2019 – TEORIE 1

ODR + metriky + parc. der.

① 8b Uvažujte homogenní obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)}(x) = 0 \qquad a_n(x) > 0, \text{ kde } \forall \text{ fce jsou reálné.}$$

a) vysvětlete pojmy Lineárně nezávislé řešení, fundamentální systém.

- Lineární nezávislost funkcí: str. 37

  Řekneme, že $u_1, \dots, u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. na $(a,b) \subset \mathbb{R}$ jsou LNZ na (a,b), pakliže pro každou n-tici $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ platí:

  $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0 \quad \text{na } (a,b) \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

- Fundamentální systém: str. 38

  Množina $u_1, \dots, u_n$ se nazývá fundamentální systém rovnice $Ly = 0$ na (a,b), jestliže funkce $u_1, \dots, u_n$ řeší $Ly = 0$ na (a,b) a jsou zde LNZ.

b) Ukažte, že řešení rovnice tvoří vektorový prostor, jehož dimenze je n.

- Každé řešení je dle definice n-krát diferencovatelné. Pakliže $Ly = 0$ přepíšeme jako $y^{(n)}(x) = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i(x)}{a_n(x)} y^{(i)}(x)$, vidíme, že dokonce $y \in C^n((a,b))$.
  Ještě je třeba ukázat, že y je dimenze n.

  ① zafixujme libovolné $x_0 \in (a,b)$ → ② Z věty o globální existenci a jednoznačnosti rovnic n-tého řádu máme, že existují fce $u_0, \dots, u_{n-1} \in C^n((a,b))$ takové, že u_i splňuje úlohu $Ly = 0$ s počátečními podmínkami $u_i^{(j)}(x_0) = \delta_{ij}$

  ③ Tato řešení jsou LNZ, protože $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0$ na (a,b) určitě platí i pro všechny derivace

  → ④ Po dosazení $x = x_0$ získáme $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ ⟹ dimenze prostoru je alespoň n.

c) Definujte Wronského determinant. Jaký je jeho vztah k lineární nezávislosti řešení rovnice uvedené výše?

- Wronského determinant funkcí $u_1, \dots, u_n \in C^{(n-1)}((a,b))$ v bodě $x \in (a,b)$ je

  $$W_{[u_1, \dots, u_n]}(x) := \det \begin{pmatrix} u_1(x) & \cdots & u_n(x) \\ u_1'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

- Wronského determinant fcí $u_1, \dots, u_n \in C^{(n-1)}((a,b))$ je nulový, ⟸ pakliže jsou tyto funkce lineárně závislé.
  (implikace: LZ fce ⟹ $W_{[u_1, \dots, u_n]} = 0$)

d) Můžete z toho, že je Wronského determinant nulový (nenulový) na nějakém intervalu, usoudit, zda-li jsou dané funkce lineárně ne/závislé? Dokažte, nebo uveďte protipříklad.

- Nemůžeme, neboť věta o wronskiánu je implikace, nikoliv ekvivalence.

$$\text{např. fce } u_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0] \\ x^3 & \text{pro } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} x^3 & \text{—||— } (-\infty, 0] \\ 0 & \text{—||— } (0, \infty) \end{cases}$$

2019 - TEORIE 1

2) 7b

a) Definujte pojem cauchyovská posloupnost prvků metrického prostoru. str. 122

- Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad m, n > n_0 \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$

b) Definujte pojem úplného metrického prostoru a úplného lineárního normovaného prostoru.
– str. 122

- Řekneme, že metrický prostor (P, ρ) je úplný, pokliže každá cauchyovská posloupnost jeho prvků v něm konverguje.
- Metrickým prostorem nazýváme dvojici P a ρ (značíme (P, ρ)), tedy množiny a metriky na něm.
  Metrika je zobrazení, které splňuje: $P \times P \to [0, \infty)$
  i) $\rho(x,y) \geq 0$ a $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
  ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
  iii) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$
  pro všechna $x, y, z \in P$
- Lineární normovaný prostor je dvojice $(V, \|\cdot\|)$, kde V je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$ a $\|\cdot\|$ je zobrazení $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ nazývané norma, pokliže pro $\forall u, v \in V$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ splňuje
  i) $\|u\| \geq 0$ a $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
  ii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
  iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
- Každý lineární normovaný prostor v kon. dimenzi je úplný (dle V. o konvergence v normě ke konvergenci po složkách)

c) Uveďte příklad úplného metrického prostoru a příklad metrického prostoru, který není úplný.

- úplný metrický prostor: $P = \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |x - y|$
  a neúplný m. prostor: $P = (-1, 1)$, $\rho(x,y) = |x - y|$
  ↳ cauchyovská posl. může konvergovat k nějakému bodu, který leží mimo množinu – tedy -1 nebo 1.
  → $[-1, 1]$ by už úplný byl.

d) Definujte pojem kontraktivního zobrazení.

str. 131

- Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $T: P \to P$ je zobrazení definované na celém P. Řekneme, že T je kontraktivní zobrazení, pokud existuje $q \in [0,1)$ tak, že

$$\rho(Tx, Ty) \leq q\rho(x,y) \quad \text{pro } \forall x, y \in P$$

Bod x_0 se nazývá pevný bod kontraktivního zobrazení, pokud $Tx_0 = x_0$

e) Formulujte a dokažte větu o pevném bodě kontraktivního zobrazení.

- (všeobecně Banachova věta o kontrakci)

Nechť (P, ρ) je úplný metrický prostor a $T: P \to P$ je kontraktivní zobrazení definované na celém P. Pak má právě jeden pevný bod.

