}$

(iii) $f(x_0)=A$.

Není-li tedy splněn kterýkoliv z bodů (i)–(iii), funkce f není spojitá v x_0.

Pozn.: Některé autoři definují, že je-li x_0 izolovaný bod z D_f (tj. $\exists\delta>0: U^*_\delta(x_0)\cap D_f=\emptyset$) pak je f v bodě x_0 spojitá. V naší definici tomu tak není — nelze totiž mluvit o $\exists$ limity — a vůbec budeme takovéto „patologické případy" vynechávat.

Příklady 6

(a) Již v minulé sekci jsme ukázali, že funkce $f(x)=P(x)$ je ~~spojitá $\forall x\in\mathbb{R}$~~ ve všech bodech z $\mathbb{R}$ (popř. $\mathbb{C}$), a též $\frac{P(x)}{Q(x)}$ je spojitá ve všech bodech x_0, kde $Q(x)\neq 0$.

(b) fce $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ není v $x=1$ definována a tedy tam není spojitá. Pokud ale budeme brát

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & x\neq1\\ 2 & x=1\end{cases}$$

pak $f(x)=x+1$ na $\mathbb{R}$ a tedy dle (a) je spojitá na $\mathbb{R}$ (tj. ve všech bodech $x\in\mathbb{R}$).

(c) Víme, že $\lim_{x\to x_0} D(x)$ neexistuje pro žádné $x_0\in\mathbb{R}$, tj. $D(x)$ je nespojitá ~~na $\mathbb{R}$~~ ve všech bodech z $\mathbb{R}$. Ale

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)D(x)=0 \quad \text{a} \quad (x-x_0)D(x)=0\quad \forall x_0\in\mathbb{R}.$$

Tj. fce

$x\mapsto (x-x_0)D(x)$ je spojitá v x_0, v ostatních bodech z $\mathbb{R}$ je ale opět nespojitá.

(d) Připomeňme, že Riemannova funkce

$$R(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ nebo } x=0\\ \frac1q, & x=\frac pq\neq0,\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\ p,q \text{ nesoudělná (tj. } x \text{ racionální kromě 0).}\end{cases}$$

Ukážeme, že

$\lim_{x\to x_0} R(x)=0$ pro ~~$x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nebo $x_0=0$~~ $x_0\in\mathbb{R}$. Tedy Riemannova funkce je spojitá v $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a $x_0=0$.

Zvolme pevně x_0. ~~a označme $k=[|x_0|]+1$~~. Chceme ukázat, že pro libovolné $\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$, $\forall x\in U^*_\delta(x_0)$: $|R(x)|<\varepsilon$. Protože $0\le R(x)\le1$, stačí uvažovat $\varepsilon\le1$.

Pro každé $\varepsilon>0$ $\exists n\in\mathbb{N}$ takové, že $n>\frac1\varepsilon$, tj. $\varepsilon>\frac1n$. Tedy na intervalu $[0,1]$ existuje nejvýše ~~mnoho~~ konečně mnoho bodů $\{x_i\}_{i=1}^{N(\varepsilon)}$ takové, že $R(x)\ge\varepsilon$.

$R(x) = R(x+k)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, (dokažte si!), platí to samé na libovolném jediném konečném okolí bodu x_0.

Nechť tedy $\{x_i\}_{i=1}^{\tilde N(\varepsilon)}$ jsou dané body v $\mathcal{U}_1^*(x_0)$. Vezměme tedy $\delta = \min\{\{|x_0 - x_i|, i = 1, \dots, \tilde N(\varepsilon)\}, 1\}$. Potom je zřejmé pro $x \in \mathcal{U}_\delta^*(x_0)$ $|R(x)| < \varepsilon$, což bylo třeba dokázat.

Podobně jako v případě jednostranných limit můžeme definovat spojitost zprava či zleva funkce f.

Definice 4

Říkáme, že $f(x)$ je spojitá zprava v bodě x_0, jestliže $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
zleva v bodě x_0, jestliže $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
(viz také značení výše)

Analogicky, jako ve větě 2 platí, že fce je spojitá v x_0 $\Leftrightarrow$ fce je spojitá zleva a zprava. Důkaz ponechán na rozmyšlení doma.

Následující věty jsou de facto důsledkem analogických vět pro limity. Pro úplnost je zde uvádíme

Věta 11

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jsou spojité v $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom

(i) $f+g$, $f \cdot g$ jsou spojité v x_0

(ii) je-li $g(x_0) \neq 0$, pak i $\frac{f}{g}$ je spojitá v x_0.

Důkaz

je důsledkem Věty 7.

Věta 12 (o spojitosti složené fce)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a nechť f je spojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$ a g je spojitá v $f(x_0) \in \mathbb{R}$. Pak $g \circ f$ je spojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$.

Důkaz

Na rozdíl od předchozí situace nám nevadí, že $f(x) = f(x_0)$ na $\mathcal{U}_\delta^*(x_0)$ a to díky spojitosti fce $g(\cdot)$.

Chceme dokázat, že

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in \mathcal{U}_\delta(x_0): g(f(x)) \in \mathcal{U}_\varepsilon(g(f(x_0))).$$

Víme, že
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta > 0, \ \forall y \in \mathcal{U}_\Delta(f(x_0)): g(y) \in \mathcal{U}_\varepsilon(g(f(x_0)))$$
$$\forall \Delta > 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in \mathcal{U}_\delta(x_0): f(x) \in \mathcal{U}_\Delta(f(x_0)),$$
odkud plyne dokazované tvrzení. ∎

Věta 13 (o limitě složené funkce podruhé)

Nechť $f: R \to R$ a $g: R \to \mathbb{C}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ a g je spojitá v A. Potom $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(A)$.

