FCE více proměnných

509

5.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$$

substituce

$$\left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right|$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \left[r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \right]^{r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi} = r^{2\,r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}$$

$$\overset{\lim_{r\to 0^+}}{=} e^{r^4 \ln r^2 \underbrace{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}_{\text{omezené}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0^+} r^4 \ln r^2 = 0 \rightarrow \lim_{r\to 0^+} \frac{\ln r^2}{\frac{1}{r^4}} \overset{\text{L'Hospital } \frac{0}{\infty}}{=} \lim_{r\to 0^+} \frac{2r\frac{1}{r^2}}{\frac{1}{r^3}\cdot(-4)}$$

NENE, nemám to správně. Tady

ještě jednou tím čitelnějším postupem v řešitel

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} \qquad |y = kx|$$

$\rightarrow$

6.

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right|$$

ta abs. hodnota není potřeba

$$\lim_{\|r\|\to\infty} \frac{r(\sin\varphi+\cos\varphi)}{r^2(\sin^2\varphi) - r^2(\cos\varphi\sin\varphi) + r^2(\cos^2\varphi)}$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{r}{r^2} \frac{\sin\varphi+\cos\varphi}{\sin^2\varphi - \cos\varphi\sin\varphi + \cos^2\varphi}$$

$$= \lim_{r\to\infty} \underbrace{\frac{1}{r}}_{0} \frac{\overbrace{\sin\varphi+\cos\varphi}}{1 - \underbrace{\cos\varphi\sin\varphi}_{<1}} = 0$$

Omezené

(7) $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$ $\left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right|$

$= \lim\limits_{r\to\infty} \frac{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}{r^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)} = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\underbrace{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}_{>0,\ \text{omezene}}} = 0$

(8)

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x}$ $\left| \text{Taylor: } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right|$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \frac{1}{x}\left(xy - \frac{x^3y^3}{3!} + \sigma\left(\frac{x^5y^5}{5!}\dots\right)\right)$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} y - \underbrace{\frac{x^3y^3}{x\,3!}}_{0} = \boxed{a}$

Alternativně

$\lim\limits_{\to 0} \frac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{\to 0} \underbrace{\frac{\sin xy}{xy}}_{\to 1} y$

(9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+y^6}{x^2-y^2} = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right|$ $|x| \neq |y|$

$\lim\limits_{r\to 0} \frac{r^6(\sin^6\varphi+\cos^6\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)} = \lim\limits_{r\to 0} r^4 \frac{\sin^6\varphi+\cos^6\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$ $|x| \pm |y|$ $\left| x = y + y^5 \right|$

$\lim\limits_{y\to 0} \frac{(y+y^5)^6+y^6}{(y+y^5)^2-y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y^6+\sigma(y^6)+y^6}{y^2+2y^6+y^{10}-y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{2y^6}{2y^6+\underbrace{y^{10}}_{0}} = 1,$

(10) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ ~~$x^2 \pm y^2 \to \|x\| \neq \|y\|$~~ $x \neq 0$ ~~když $y \neq 0$~~

$\left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right| \lim\limits_{r\to 0} \frac{2r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \lim\limits_{r\to 0} 2\cos\varphi\sin\varphi$

Zjistit: kde jsou fce definované, spojité, parc. derivace 1. řádu (kde jsou a kde jsou spojité)

$\boxed{S010}$

1) $f(x,y) = \ln(x+y)$ $x+y>0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad x \neq -y \quad \text{tedy } x+y>0$$

2) $f(x,y,z) = \cos x \cosh y$ definované na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x \cosh y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos x \sinh y \quad \text{definované na } \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

3) $f(x,y) = |x||y|$ definované na $(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)$

$$\underset{x\neq 0}{\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{sign} x\,|y|} \quad \underset{y\neq 0}{\frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sign} y\,|x|}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0,\,y\neq 0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h||y|-0}{h}$$

$= \lim_{h\to 0} \operatorname{sign} h\,|y|$ ...... z čehož plyne, že pro $y\neq 0$ lim neexistuje

pro $y=0$ $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

analogicky pro x.

Tedy: limita neex. pro ① $x=0$ a $y\neq 0$
② $x\neq 0$ a $y=0$

4) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy} = (xy)^{\frac{1}{3}}$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3}(xy)^{-\frac{2}{3}}\cdot y$, $x\neq 0$ → $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3}\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}(xy)^{-\frac{2}{3}}\cdot x$, $y\neq 0$ → $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}$

spojitost? limity!