- Důkaz: Jednoznačnost – nechť x_1, x_2 jsou dva pevné body $T: P \to P$

pak $\rho(x_1, x_2) = \rho(Tx_1, Tx_2) \leq q\rho(x_1, x_2)$

což je spor.

Existence – moc komplikované!

+ druhé části věty: Dokonce pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset P$ splňující $x_{n+1} = Tx_n$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$ ($x_1 \in P$ je libovolné) platí $x_n \to x_0$, kde x_0 je zmíněný pevný bod zobrazení T.

2019 - TEORIE 1

③ 8b

a) Definujte pojem spojitosti funkce f v bodě $x^0 \in \mathbb{R}^N$.
str. 2

- Nechť $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in D_f$. Říkáme, že zobrazení f je v bodě x_0 spojité, pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad x \in U_\delta(x_0) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)).$$

b) Definujte pojem směrové derivace dle $\vec{v}$ v $x_0 \in \mathbb{R}^N$
str. 157

- Nechť $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ je vektor, bod $a \in \mathbb{R}^N$ a fce $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na množině $\{a + h\vec{v} : h \in (-\delta, \delta)\}$ pro jisté $\delta > 0$. Pak definujeme derivaci funkce f ve směru $\vec{v}$ v bodě a předpisem:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\vec{v}) - f(a)}{h}$$

pokud limita na pravé straně existuje a je vlastní.

c) Definujte pojem parciální derivace dle x_i v $x_0 \in \mathbb{R}^N$

- Nechť $a \in \mathbb{R}^N$, $i \in \{1, \dots, N\}$ a $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definována na množině $\{a_1\} \times \dots \times \{a_{i-1}\} \times \{a_i - \delta, a_i + \delta\} \times \{a_{i+1}\} \times \dots \times \{a_N\}$ pro jisté $\delta > 0$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_N) - f(a)}{h}$$

pak se nazývá parciální derivace funkce f podle proměnné x_i v bodě a.
Značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

d) Definujte pojem totální diferenciál f v $x^0 \in \mathbb{R}^N$.

- Nechť $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^N$, f je definována na okolí bodu a. Řekneme, že f má v bodě a totální diferenciál, jestliže existuje taková lineární funkce $L: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Lh}{|h|} = 0$$

Uvedená lineární funkce L se pak značí totálním diferenciálem funkce f v bodě a.

e) Rozhodněte, zda platí následující tvrzení (tj. buď dokažte, nebo najděte protipříklad)

i) f má v $x_0 \in \mathbb{R}^N$ totální diferenciál $\Rightarrow$ f je v x_0 spojitá

- Platí. Plyne z $\lim\limits_{h\to 0}(f(a+h)-f(a)) = \lim\limits_{h \to 0}\left(\underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)-df(a)(h)}{|h|}}_{\text{0 jelikož je to tot. dif}} |h| \underbrace{df(a)(h)}_{\text{0 protože } h\to 0}\right) = 0+0$

ii) f má v $x_0 \in \mathbb{R}^N$ totální diferenciál $\Rightarrow$ f má v x_0 všechny směrové derivace

- Platí. Zafixujme vektor $v \in \mathbb{R}^N$. Z definice a linearity tot. dif. máme

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+hv)-f(a)}{h}}_{\text{definice směrové derivace}} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(a+hv)-f(a)-df(a)(hv)}{\|hv\|}}_{\text{0 protože to je tot. dif.}} \frac{\|hv\|}{h} + \underbrace{\frac{\partial f(a)(hv)}{h}}_{L}$$

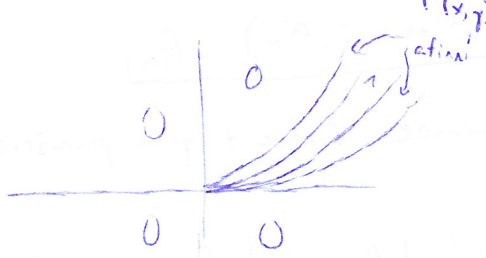
$$= 0 + \underbrace{\partial f(a)(v)}_{L\cdot v}$$

$\rightarrow$ tedy rozepsáním jsme se dostali od směrové derivace k tot. dif.

iii) f má v $x_0 \in \mathbb{R}^N$ $\forall$ směrové derivace $\Rightarrow$ f je v x_0 spojitá.

- Neplatí. Uvažujme funkci

$$f(x,y)\begin{cases} 0 & \text{na } \{x \le 0\} \cup \{y \le x^2\} \cup \{y \ge 4x^2\} \\ 1 & \text{na } \{x>0 \wedge 2x^2 \le y \le 3x^2\} \\ \text{afinní v } y & \text{na } \{x>0 \wedge x^2 \le y \le 2x^2\} \\ \text{afinní v } y & \text{na } \{x>0 \wedge 3x^2 \le y \le 4x^2\}\end{cases}$$



iv) f má v $x_0 \in \mathbb{R}^N$ spojité $\forall$ parciální derivace $\Rightarrow$ f má v x_0 totální diferenciál.