Důkaz

Silnější předpoklad zde (srovnání s Větou 10 (spojitost)) umožní oslabit předpoklad na funkci f.

Důkaz je stejný jako důkaz Věty 12, pouze místo $f(x_0)$ píšeme všude A. ■

Pozor: $f(x_0)$ se může lišit od A a tudíž $g \circ f$ není obecně spojitá v x_0!

Příklad 7: (viz Př. 5)

$g(y) = y^2$ a $f(x) = (x)\, D(x)$, potom $\lim_{x \to 0} (g \circ f)(x) = 0$.

2.3 Derivace funkce (nejprve 1 proměnné)

Pojem derivace funkce je základním kamenem diferenciálního počtu. Dospěli k němu nezávisle G.W. Leibniz a I. Newton, každý z trochu jiného pohledu. ~~Zatímco Newton~~ Je třeba zdůraznit, že v té době ještě nebyl definován pojem limity a tudíž byl jejich přístup z dnešního hlediska poněkud těžkopádný.

Newton studoval okamžitou změnu veličiny, např. když uvažujeme pohyb hmotné částice ve směru osy x, pak průměrná rychlost ~~na úseku~~ během času (t_0, t_1) je

$$v_p = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Bude-li se $t_1 \to t_0$, pak za jistých předpokladů je šance, že i v_p půjde k jisté hodnotě, tedy

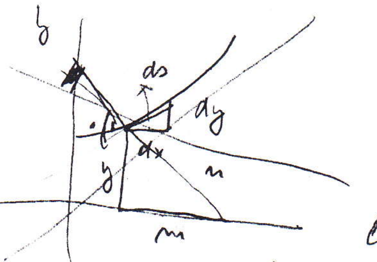
$$v = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \dot{s} = \frac{ds}{dt}$$

Když pak mluvil o obecné funkci $y = f(x)$, v dnešní řeči bychom mohli říci, že si představoval, že y a x jsou funkcí jistého parametru – času a definoval

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{a} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Celý zápis byl značně krkolomný (viz Schwabik, Šarmanová: Malý průvodce historií integrálu)

Leibniz spíše vycházel z úlohy nalézt tečnu ke křivce jakožto limitu sečen.



~~Oba trojúhelníky si jsou podobné a tedy $\frac{dy}{dx} = \frac{m}{y}$. Leibniz tvrdil, že dx je „infinitezimálně malé" a tudíž přímka Δ je tečnou ke křivce.~~

Pomocí pojmu limity dokazujeme, že

směrnice sečny $k_s = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

tedy $k_t = \lim_{\Delta x \to 0} k_s = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Můžeme tedy definovat

Definice 5 (derivace funkce)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť existuje okolí $U_\delta(x_0)$ tak, že $U_\delta(x_0) \subset D_f$. Řekneme, že f má v bodě x_0 (vlastní) derivaci, jestliže existuje
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A \in \mathbb{C}.$$
Tuto limitu značíme $f'(x_0)$ nebo $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Řekneme, že f má v bodě x_0 derivaci $\left\{\begin{matrix}\text{zleva}\\ \text{zprava}\end{matrix}\right\}$, jestliže existuje vlastní limita $\left\{\begin{matrix}\text{zleva}\\ \text{zprava}\end{matrix}\right\}$ $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{C}$. Tyto derivace značíme $\left\{\begin{matrix}f'_-(x_0)\\ f'_+(x_0)\end{matrix}\right\}$.

Jak jsme již viděli výše, můžeme limitu z Definice 5 psát různými způsoby. Totiž místo
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{můžeme psát} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (\text{substituce } x = x_0+h).$$
Někdy se též definují nevlastní derivace – vrátíme se k tomu později.

Věta 14

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ má v bodě x_0 (vlastní) derivaci. Potom f je v x_0 spojitá.

Důkaz

Víme, že $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a tudíž dle Věty 5 existují $K > 0$ a $U^*_\delta(x_0)$ tak, že
$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \le K \quad \text{tj.} \quad |f(x)-f(x_0)| \le K|x-x_0| \quad \text{pro } x \in U^*_\delta(x_0).$$
Dle Věty 8 tedy $\lim_{x \to x_0} |f(x)-f(x_0)| = 0$, tj. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. ■

Pozorování

Je-li $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$, $f_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, potom
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{x-x_0} + i \frac{f_2(x)-f_2(x_0)}{x-x_0} \right)$$
a tudíž, jestliže $\exists f'(x_0)$, potom $f'(x_0) = f_1'(x_0) + i f_2'(x_0)$.

Příklad 1 a) Nechť $f(x) = a = \text{konst}$ na $\mathbb{R}$. Potom $f'(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, neboť
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a-a}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x-x_0} = 0.$$

b) Nechť $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$. Potom
$f'(x_0) = m x_0^{m-1}$, neboť
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^m - x_0^m}{h} \overset{\text{binomická věta}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^m} + m x_0^{m-1} h + \sum_{j=2}^{m} \binom{m}{j} x_0^{m-j} h^j - \cancel{x_0^m}}{h}$$
$$= \boxed{m x_0^{m-1}}.$$

Věta 15.

Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mají derivaci v $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom platí

(i) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(ii) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$

(iii) Je-li $g(x_0) \neq 0$, pak $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Důkaz.

(i) $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left[\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) + \left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\right]$$

a protože každá limita zvlášť $\exists$ je jejich součet roven ~~součtu~~ limitě součtu dle Věty 7 (i).

tj. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(ii) $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left[\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) g(x) + \left(f(x_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\right].$$

Dle Věty 14 je $g(x)$ v bodě x_0 spojitá a proto opět limity jednotlivých sčítanců existují a tudíž se rovnají limitě součtu. Proto, dle Věty 7 (i) a (ii):

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0).$$

(iii) Stačí ukázat, že

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$ a potom použít krok (ii).

