Matematická analýza – přednáška VII

Spojitost

Definice: Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak f je spojitá v x_0, pokud $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) spojitá zprava v x_0, pokud $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

3) spojitá zleva v x_0, pokud $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

• POZN: podmínka 2) ve větě 9 (o složené funkci) znamená, že g je spojitá v bodě x_0.

Př: 1) Polynom P je spojitý ve všech $x \in \mathbb{R}$

2) Racionální funkce $\frac{P}{Q}$ je spojitá ve všech $x \in \mathbb{R}$, pro které $Q(x) \neq 0$.

3) sgn není spojitá (ani jednostranně) v 0

4) $D(x)$ není spojitá (ani jednostranně) v žádném bodě

Spojitost na intervalu

Definice: Nechť I je interval v $\mathbb{R}$ s krajními body a, b, kde $-\infty \le a < b \le +\infty$. Potom f je spojitá na I, pokud

f je spojitá v každém $c \in (a,b)$,

2) f je spojitá zprava v a, je-li $a \in I$,

3) f je spojitá zleva v b, je-li $b \in I$.

Věta 10 (Aritmetika spojitosti)

Nechť f, g jsou spojité v x_0.
Potom $(f \pm g)$ a $(f \cdot g)$ je spojitý v x_0.
Je-li $g(x_0) \neq 0$, potom $\frac{f}{g}$ je spojitý v x_0

Důkaz: – viz. aritmetika limit

Věta 11 (o spojitosti složené funkce)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Nechť f je spojitá v x_0 a g je spojitá v $f(x_0)$.

Potom $g \circ f$ je spojitá v x_0.

Důkaz: z věty o limitě složených funkcí

Př: 1) elementární funkce $\sin, \cos, \exp, \ln$ jsou spojité (na def. oboru)

2) $\ln(1+x^2e^x)$ je spojitá na def. oboru

Derivace

- Newton: - okamžitá změna veličiny $\underbrace{\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}}$ průměrná změna

$\Rightarrow \dot{s} = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$

- Leibniz: - směrnice tečny

- směrnice sečny: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

Definice 5: (Vlastní derivace)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $x_0 \in \mathbb{R}$. Vlastní derivace f v x_0 definujeme jako číslo $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, pokud limita vpravo existuje jako vlastní.

POZN: 1) Analogicky definujeme derivace zprava a zleva f v x_0 pomocí limity zprava a zleva, značíme $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$

- zřejmě $A = f'(x_0) \iff f'_+(x_0) = A = f'_-(x_0)$

2) Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $f = f_1 + i f_2$

Potom $f'(x_0) = f_1'(x_0) + i \cdot f_2'(x_0)$, má-li aspoň jedna strana smysl.

3) Lze $f'(x_0)$ definovat jako

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

(z věty o limitě složené funkce $\Rightarrow$ důkaz $x = \varphi(h) := x_0 + h$)

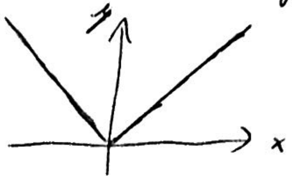
Př: 1) $f(x) = a$, $x \in \mathbb{R}$ ... konstantní funkce

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

2) Nechť $f(x) = x^m$, $x \in \mathbb{R}$ a $m \in \mathbb{N}$.

Potom $$\lim_{x \to x_0} \frac{x^m - x_0^m}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \big(\underbrace{x^{m-1} + x^{m-2} x_0 + \dots + x_0^{m-1}}_{m \text{ členů}} \big) = m \cdot x^{m-1}$$

3) Je-li $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, potom



$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x \text{ neexistuje}$$

$\Rightarrow$ ani $f'(0)$ neexistuje

(ale $f'_{\pm}(0) = \pm 1$)

Věta 12: Existuje-li vlastní $f'(x_0)$, potom f je spojitá v x_0.

Důkaz: Máme $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0}$$

pro $x \to x_0$

$\Rightarrow f(x) \to f(x_0) \Rightarrow$ spojitost.

Věta 13: (Aritmetika derivací)

Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mají vlastní derivaci v $x_0 \in \mathbb{R}$.