- Platí. Důkaz dlouhý. Str. 156

Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak $\exists \delta > 0$ tak, že pro $y \in G := (a_1-\delta, a_1+\delta) \times (a_2-\delta, a_2+\delta)$ platí

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right| < \varepsilon$$

Pro libovolné $y \in G$ takové, že $y_1 \neq a_1$ a $y_2 \neq a_2$ pak podle Lagrangeovy věty (věta 6.3.3) máme

$$\left|f(y_1,y_2) - f(a_1,a_2) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(y_1-a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(y_2-a_2)\right)\right|$$

$$\sim$$

$$= \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, y_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)\right)(y_1-a_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\right)(y_2-a_2)\right|$$

$$\le \varepsilon|y_1-a_1| + \varepsilon|y_2-a_2| \le 2\varepsilon\|y-a\|$$

$\blacksquare$

2019 - TEORIE 2

Řady + množiny + funkcionály

1 8b

a) Definujte pojem mocninné řady.

- Nechť $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ nazýváme mocninnou řadou se středem v z_0. Čísla a_k nazýváme koeficienty mocninné řady.

b) Formulujte a dokažte větu o poloměru konvergence.

- Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$. Položme $R := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$, konvence $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$.

Číslo $R \in [0,\infty)$ nazveme poloměr konvergence mocninné řady a platí pro něj:

i) řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konverguje absolutně na B_R

ii) řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ nekonverguje na $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$

iii) existuje-li $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$, pak se rovná R

iv) existuje-li $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, pak se rovná $\frac{1}{R}$

- Plyne z odmocninového kritéria:

Použijeme odmocninové kritérium na mocninnou řadu $\rightarrow$ $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|(z-z_0)^k} < 1$

Dále máme $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\,(z-z_0) < 1$

$$\underbrace{(z-z_0)}_{R\ \dots\ \text{poloměr konvergence}} < \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

c) Ukažte, že řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^k$ mají stejný poloměr konvergence

- Jednoduše z definice poloměru konvergence - dosadíme tam tu druhou řadu:

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k \cdot a_k}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} (\sqrt[k]{|a_k|} \underbrace{\sqrt[k]{k}}_{1})} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad \text{neboť } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$$

↳ což je poloměr konvergence té první mocninné řady

d) Pomocí předchozího tvrzení dokažte, že lze mocninnou řadu libovolněkrát derivovat.

- Nejprve definice: Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$. Pak pro $x \in (-R, R)$, kde $R \geq 0$ je poloměr konvergence příslušné mocninné řady, platí $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

- Hele, důkaz sem teď psát nebudu. Cáloval bych malou mezeru v tom co umím, mám jinde podstatně větší mezery.

019 - TEORIE 2

② 7b

a) Definujte pojem otevřená/uzavřená množina.

- Nechť (P,ρ) je metrický prostor. Množina $G \subset P$ se nazývá otevřená, jestli ke každému jejímu bodu existuje okolí, které leží v G. Množina $F \subset P$ se nazývá uzavřená, je-li doplňkem otevřené množiny.

b) Definujte pojem cauchyovská posloupnost.

- Nechť (P,ρ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská, pokud platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad m,n > 0 \implies \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

c) Definujte pojem kompaktní množina.

- Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $A \subset P$. Řekneme, že A je kompaktní, pokud z každé posloupnosti jejích členů lze vybrat podposloupnost konvergentní v A.

d) Uveďte a dokažte ekvivalentní charakterizaci kompaktní množiny v konečně-dimenzionálních prostorech (pomocné tvrzení o konvergenci můžete uvést bez důkazu)

- V konečně dimenzionálním prostoru je každá omezená uzavřená množina kompaktní. str. 127

- Důkaz: ① Nechť A je omezená uzavřená množina, $(e_1, \dots, e_N)$ báze našeho prostoru.

② Zvolme posloupnost $\{x_n\} = \{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^n e_j\} \subset A$. Pak jsou omezené i posloupnosti koeficientů jejích složek

→ To nám zaručuje Věta o vztahu konvergence v normě ke konvergenci po složkách: str. 113

Nechť P je lineární normovaný prostor, $\{e_1, \dots, e_N\}$ jeho báze, $x_n = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^n e_i$ a $x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i$, kde $\alpha_i^n, \alpha_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ pro $i \in \{1, \dots, N\}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$x_n \to x \iff \alpha_i^n \to \alpha_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

③ Posloupnosti koeficientů jsou tedy omezené.

Pomocí Weierstrassovy věty dosáhneme toho, že koeficienty konvergují k číslům $\alpha_1, \dots, \alpha_N$.

④ Tedy vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konverguje k $x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i$. Opět tedy dle V. o vztahu konv. v norm. ke konv. po složkách máme $x_{n_k} \to x$.

⑤ Z uzavřenosti A plyne, že $x \in A$. ∎

e) Formulujte a dokažte Cantorovu větu (průnik neprázdných do sebe vložených kompaktních množin)

- str. 128
  Nechť $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ je posloupnost neprázdných kompaktů v metrickém prostoru. Pak $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ je neprázdný kompakt.

- Důkaz:

  ① Nejprve ověříme kompaktnost. Pokud $\{x_n\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$, potom nutně $\{x_n\} \subset K_1$ a po přechodu k podposloupnosti díky kompaktnosti K_1 máme $x_{n_k} \to x$ v K_1.

  $\to$ Nutně pak také $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$, neboť $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ je uzavřená množina jakožto průnik uzavřených množin.

  $\Rightarrow$ Ověřena kompaktnost.

  ② Nyní ověříme neprázdnost. Sestrojme „diagonální" posloupnost $\{x_n\}$ tak, že $x_n \in K_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Po přechodu k podposloupnosti pak máme $x_{n_k} \to x \in K_1$. Jelikož od druhého indexu leží všechny členy v K_2, máme konvergenci na K_2. Jelikož indexy můžeme volit libovolně, dostáváme $x \in K_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Proto $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ je neprázdná.