Tedy

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right)\frac{1}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)\,g(x_0)}\,\frac{1}{(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} -\frac{g(x)-g(x_0)}{(x-x_0)}\,\frac{1}{g(x)\,g(x_0)}.$$

Opět, použitím Věty 7 (iii) a díky spojitosti $g(x)$ v bodě x_0 máme ($g(x) \neq 0$ na jistém okolí x_0!)

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$ ■

Volbou $f = \lambda \equiv \text{const}$ a použitím Příkladu 8 a) máme

$$(\lambda g)'(x_0) = \lambda\, g'(x_0) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ konstanta}.$$

Cvičení: Dokažte indukcí použitím (ii), že pokud $\exists\, f_i'(x_0)$, $i = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$, potom

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_0)\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_j(x_0)\right)$$ (tj. $(f_1 \cdots f_n)'(x_0) = f_1'(x_0)\,f_2(x_0)\cdots f_n(x_0) + f_1(x_0)\,f_2'(x_0)\cdots f_n(x_0) + \dots + f_1(x_0)\cdots f_{n-1}(x_0)\,f_n'(x_0)$).

Věta 16 (derivace složené funkce, řetízkové pravidlo – chain rule)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jsou takové, že existují $f'(x_0)$ a $g'(f(x_0))$. Potom

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

$\left[\text{neboli } \frac{d}{dx}\, g(f(x_0)) = \frac{dg}{df}(f(x_0))\, \frac{df}{dx}(x_0)\right]$.

Důkaz

Myšlenka spočívá v tom, že
$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} \text{ napíši jako } \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$
formálně bych limitou pro $x\to x_0$ dostal výsledek. Není ale jasné, že $f(x)\neq f(x_0)$ na jistém okolí x_0 a tudíž první výraz nemusí mít smysl. Proto definujme

$$h(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)} & y\neq f(x_0)\\[2ex] g'(f(x_0)) & y=f(x_0).\end{cases}$$

Zřejmě je h spojitá v bodě $f(x_0)$ a platí
$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = h(f(x))\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$
Provedeme-li $\lim\limits_{x\to x_0}$, první člen má limitu díky Větě 12 (spojitost složené funkce), druhý člen pak díky existenci derivace fce f. Proto
$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} h(f(x))\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = h(f(x_0))\cdot f'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$ ∎

Věta 17 (Derivace inverzní funkce)

Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a nechť

(a) $\exists\ \alpha, \beta_1, \beta_2>0$ tak, že $f:(x_0-\alpha, x_0+\alpha)\xrightarrow{na}(f(x_0)-\beta_1, f(x_0)+\beta_2)$ prostě

(tj. $\exists$ inverzní $f^{-1}:(y_0-\beta_1, y_0+\beta_2)\xrightarrow{na}(f^{-1}(y_0)-\alpha, f^{-1}(y_0)+\alpha)$)

(b) existuje $f'(x_0)\neq 0$

(c) f^{-1} je spojitá v $y_0=f(x_0)$.

Potom existuje $[f^{-1}]'(f(x_0))$ a platí
$$[f^{-1}]'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (1)$$
neboli
$$[f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \qquad (2)$$

Důkaz

1) Ideový, chybný: (ale umožňuje dobře si zapamatovat vzorečky)

Protože f^{-1} existuje, víme, že pro $x\in(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$
$$(f^{-1}\circ f)(x)=x$$
a též
$$(f\circ f^{-1})(y)=y \quad \text{pro } y\in(y_0-\beta_1, y_0+\beta_2)$$
Tedy, použitím věty o derivaci složeného zobrazení v bodě x_0
$$(f^{-1})'(f(x_0))\ f'(x_0)=1$$
resp.
$$f'(f^{-1}(y_0))\,(f^{-1})'(y_0)=1,$$
odkud plynou vztahy (1) a (2).

Víme je chyba? → nevíme, že $(f^{-1})'$ $\exists$! Takže jistě jednou a formálně správně:

2) Důkaz V17:

Díky (b) a V5 existuje $U^*_\delta(x_0)$ tak, že
$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \geq \frac{|f'(x_0)|}{2} > 0 \qquad \forall x \in U^*_\delta(x_0).$$
Pro tato x definujme
$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} & x \neq x_0 \\[2mm] \dfrac{1}{f'(x_0)} & x = x_0. \end{cases}$$

Analogicky jako v předchozí větě je h spojitá v bodě x_0. Proto
$$\lim_{y\to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(x_0))}{y-f(x_0)} = \lim_{y\to f(x_0)} h(f^{-1}(y)) \overset{\text{V12- spojitost složené funkce}}{=} h(f^{-1}(f(x_0))) = h(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$
Tedy $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. ∎

Předpoklad (c) Věty 17 je v praxi dosti těžko ověřitelný. Jak ukážeme později, stačí pro spojitost inverzní funkce předpokládat např. spojitost a ryzí monotónii f-ce f na nějakém okolí bodu x_0. Větu tedy můžeme přeformulovat

Věta 17'

Nechť $f(x)$ je spojitá a ryze monotónní na nějakém okolí bodu x_0 a nechť existuje ~~vlastní~~ $f'(x_0) \neq 0$. Potom platí (1) a (2).

Připomeňme, že f je ryze monotónní na (a,b), jestliže $(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2)) \underset{\text{rostoucí}}{>0}$ nebo $\underset{\text{klesající}}{<0}$ $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq x_2$.

Proto vidíme, pokud pro rostoucí $f(x)$ $\exists$ derivace na (a,b), pak $f'(x) \geq 0$ resp. pro klesající $f'(x) \leq 0$.

Obráceně, je-li $f'(x) > 0$ na (a,b), pak nutně $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$ alespoň pro $|h|$ dosti malé a tudíž $f(x+h) > f(x)$ pro $h > 0$ $\Rightarrow$ fce je rostoucí!