Pak 1) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

3) je-li $g(x_0) \neq 0$, potom $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Důkaz: z aritmetiky limit

1) Máme $$\frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

limita $\to f'(x_0) \pm g'(x_0)$

2) Máme $\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0} \overset{\mp f(x_0)g(x)}{=}$ "přičtu a odečtu to samé"

$$= \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{g(x_0)} + \underbrace{f(x_0)}_{f(x_0)} \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{g'(x_0)}$$

limita $x\to x_0$

$$\Rightarrow f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

3) Stačí ukázat, že $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ (*)

Z (*) a derivování součinu dostaneme $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) =$

$$= \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\cdot\frac{(-g'(x_0))}{[g(x_0)]^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

důkaz (*): $\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}\right)\cdot\frac{1}{x-x_0} = \frac{g(x_0)-g(x)}{\underbrace{g(x)}_{g(x_0)}\cdot\underbrace{g(x_0)}_{g(x_0)}}\cdot\frac{1}{x-x_0}$

pro $x\to x_0$: $\frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

__Věta 14__ (__Derivace složené funkce__), __chain rule__

Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ a $x_0\in\mathbb{R}$.
Nechť existují vlastní $f'(x_0)$ a $g'(f(x_0))$.
Potom existuje $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

Důkaz: Myšlenka: limita $\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \underbrace{\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}}_{g'(f(x_0))}\cdot\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)}$

pro $x\to x_0$:

- Proč by $f(x)\neq f(x_0)$ pro blízké x k x_0 ??? (nemusí platit obecně)
- Lépe: Definujeme $F(y) := \frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}$, $y\neq f(x_0)$

$$:= g'(f(x_0)),\quad y=f(x_0)$$

Potom $\lim_{y\to f(x_0)} F(y) = g'(f(x_0))$, tzn. F je spojitá v bodě $f(x_0)$

a platí: $\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = F(f(x))\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tato rovnost platí vždy (i pro $f(x)=f(x_0)$)

$(x\to x_0)\longrightarrow g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$ což plyne z vět o limitě složené funkce a aritmetiky

Příště: Derivace inverzní funkce

Označení: Nechť I je interval v $\mathbb{R}$ a $f: I \to \mathbb{R}$

1) Potom f je rostoucí na I, pokud
$\forall x, y \in I,\ x < y: f(x) < f(y)$

2) je neklesající na I, pokud
$\forall x, y \in I \quad x < y: f(x) \leq f(y)$

3) je klesající na I, pokud
$\forall x, y \in I \quad x < y \quad f(x) > f(y)$

4) je nerostoucí na I, pokud
$\forall x, y \in I \quad x < y \quad f(x) \geq f(y)$

5) je ryze monotónní, pokud je rostoucí nebo klesající

6) je monotónní, pokud ~~pokud~~ je nerostoucí nebo ~~neroste~~ neklesající

cvičení: Je-li f ryze monotónní na int. I, potom je f prostá.

Matematická analýza – přednáška VIII

Jiná značení: $f'(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $(f(x))'\big|_{x=x_0}$

Věta 15 (derivace inverzní funkce)

Nechť I, J jsou otevřené intervaly v $\mathbb{R}$
a $f: I \to J$ je bijekce (tzn.: $f^{-1}: J \to I$).
Nechť $x_0 \in I$ a $y_0 = f(x_0)$.
Předpokládejme, že a) existuje vlastní $f'(x_0) \neq 0$
b) f^{-1} je spojitá v y_0.
Potom existuje $(f^{-1})'(y_0)$ a platí, že

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Důkaz:

Z a) máme $\frac{1}{f'(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \neq 0$

tedy funkce h definovaná $h(x) := \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$, $x \neq x_0$ pro která ten podíl má smysl

$h(x) = \frac{1}{f'(x_0)}$, $x = x_0$

Potom h je spojitá v bodě x_0.
Potom máme $\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ $\quad y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$

$= \cancel{\lim_{y \to y_0} h(f^{-1}(y))} = \lim_{y \to y_0} h(f^{-1}(y))$

h spojitá v bodě x_0 ~~(předpoklad~~
$f^{-1}(y)$ je spojitá v y_0 (předpoklad b)

$$= h(\underbrace{f^{-1}(y_0)}_{x_0}) = h(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

POZN. předpoklad b) je těžký na ověření
→ slabší, šikovnější věty

Lemma 2: Nechť I je interval v $\mathbb{R}$ a $f: I \to \mathbb{R}$ je ryze monotónní (rostoucí/klesající) a spojitá.
Potom $J = f(I)$ je interval a $f^{-1}: J \xrightarrow{na} I$ je ryze monotónní a spojitá.