  $\Rightarrow$ Ověřena neprázdnost.

2019 - TEORIE 2

(3) 8b

a) Definujte pojem funkcionálu a Gateauxovo diferenciálu funkcionálu.

funkcionál str. 208

- Zobrazení z normovaného lineárního prostoru do $\mathbb{R}$ se nazývá funkcionál.

Gateaux

- Nechť X je normovaný lineární prostor, $F: X \to \mathbb{R}$ je funkcionál a $a \in D_f$.

  Nechť $v \in X$ a existuje $\delta > 0$ takové, že $\{a + hv : |h| < \delta\} \subset D_f$.

  Řekneme, že F má v bodě a Gateauxův diferenciál ve směru v, jestliže $\exists$ vlastní limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h} = \frac{\partial}{\partial h} F(a+hv)\Big|_{h=0}$$

b) Definujte pojem lokálního extrému funkcionálu.

str. 210

- Nechť X je normovaný lineární prostor a $F: X \to \mathbb{R}$ je funkcionál. Řekneme, že $a \in D_f$ je bodem lokálního minima funkcionálu f, jestliže $\exists\, \varepsilon > 0$ takové, že

$$F(a) \le F(x) \quad \text{pro } \forall x \in U_\varepsilon(a) \cap D_f$$

c) Ukažte nutnou podmínku (Eulerovu: tedy 1. řádu) $\exists$ lokálního extrému funkcionálu.

- Nechť X je normovaný lineární prostor, funkcionál $F: X \to \mathbb{R}$ má lokální extrém v bodě $a \in X$, je definován na nějakém okolí bodu a a $v \in X$. Pokud existuje $\partial F(a; v)$, pak $\partial F(a, v) = 0$

O Dořešit Zeptat se! O

d) Ukažte, že pokud $f(x) \in C([a,b])$ a $\int_a^b f(x) h(x)\,dx = 0 \;\; \forall h \in C_0^1([a,b])$, pak $f(x) \equiv 0$ na $[a,b]$.

str. 276 13.7.3

e) Odvoďte tvar Euler-Lagrangeovy rovnice pro funkcionál

$$\Phi[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$$

(druhá str.)

Podm. extrémů pro funkcionál (Eulerova, Lagrange) Fundamentální lemma Euler-Lagrange Jacobiho rovnice

d) De facto fundamentální lemma variačního počtu 13.3.3 str. 216

Znění: Nechť pro funkci $g \in C([a,b])$ platí

$$\int_a^b g h \, dx = 0 \qquad \text{pro } \forall h \in C^1([a,b]) \text{ splňující } h(a)=h(b)=0$$

Pak $g \equiv 0$ na $[a,b]$

Důkaz:

① Nechť $\exists x_0 \in (a,b)$ takové, že $g(x_0) > 0$

(to nám postačuje)

Pak $\exists \delta \in (0, \min(x_0-a,\ b-x_0))$ takové, že $g(x) > \frac{1}{2} g(x_0)$ na $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

② Definujme

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [a,b] \setminus (x_0-\delta, x_0+\delta) \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2\delta}(x-x_0)\right) & \text{pro } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \end{cases}$$

Pak $h \in C^1([a,b])$ a $h(a)=h(b)=0$ (splňuje předpoklady)

③ Navíc

$$\int_a^b g h \, dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g(x) \cos^2\left(\frac{\pi}{2\delta}(x-x_0)\right) dx \geq \frac{g(x_0)}{2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \cos^2\left(\frac{\pi}{2\delta}(x-x_0)\right) \boxed{> 0}$$

$\Rightarrow$ z čehož to plyne ∎

e) $\Phi[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) \, dx \quad L \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

$\sim$

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y}(x, y_{min}, y'_{min}) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y_{min}, y'_{min})\right] \cdot h(x) \, dx + \underbrace{\text{zbytek}}_{0 \text{ protože } f(a)=f(b)=0} = 0$$

co vše jsme mezi tím provedli? Pomocí afinní fce jsme zajistili že $f(a)=f(b)=0$
Per Partes
Položíme vše nule.

moc krokům mezi tím nerozumím, je to ve videu přednášce cca v 1. hodině Matematiky pro F I.

2019 - TEORIE 3

Řady + množiny + II. parc. der.

7 sb

a) Definujte pojem číselné řada.
str. 63

- Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ je posloupnost. Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ budeme nazývat (číselnou) řadou.
  Pro $k \in \mathbb{N}$ se číslo a_k nazývá k-tý člen, číslo $s_k := \sum_{k=1}^{k} a_k$ se nazývá k-tý částečný součet řady a $\{s_k\}$ nazveme posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
  Existuje-li vlastní $s := \lim_{k\to\infty} s_k$, říkáme, že řada konverguje.
  Pokud je uvedená limita nevlastní, řada diverguje, pokud limita částečných součtů neexistuje, řada osciluje.
  V prvních dvou případech číslo s nazýváme součtem řady.
  Píšeme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$.

b) Formulujte a dokažte nutnou podmínku konvergence číselných řad.
str. 65

- Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. Pak $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.
- Důkaz: ① Označme $L = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Pro částečné součty pak platí $\lim_{k\to\infty} s_k = L$, a proto:
  ② $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = L - L = 0$

c) Znáte situaci, kdy je nutná podmínka současně postačující? Formulujte a dokažte příslušné tvrzení.