Proto můžeme formulovat Větu 17 ještě jednou

Věta 17''

Nechť $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ splňuje $f'(x) \underset{<}{>} 0$ pro všechna $x \in (a,b)$. Pak (1) resp. (2) platí.

Důkazy Vět 17' a 17'' jakož i použitou vágní argumentaci nad těmito větami dokážeme přesně později. Ukážeme tedy, že předpoklady ve Větě 17' a 17'' implikují předpoklady Věty 17.

Vsuvky pro kapitolu o derivaci

- jednostranné derivace $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$

- pokud $f'(x_0)=+\infty$ o spojitosti neříká nic: $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=0$
  a také ex. spoj. fce, které derivaci nemají $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$
- Věta o limitě derivace:
  Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $x_0\in\mathbb{R}$.
  (i) f je spoj. v x_0 zprava
  (ii) $\exists\,\delta>0$, že pro $x\in U^{*,+}_{\delta}(x_0)$ ex. $f'(x)\in\mathbb{C}$
  (iii) $\lim\limits_{x\to x_{0+}} f'(x)=A\in\mathbb{C}^*$
  Pak $f'_+(x_0)=A$.

Příklady: $f(x)=|x|$
$f(x)=x.|x|$

s předběhnutím (sin a exp budou v následující kapitole)

$f(x)=\ln x$

$f(x)=\arcsin x$ (pohrát si i s $f'_-(1)$)

Poznámky: Typický výpočet probíhá následovně

1\. krok: ve snadných bodech (většinou celý D_f až na nějaký bod) se použije „aritmetika", derivace složené popř. inverzní fce

2\. krok: ve zbývajících bodech z definice nebo limitou derivací

2.4. Elementární funkce limit z předn.?

V této kapitole si zavedeme elementární funkce, které znáte ze střední školy, poněkud jiným způsobem. Budeme ~~vždy~~ používat následující větu, kterou si dokážeme později.

~~Věta~~ Lemma 1

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ryze monotónní na $[a,b]$ a spojitá. Potom f zobrazuje (a,b) na (c,d), kde c, d jsou příslušné limity zleva resp. zprava fce f v bodech a a b. (můžou být i nekonečné). Dále existuje f^{-1}, která je spojitá na (c,d) a zobrazuje tento interval na (a,b).

Nyní můžeme přistoupit k zavedení ~~exponenciály~~ goniometrických funkcí

Věta 18 ($\sin, \cos$)

~~Existuje právě jedna funkce $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tak, že~~ Existují právě dvě reálné funkce $\cos$ a $\sin$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a iracionální číslo $\pi > 0$ tak, že platí:

(1) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

(2) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

(3) $\sin(-x) = -\sin x$ a $\cos(-x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(tj. sin je lichá a cos sudá funkce)

(4) $\sin$ je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$

(5) $\sin(0) = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

(6) $(\sin x)'|_{x=0} = 1$.

Tuto větu si dokážeme v kapitole ořadách. Evidentně díky jednoznačnosti jsou tyto funkce zejména tími funkcemi, které znáte. Nyní bychom mohli ukazovat různé vzorečky, které jste se učili na střední škole, na základě vztahů (1)-(6). Ukažme si alespoň některé. Další lze nalézt ve skriptech

Černý, Rokyta: Differential and Integral Calculus of One Real Variable, § 4

(7) $\forall x \in \mathbb{R}: \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Dk: z (2) a (3) plyne volbou $x = -y$, že $\cos 0 = \cos^2 x + \sin^2 x$, využili jsme rovněž (3).

Nyní, z (1) volbou $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ a (5) máme

$$\underline{1} = \sin \frac{\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2}\cos 0 + \cos\frac{\pi}{2}\sin 0 = \underline{\cos 0}.$$

(8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Dk:

z (6) máme: $1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Dále stačí využít (7):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \cancel{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}^{z\,(7)} - \overbrace{(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2})}^{z\,(2)\ \text{volba}\ x=y:=\frac{x}{2}}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(9) $\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$ (a každá obě fce jsou spojité?)

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos x \frac{\sin h}{h} + \lim_{h\to 0} \sin x \frac{\cos h - 1}{h} = \underline{\cos x}$$

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \underline{-\sin x}$$

(10) $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ na $[-1,1]$ prostá a $\sin x|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ je rostoucí.

Dk

Z vlastností (3), (4), (5) a ~~(7)~~ ~~plyne, že~~, spolu se ~~spojitostí sin x~~ dokážeme (10).
To, že nelze očekávat, že by fce $\sin x$ byla rostoucí na větším intervalu obsahujícím $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ plyne z toho, že díky (1)

Obecně $\frac{\pi}{2} \pm x$

$$\sin(x+\tfrac{\pi}{2}) = \sin x \cos\tfrac{\pi}{2} + \cos x \cdot \sin\tfrac{\pi}{2}$$ ~~volba x = 0~~,

$$\sin(x-\tfrac{\pi}{2}) = \sin x \cos\tfrac{\pi}{2} - \cos x \sin\tfrac{\pi}{2}$$ a s dosud řečeným dává, že je to takto

$$\sin(x+\tfrac{\pi}{2}) + \sin(x-\tfrac{\pi}{2}) = 2\sin x \cos\tfrac{\pi}{2}$$

a z vlastnosti (7) plyne, že $\cos^2\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0$

tj. $\underline{\sin(\tfrac{\pi}{2}+x)} = -\sin(x-\tfrac{\pi}{2}) = \underline{\sin(\tfrac{\pi}{2}-x)}$

a tedy fce sin nemůže růst na $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\varepsilon]$.