(důkaz později)

Věta 15': Nechť f je ryze monotónní a spojitá funkce na nějakém okolí $x_0 \in \mathbb{R}$. Existuje-li vlastní $f'(x_0) \neq 0$, potom existuje $(f^{-1})'(y_0)$ a platí, že

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Důkaz: pomocí Lemma 2, věty 15

Pozn. později si ukážeme, že
1) $\forall x \in (a,b)$: vlastní $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ je rostoucí na (a,b)
2) $\forall x \in (a,b)$: vlastní $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ je klesající na (a,b)

Věta 15'': Nechť $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ má vlastní derivaci která a) $f' > 0$ na (a,b) b) $f' < 0$ na (a,b). Potom $\forall x_0 \in (a,b)$ i $y_0 = f(x_0)$

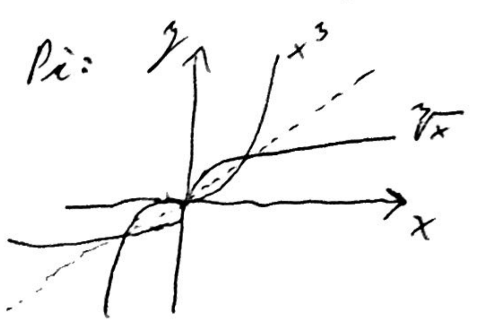
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Pozn.: Dokázali řadu vět pro oboustranné limity a derivace. Rozmysli si analogické věty pro jednostranné limity a derivace.

Pozn: Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je prostá.
Potom graf (f^{-1}) je obraz graf(f) při osové souměrnosti podle osy $y = x$.

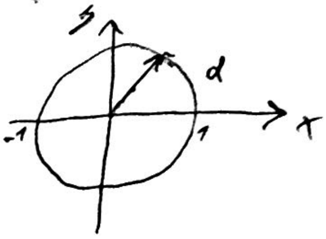
$$\text{graf}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f \text{ a } y = f(x)\},$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{graf}(f^{-1}) = \{(y,x) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in D_{f^{-1}} \text{ a } x = f^{-1}(y)\}$$
} ekvivalentní podmínky

Př:



Elementární funkce

Goniometrické funkce



d ... délka oblouku

π ~ délka polokružnice

cos je x-ová souřadnice
sin je y-ová souřadnice

Věta 16 (o sin, cos)

Existuje právě jedna dvojice funkcí $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a právě jedno iracionální $\pi > 0$, které splňují:

1) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
2) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
3) sin je lichá funkce, tzn. $\sin(-x) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4) cos je sudá funkce, tzn. $\cos(-x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4) sin je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$
5) $\sin(0) = 0, \ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
6) $(\sin x)'|_{x=0} = 1$

Důkaz: bude později v kapitole o řadách [viz. skripta]

- Další vlastnosti:

7) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

důkaz: dosaď do 2) $y = -x$: $\cos(0) = \cos^2 x + \sin^2 x$

z 1) dosaď $x = \frac{\pi}{2}, y = 0$ $\quad 1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \cdot \cos 0 + 0$

$\underline{\cos 0 = 1}$

8) cos, sin jsou omezené

důkaz: ze 7): $1 \geq \sin^2 x$

$1 \geq |\sin x|$

9) $\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}_{\frac{d}{dx}\sin(0)} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

důkaz: $\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2}) - (\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}))}^{\text{lze dokázat ze 2, "}x=y=\frac{x}{2}\text{"}}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ← věta o lim. složen. funkce

10) $\forall x \in \mathbb{R}: \sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$

také $\sin, \cos$ jsou spojité na $\mathbb{R}$.

