ISU 3

(8)

$$xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$$

! Bernoulliova rovnice

spec. řešení $y=0$

$$y' y^{-\alpha} + p(x) y^{1-\alpha} = f(x)$$

$$z(x) = y^{1-\alpha} \rightarrow z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y'$$

$$\rightarrow \frac{1}{1-\alpha} z' + pz = f$$

$$\rightarrow y' - 2x y^{\frac{1}{2}} = 4\frac{y}{x}$$

$$\frac{y'}{y} - 2x y^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{x} = y' \cdot y^{-1} - 2x y^{-\frac{1}{2}} = 4\frac{1}{x}$$

→ podle p. Běhounkové nedělme ve tvaru $y' - \frac{4}{x} y = 2x\sqrt{y}$

$$y' y^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{x} y^{\frac{1}{2}} = 2x$$

„$z(x) = y^{1-\alpha}$"

$$z(x) = y^{\frac{1}{2}} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y'$$

$$y' = \frac{\partial z}{\partial x} 2y^{\frac{1}{2}} \rightarrow 2z' - \frac{4}{x} z = 2x$$

$$z' = x + \frac{2}{x} z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x + \frac{2}{x} z$$

Nejdříve vyřešíme příslušnou homogenní rovnici:

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2}{x} z = 0$$

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{2}{x} \partial x$$

$$\ln|z| = 2\ln|x| + c \quad /e$$

$$|z| = K e^{2\ln x} \quad k \in [0,\infty)$$

$$\underline{z = C x^2} \quad C \in \mathbb{R}$$

což je homogenní řešení

partikulární řešení? $z_p = C(x)\, x^2$

dosadíme do rce.

$$C'(x) x^2 + \cancel{2C(x) \cdot x} - \cancel{\frac{2}{x} C(x) x^2} = x$$

$$C'(x)\, x^2 = x$$

$$\frac{\partial C(x)}{\partial x} = \frac{1}{x} \quad / \int$$

$$C(x) = \ln|x| \longrightarrow z_p = \ln|x|\, x^2$$

$$\underline{z = Cx^2 + x^2 \ln|x|}$$

$$y^{\frac{1}{2}} = Cx^2 + x^2 \ln|x|$$

$$\rightarrow y = (Cx^2 + x^2\ln|x|)^2$$

(9) $y' - 2xy = 2x^3y^2$

Bernoulliova rovnice

$\rightarrow y' \cdot y^{-2} - 2x \cdot y^{-1} = 2x^3$

$z(x)$

$z(x) = y^{-1}$ $\quad \frac{\partial z}{\partial x} = -y^{-2} \cdot y'$

$\rightarrow y' = -z'y^2$

$-z' - 2xz = 2x^3$

$\rightarrow$ nejprve hledáme z_h

$z' + 2xz = 0$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -2xz$

$\frac{\partial z}{z} = -2x\, \partial x$

$\ln|z| = -\frac{2}{2}x^2 + C$

$|z| = Ke^{-x^2}$

$z = Ce^{-x^2}$

$z(p) = C(x)e^{-x^2}$

$C'(x)e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} + 2xe^{-x^2} = 2x^3$

$C'(x)e^{-x^2} = 2x^3$

$C'(x) = 2x^3e^{x^2}$

$C(x) = \int 2x^3 e^{x^2}$

$(fg)' = fg' + f'g$

$fg' = (fg)' - f'g$

$\int fg' = fg - \int f'g$

$= \left| \begin{matrix} f = 2x^3 & f' = 6x^2 \\ g' = e^{x^2} & g = \frac{e^{x^2}}{2x} \end{matrix} \right.$

$x^2 = u$

$2x\,dx = \partial u$

$\frac{e^{x^2}}{2x}\,\partial x = \frac{e^u}{2x^2}\,du$

$C(x) = 2\int e^{x^2} \cdot 2x \frac{x^2}{2}\,dx = \left| \begin{matrix} f(x) = e^{x^2}2x & f(x) = e^{x^2} \\ g(x) = \frac{x^2}{2} & g' = x \end{matrix} \right.$

$= 2\frac{x^2}{2}e^{x^2} - 2\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx$