(11) $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ tj. fce sin a cos jsou 2π-periodické

Zřejmě z vlastnosti $\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$ volbou $x = \frac{\pi}{2}$ máme $\sin\pi = 0$ (víme $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

volbou $x = \frac{3}{2}\pi$ $\sin 2\pi = 0$ $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$)

~~Ověřit~~ Dále víme $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ Ale (7) a (5)

a tedy z (2): $\cos\pi = \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = -1$

$\cos 2\pi = \cos\pi\cos\pi - \sin\pi\sin\pi = 1$

Tedy

$\sin(x+2\pi) = \sin x \cos 2\pi + \cos x \sin 2\pi = \underline{\sin x}$

$\cos(x+2\pi) = \cos x \cos 2\pi - \sin x \sin 2\pi = \underline{\cos x}$

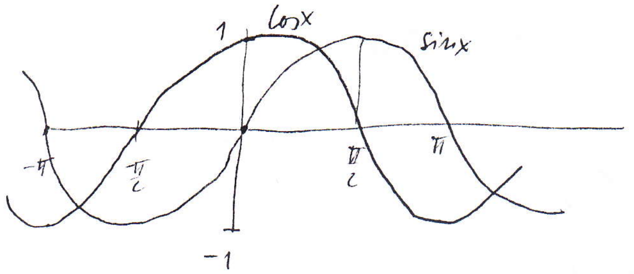
(12) Fce cos je klesající na $[0,\pi]$ a zobrazuje tento interval na $[-1,1]$.

Zřejmě z (10) plyne Ale potřebují spojitost

~~cos(x)~~ $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2} = \cos x$

a tedy (12) ~~tato~~ plyne z (10).

Nyní už máme veškeré potřebné informace a dovodíme tedy



$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x.$

Pomocí těchto funkcí můžeme definovat

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

a pomocí věty o derivaci podílu

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Připomeňme jen, že

$$D_{\operatorname{tg} x} = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\tfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$D_{\operatorname{cotg} x} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

a obě funkce jsou π-periodické, $\operatorname{tg} x$ je rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\operatorname{cotg} x$ je klesající na $(0, \pi)$.

~~Podrobněji viz cvičení~~

Na intervalech, kde jsou dané fce monotónní (díky spojitosti a ryze monotónní) existují inverzní fce:

$\arcsin x$: $D_f = [-1,1]$	$R_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$ $D_f = [-1,1]$	$R_f = [0, \pi]$	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	Cvičení!
$\operatorname{arctg} x$ $D_f = \mathbb{R}$	$R_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arccotg} x$ $D_f = \mathbb{R}$	$R_f = (0, \pi)$	$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	

Podrobněji opět viz cvičení.

Věta 19 (o exponenciále)

Existuje právě jedna funkce $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taková, že

(13) $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2$ $\quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(14) $\exp(x + iy) = \exp x (\cos y + i \sin y)$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(15) $\exp 0 = 1$

(16) $(\exp x)' = \exp x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

(17) Navíc, uvažujeme-li $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tak $R_{\exp|\mathbb{R}} = (0, \infty)$ a $\exp|_{\mathbb{R}}$ je rostoucí,

$\left(\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\exp x} = 0\right)$ (Def: intuitivně - rychleji roste)

Cvičení napřed

Opět i tuto větu dokážeme v kapitole o řadách funkcí.

Odvodíme teď další vlastnosti této funkce

(18) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$

Zřejmě $\exp x \exp(-x) = \exp(0) = 1$, odkud plyne požadované.

(19) $\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$

Zřejmě

$$1 = (\exp x)'|_{x=0} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp x - \exp 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x}.$$

(20) $\exists$ inverzní fce $\lg x : (0,\infty) \xrightarrow{na} \mathbb{R}$, rostoucí, spojitá, $\lg x > 0$ na $(1,\infty)$, $\lg x < 0$ na $(0,1)$.

Tvrzení plyne přímo z Lemmatu 1 a (17).

(21) $\lg(x\cdot y) = \lg x + \lg y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$

Dk: Uvažujme $x, y \in \mathbb{R}^+$ a definujme ~~($\lg$ ... na $\mathbb{R}$)~~ $u = \lg x$, $v = \lg y$

a taktéž dle (13) a vlastností inverzních funkcí

$\exp(u+v) = \exp u \exp v$, tj.

$u+v = \lg(\exp u \cdot \exp v)$,

ale $\lg x + \lg y = \lg(x\cdot y)$.

(22) $\lg 1 = 0$

Plyne z (15)

(23) $(\lg x)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Z Věty o derivaci inverzní funkce (VI7') plyne

$$(\lg x)' = \frac{1}{\exp'(\lg x)} = \frac{1}{\exp(\lg x)} = \frac{1}{x}.$$

~~Odvod~~

(24) $\lg(x^n) = n \lg x \quad$ pro $x \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{Z}$

Dk

Pro $n \in \mathbb{N}$ indukcí z (21) - DÚ

Pro $n<0$ stačí uvědomit, že $0 = \lg x^n \cdot \frac{1}{x^n} = \lg x^n + \lg x^{-n} = n \lg x + \lg x^{-n}$.

(25) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{x} = 0$ → po vynulování! ⇒ všude dál je VII-1

Dk

Z (17) stačí použít substituci

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\exp x} = \lim_{y\to\infty} \frac{\lg y}{y}.$$

(26) $\lim_{x\to 1} \frac{\lg x}{x-1} = 1$

Dk: $1 = \lim_{y\to 0} \frac{\exp y - 1}{y} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\lg x} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\lg x}{x-1} = 1.$

Malá odbočka – odmocniny

Víme, že $f(x) = x^m$ je ($m \in \mathbb{N}$) spojitá funkce na $\mathbb{R}$, pro m liché je rostoucí na $\mathbb{R}$, pro m sudé je rostoucí na $[0, \infty)$. (Toto nebudeme dokazovat – poplyne to z vět, které dokážeme později a každý si to bude umět dokázat sám); ($x>0$. musí rovnat!)