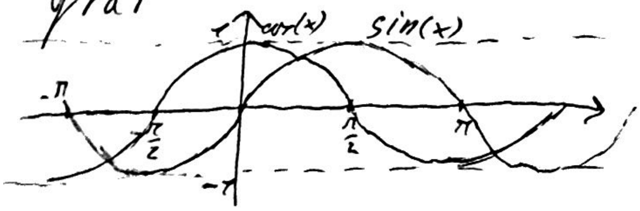
Důkaz: $$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \underbrace{\lim_{h \to 0} \underbrace{h}_{0} \underbrace{\frac{(\cos h - 1)}{h^2}}_{-\frac{1}{2}}}_{0} \cdot \sin x + \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}}_{1} \cdot \cos x = \cos x$$

platí $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

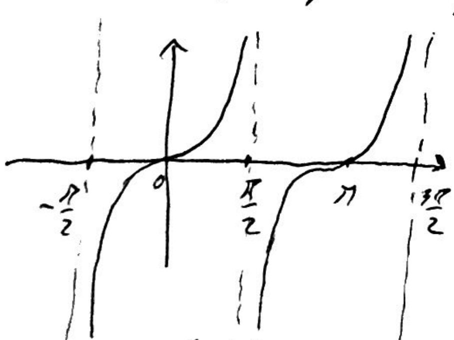
$$\cos'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x$$

graf

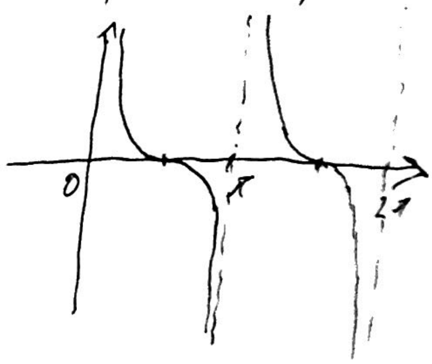


__Definice 6__ 1) $tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

2) $cotg(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$



tg(x)



cotg(x)

11) $tg'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $cotg'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Důkaz: $$tg'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Cyklometrické funkce

Označení: Nechť $f: X \to Y$ je zobrazení a $Z \subset D_f$.
Potom <u>restrikcí</u> $f|Z$ je zobrazení definované
$$(f|Z)(x) := f(x), \; x \in Z$$

Př: $f := \sin(x)\big|_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}$ je rostoucí a spojitá

$\Rightarrow f^{-1}: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ je rostoucí a spojitá (Lemma 2)

<u>Definice 7:</u>
1) $\arcsin := \left(\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$ <u>arkus sinus</u>

2) $\arccos := \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$

3) $\operatorname{arctg} := \left(\tan\big|_{(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$

4) $\operatorname{arccotg} := \left(\operatorname{cotg}\big|_{(0;\pi)}\right)^{-1}$

• Derivace

1) $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; x \in (-1,1)$

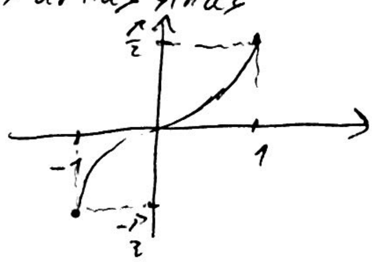
2) $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; x \in (-1,1)$

3) $\operatorname{arctg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \; x \in \mathbb{R}$

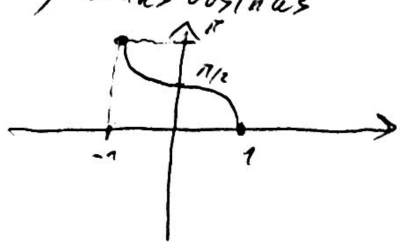
4) $\operatorname{arccotg}'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}, \; x \in \mathbb{R}$