$x=0 \quad y\neq 0 \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{3}\frac{y^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{2}{3}}}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}}\underbrace{h^{-\frac{5}{3}}}_{\text{diverguje - nevl. limita}}$$

→ neexistuje

$y=0 \quad x\neq 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}$ analogicky

(5) $f(x,y) = \sqrt[5]{x^5+y^5} = (x^5+y^5)^{\frac{1}{5}}$ definovaná na $(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{5}(x^5+y^5)^{-\frac{4}{5}}\cdot 5x^4 \qquad x \neq -y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{5}(x^5+y^5)^{-\frac{4}{5}}\cdot 5y^4 \qquad x \neq -y$$

$x=0 \quad y\neq 0 \quad \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{5}(h^5+y^5)^{-\frac{4}{5}}\cdot 5h^4 - 0}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{(h^5+y^5)^{+\frac{4}{5}}} = 0$$

v $(0,0)$: $\quad x=0 \quad y=0$ pro $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\quad \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{h^4}{(h^5)^{\frac{4}{5}}}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h^4}{h^4}\cdot\frac{1}{h}$ = diverguje

NE!

Musím to dělat pro tu NEZDERIVOVANOU FCI – pak to vyjde 1. (viz Běhounková scr.)

(6) $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$ $\quad z\neq 0$ předpoklady komplikovanější!

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}e^{\frac{y}{z}\ln x} = \frac{\partial}{\partial x}\exp\left(\frac{y}{z}\ln x\right) = \frac{1}{x}\frac{y}{z}\exp\left(\frac{y}{z}\ln x\right)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$$

ooo list Běhounková

(7) $\alpha\in\mathbb{R}$. Pro jaké hodnoty má fce parc. der. 1. řádu v bodě $(0,0)$?

$f(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha \sin\frac{1}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^\alpha \sin\frac{1}{x^2+y^2} = \alpha(x^2+y^2)^{\alpha-1}\cdot 2x\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)^\alpha\cdot\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(-1)\cdot(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2x$$

$$= 2x\left(\alpha(x^2+y^2)^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^2+y^2} - (x^2+y^2)^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

Spojité parciální derivace → diferenciál → parciální derivace
diferenciál → spojitost

Tohle asi není správná cesta.

Jak na to šla Běhounková? Z definice.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{2\alpha}\sin\frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}h^{2\alpha-1}\sin\frac{1}{h^2}\begin{cases}0 & 2\alpha-1>0 \text{ tedy } \alpha>\frac{1}{2}\\ \text{nelze} & \alpha=\frac{1}{2} \text{ a } \alpha<\frac{1}{2}\end{cases}$$

(protože pak tam zůstane jen ta osciluj. funkce (dělení nulou))

Lze to ale použít k ověření spojitosti parc. der. – zjistím, pro jaké α to nediverguje.

Spočítat parc. derivace 2. řádu, zjistit záměnnost. $\boxed{5010}$

↘ shodují se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$?

(13) $\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ (pravděpodobně bude záměnné protože $\frac{x+y}{1-xy} = \frac{y+x}{1-yx}$)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arctg}\left[x \cdot (1-xy)^{-1} + y \cdot (1-xy)^{-1}\right]$$

šlo by jednodušeji pomocí $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\left[(1-xy)^{-1} + x\cdot(-1)\cdot(1-xy)^{-2}\cdot(-y) + y\cdot(-1)\cdot(1-xy)^{-2}\cdot(-y)\right]$$

$$= \left(\frac{1(1-xy)}{1-xy} + \frac{xy}{\cancel{(1-xy)^2}} + \frac{yy}{\cancel{(1-xy)^2}}\right)\cancel{(1-xy)^2}\,\frac{1}{(1-xy)^2(x+y)^2}$$

$$= \frac{1+xy+y^2}{1-xy+x+y} = \frac{1-\cancel{xy}+\cancel{xy}+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} = \frac{1+y^2}{(1-\cancel{2xy}+x^2y^2)+(x^2+\cancel{2xy}+y^2)}$$

$$= \frac{1+y^2}{1+x^2+y^2(1+x^2)} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \boxed{\frac{1}{1+y^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0}$$

pravidla derivací:

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

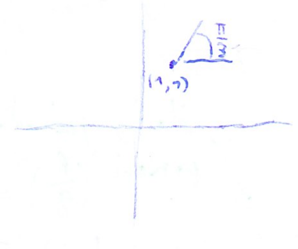
$(f(g))' = f'(g)\cdot g'$

(14)

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ (uvažujte bod (0,0))

→ V bodě (0,0) $\nexists$ parc. der. z definice. Vyšetřena limitou (pol. subs.) spojitost v (0,0). Pro $(x,y) \neq (0,0)$ obyč. parc. derivace, druhá parc. derivace v bodě (0,0) z definice.
Viz Běhounkové papír.