Použitím Lemmatu 1 pak můžeme definovat inverzní funkci $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$, kde pro m liché je $D_{x^{\frac{1}{m}}} = \mathbb{R} = R_{x^{\frac{1}{m}}}$
sudé je $D_{x^{\frac{1}{m}}} = \mathbb{R}^+ = R_{x^{\frac{1}{m}}}$.

$\forall\ \sqrt[m]{xy} = \sqrt[m]{x}\,\sqrt[m]{y}$ (*)
Dk: umocni na m-tou.

Navíc, pro $m \in \mathbb{N}$ může dodefinovat
$x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ ~~...~~
a $x^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{m}}}$.

Pokud položíme pro $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$
$x^\alpha = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$,
máme dobrou definici x^α $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$. Pozor na to, že pro q liché a q sudé se liší definiční obor této funkce!

$\forall\ \frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Rightarrow x^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{r}{s}}$ Dk: $w = x^{p/q}$, $v = x^{\frac{r}{s}}$ pak $x^{ps} = w^{qs}$ a $x^{rq} = v^{sq}$ ale $ps = rq \Rightarrow w = v$ □

Platí dobře známé vztahy $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$. (~~Dokažte si sami!~~)
$\alpha = \frac{p}{q}, \beta = \frac{r}{q}$, pak $\sqrt[q]{x^{p+r}} = \sqrt[q]{x^p}\,\sqrt[q]{x^r}$ $(p, q \in \mathbb{Z})$
chci $x^{\frac{p}{q}\frac{r}{q}} = (x^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{q}}$
tj. $\sqrt[q^2]{x^{pr}} = \sqrt[q]{(\sqrt[q]{x^p})^r}$, ale $(\sqrt[q]{x})^r = \sqrt[q]{x^r}$ z (*) a $\sqrt[q^2]{x} = \sqrt[q]{\sqrt[q]{x}}$ ze subst. $x = y^q$ a □

Cílem bude rozšířit tuto definici i pro $\alpha \in \mathbb{R}$. Nejprve se na okamžik vraťme k exponenciální a logaritmické funkci.

(27) $\lg(x^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m}\lg x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,\ m \in \mathbb{N}$

Dk
~~Protože~~ $\lg(x) = \log(x^{\frac{m}{m}}) = \lg(x^{\frac{1}{m}})^m = m \log x^{\frac{1}{m}}$.

Speciálně tedy spojením (26), (24)

(27) $\lg(x^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}\lg x \quad x \in \mathbb{R}^+,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$

a tíž

(28) $x^{\frac{p}{q}} = \exp(\frac{p}{q}\lg x)$ $\quad$ –11–

Vztah (28) nám umožní dodefinovat x^α pro $\alpha \in \mathbb{R}$. Totiž

Definice 6

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Pak

$$x^\alpha := \exp(\alpha \lg x)$$

Zřejmě je x^α spojitá funkce v x $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^+$ (Pozor – na rozdíl od α rac. zde nemá smysl mluvit o $x < 0$). Navíc, díky vlastnostem fcí exp a lg:

Nepodstatné, spíše v Jarníkovi D1 str. 60-64, 105-114

(30) $D_{x^\alpha} = \mathbb{R}^+$, x^α je monotónní; rostoucí pro $\alpha > 0$, klesající pro $\alpha < 0$.

x^α je spojitá funkce, platí $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$ a
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Dk

Vzhledem k vlastnostem fcí lg a exp stačí ukázat vzorec pro derivaci. Zde máme

$$(x^\alpha)' = \frac{d}{dx}(\exp(\alpha \lg x)) = \exp(\alpha \lg x) \cdot \alpha \cdot \frac{d}{dx} \lg x = \alpha x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Věta o derivaci složené fce V16)

Na vztah (29) se můžeme podívat i z jiného hlediska. Totiž fixujme x (označme a) a budeme měnit α (označme x))

Definice 7

Nechť $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$. Potom
$a^x := \exp(x \lg a)$

Všimneme si, že pro číslo e takové, že $\lg e = 1$ máme
$\exp x = e^x$.

Ukážeme si později to, co všichni již ví – že číslo e je právě Eulerovo číslo, které je iracionální, $e \approx 2.71828$

Díky vlastnostem fce exp a lg máme:

(31) $R_{a^x} = \mathbb{R}^+$, $D_{a^x} = \mathbb{R}$

a^x je spojitá fce, monotónní, rostoucí pro $a > 1$, klesající pro $a \in (0,1)$
a $(a^x)' = a^x \lg a$

Dk

Opět, díky lemmatu 1, stačí ukázat vztah pro derivaci. Pravidlem vztahu pro derivaci složené funkce máme

$$(a^x)' = \frac{d}{dx}(\exp x \lg a) = \exp(x \lg a) \cdot \lg a = a^x \lg a.$$

Pozn.: Pro $a = 1$ můžeme definovat $1^x = \exp(x \cdot 0) = 1$, je to tedy konstantní funkce $\forall x \in \mathbb{R}$. My se budeme nadále situaci $a=1$ vyhýbat. (ovšem $0^x = 0$, ale více nebudeme rozvíjet)

Cvičení: Ukažte, že

(32) $u^v \cdot u^w = u^{v+w}$ $\quad \forall u, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^+$, $v, w \in \mathbb{R}$.