• Grafy

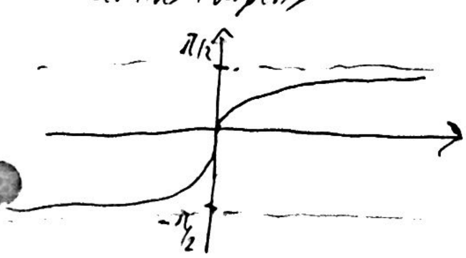
a) arkus sinus



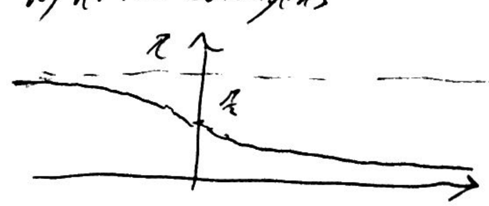
b) arkus cosinus



c) arkus tangens



d) arkus cotangens



Matematická analýza – přednáška IX

Exponenciála

VĚTA 17: (o exponenciále)

Existuje jediná funkce $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taková, že

1) $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w) \quad \forall z,w \in \mathbb{C}$
2) $\exp(0) = 1$
3) Pro každé reálné $x \in \mathbb{R}$ je $\exp(x) \in \mathbb{R}$
   Funkce $\exp|_{\mathbb{R}}$ je rostoucí a má obor hodnot $(0,+\infty) =: \mathbb{R}^+$.
4) $(\exp(x))' = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
5) $\exp(x+iy) = \exp(x)\,(\cos y + i \sin y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Důkaz: – opět v kapitole o řadách

• Další vlastnosti:

6) $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$

– důkaz: $1 = \exp(z-z) = \exp(z)\cdot\exp(-z)$

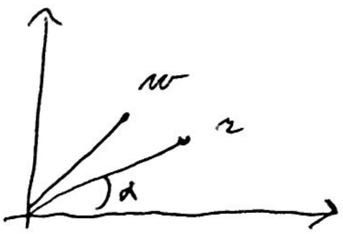
$$\Rightarrow \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{\exp(x)-1}{x}} = 1$

– důkaz: $\exp'(0) = \exp(0) = 1$

8) **Moivreova věta**

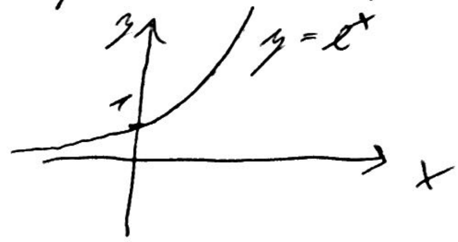
Nechť $z,w \in \mathbb{C}$. Potom existují $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, že:
$z = |z|\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
$w = |w|\cdot(\cos\beta + i\sin\beta)$



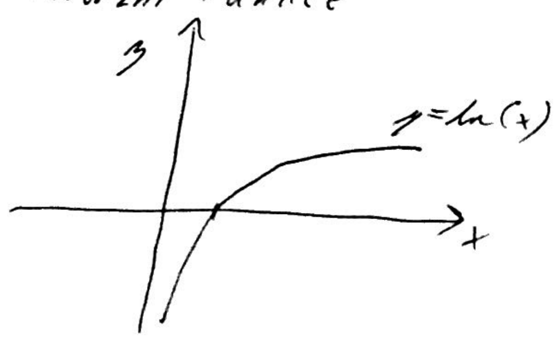
• Dále máme:
$z\cdot w = |z|\cdot|w|\cdot(\cos(\alpha+\beta) + i\cdot\sin(\alpha+\beta))$

– důkaz:
$z = |z|e^{i\alpha}$, $w = |w|e^{i\beta}$, potom: $z\cdot w = |z|\cdot|w|\,e^{i(\alpha+\beta)}$
– pak vyjádřím zpátky pomocí sin a cos.