$= x^2e^{x^2} - e^{x^2}$

$z_p = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$

$z = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}2(1 - x^2)$

$y = + \frac{1}{ce^{-x^2} + (1 - x^2)}$

014 - Počesní 5

ODR

nedokončené

1) $y' = \frac{\sqrt[3]{1-y^2}}{y} \longrightarrow \frac{y}{\sqrt[3]{1-y^2}} dy = dx$

$\left| \begin{matrix} 1-y^2 = u \\ du = -2y\, dy \end{matrix} \right|$

$y \neq 0$

$y \in [+1, -1]$

$c + x = \int -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{u}} du = -\frac{1}{2} u^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}(1-y^2)^{\frac{2}{3}}$

$\rightarrow 1 - y^2 = \left[-\frac{4}{3}(x+c)\right]^{3/2}$

$-y^2 = \left[-\frac{4}{3}(x+c)\right]^{3/2} - 1$

$y = \pm\sqrt{1 - \left[-\frac{4}{3}(x+c)\right]^{3/2}}$

$1 - \left[-\frac{4}{3}(x+c)\right]^{3/2} \geq 0 \qquad -\frac{4}{3}(x+c) \geq 0$

$\left[-\frac{4}{3}(x+c)\right]^{3/2} \leq 1 \qquad x + c \leq 0$

$x \leq -c$

$-\frac{4}{3}(x+c) \leq 1$

$-x+c \leq \frac{3}{4}$

$-x \leq \frac{3}{4} - c$

$x \geq c - \frac{3}{4}$

$x \in [1, -1] \setminus 0$

+ slepit

2019 - Početní 3

ODR
starší testy

(2)

$$y' = \frac{x+1}{\cos(y)} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{\cos(y)} \rightarrow \int \cos(y)\,dy = \int x+1\,dx$$

$y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$k \in \mathbb{N}$

→ definováno na
$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin(y) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$$
$$= x\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + C$$
$$y = \arcsin\left(x\left(\frac{1}{2}x+1\right) + C\right)$$

$C \in \mathbb{R}$

na $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

2019 - Početní 4

(2) $y' = \frac{2x\sqrt{\sin(y)}}{\cos(y)} \rightarrow \frac{\cos(y)}{\sqrt{\sin(y)}}\,dy = 2x\,dx$

$\left|\begin{matrix}\sin(y) = u \\ du = \cos(y)\,dy\end{matrix}\right|$ → $\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = x^2 + C$

$$\sqrt{u} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}^{2} = x^2 + C$$
$$2\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\sin(y)} = x^2 + C$$
$$\sin(y) = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)^2$$
$$y = \arcsin\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)^2$$

triv. řešení $y = 0$
$y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
$x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + (k+1)\pi\right)$

$y = \cancel{2x}\arcsin\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)^2$ pro $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right)$

$y = 0$ pro $x \in \left(\pi + k\pi, \pi + (k+m)\pi\right)$ $m \in \mathbb{N}, m \geq 0$

$y = \arcsin\left[\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)^2\right]$ pro $x \in \left(\pi + (k+m)\pi, \frac{3\pi}{2} + (k+m)\pi\right)$

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)^2 \leq 1$$
$$\left|\frac{1}{2}x^2 + C\right| \leq 1$$
$$\frac{1}{2}x^2 + C \leq 1$$
$$x \in \pm\sqrt{2 - 2C}$$

2019 - Početní část 2

ODR

② ∄ maximální řešení ODR + def. obor + obrázek

$$y' = (x+1)\sqrt[3]{y}$$

$y=0$ triv. řešení def. na $[0,\infty)$ ← chyba $\sqrt[3]{x}$ ← pro to je to def. na $\mathbb{R}$

$$(y)^{-\frac{1}{3}}dy = \frac{1}{(y)^{\frac{1}{3}}}dy = (x+1)\,dx \Rightarrow x + \frac{x^2}{2} + C = y^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{2}$$

$$y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 + C = \frac{1}{3}x(2+x) + C$$

$$y = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 + C\right)^{\frac{3}{2}}$$