- Jedná se o Leibnitzovo kritérium str. 67 (případně Dirichletovo, to je obecnější) str. 76
  Leibnitz: Nechť $\{a_n\}$ je nezáporná monotónní posloupnost. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konverguje právě tehdy ($\Longleftrightarrow$), když $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$
- Důkaz: $\Rightarrow$ plyne z nutné podmínky konvergence
  $\Leftarrow$ ① Částečné součty přepíšeme do tvaru
  $s_{2n} = (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + (-a_5 + a_6) \dots (-a_{2n-1} + a_{2n})$
  $s_{2n+1} = -a_1 + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) \dots\dots (a_{2n} - a_{2n+1})$
  ② Vidíme, že $\{s_{2n}\}$ i $\{s_{2n+1}\}$ jsou monotónní (členy v intervalu $[-a_1, 0]$) (neboť vždy $-a_1 \leq -s_{2n-1} \leq s_{2n} \leq 0$), obě jsou tedy nutně konvergentní
  ③ Navíc $s_{2n+1} - s_{2n} = -a_{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$
  a tedy obě posloupnosti mají stejnou limitu.
  Řada konverguje. ∎

d) Definujte pojem absolutní/neabsolutní konvergence.
Rozhodněte, zda platí (tedy buď dokažte, nebo uveďte protipříklad)

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně

- Říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně, jestliže konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Řada konverguje neabsolutně, jestliže konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ale nekonverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

- i) Platí.
  Plyne z B-C podmínky:
  ① Ta říká: Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když splňuje B-C podmínku
  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty)\ \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$
  ② Pro $\forall n, p \in \mathbb{N}$ máme
  $$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$
  dle B-C podmínky

  ← trochu bych to upravil ale ok není to dobře

  Tedy implikace platí

- ii) Neplatí. např. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ konverguje neabsolutně, ale nekonverguje absolutně.

2019 - TEORIE 3

② 7b a) Definujte pojem uzavřené/otevřené množiny v metrickém prostoru.

str. 115

- Uvažujme metrický prostor P. Množinu $G \subset P$ se nazývá otevřená, pokud nějaké okolí každého jejího členu leží v G. Uzavřená množina F je doplněk otevřené množiny, $F \subset P$.

b) Uveďte příklad podmnožiny metrického prostoru, která je otevřená a uzavřená současně.

str. 116

- Množiny otevřené a uzavřené současně se nazývají obojetné a na (P,ρ) je jimi například $\emptyset$ nebo P.

c) Ukažte, že libovolné sjednocení a konečný průnik otevřených množin je otevřená množina.

str. 116, 117

- Důkaz sjednocení: Nechť I je indexová množina a G_α je otevřená pro každé $\alpha \in I$. Díky otevřenosti G_α víme, že pro $x_0 \in G_{\alpha_0}$ $\exists\ \varepsilon > 0$ takové, že $U_\varepsilon(x_0) \subset G_{\alpha_0}$. Zároveň víme, že $G_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ a tedy díky tomu, že α_0 je libovolné, máme $U_\varepsilon(x_0) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ ▣ (ve skriptech malinko jinak formulované, ale imo to sedí)

- Důkaz průniku:

Nechť I je $\underbrace{}_{}$ KONEČNÁ!! indexová množina a $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha$. Díky otevřenosti G_α víme, že $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ takové, že $U_{\varepsilon_0}(x_0) \subset G_{\alpha_0}$.

Pro $\forall \alpha \in I$ uvažujme $\varepsilon := \min \varepsilon_0$, kde ε_0 je $U_{\varepsilon_0}(x_0) \subset G_\alpha$.

Pak máme $U_\varepsilon(x_0) \subset U_{\varepsilon_0}(x_0) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha$ ▣

Tedy $U_\varepsilon(x_0) \subset \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha$ $\quad \forall \alpha_0 \in I$

To je možné díky konečnosti I

d) Definujte pojem izolovaný bod a hromadný bod podmnožiny metrického prostoru.
str. 119

- Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Bod $x_0 \in A$ se nazývá izolovaný bod množiny A, jestliže má prstencové okolí neprotínající A. Bod $x_0 \in P$ se nazývá hromadný bod množiny A, jestliže každé jeho prstencové okolí protíná A.

e) Ukažte, že pro libovolnou podmnožinu A metrického prostoru M platí (A' je množina všech hromadných bodů A, ∂A je hranice A)

i) $\partial A \setminus A = A' \setminus A$ ii) $\partial A \cup A = A' \cup A$.

- i) $\partial A \setminus A = A' \setminus A$

Hranice A množiny $A \subset P$ je definována jako množina $\forall$ bodů, v jejichž libovolném okolí leží jak bod patřící do A tak bod ležící mimo A.

„$\subset$" $x_0 \in \partial A \setminus A \xrightarrow[\text{věci}]{\text{díky této}} x \in A'$

„$\supset$" $x_0 \in A' \setminus A \Longrightarrow$ -||- $x \in \partial A \setminus A$

- ii) Druhé rovnost plyne z první, neboť

$$\partial A \cup A = (\partial A \setminus A) \cup A = (A' \setminus A) \cup A = A' \cup A$$

2019 - TEORIE 3

③ 8b

a) Definujte konvexní množinu. str. 160

- Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^N$ je konvexní, jestliže pro každé $x, y \in A$ a $\lambda \in [0,1]$ platí $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$

b) Formulujte a dokažte větu o střední hodnotě pro funkce více proměnných str. 160

- Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená konvexní množina a $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál na A. Pak pro $\forall a, b \in A$, $a \neq b$ existuje $\theta \in (0,1)$ takové, že

$$\boxed{f(b) - f(a) = df(a + \theta(b-a))(b-a)} = \nabla f(a + \theta(b-a)) \cdot (b-a)$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + \theta(b-a))(b_j - a_j)$$