15 Derivace fce x^2-y^2 v bodě $(1,1)$ ve směru jednotkového vektoru svírajícího s kladným směrem osy x úhel $\frac{\pi}{3}$ (rad)



$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tedy } v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad (v_1, v_2)$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0

$$\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(1,1)} = \frac{f(x+v_1h,\, y+v_2h) - f(x,y)}{h}$$

$$= \frac{f(1+\frac{1}{2}h,\, 1+\frac{\sqrt{3}}{2}h) - f(1,1)}{h}$$

$$= \frac{(1+\frac{1}{2}h)^2 - (1+\frac{\sqrt{3}}{2}h)^2 \overbrace{-1+1}^{0}}{h}$$

z definice

$$= \frac{1+h+\frac{1}{4}h^2 - 1 - \sqrt{3}h - \frac{3}{4}h^2}{h} = (1-\sqrt{3})\frac{h}{h} = 1-\sqrt{3}$$

NEBO, jak to počítala p. Běhounková, za použití gradientu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -2$$

$$v = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

f je z C^∞ a tedy $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a)\cdot v$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(1,1)} = \nabla f \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 1 - \sqrt{3}$$

SO10

(16) Jednotkový vektor, v jehož směru má derivace $x^2 - xy + y^2$ v bodě $(1,1)$ největší, nejmenší a nulovou hodnotu

Asi pomocí gradientu? $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x$

Viz Bětounková: Největší nárůst v $v = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1$

$\rightarrow$ Tedy $v_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$v_{min} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$v_{zero\,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$

$v_{zero\,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$

(17) Spočtěte $\frac{\partial F}{\partial u}$, kde $F = f(g)$, $f(x,y,z)$ je daná fce a $\begin{cases} g_1(u,v) = \frac{u^2-1}{2v} \\ g_2(u,v) = \frac{u+v}{u-v} \\ g_3(u,v) = u^2 - v^2 \end{cases}$

Tedy $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$

a připomeňme řetízkové pravidlo (uč. str. 159)

$$\frac{\partial (g \circ \vec{f})}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(\vec{f}(a)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$$

jen to g a f tu jsou obrácené - je to jen definice

$$\rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g_3}{\partial u}$$

$$\text{a } \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g_3}{\partial v}$$

To ale nepotřebujeme (v zadání je pouze $\frac{\partial f}{\partial u}$)

$$\frac{\partial g_1}{\partial u} = \frac{2u}{2v} \quad \frac{\partial g_2}{\partial u} = \frac{(u-v)-(u+v)}{(u-v)^2} = \frac{-2v}{(u-v)^2} \quad \frac{\partial g_3}{\partial u} = 2u$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{u}{v} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{2v}{(u-v)^2} + \frac{\partial f}{\partial z}2u$$

Zjistit, kde má fce totální diferenciál + určit. SO 11

fce je spojitá − má tot dif → tot dif je sred. fce (parc. derivace)

① $f(x,y) = \ln(x+y)$ podmínka: $x+y>0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$ ← spojité parc. derivace → tot dif ∃

$$\partial f(x,y)(h_1,h_2) = \frac{1}{x+y}h_1 + \frac{1}{x+y}h_2 = \boxed{\frac{1}{x+y}(h_1+h_2)} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{h}$$

② $f(x,y,z) = \cos x \cosh y$ $x,y,z \in \mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x \cosh y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos x \sinh y \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$ ← vše spojité

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{h} = -\sin x \cosh y \cdot h_1 + \cos x \sinh y \cdot h_2$$

③ $f(x,y) = |x|\,|y|$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, spojité

(pochopeno z toho papíru od Běhounkové)

④ (zkusím samostatně) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy} = (xy)^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{3} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{3}$$