~~Cauch. úloha: $y(0)=0$~~

$C \geq 0$

$y=0$ ... $x \in [-\infty, \frac{1}{3}x(2+x)-c)$

$y = \left(\frac{1}{3}x(2+x) + C\right)^{\frac{3}{2}}$ ... $x \in (\frac{1}{3}x(2+x)-C, \infty)$

pro $y>0$ $\quad y = \left(\frac{1}{3}x(2+x) + C\right)^{\frac{3}{2}}$

$y<0$ $\quad y = -\left(\frac{1}{3}x(2+x) + C\right)^{\frac{3}{2}}$

↳ LEPENÍ

$C_1 < 0 < C_2$

$y = -\left(\frac{1}{3}x(2+x) + C_1\right)^{\frac{3}{2}}$ pro $(-\infty, B_1)$ kde $\frac{1}{3}B_1(2+B_1) + C_1 = 0$

$y=0$ pro $\quad$ pro (B_1, B_2) kde $\frac{1}{3}B_2(2+B_2) + C_2 = 0$

$y = (\frac{1}{2}$

2015 – Početní 11.6.

ODR

$$\boxed{z = \frac{y}{x} \quad \text{substituce}}$$

① 6b

$$y' = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy}$$

$y = 0$ … triv. řešení

$y(1) = 1$

$z = xy$

$z' = y + xy' \rightarrow \frac{z' - y}{x} = y'$

$z = \frac{y}{x} \nearrow y = xz$ ❗

$y = zx$

$y' = z'x + z$

$$z'x + z = \frac{y(x+y)}{x(2x+y)} = z\left(\frac{x + xz}{2x + xz}\right) = z\,\frac{x(1+z)}{x(2+z)}$$

$$z'x + z = z\,\frac{(1+z)}{(2+z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z' = \frac{z\left(\frac{1+z}{2+z} - 1\right)}{x}$$

$$\frac{1}{x}\,\partial x = \frac{1}{z\left(\frac{1+z}{2+z} - 1\right)}\,\partial z \quad z\left(\frac{1+z-2-z}{2+z}\right) = z\left(\frac{-1}{2+z}\right) \rightarrow = \frac{1}{z\left(\frac{-1}{2+z}\right)} = -\frac{2+z}{z} = -\frac{2}{z} - 1$$

$$\ln|x| = \int -\frac{2}{z} - 1 \, dz = -2\ln|z| - z = -2\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{y}{x} + C$$

$y(1) = 1$

$$0 = \ln|x| - 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{y}{x} + C$$

$$0 = \underbrace{\ln(1)}_{0} - \underbrace{2\ln\left|\tfrac{1}{1}\right|}_{0} - 1 + C \quad \rightarrow C = +1$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = \ln|x| - 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{y}{x} + 1}$$

2014 – Početní 1

② $y' = \sqrt{1 - y^2}$ def. na $[-1, 1]$

$y = 1, -1$ … stacionární řešení

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\,dy = 1\,dx$$

$$\arcsin y = x + C$$

$$y = \sin(x + C) \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow$

$y = -1$ na $x \in (-\infty, C_1)$

$y = \sin(x - C_1 - \frac{\pi}{2})$ na $x \in (C_1, C_1 + \pi)$

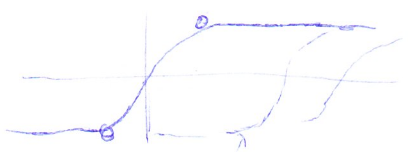
$y = 1$ na $x \in (C_1 + \pi, \infty)$

lépe

$y = -1$ pro $x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2} - C\right)$

$y = \sin(x + C)$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C\right)$

$y = 1$ $x \in \left(\frac{\pi}{2} - C, \infty\right)$



závisí na C

2015 - POČETNÍ 2

ODR

(1) 7b

$$y'' + 4y' + 3y = e^x + e^{-x}$$ $y(0)=1$, $y'(0)=1$

$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

$(\lambda+3)(\lambda+1) = 0 \to \lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = -1$

$FS = \{e^{-x}, e^{-3x}\}$

$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$

caused all these troubles

y_{p_1} pro e^x ...