$u_1^v \cdot u_2^v = (u_1 \cdot u_2)^v$

$(u^v)^w = u^{v \cdot w}$

plyne z vlastností exponenciely
$\exp(v \cdot \lg u) \cdot \exp(w \lg u) = \exp((v+w) \lg u)$
podobně
$\exp(w \lg(\exp(v \lg u))) = \exp(w \cdot v \lg u)$

~~Důkaz~~ Z vlastnosti $(3X^0)$ plyne, že k funkci a^x pro $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ můžeme definovat inverzní funkci (opět použitím lemmatu 1). Tedy definujeme

$$f(x) = a^x \quad \rightarrow \quad f^{-1}(x) = \lg_a x$$

$(3X^2)$ Vzniká $\lg_a x$ je spojitá funkce na $\mathbb{R}^+$, $R_{\lg_a x} = \mathbb{R}$, $\lg_a x$ je rostoucí pro $a > 1$, klesající pro $a \in (0,1)$.

Speciálně pro $a = e$ je $\log_e x = \lg x$, z definice plyne $\lg e = 1$.

$(3X^3)$ Platí $\lg_a x = \dfrac{\lg x}{\lg a}$

Dk.

Označme $\log_a x = u \iff x = a^u = \exp(u \lg a)$

tj. $\lg x = u \lg a = \log_a x \lg a$. ⊠

$(3X^4)$ Platí $(\lg_a x)' = \dfrac{1}{x \lg a}$

Důkaz

Plyne ze vzorce $(3X^3)$, díky $(\lg x)' = \frac{1}{x}$. (Ekvivalentně lze dokázat z derivace inverzní fce, použitím $(3X^1)$). ⊠

Ačkoliv jsme to jistě nedokázali, budeme nadále místo $\exp x$ psát e^x a místo $\lg x$ psát $\ln x$. Číslo e můžeme považovat dopředu jako číslo splňující $\lg e = 1$ a vzhledem k předchozímu jde jistě o Eulerovo číslo.

Na základě exponenciální funkce můžeme definovat tzv. hyperbolické funkce a k nim inverzní hyperbolometrické.

[illegible]

$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	$(\sinh x)' = \cosh x$	$D: \mathbb{R}$	$H: \mathbb{R}$
$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	$(\cosh x)' = \sinh x$	$D: \mathbb{R}$	$H: [1, \infty)$
$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$	$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$D: \mathbb{R}$	$H: (-1, 1)$
$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$	$(\operatorname{cotgh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$	$D: \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$H: (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
$\operatorname{argsinh} x = (\sinh x)^{-1}$	$(\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$D: \mathbb{R}$	$H: \mathbb{R}$
$\operatorname{argcosh} x = (\cosh x)^{-1}$	$(\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$D: [1, \infty)$	$H: \mathbb{R}^+_0$
$\operatorname{argtgh} x = (\operatorname{tgh} x)^{-1}$	$(\operatorname{argtgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$	$D: (-1, 1)$	$H: \mathbb{R}$
$\operatorname{argcotgh} x = (\operatorname{cotgh} x)^{-1}$	$(\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$	$D: (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$H: \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Všechny tyto vlastnosti, stejně jako několik dalších si ukážeme na cvičení!

Na závěr si spočteme derivaci příkladů pro $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

<u>Příklad 9</u>

Přímo z definice: je-li $f(x) = \alpha x + \beta$, $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, plyne

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(x+h) + \beta - \alpha x - \beta}{h} = \alpha$$

a dále pro $P(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \qquad \alpha_i \in \mathbb{C}$

a) $P'(x) = \sum_{i=1}^{n} i\,\alpha_i x^{i-1}$, díky větám o derivování součtu a součinu.

~~Dále, díky derivaci složené fce~~

b) $f(x) = (x+a)^n \Rightarrow f'(x) = n(x+a)^{n-1}$, $a \in \mathbb{C}$

Zde nemůžeme použít složenou fce – vnitřní fce je z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$. Je možno ale využít vzorec pro derivaci součinu n-fcí.

c) analogicky: $\left((x+a)^{-n}\right)' = -n(x+a)^{-n-1}$, $a \in \mathbb{C}$

je možno dokázat analogicky, pokud víme, že

$$\left((x+a)^{-1}\right)' = -\frac{1}{(x+a)^2}.$$

Ale

$$\frac{1}{x+a} = \frac{x+a_1 - i a_2}{(x+a_1)^2 + a_2^2}$$

a tedy

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)' = \frac{(x+a_1)^2 + a_2^2 - \left((x+a_1) - i a_2\right)\left(2(x+a_1)\right)}{\left((x+a_1)^2 + a_2^2\right)^2} = -\frac{(x+a_1)^2 + a_2^2 + 2 i a_2 (x+a_1)}{\left((x+a_1)^2 + a_2^2\right)^2} =$$

$$= -\frac{(x+a_1)^2 - a_2^2 - 2 i a_2 (x+a_1)}{\left((x+a_1)^2 + a_2^2\right)^2} = -\left[\frac{(x+a_1) - i a_2}{(x+a_1)^2 + a_2^2}\right]^2 = -\frac{1}{(x+a)^2}.$$

d) Nechť $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom

$$\left(\exp(\alpha x)\right)' = \left(e^{\alpha x}\right)' = \alpha e^{\alpha x} = \alpha \exp(\alpha x)$$

<u>Dk:</u>

$$\left(\exp(\alpha x)\right)' = \left(\exp(\alpha_1 x + i \alpha_2 x)\right)' = \left(\exp(\alpha_1 x)\left(\cos \alpha_2 x + i \sin \alpha_2 x\right)\right)' =$$

$$= \alpha_1 \exp(\alpha_1 x)\left(\cos \alpha_2 x + i \sin \alpha_2 x\right) + \exp(\alpha_1 x)\left(-\alpha_2 \sin \alpha_2 x + i \cos(\alpha_2 x)\, \alpha_2\right)$$

$$= \alpha_1 \exp(\alpha x) + i \alpha_2 \left(\exp(\alpha_1 x)\right)\left(\cos \alpha_2 x + i \sin(\alpha_2 x)\right) = (\alpha_1 + i \alpha_2) \exp(\alpha x) = \underline{\alpha \exp(\alpha x)}$$

2.5 Derivace vyšších řádů, pravidla derivace

ani 1/2 přednášky

Definice 8.