• graf reálné $\exp(x)$



– inverzní funkce



Definice 8: $\ln := (\exp|_{\mathbb{R}})^{-1}$ ... přirozený logaritmus

- Vlastnosti

9) $\ln : (0,+\infty) \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ je rostoucí a spojitý

10) $\ln(x\cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^+$

- důkaz: Pro $u = \ln(x)$, $v = \ln(y)$ je

$$\exp(u+v) = \exp(u)\cdot\exp(v) = x\cdot y$$

tj. $\ln(x\cdot y) = u+v$

$$\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y$$

11) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$

- důkaz: - derivace inverzní funkce

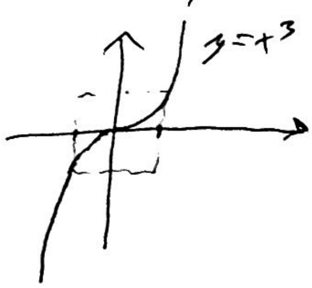
$$(\ln x)' = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$$

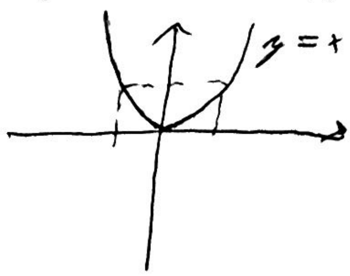
Obecná mocnina

a) Nechť $p \in \mathbb{N}$. Potom $f(x) := x^p = \underbrace{x \cdots x}_{p\text{-krát}}$ je spojitá na $\mathbb{R}$

Je-li p liché, potom je f rostoucí na $\mathbb{R}$ a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$)

p sudé, potom je f rostoucí na $\mathbb{R}^+$ a $f([0;+\infty)) = [0,+\infty)$





Odmocniny

Je-li p liché, definuji $\sqrt[p]{x} = y$, je-li $y^p = x$ a $y, x \in \mathbb{R}$

Je-li p sudé, definuji $\sqrt[p]{x} = y$, je-li $y^p = x$ a $y, x \geq 0$

b) Nechť $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$ jsou nesoudělná.

Potom pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme $x^r = \sqrt[q]{x^p}$, ~~kde~~ má-li pravá strana smysl.

- zde $x^0 := 1$

$x^{-p} := \frac{1}{x^p}$, $x \neq 0$ a $p \in \mathbb{N}$

POZN. a) Pozor na $x<0$: $(-1)^{\frac{2}{2}} = -1 \neq \sqrt{(-1)^2} = 1$

($\frac{2}{2}$ není nesoudělné!)

b) Je-li $r \in \mathbb{Q}$ a $x>0$, potom $\boxed{x^r = \exp(r \cdot \ln x)}$

neboli $\boxed{\ln(x^r) = r \cdot \ln x}$

c) Definice 9: Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x \in (0, +\infty)$. Potom

$x^\alpha := \exp(\alpha \cdot \ln x)$ α-tá mocnina x

POZN.

Eulerovo číslo: $e := \exp(1) = 2{,}718\ldots$

Potom $\ln(e) = 1$ a $e^x = \exp(x)$. $(\forall x \in \mathbb{C})$

- Vlastnosti:

1) Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, potom $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$

- důkaz: $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}\left(\exp(\alpha \cdot \ln x)\right) = \underbrace{\exp(\alpha \cdot \ln x)}_{x^\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \frac{x^\alpha}{x}\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$

2) Nechť $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. Potom

$f(x) := a^x$, $x \in \mathbb{R}$ je ryze monotónní a spojitá funkce

a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$. (tzv. exponenciála o základu a)

Položíme $\log_a x = f^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ (tzv. logaritmus o základu a)

- POZN: $\ln x = \log_e x$, platí $\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$

$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \ln a$

Derivace vyšších řádů

Definice 10: Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ má všude v $U_\delta(x_0)$ vlastní derivaci f'.
Potom druhou derivaci f v x_0 definujeme
$$f''(x_0) = (f')'(x_0),$$ pokud má výraz vpravo smysl.

- Analogicky indukcí definujeme pro $k \in \mathbb{N}$
$$f^{(k)}(x_0) = \left(f^{(k-1)}\right)'(x_0),$$ pokud má výraz vpravo smysl.

(= "K-tá derivace")

Př: $f(x) = x^2 + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$
$$f'(x) = 2x + \cos x$$
$$f''(x) = 2 - \sin x$$
$$f'''(x) = -\cos(x)$$
$$f^{(4)}(x) = \sin(x) \quad \text{atd...}$$

Leibnitzovo pravidlo

$$\left.\begin{aligned}(f\cdot g)' &= f'g + fg' \\ (f\cdot g)'' &= f''g + 2f'g' + fg''\end{aligned}\right\} \text{ podobné binomické větě}$$

...