$y = (Ax+B)e^x$
$y' = (Ax+A+B)$
$y'' = (Ax+2A+B)$

$Ax+2A+B+4Ax+4A+4B+3Ax+3B = x$
$8Ax = x \to A = \frac{1}{8}$
$6A + 8B = 0$
$\frac{6}{8} = -8B \to B = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32}$

y_{p_2} pro e^{-x}

$y = e^{-x} \cdot D$
$y' = -e^{-x} \cdot D$
$y'' = e^{-x} \cdot D$

$D - 4D + 3D$

$y = Ae^x$
$y' = Ae^x$
$y'' = Ae^x$

$A + 4A + 3A = 1 \to A = \frac{1}{8}$

$y = (Ax+B)e^{-x}$
$y' = (A - Ax - B)e^{-x}$
$y'' = (-A - A + Ax + B)e^{-x}$
$= (Ax - 2A + B)e^{-x}$

$(Ax-2A+B) + 4(A-Ax-B) + 3(Ax+B) = 1$
$Ax - 4Ax + 3Ax = 0$
$-2A + 4A + B - 4B + 3B = 1$

TADY JSEM DOST ZMATKOVAL, TAKŽE PŘÍŠTĚ:

→ Pakliže ten polynom roznásobuju x^α kvůli α násobnosti toho kořenu, už tím nezvyšim stupeň polynomu, který by mi z A udělal Ax+B. Mám prostě Ax.

→ Pakliže to roznásobuješ x^α kvůli α-násobnosti kořen, už se ti to NEPROJEVÍ na pravé straně v tom, ... pak porovnáváš ty A, B, atd! Porovnáváš to s tou původní věcí!

$y = Axe^{-x}$
$y' = (A - Ax)e^{-x}$
$y'' = (-A - A + Ax)e^{-x}$

nikoliv x kvůli násobnosti ✗

$(-2A + Ax) + 4(A - Ax) + 3Ax = 1$ ✓
$Ax - 4Ax + 3Ax = 0 = 0$
$-2A + 4A + \cancel{3A} = 2A = 1$
$A = \frac{1}{2}$

2014 - POČETNÍ ČÁST - 5

ŘADY

(1) $\sum_{n=10}^{\infty} \sin(n) \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \sum_{n=10}^{\infty} \underbrace{\sin(n)}_{\text{omezené částečné součty}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{\text{monotónní klesající, pro } n\to\infty \text{ jde k nule}}$

pro dostatečně velké n

díky identitě $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 1$

$\Rightarrow$ K neabsolutně dle Dirichleta

vyvrátit abs. K je easy

2019 - POČETNÍ ČÁST 1

ODR

nový zápis

(1) 8b Nalezněte všechna maximální řešení rovnice $y' = -2x\sqrt{1-y^2}$

a) $y(0)=1$

b) $y(0)=0$

c) $y(0)=-1$

$$\frac{dy}{dx} = -2x\underbrace{\sqrt{1-y^2}}_{\text{vždy kladná}} \longrightarrow \text{triv. řešení } \begin{matrix} y=1 \\ y=-1 \end{matrix}$$

$$\frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}} = -2x\,dx \longrightarrow \int \frac{1}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}\,dy = -2x\,dx$$

$$\arcsin y = -x^2 + C$$

$$y = \sin(C - x^2)$$

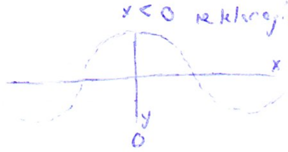
$$\boxed{y = \cos(x^2 + C)}$$

$\frac{dy}{dx} = -$

$\frac{dy}{dx} = +$

$x>0$ nerostoucí

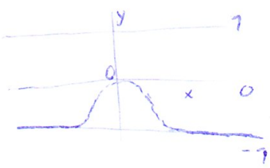
$x<0$ neklesající



a) $y(0)=0 \longrightarrow 0 = \cos(C)$ $\quad C = \frac{\pi}{2}$

$y = \cos\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad x \in \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\right)$

lze napojit na $y=-1$ pro $x \in \left(-\infty, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \infty\right)$



b) $y(0)=1$ ... triv. řešení $y=1$

$1 = \cos(C)$ ... $C=0$ $\quad x \in (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ ... musím dle započítat i triv. řešení