$x \neq 0$ $y \neq 0$

pro $x,y \neq 0$ je tot. dif. $\vec{\nabla} f(a) \cdot \vec{h} = \frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{3}h_1 + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{3}h_2$

co bod $(0,0)$?

$$\cancel{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{h_1\to 0} \frac{f(h_1,0) - f(0,0)}{h_1} \stackrel{\lim_{h_1\to 0}}{=} \frac{0-0}{h_1} \stackrel{\text{L.H.} \frac{0}{0}}{=} \lim_{h_1 \to 0} \frac{0}{1} = 0}$$

~~analogicky $\frac{\partial f}{\partial y}$. Tedy $\vec{\nabla} f(0,0)\vec{h} = 0$~~

Nejdříve vyšetříme osy. $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,y)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{hy} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{h^2}}$$

→ 0 pro $y=0$, neex. pro $y \neq 0$

analogicky $\frac{\partial f}{\partial y}$

∃ tot. dif. v $(0,0)$?? Ověříme. Musí platit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - Lh}{h} \stackrel{?}{=} 0$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h_1 h_2} - 0 - 0}{h} \sim \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = \infty \Rightarrow$$ tot. dif. v $(0,0)$ neexistuje.

(12) Nalézt obecná řešení rovnic. Pokud nejsou ve tvaru tot. dif., použít integrační faktor. 5011

$$\underbrace{2xy}_{M}\,dx + \underbrace{(x^2-y^2)}_{N}\,dy = 0$$

$\boxed{\text{Je exaktní? } \frac{\partial M}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x}}$ → pokud ano, není třeba hledat integrační faktor

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \Rightarrow \text{Je exaktní.}$$

Teď je potřeba nalézt tu původní rovnici. Označíme V.

Víme, že • $\frac{\partial V}{\partial x} = M \longrightarrow V = \int M\,dx$

tedy $V = \int 2xy\,dx = x^2y + C(y)$

funkce ~~něčeho~~ která má u sebe jen y, žádné x.

• $\frac{\partial V}{\partial y} = N \longrightarrow V = \int N\,dy$

tedy $V = \int x^2 - y^2\,dy = x^2y - \frac{y^3}{3} + C(x)$

$\Rightarrow$ Dohromady $V = \boxed{x^2y - \frac{y^3}{3} + C_1 = 0}$ (implicitní rovnice)

pro x: $x = \sqrt{\frac{\frac{y^3}{3} + C_2}{y}} = \sqrt{\frac{y^2}{3} + \frac{C_2}{y}}$

(13, 14) analogické (neobjeví se v nich integrační faktor)

(5) $f(x,y) = \sqrt[5]{x^5+y^5}$ definováno na $\mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{5} 5x^4 \frac{1}{(x^5+y^5)^{4/5}} \quad x+y \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^4 \frac{1}{(x^5+y^5)^{4/5}} \quad x+y \neq 0$$

pro $x+y \neq 0$ tot. dif $= \frac{1}{(x^5+y^5)^{4/5}} (x^4 h_1 + y^4 h_2)$

$\frac{h^{\frac{1}{5}}}{h} = \frac{1}{h^{4/5}} = \infty$ pro $h \to 0$

~~$x+y = 0$ z definice:~~

$$\cancel{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,-x)} \frac{\sqrt[5]{(x+h)^5 - x^5} - 0}{h} = \frac{\sqrt[5]{x^5 - x^5 + 5x^4h + \dots + h^5}}{h}}$$

→ To je nějaký divný, moc to nejde.

Ole p. Běhounkové: pro $x=-y$ není def derivace

→ neex. tot. dif

(to je mi taky jasný, ale chtěl jsem ověřit)

Co bod $(0,0)$?

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$$

potenciální $L = h_1 + h_2$

ověříme:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - (h_1+h_2)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[5]{h_1^5+h_2^5} - 0 - h_1 - h_2}{\|h\|}$$

← může být libovolné

U příkladu předělat $\|h\|$ v abs. hodnotě!

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[5]{h_1^5+h_2^5} - h_1 - h_2}{\|\sqrt[5]{h_1^5+h_2^5}\|} \neq 0 \longrightarrow \text{tot. dif } v(0,0) \text{ neexistuje}$$

(15) RCE ve tvaru tot. dif. SO11

$$\underbrace{(x^2+y)}_{M} dx - \underbrace{x}_{N} dy = 0, \quad \mu = \mu(x)$$

bude třeba int. faktor

- Exaktnost? $\frac{\partial}{\partial y} x^2 + y = 1 \neq \frac{\partial}{\partial x} -x = -1$

→ není exaktní. Je třeba nalézt int. faktor.