- Důkaz:
  ① Definujme pomocnou funkci $F(t) = f(a + t(b-a))$
  ② Pak $F = f \circ g$, kde $g: t \to a + t(b-a)$ je nekonečněkrát spojitě diferencovatelné na $(0,1)$.
  → ③ Díky větě o tot. dif. složeného zobrazení má fce F tot. dif. (vlastní derivaci) na $(0,1)$ a platí $F'(t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j}(g(t)) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial t}(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(a + t(b-a))(b-a)$
  ④ Díky Lagrangově větě o střední hodnotě pak $\exists\, \theta \in (0,1)$ tak, že:
  $f(b) - f(a) = F(1) - F(0) = F'(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(a - \theta(b-a))(b-a)$

c) Pro funkce více proměnných definujte pojem parciální derivace druhého (a vyššího) řádu. str. 169

- Nechť $a \in \mathbb{R}^N$, $i \in \{1, \dots, N\}$ a $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definována na množině $\{a_1\} \times \dots \times \{a_{i-1}\} \times \{a_i + \delta, a_i - \delta\} \times \{a_{i+1}\} \times \dots \times \{a_N\}$ pro jisté $\delta > 0$.
  Jestliže $\exists$ vlastní limita $\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_N) - f(a)}{h}$, pak se nazývá parciální derivace funkce f podle proměnné x_i v bodě a, značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
  Pokud má výraz smysl, tak jsou druhé parc. derivace podle x_i a x_j definovány jako $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$ a značí se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Analogicky pro vyšší parc. derivace

d) Dokažte, za jakých předpokladů je pořadí derivování záměnné. str. 162

- Funkce musí být definována na otevřené množině a musí být k-krát spojitě diferencovatelná. Pak jsou parciální derivace k-tého řádu záměnné

- Důkaz (pro $f \in C^2(\Omega)$)

① BÚNO pracujeme v počátku. Existuje $\delta > 0$ takové, že $(-\delta,\delta)\times(-\delta,\delta) \subset \Omega$. Pro $h,k \in (0,\delta)$ definujeme funkce:

②
$$Q(h,k) = \frac{1}{hk}\Big(f(h,k) - f(h,0) - f(0,k) + f(0,0)\Big)$$
$$\varphi_k(h) = \frac{f(h,k) - f(h,0)}{k}$$
$$\varphi_h(k) = \frac{f(h,k) - f(0,k)}{h}$$

③ Zafixujme nyní $h,k \in (0,\delta)$. Pak podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existují $\xi_1 \in (0,h)$ a $\xi_2 \in (0,k)$ takové, že platí
$$Q(h,k) = \frac{1}{h}\left(\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k} - \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}\right) = \frac{1}{h}\left(\varphi_k(h) - \varphi_k(0)\right)$$
$$= \varphi_k'(\xi_1) = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1,0)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi_1,\xi_2)$$

④ Analogicky: $Q(h,k) = \frac{1}{k}\left(\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h} - \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\right)$
$$= \frac{1}{k}\left(\varphi_h(k) - \varphi_h(0)\right) = \varphi_h'(\xi_3)$$
$$= \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,\xi_3) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,\xi_3)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_3,\xi_4)$$

⑤ Ze spojitosti druhých parc. derivací v počátku pro dostatečně malé h,k, máme
$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_4,\xi_3) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right| < \varepsilon$$
+ analogicky to druhé

$\rightarrow$ Tedy máme $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_1,\xi_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi_3,\xi_4)$ ∎

ODR + Řady + množiny

2019 - TEORIE 4

1. 8b Uvažujte rovnici $y' = f(y)g(x)$ s poč. podm. $y(0) = 0$

a) Formulujte větu o existenci řešení této počáteční úlohy (Peano)

věta 7.

Peano

- Nechť $F: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a $(x_0, y_0) \in \Omega$.

→ Pak $\exists\, \delta > 0$ tak, že na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ existuje řešení cauchyovy úlohy pro systém rovnic $y' = F(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$

b) Formulujte větu o existenci a jednoznačnosti řešení této počáteční úlohy (Picard, Lindelöf)

Picard-Lindelöf

- Nechť $F: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ je spojité na otevřené množině $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ a F je na Ω lokálně lipschitzovská vzhledem k poslední k-tici proměnných.

→ Pak $\exists\, \delta > 0$ tak, že na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\exists!$ právě jedno řešení cauchyovy úlohy pro systém rovnic $y' = F(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$

c) Kterou z výše uvedených vět nelze použít v případě:

i) $f(y) = y$, $g(x) = x$ → lze použít obojí na definičním oboru

ii) $f(y) = \sqrt{y}$ $g(x) = x^2$ → nelze použít Picard-Lindelöf, neboť $f(y) = \sqrt{y}$ není lokálně lipschitzovská → lze použít všude vyjma bodu 0

iii) $f(y) = \frac{1}{y}$ $g(x) = \sqrt[3]{x}$ → nelze použít ani jedna, neboť $f(y) = \frac{1}{y}$ není spojité na Ω → v bodě 0 → -||- kromě 0; navíc, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ není lokálně lipschitzovská - to vylučuje Picard-Lindelöfa

iv) $f(y) = \begin{cases} y\ln(y), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$ $g(x) = x$ → lze použít ~~obojí~~ Peano obojí