$\hookrightarrow x \in (C_1 - \sqrt{\pi}, C_2 + \sqrt{\pi})$

lze napojit na -1

$C_1 \leq C_2$, $0 \in (C_1, C_2)$

$y = -1$ pro $x \in (-\infty, C_1 - \sqrt{\pi})$

$y = \cos(x^2 - C_0)$ $\quad x \in$

ooo

2019 - Početní část 4 ODR

(1) 7b

$y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = e^x$ + poč. podm. $y(0) = 1$

$y'(0) = 2$

$y''(0) = 5$

$y'''(0) = 10$

$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \quad / : \lambda + 1 = \lambda^3 - 5\lambda^2$

$-\lambda^4 - \lambda^3$

$-5\lambda^3 + 6\lambda^2$

$+5\lambda^3 + 5\lambda^2$

$11\lambda^2 - 4\lambda$

$\ldots \; 0$

$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 \; / : \lambda - 1 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda$ ... zbytek

$-\lambda^4 + \lambda^3$

$-3\lambda^3 + 6\lambda^2$

$+3\lambda^3 - 3\lambda^2$

$3\lambda^2 - 4\lambda$

$-3\lambda^2 + 3\lambda$

$-\lambda + 1$

$(\lambda - 1)(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1)$

$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 4 \; / \; \lambda - 3$

$-\lambda^4 + 3\lambda^3$

$-\lambda^3 + 6\lambda^2$

$+\lambda^3 - 3\lambda^2$

$3\lambda^2 - 4\lambda$

$-3\lambda^2 + 9\lambda$

λ^3

$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 \; / \; \lambda - 2 = \lambda^3 - 2\lambda^2 \mp 2\lambda$

$-\lambda^4 + 2\lambda^3$

$-2\lambda^3 + 6\lambda^2$

$+2\lambda^3 - 4\lambda^2$

$-2\lambda^2 - 4\lambda$

$+2\lambda^2 - 4\lambda$

$-8\lambda + 4 \quad 0$

000 Nedopočteno

$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 \; / \; \lambda + 2 = \lambda^3 - 6\lambda^2$

$-\lambda^4 - 2\lambda^3$

$-6\lambda^3 + 6\lambda^2$

$+6\lambda^3 + 12\lambda^2$

$18\lambda^2 - 4\lambda$

0

2015 – Početní část 2

! VARIACE KONSTANT

(1) 6b

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2} \qquad y(1)=0, \quad y'(1)=0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \qquad \lambda_1, \lambda_2 = -1$$

$$\cancel{y_h(x) = C_1 \frac{1}{x} e^{-x} + C_2 e^{-x}} \qquad y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

$y_p(x) \Rightarrow ?$

$$y = (Ax+B)e^{-x}$$
$$y' = (Ax + A + B)e^{-x}$$
$$y'' = (Ax + 2A + B)e^{-x}$$

$y_p(x) = ?$

$$y = \left(A\frac{1}{x^2} + B\frac{1}{x}\right)e^{-x}$$
$$y' = \left(-A\frac{1}{x^2} - B\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^3} - 1\right.$$
$$y = x^2 \cdot \frac{1}{x^2} A e^{-x} = Ae^{-x}$$
$$\rightarrow Ae^{-x} - Ae^{-x} + Ae^{-x}$$

RUBBISH

→ Metodou speciální pravé strany to nejde.
Je třeba použít variaci konstant.

VELMI PĚKNE

$$\begin{array}{r} \text{bez derivace} \rightarrow \\ \text{1. derivace} \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{to, čemu se to nerovná} \end{pmatrix} \leftarrow \text{to co bylo napravo}$$

1. člen FS, 2. člen FS

Hledáme C_1 a C_2

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x}(1-x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{-x}}{x^2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} C_1'e^{-x} + C_2' x e^{-x} = 0 \\ -C_1'e^{-x} + C_2'(1-x)e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x^2} \end{array}$$

$$-C_1' + C_2'(1-x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow C_1' = C_2'(1-x) - \frac{1}{x^2}$$
$$\text{a} \quad C_2' x = -C_1'$$

$$-C_2'x = C_2'(1-x) - \frac{1}{x^2}$$
$$\frac{1}{x^2} = C_2'(1-x) + C_2'x$$
$$\frac{1}{x^2} = C_2' \rightarrow \int \frac{1}{x^2}\,dx = C_2$$
$$C_2 = -\frac{1}{x}$$

$$C_1' = -\frac{1}{x}$$
$$C_1 = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln(x)$$

$$\Rightarrow y_p = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot xe^{-x} = e^{-x}(-\log x - 1)$$