Black pen Red pen – video na int. faktor

→ je dobré vědět jestli je to $\mu(x)$, $\mu(y)$, nebo kombinace

$$\mu(x) = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right) dx}$$

což vyplývá z

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

což vyplývá z rozepsání si těch rovnic.

$$\mu(x) = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial}{\partial y} x^2+y - \frac{\partial}{\partial x} -x}{x}\right) \partial x}$$

$$= e^{\int \frac{+1+1}{-x} \partial x} = e^{\int \frac{2}{-x} dx} = e^{-2 \ln x}$$

$$= \boxed{x^{-2}}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{y}{x^2}\right) dx - \frac{1}{x} dy$$

exaktnost od pohledu sedí!

$$\frac{\partial V}{\partial x} = M \to V = \int M \partial x = \int 1 + \frac{y}{x^2} dx = x - \frac{y}{x} + C(y)$$

analogicky $V = \int N \partial y = \int -\frac{1}{x} \partial y = -\frac{y}{x} + C(x)$

$$\Rightarrow \boxed{0 = x - \frac{y}{x} + C} \to x + C = \frac{y}{x} \to \underline{y = x^2 + Cx}$$

16)

$$\overbrace{(xy^2+y)}^{M}\,dx - \overbrace{x}^{N}\,dy = 0 \quad , \quad M = M(y)$$

Black Pen – video mu(y)

$$\boxed{M(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \partial y}}$$

↳ de facto analogické k $M(x)$, jen převrácené.

$$M(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial -x}{\partial x} - \frac{\partial xy^2+y}{\partial y}}{xy^2+y} \partial y}$$

$$= e^{\int \frac{-1-2xy-1}{xy^2+y} \partial y} = e^{\int \frac{-\cancel{(1+xy)}}{\cancel{(1+xy)}} \frac{2}{y} \partial y}$$

$$= \frac{1}{y^2}.$$

$$\longrightarrow \quad V = \int x + \frac{1}{y}\,dx = x^2 + \frac{x}{y} + C(y)$$

$$V = \int -\frac{x}{y^2}\,dy = \frac{x}{y} + C(x)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0 = x^2 + \frac{x}{y} + C}$$

$$\cancel{m(x)(x^2+y)dx - m(x)x\,dy = 0}$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial y} m(x)(x^2+y) = \frac{\partial}{\partial x} m(x) x}$$

$$\cancel{m(x) = m(y) + m'(x)x}$$

18)

$$x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0 \qquad M = M(xy)$$

$$(x^2y^3+y)\,dx + (x^3y^2-x)\,dy = 0$$

$$\underbrace{y(x^2y^2+1)}_{M}\,dx + \underbrace{x(x^2y^2-1)}_{N}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2+1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y^2-1$$

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

VZOREC SKRIPTA
(funguje vždy)

! $$\frac{m'(\Phi(x,y))}{m(\Phi(x,y))} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{\partial \Phi}{\partial y} - N\frac{\partial \Phi}{\partial x}}$$

za Φ dosadím buď $x, y, x+y$ ne…

BP. metoda: $\frac{\partial}{\partial y} x^{m+2}y^{n+3} + x^m y^{n+1} = (n+3)x^{m+2}y^{n+2} + (n+1)x^m y^n$

$\frac{\partial}{\partial x} x^{m+3}y^{n+2} - x^{m+1}y^n = (m+3)x^{m+2}y^{n+2} - (m+1)x^m y^n$

$n+3 = m+3 \rightarrow n = m$

$n+1 = -m-1 \rightarrow n = -m-2$

$\rightarrow m = -m-2$

$0 = -2m-2$

$n = m = -1$

(1) easy

Hessova matice
- předpoklad: $\exists \ \forall$ parc. derivace 2. řádu fce $f(x_1, \dots, x_n)$

$$H_{(f)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

zajímá nás: pozitivní definitnost?