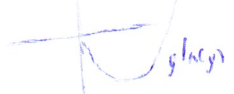
fce jsou v $(0,0)$ spojité

+ Napsat intervaly (největší otevřené)

$f'(y) = \ln(y) + \frac{y}{y} = \ln(y) + 1$

pro $y \to 0$ nebo $f'(y) \to -\infty$ → není lipschitzovská v $y = 0$ ale pro $y \neq 0$ je?

v bodě 0 tedy je fce spojitá



d) Jednu z úloh v části C vyřešte

- i) $f(y) = y \quad f(x) = x \longrightarrow y' = yx \quad y(0) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = yx \longrightarrow \frac{1}{y}\,dy = x\,dx \quad / \int$$

$$\ln y = \frac{1}{2}x^2 + C \quad / \exp$$

$$y = Ke^{\frac{1}{2}x^2} \quad / \; v \; y(0) = 0$$

tedy $K = 1$

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

2019 - TEORIE 4

② 7b a) Definujte pojem přerovnání číselné řady

str. 79

- Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ a $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ nazveme přerovnáním řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (odpovídajícím bijekci φ).

b) Ukažte, jak souvisí absolutní/neabsolutní konvergence číselné řady s konvergencí/divergencí řady, tvořené kladnou resp. zápornou částí a_k. str. 80

- Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$. Pak
  i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně $\iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergují
  ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně $\overset{\text{pozor, pouze implikace}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty$
- Proč tomu tak je?
  i) „$\Rightarrow$" víme z toho že $0 \le a_k^+ \le |a_k|$ a $0 \le a_k^- \le |a_k|$
  „$\Leftarrow$" $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$, víme že součet dvou konvergentních řad je konvergentní řada
  ii) ① $\infty = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ + a_k^-) \to$ buď a_k^+ nebo a_k^- musí mít nekonečný součet.
  ② zároveň ale platí
  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) \to$ pokud by nekonečný součet měla jen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ nebo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$, nemohlo by $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ být konečné.
  $\to$ Tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty$

c) Dokažte, že součet absolutně konvergentní řady nezáleží na jejím přerovnání.

① Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je přerovnáním $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

② Uvažujme $\{a_k\} \subset [0, \infty)$. Pro $n \in \mathbb{N}$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\{b_1, \dots, b_n\} \subset \{a_1, \dots, a_{k_0}\}$, proto

③ $\sum_{k=1}^{n} b_k \le \sum_{k=1}^{k_0} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k \to$ tedy $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje a platí $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Prohozením rolí a_k a b_k poté získáme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

④ Pro obecnou řadu máme
$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} b_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ Platí pro ně to výše.

d) Jaká je situace u neabsolutně konvergentní řady? str. 80

- Pakliže přerovnáme neabsolutně konvergentní řadu, můžeme tím změnit její součet → Pro každé $S \in R^*$ existuje přerovnání řady se součtem S.

2019 – TEORIE 4

③ 8b a) Definujte pojem otevřené / uzavřené množina v metrickém prostoru.

- Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Množina $G \subset P$ se nazývá otevřená, jestliže ke každému jejímu bodu existuje okolí, které leží v G. Množina $F \subset P$ se nazývá uzavřená, jestliže je doplňkem otevřené množiny.

b) Definujte pojem separabilní množina v metrickém prostoru.

- Metrický prostor je separabilní, pokud v něm existuje spočetná hustá množina.

- Hustá podmnožina: Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Říkáme, že množina A je hustá v P, jestliže v každém okolí každého prvku z P leží prvek z A.

c) Definujte pojem kompaktní množina v metrickém prostoru.

- Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je kompaktní, pokud z každé posloupnosti jejích prvků lze vybrat podposloupnost konvergentní v A.

d) Formulujte Borelovu a Lindelöfovu pokrývací věta.

- Lindelöfova p. věta:
  Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $A \subset P$ je separabilní. Pak lze z každého otevřeného pokrytí A vybrat nejvýše spočetné podpokrytí.
- Borelova p. věta:
  Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $A \subset P$ je kompaktní. Pak lze z každého otevřeného pokrytí množiny A vybrat konečné podpokrytí.

e) Obě věty dokažte.

- Lindelöf: ① Nechť $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je pokrytí A. Nechť dále $\{x_n\}$ je separabilní množina A.
  ② Nejprve tvrdíme, že pro $\forall x \in A$ $\exists \alpha \in I$ a $m, n \in \mathbb{N}$ tak, že $x \in \Omega_x := U_{\frac{1}{m}}(x_n) \subset M_\alpha$. Skutečně, díky tomu, že $\{M_\alpha\}$ je otevřené pokrytí, $\exists \alpha$ a $R > 0$ tak, že $U_R(x) \subset M_\alpha$.
  ③ Zafixujme dále $\frac{1}{m} < \frac{R}{2}$. Díky hustotě $\{x_n\}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\rho(x, x_n) < \frac{1}{m} <$

tedy z Δ nerovnosti dostáváme

$$x \in U_{\frac{1}{m}}(x_n) \subset U_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$$

(4) Konečně, systém $\{\Omega_x\}_{x \in A}$ pokrývá A a zároveň je nejvýše spočetný (je to podsystém $\{U_{\frac{1}{m}}(x_n)\}_{m,n \in \mathbb{N}}$). Ke každé množině z tohoto systému přiřadíme právě jednu množinu ze systému $\{M_\alpha\}$, aby ji obsahovala. Získali jsme podsystém požadovaných vlastností. □

- Borel:

(1) Kompaktnost implikuje separabilitu; z Lindelöfa máme, že $\exists$ nejvýše spočetné podpokrytí, označme $\{M_\alpha\}$

(2) $G_n = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, $n \in \mathbb{N}$. Je třeba ukázat, že $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $A \subset G_{n_0}$

(3) Dk sporem – předpokládejme, že to není pravda.
Pak jsou $F_n := A \setminus G_n$, $n \in \mathbb{N}$, neprázdné kompakty splňující $F_n \subset F_m$, kdykoliv $m < n$.