(1. konstanta krát 1. člen, 2. konstanta krát 2. člen)

Řešení: $y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{-x}\cdot x - e^{-x}(\ln(x) + 1)$
$= C_3e^{-x} + C_2e^{-x}\cdot x - e^{-x}\ln(x)$

+ ještě poč. podm. $y(1)=0 \quad y'(1)=0$

$$y_{p+h} = C_3 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - \ln(x) e^{-x}$$

$x=1: \rightarrow C_3 e^{-1} + C_2 e^{-1} = 0 \; \ldots \; -C_3 = C_2$

$$y_{p+h}' = -C_3 e^{-x} - C_2 x e^{-x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{x} e^{-x} + \ln(x) e^{-x}$$

$x=1 \rightarrow \; -C_3 e^{-1} - C_2 e^{-1} + C_2 e^{-1} - e^{-1} = 0$

$-C_3 = 1 \rightarrow C_3 = -1 \rightarrow C_2 = 1$

$$\boxed{y_{p+h} = -e^{-x} + x e^{-x} - \ln(x) e^{-x}}$$

2019 – Početní část 5 ! $\boxed{\text{Eulerova rovnice}}$ ODR

① 7b

$$x^3y''' + 3y''x^2 + x^2y' - y = 3x$$

... Eulerova rovnice.

řeší rovnici na $(0,+\infty)$
pro řešení na $(-\infty,0)$ volíme $\log(-x)$

kde proměnné $\xi = \log x$, tedy $x = e^\xi$

a fce $z(\xi) := y(x(\xi))$

platí: $z'(\xi) = y'(x(\xi))e^\xi = xy'$

$z''(\xi) = y''(x(\xi))(-e^\xi)^2 + y'(x(\xi))(-e^\xi)$
$= x^2y'' + xy'$

...

$Z(\xi) = y(x(\xi))$ kde $x(\xi) = e^\xi$

$Z'(\xi) = y'(x)\cdot x$

$Z''(\xi) = y''(x)\cdot x^2 + y'\cdot x$

$Z'''(\xi) = y'''(x)\cdot x^3 + 2y''(x)x^2 + y''(x)\cdot x^2 + y'(x)x$ $\quad 3y''(x)x^2$

vyplývá z toho, jak se chová derivace e^ξ

$$z''' - z = 3x$$

má tu být 1!

① $z_h = ?$ $\quad z''' - z = 0$

$\cancel{\lambda^3 - \lambda = 0}$

$\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$

$\lambda(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = 1$

fundamentální systém: $\{e^{0\xi}, e^{-\xi}, e^{\xi}\}$

$z_h = C_1 + C_2e^{-\xi} + C_3e^{\xi} = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3x$

② $z_p = ?$ Hledáme ve tvaru $x(Ax+B)$ ← protože násobnost tohoto kořenu je 1

$yz = Ax^2 + Bx$
$yz' = 2Ax + B$
$yz'' = 2A$
$yz''' = 0$

dosadíme do rovnice $x^3\cdot 0 + 3\cdot 2A\cdot x^2 + x\cdot(2Ax+B) - Ax^2 - Bx = 3x$

$6Ax^2 + 2Ax^2 + Bx - Ax^2 - Bx = 3x$

... to nevychází chyba!

$\Rightarrow$ $z''' - z = 3x \rightarrow \lambda^3 - 1 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{3}$

$z_h = C_1e^\xi + C_2e^{-\frac{1}{2}\xi}\cos(\sqrt{3}\xi) + C_3e^{-\frac{1}{2}\xi}\sin(\sqrt{3}\xi)$

$z_p = A\xi e^\xi$ jelikož násobnost kořenu

$z'_p = e^\xi(A + A\xi)$
$z''_p = Ae^\xi(2+\xi)$
$z'''_p = Ae^\xi(3+\xi)$

$\rightarrow Ae^\xi(3+\xi) - A\xi e^\xi = 3e^\xi$

$3Ae^\xi = 3e^\xi$

$A = 1$

poč podm.