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ má v $U_\delta(x_0)$ derivaci. Nechť existuje

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = A.$$

Potom A nazýváme druhou derivací funkce f v x_0 a značíme $f''(x_0)$, popř. $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$. (Tj. $f''(x_0) = (f')'(x_0)$).

Analogicky, induktivně můžeme definovat

$$f^{(k)}(x_0) = \left(f^{(k-1)}\right)'(x_0).$$

Příklad 10: a) Nechť $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 1$. Spočtěme všechny ~~parciální~~ derivace.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 2$$
$$f''(x) = 6x + 2.$$
$$f'''(x) = 6$$
$$f''''(x) = 0$$
$$f^{(k)}(x) = 0 \quad k \geq 4.$$

Ukážeme si později, že polynomy jsou jediné funkce splňující, že $f^{(k)}(x) = 0$ $\forall k \geq i$ od jistého indexu i.

b) $f(x) = e^x \sqrt{x}$. Spočtěme $f''(x)$ všude, kde tato derivace má smysl (tj. $x > 0$ jak uvidíme)

$$f'(x) = e^x \sqrt{x} + \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} e^x$$
$$f''(x) = e^x \sqrt{x} + e^x \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} e^{x} x^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} e^x$$
$$= e^x \sqrt{x} + 2 e^x (x^{\frac{1}{2}})' + e^x (x^{\frac{1}{2}})''.$$

Trochu nám to připomíná ~~deriva~~ binomickou větu. A skutečně

Věta 20 (Leibnizovo pravidlo)

Nechť ~~existují~~ $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a nechť existují $f^{(n)}(x_0)$ a $g^{(n)}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)\, g^{(n-k)}(x_0).$$

Dk

indukcí – stejně jako binomická věta

$n = 1$: → je vlastně věta o derivaci součinu

Nechť platí věta pro $n - 1 \in \mathbb{N}$. Potom ho ukážeme pro n:

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \left((fg)^{(n-1)}\right)'(x_0) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)}(x_0)\, g^{(n-1-k)}(x_0)\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} f^{(k+1)}(x_0)\, g^{(n-1-k)}(x_0) + \binom{n-1}{k} f^{(k)}(x_0)\, g^{(n-k)}(x_0)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}$$

$$= f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k)}(x_0)\, g^{(n-k)}(x_0) \left[\underbrace{\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}_{\binom{n}{k}}\right]$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)\, g^{(n-k)}(x_0)}$$

$$\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,[(n-k)+k]}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,n}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Nyní na chvíli uvažujme fci, která závisí na více proměnných (z tohoto tématu budou příklady méně spočetné). Mějme tedy (pro jednoduchost)

$$f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

a mějme $\vec{x}_0 = (x_0^1, \dots, x_0^N)$ a $\vec{v} = (v^1, \dots, v^N)$ dáno. Definujme

$$g(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

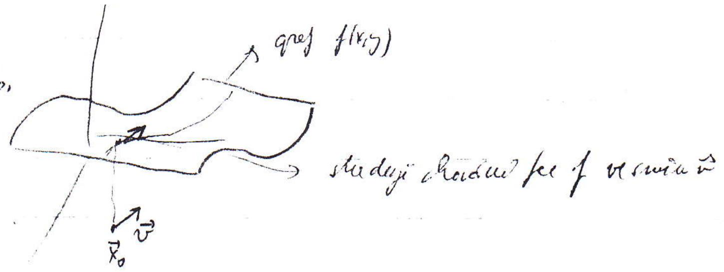
a studujme vlastnosti fce g.

<u>Definice 9</u>

Derivací funkce f ve směru $\vec{v}$ v bodě $\vec{x}_0$ nazýváme $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0) := \frac{dg}{dt}\Big|_{t=0}$.

Všimněme si, že vlastně $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$.

Směrová derivace charakterizuje chování funkce v daném směru $\vec{v}$.



Směrů $\vec{v}$ je samozřejmě pro $N \geq 2$ nekonečně mnoho. Za jistých předpokladů na funkci f (nějaké jako dosti hladká fce – viz později – na obrázku, graf je hladký, bez nějakých divokých skoků) stačí pro charakterizaci chování fce zjistit její chování pouze ve směrech, kterých je konečně mnoho. V $\mathbb{R}^N$ je takovými směry N – např. můžeme volit směry souřadnicových os, tj.

$$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$$
$$\vec{v}_2 = \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$$
$$\vdots$$
$$\vec{v}_N = \vec{e}_N = (0, 0, \dots, 1)$$

Potom tyto směrové derivace ve směrech souřadnicových os se nazývají parciální derivace f podle x_i, značíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(x_0) \qquad i = 1, \dots, N,$$

neboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0^1, \dots, x_0^i + t, \dots, x_0^N) - f(\vec{x}_0)}{t}.$$

Za jistých předpokladů na fci f je potom možno dokázat, že

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{v}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i} v_i,$$

Tj. parciální derivace plně charakterizují chování fce f v libovolném směru. Blíže se s tímto seznámíte v části kursu věnovaného funkcím více proměnných. Výpočet je snadný - podle ^na^ zbylé proměnné se dívdme jako na konstanty a derivuji jen podle jedné proměnné - použiji pravidla pro derivaci fce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

<u>Příklad 11</u>

Pro $\bar{x} = (x_1, \dots, x_N)$ definujeme

$f(x) = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$ $\qquad f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$

Potom

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{|x|} \qquad |x| \neq 0.$$