(2) $x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ def. na $\mathbb{R}^2$

(zjistíme parc. derivace)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y$$

(body podezřelé z extrému - kdy se parciální derivace rovnají nule) → najdeš kořeny

$4x^3 - 2x - 2y = 0$

$x(2x^2 - 1) - y = 0$

$\rightarrow y = x(2x^2 - 1)$

zbytek snadné, nad tím vymazal se

→ kořeny $\overset{a}{(0,0)}, \overset{b}{(1,1)}, \overset{c}{(-1,-1)}$

Hessián $\begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$

(dosadíme potenciální stac. body do Hessiánu)

a: $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{pmatrix}$ vl. č. $-2, 0$

negativně semidef.

b: $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

sym úpravy $\begin{pmatrix} \text{poz. č} & 0 \\ 0 & \text{poz. č} \end{pmatrix}$

NEBO $(10 - \lambda)^2 - 4 = 0$

$\lambda^2 - 20\lambda + 96$

NEBO Sylvestr. krit.

c: $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$

-||-

→ v b, c je maximum

(3...dále) Analogické.

Implicitní fce

(11) Dokažte, že $\exists$ okolí bodu V takové, že množina

$$\{(x,y);\ x^3+y^3-2xy=0\}\cap V$$

je grafem nějaké fce, které je třídy C^2 na nějakém okolí bodu 1.

Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\to \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$F(x,y) = x^3+y^3-2xy$$

$$F(1,1)=0$$

ještě jedna podmínka

F všude spojité a $F\in C^\infty(x)$ $\to$ tím $f'(x)$ existují!

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2-2x, \text{ tedy } \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(1,1)} = 1$$ splněno

Věta o implicitní fci

Uvažujme rci $F(x,y)=C$.
Nechť bod (x_0,y_0) splňuje tuto rovnici. Jestliže
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$$
pak $\exists$ okolí U bodu x_0 takové, že $\exists$ na tomto okolí fce $y=y(x)$ takové, že $y(x_0)=y_0$ a $F(x,y(x))=C$ pro $\forall\, x$ z U.

$\to$ Teď jde tu fci nalézt.

$$x^3+y(x)^3-2xy(x)=0 \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial x}$$

$$3x^2+3y(x)^2y'(x)-2y(x)-2xy'(x)=0$$ musím z toho vyjádřit to $y'(x)=\frac{\partial y(x)}{\partial(x)}$

$$3x^2-2y(x)=2xy'(x)-3y(x)^2y'(x)$$

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x} = \frac{3x^2-2y(x)}{2x-3y(x)^2} = \frac{3-2}{2-3} = \underline{-1}$$ první derivace

druhá derivace

$$\frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} = \frac{(6x-2y'(x))(2x-3y(x)^2)-(2-6y(x)y'(x))(3x^2-2y(x))}{(2x-3y(x)^2)^2}$$

3. podmínka – aby $f(x)$ byla řádu C^k, musí $F(x)$ být řádu C^k.

$$= \frac{(6+2)\cdot(2-3)-(2-6\cdot 1\cdot(-1))(3-2)}{(2-3)^2} = \frac{-16}{1} = \boxed{-16}$$

(12) Dokažte, že $\exists$ okolí bodu $(3,-2,2)$ tak, že **SO 12**

množina $\{(x,y,z);\ z^3 - xz + y = 0\} \cap V$ je grafem nějaké fce třídy C^2 na okolí bodu $(3,-2)$. Spočtěte $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3,-2)$

① $F_{(x,y,z)} = z^3 - xz + y$.

$F(3,-2,2) = 8 - 6 - 2 = 0$ ✓ splněna 1. podm.

② $\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - x \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(3,-2,2)} = 12 - 3 = 9 \neq 0 \Rightarrow \exists!\, z = z(x,y)$ a navíc je z C^∞ neboť $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

?? $(3,-2)$ spíš

$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 6z(x,y)\frac{\partial z(x,y)}{\partial z}$ to ale nepotřebuju.

Teď spočíst to $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3,-2)$ ← proč je tu to z? Aby bylo ukázáno, že z není proměnná ale funkce $z(x,y)$ Neplést to!