$y(1) = 3 \quad y'(1) = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$y''(1) = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\rightarrow x = 1 \rightarrow \xi = 0$

$C_1 + C_2 = 3$

$C_1 - \frac{1}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_3 + 1 = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

... Numerický konec

$$z(\xi) = C_1e^\xi + C_2e^{-\frac{1}{2}\xi}\cos(\sqrt{3}\xi) + C_3e^{-\frac{1}{2}\xi}\sin(\sqrt{3}\xi) + \xi e^\xi$$

2019 - Početní 4

1. 7b

$$y^{iv} - y''' + 6y'' - 4y' + y = e^x$$

$$\rightarrow \lambda^4 - \lambda^3 \cdot 4 + \lambda^2 \cdot 6 - \lambda \cdot 4 + 1 = e^x$$

$$(\lambda - 1)^4 = e^x$$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + C_4 x^3 e^x$$

$y_p = ?$ hledáme ve tvaru Ax^4e^x

$$y_p = Ax^4e^x$$

$$y_p' = A4x^3e^x + Ax^4e^x = Ae^x(4x^3 + x^4)$$

$$y_p'' = Ae^x(12x^2 + 4x^3 + 4x^3 + x^4) = Ae^x(12x^2 + 8x^3 + x^4)$$

$$y_p''' = Ae^x(24x + 24x^2 + 4x^3 + 12x^2 + 8x^3 + x^4)$$

$$= Ae^x(24x + 36x^2 + 12x^3 + x^4)$$

$$y_p^{iv} = Ae^x(24 + 72x + 36x^2 + 4x^3 + 24x + 36x^2 + 12x^3 + x^4)$$

$$= Ae^x(24 + 96x + 72x^2 + 16x^3 + x^4)$$

dosadíme do rovnice:

x^4 se pokrátí   ~~16 - 4·12 + 6·8~~ - 4·4 x^3 se taktéž pokrátí

určitě i x^2 i x^1

$$\rightarrow A = \frac{1}{24}$$

poč. podm. $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 5$, $y'''(0) = 16$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + C_4 x^3 e^x + \frac{1}{24} e^x \cdot x^4$$

$C_1 = 1$

$C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x + C_3 2x e^x$

$C_1 + C_2 = 2 \rightarrow C_2 = 1$

$C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 e^x + C_2 e^x \cdot x + C_3 2 e^x$

$C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 5 \rightarrow C_3 = 1$

$C_1 + 3C_2 + 6C_3 + 6C_4 = 16 \rightarrow C_4 = 1$?

1   3   6   6

$$\left(3z^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)' = 6z\,\frac{\partial z}{\partial x} + 3z^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

??

$$= \cancel{6z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}$$

2019 - Početní 1

① S_h

stac. řešení $y = 1, -1$ def. na $[-1, 1]$

$$y' = -2x\sqrt{1-y^2}$$

$$\frac{dy}{-\sqrt{1-y^2}} = +2x\,dx$$

$$\arccos y = x^2 + C \quad /\cos$$

$$y = \cos(x^2 + C) \qquad x^2 + C$$

a) poč. podm. $y(0) = 1$

$\cos(0 + C) = 1 \ldots C = 0$

pro $x \in (-\infty, -\sqrt{\pi})$ $y = -1$

pro $x \in (-\sqrt{\pi}, 0)$ $y = \cos(x^2)$ tedy by to šlo trochu zobecnit (C_0)

pro $x \in (0, \sqrt{C_1})$ $y = 1$

pro $x \in (\sqrt{C_1}, \sqrt{C_1} + \sqrt{\pi})$ $y = \cos(x^2 - C_1)$

pro $x \in (\sqrt{C_1} + \sqrt{\pi}, \infty)$ $y = -1$

b) poč. podm. $y(0) = 0$ $\cos(0 + C) = 0$

$C = \frac{\pi}{2}$

$x \in (-\infty; \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ $y = -1$

$x \in (-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ $y = \cos(x^2 + \frac{\pi}{2})$

$x \in (\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \infty)$ $y = -1$

c) poč. podm. $y(0) = -1$

$x \in (-\infty, \infty)$ $y = -1$