(4) Cantorova věta o průniku kompaktů ak dává, že

$$F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A \setminus G_n = A \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$$

je neprázdná kompaktní množina.

Proto $\{M_\alpha\}$ nepokrývá A $\rightarrow$ máme spor □

wronskián třídy + metrika
už byla

2019 – TEORIE 5

① 8b a) Definujte wronského determinant funkcí.

str. 38

- Wronského determinant funkcí $u_1, \dots, u_n \in C^{(n-1)}(a,b)$ v bodě $x \in (a,b)$ je

$$W_{[u_1,\dots,u_n]}(x) = \det \begin{pmatrix} u_1(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & \dots & u_n'(x) \\ u_1^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

b) Lineární nezávislost funkcí na intervalu – definujte.

str. 37

- Řekneme, že funkce $u_1, \dots, u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované na $(a,b) \subset \mathbb{R}$ jsou lineárně nezávislé na (a,b), pokud pro každou n-tici $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \equiv 0 \text{ na } (a,b) \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

V opačném případě říkáme, že $u_1, \dots, u_n$ jsou lineárně závislé.

c) Ukažte, že pokud funkce $y_1, \dots, y_n$ řeší jistou lineární obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu, jejich wronskián řeší ODR 1. řádu.

- Metoda variace konstant, str. 42, 43 ?

DODĚLAT

- Tohle doplň potom, co projedu ODRka, budu do toho mít větší insight.

d) Odsud ukažte, že jaký je vztah lineární nezávislosti n řešení a jejich wronskiánu.

Tohle není dodělaný

2019 - TEORIE 5

2 7b

a) Definujte pojem číselné řady

- Nechť $\{a_k\}$ je posloupnost. Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ budeme nazývat číselnou řadou. Pro $k \in \mathbb{N}$ se číslo a_k nazývá k-tý člen, číslo $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ se nazývá n-tý částečný součet a $\{s_n\}$ značíme posloupnost částečných součtů.

b) Definujte, co to znamená konvergentní/divergentní/oscilující číselná řada

+ ještě část. součty - už odpovězeno dříve/výše

- Existuje-li vlastní $\lim_{n\to\infty} s_n$, řada konverguje, je-li limita nevlastní, řada diverguje, pokud limita neexistuje, řada osciluje.

c) Definujte absolutní a neabsolutní konvergenci číselných řad

- Říkáme, že číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně, jestliže konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Říkáme, že řada konverguje neabsolutně, jestliže konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ale nekonverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

d) Formulujte B-C podmínku konvergence číselných řad.

- Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když splňuje B-C podmínku

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty) \; \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

e) Formulujte a dokažte Abelovo a Dirichletovo kritérium konvergence číselných řad.

- Nechť $\{a_k\}, \{b_k\} \subset \mathbb{R}$ a $\{a_k\}$ je monotónní. Pak:

→ Dirichlet: Jestliže $a_k \to 0$ a $\{b_k\}$ má omezené částečné součty, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje

→ Abel: Jestliže $\{a_k\}$ je omezená a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

- Dokažte:

→ Najprve Dirichlet:

① Ukažme, že zkoumaná řada splňuje B-C podmínku. Zvolme $\varepsilon > 0$. BÚNO $\{a_n\}$ je nerostoucí. Členy $\{b_k\}$ si vyjádříme pomocí částečných součtů posloupnosti, budeme značit B_n.

② $$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \dots + a_{n+p-1} b_{n+p-1} + a_{n+p} b_{n+p}$$

$$= a_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + a_{n+2}(B_{n+2} - B_{n+1}) + \dots + a_{n+p}(B_{n+p} - B_{n+p-1})$$

$$= -a_{n+1} B_n + B_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots + B_{n+p-1}(a_{n+p-1} - a_{n+p})$$

③ Využijeme monotónnost $\{a_k\}$, omezenost $\{B_n\}$ a $a_k \to 0$. Dostáváme

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leq |-B_n a_{n+1}| + |B_{n+1}|(a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots + |B_{n+p-1}|(a_{n+p-1} - a_{n+p})$$

$$\leq C\varepsilon + C(a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots + C(a_{n+2} - a_{n+3}) + \dots + C\varepsilon$$

$$\leq \varepsilon_\varepsilon + C(a_{n+1} - a_{n+p}) + C_\varepsilon \leq \underline{3C_\varepsilon}$$

⇒ Ověřena B-C podmínka.

→ Teď Abel: Předpokládejme podmínky Abelova kritéria.

① $\{a_k\}$ je monotónní a omezená → má vlastní limitu. Označíme A. Pak

② $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} A b_k}_{\text{K díky aritmetice řad}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - A) b_k}_{\text{K díky Dirichletovi}}$$

→ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

Tak, tohle jsou tedy teorie z 1. až 5. zkoušek v roce 2019 v testech p. Pokorného. Třetí příklad v páté teorii byl nějaký z recyklovaný z těch co tu mám, druhý v šesté teorii je nový (něco s formulací a důkazem kriterií konvergencí řad). Sedmá a osmá zkouška měly zrecyklované teorie z těch tady.