Jak na to? Vezmeme F a derivujeme podle y

$3z(x,y)^2 \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} - x\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} + 1 = 0$

$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}(3z(x,y)^2 - x) = -1$

$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x - 3z(x,y)^2} \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3-12} = -\frac{1}{9}$

$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y} = \frac{-6z(x,y)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}}{(x - 3z(x,y)^2)^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{+6\cdot\frac{1}{9}\cdot 2}{(3-12)^2} = \left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot 12$

Vázané extrémy – lokální extrém vzhledem k vazbě

$\boxed{S013}$

① $xy \; ; \; x+y=1$

$\longrightarrow y = 1-x$

$f(x,y) = x(1-x)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1-2x = 0 \quad x = \frac{1}{2}$ a tedy $y = \frac{1}{2}$

$F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x+y-1)$

→ vyvěsíme tedy 1010

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= y-\lambda \overset{!}{=} 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= x-\lambda \overset{!}{=} 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \underbrace{-(x+y-1)}_{\text{vždy vazba}} \overset{!}{=} 0 \end{aligned}\right\}$$

dostáváme $\boxed{\begin{aligned} y-\lambda &= 0 \\ x-\lambda &= 0 \\ x+y &= 1 \end{aligned}}$

$x = 1-y$

$1-y-\lambda = 0$

$2\lambda = 1 \to \lambda = \frac{1}{2}$

tedy dostaneme $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$

ta matice $\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} \;\; \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right) = (x, y)$

$= (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$

② $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \; ; \; x^2+y^2=1 \quad a \neq 0 \; b \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{b} \longrightarrow \vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$

uvnitř vždy nenulové… extrém musí být na okraji

$F(x,y,\lambda) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \lambda(x^2+y^2-1)$

dostaneme $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{a} - 2\lambda x \quad \frac{1}{a} - 2\lambda x = 0 \to x = \frac{1}{a 2\lambda}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{b} - 2\lambda y \quad \frac{1}{b} - 2\lambda y = 0 \quad y = \frac{1}{b 2\lambda}$

$x^2+y^2 = 1$

$\frac{1}{\lambda^2 4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 1$

$\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}$

$\lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}} = \pm\frac{1}{2}\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{ab}$

$x = \pm\frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}$

$y = \pm\frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}$

$f(x,y) = \pm\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)\frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}}$

$\left.\begin{array}{l} a \cdot b > 0 \text{ pak } x^+ \text{ a } y^+ \text{ max } x^- \text{ a } y^- \text{ min} \\ a \cdot b < 0 \text{ vice versa} \end{array}\right\}$ je to tak!

S013

3. $x^2 + y^2$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

definováno na $\mathbb{R}$, C^∞

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

↳ možné minimum: $(0,0)$? → NE, nevyhovuje vazební podmínce.

Jinak okraje. $\quad F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)$

Okraje: $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) = 2x - \frac{\lambda}{a} \rightarrow 2x - \frac{\lambda}{a} = 0 \quad x = \frac{\lambda}{2a}$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda) = 2y - \frac{\lambda}{b} \qquad 2y - \frac{\lambda}{b} = 0 \quad y = \frac{\lambda}{2b}$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \rightarrow \frac{\lambda}{2a^2} + \frac{\lambda}{2b^2} = 1$$

$$\frac{\lambda}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right) = 1$$

$$\lambda = 2\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{ab^2}{a^2+b^2} \quad y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$$

Ještě lagrang. multiplik.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}^{-1}\right) = \frac{1}{a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}^{-1}\right) = \frac{1}{b} \rightarrow \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$$

hodnosti 1.

4. $x^m y^n z^p$; $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, $\quad x, y, z > 0$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(x + y + z - \frac{\pi}{2}\right) = y + z + 1 \qquad F(x,y,z,\lambda) = x^m y^n z^p - \lambda\left(x+y+z-\frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(x + y + z - \frac{\pi}{2}\right) = x + z + 1 \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = m x^{m-1} y^n z^p - \lambda$

$\frac{\partial}{\partial z}\left(x + y + z - \frac{\pi}{2}\right) = x + y + 1 \qquad$ dále: x: $m x^{m-1} y^n z^p - \lambda = 0$

$$x^m n y^{n-1} z^p - \lambda = 0$$

$$x^m y^n p z^{p-1} - \lambda = 0$$

$$x + y + z = \frac{\pi}{2}$$

ooo Bělounková papír.

Docela trikový.

9. $x^2+y^2-12x+16y$; $x^2+y^2 \le 25$

VNITŘEK

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x-12 \overset{!}{=} 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y+16 \overset{!}{=} 0\end{array}\right\} \begin{array}{l} x=6 \\ y=8\end{array}$$

, ale $6^2+8^2>25$,
→ nesplňuje vazební podmínku
→ extrémy leží na $x^2+y^2=25$

OKRAJE

$$F(x,y,\lambda) = x^2+y^2-12x+16y-\lambda(x^2+y^2-25)$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial F}{\partial x} = 2x-12-2\lambda x \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y+16-2\lambda y\end{array}\right\}$$ Máme soustavu rovnic

$$2x-12-2\lambda x = 0$$
$$2y+16-2\lambda y = 0$$
$$x^2+y^2-25 = 0$$

$x(2-2\lambda) = 12$
$x = \frac{6}{1-\lambda}$
$y = \frac{-8}{1+\lambda}$

$$\to \frac{6^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{8^2}{(1+\lambda)^2} = 25$$

NEBO JINAK

$x^2+y^2=25 \to x = \sqrt{25-y^2}$
$= \sqrt{(5-y)(5+y)}$

JEŠTĚ JINAK

- $2x-12 = 2\lambda x$
  $\lambda = \frac{2x-12}{2x} = \frac{x-6}{x}$
- $y+8 = \lambda y$
  $\lambda = \frac{y+8}{y}$

$\to \frac{y+8}{y} = \frac{x-6}{x}$

$x(y+8) = y(x-6)$

$\cancel{xy} + 8x = \cancel{xy} - 6y$

$x = -\frac{3}{4}y$

nevyhovuje

$y^2 + \frac{9}{16}y^2 = 25$

$\frac{25}{16}y^2 = 25$

$y^2 = 16 \to y = \pm 4$

$\to x = \pm 3$

$P_1 = (3,4)$ $P_2 = (-3,-4)$ $P_3 = (-3,4)$ MAX $P_4 = (3,-4)$ MIN

Lagr. multiplik. $\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial y}\right) = (2x, 2y)$

vyhovuje

SO 13

10) $x+y+z \; ; \; x^2+y^2 \leq z \leq 1$

UVNITŘ

$f(x,y,z) = x+y+z \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 1$

$\vec{\nabla} f = (1,1,1)$

↳ není splněna nutná podmínka pro extrém

VNĚ

už jsem chtěl psát 1, ale pak bych vyrobil čáru kružnic

vazba: $x^2+y^2-z=0 \qquad \nabla g = (2x, 2y, -1) \rightarrow$ hodnost 1 (pro matici o jednom řádku je vždy hodnost 1) pro $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$

$F(x,y,z,\lambda) = x+y+z-\lambda(x^2+y^2-z) \overset{!}{=} 0$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - 2\lambda x$

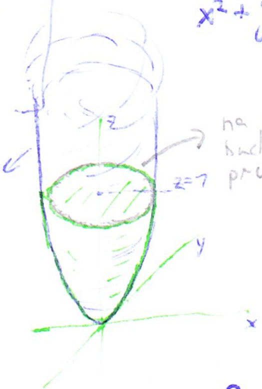
$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - 2\lambda y$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 - \lambda$

$2\lambda x = 1$
$2\lambda y = 1$
$\lambda = 1$
$x^2+y^2-z=0$

$x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$

min. $= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



na tomto jsem to vyšetřoval pro $x^2+y^2-z=0$

na tomto to budu vyšetřovat pro $x^2+y^2=1$

musím to vyšetřit i pro $x^2+y^2=1$. To první mi vskutku našlo jediný extrém, glob. lok. minimum v $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ale nenašlo to maximum, protože neexistuje (z může být libovolné a max. končí se zetkem)

$G(x,y,\cancel{z},\lambda) = x+y+\cancel{z}-\lambda(x^2+y^2-1) \overset{!}{=} 0$

$\frac{\partial G}{\partial x} = 1-2\lambda x \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 1-2\lambda y \qquad \cancel{\frac{\partial G}{\partial z} = 1}$

$2\lambda x = 1$
$2\lambda y = 1$ } $x = y$
$x^2+y^2 = 1$

$2x^2 = 1$
$2\lambda x = 1 \; /^2$
↳ $4\lambda^2 x^2 = 1$
$x^2 = \frac{1}{4\lambda^2}$

$\frac{2}{4} \frac{1}{\lambda^2} = 1$

$\lambda^2 = \frac{1}{2}$

$\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\rightarrow \boxed{x = y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$

max. $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

kvůli okrajině pouze to plus