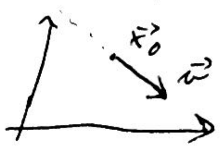
Nechť $n \in \mathbb{N}$ a existují $f^{(n)}(x_0)$ a $g^{(n)}(x_0)$. Potom
$$(f\cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)\, g^{(n-k)}(x_0).$$

- dokažte indukcí (cvičení)

Parciální derivace

Nechť $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, $f(\vec{x}) = f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ N reálných proměnných

Nechť $\vec{x_0} = (x_0^1, \dots, x_0^N)$, např.
a $\vec{v} = (v^1, \dots, v^N)$ je dáno.



Definujeme $g(t) := f(\vec{x_0} + t\cdot\vec{v}) = f(x_0^1 + t v^1, \dots, x_0^N + t v^N)$, $t \in \mathbb{R}$.

Definice 11: Derivace f v $\vec{x_0}$ ve směru $\vec{v}$ definujeme
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x_0}) := g'(0),$$ existuje-li derivace vpravo

POZN. a) $$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x_0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x_0} + t\cdot\vec{v}) - f(\vec{x_0})}{t}$$

Pozn. a) v $\mathbb{R}^N$ máme významné směry souřadnicových os $\vec{e_1} = (1,0,\dots,0)$
$\vec{e_2} = (0,1,\dots,0)$
$\vdots$
$\vec{e_n} = (0,0,\dots,1)$
standartní bázev $\mathbb{R}^n$

Potom $\vec{v} = \sum_{j=1}^{N} v_j \vec{e_j}$

Parciální derivace podle x^j

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(\vec{x_0}) := \frac{\partial f}{\partial \vec{e_j}}(\vec{x_0})$$

- značení: $f_{x^j}(\vec{x_0})$

Za jistých předpokladů na f platí, že

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x_0}) = \sum_{j=1}^{N} v^j \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j}(\vec{x_0})$$

Parciální derivace vyšších řádů

$\vec{x} \to \frac{\partial f}{\partial x^j}(\vec{x})$ je opět funkce $\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$

Definujeme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} := \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)(\vec{x_0}),$$ pokud výraz vpravo má smysl.

vůči k-té proměnné

Podobně definujeme pro $k \in \mathbb{N}$

(*) $$\frac{\partial^k f}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \dots \partial x^{j_k}}(\vec{x_0}) := \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_{k-1}}}\right)(\vec{x_0}),$$ má-li výraz vpravo smysl.

Př: $f(\vec{x}) = |\vec{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^N)^2}$, $\vec{x} = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^N$

Potom: $$\frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^j)^2 + \dots}\right) = \frac{1}{2}\left((x^1)^2 + \dots\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_j = \frac{x^j}{|\vec{x}|}, \quad \vec{x} \neq 0$$

"x^j beru jako proměnnou, ostatní x^i jako konstanty"

- Dokažte (*) - cvičení

Př: $$\frac{\partial^2 f}{\partial (x^j)^2} = \frac{\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_j}\right) \cdot |\vec{x}| - x^j \cdot \left(\frac{\partial |\vec{x}|}{\partial x^j}\right)}{|\vec{x}|^2} = \frac{|\vec{x}| - \frac{x_j^2}{|\vec{x}|}}{|\vec{x}|^2} = \frac{1}{|\vec{x}|} - \frac{(x^j)^2}{|\vec{x}|^3}$$

- Př: zkuste $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} = \dots$

Matematická analýza – přednáška X

Primitivní funkce
("antiderivace, neurčitý integrál")

Definice 1: Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{C}$.
Potom $F : (a,b) \to \mathbb{C}$ je primitivní funkce (PF) k f,
pokud $\forall x \in (a,b)$: $F'(x) = f(x)$

- píšeme: $F(x) = \int f(x)\,dx$, $x \in (a,b)$
$F = \int f$ na (a,b)

Věta 1: (jednoznačnost PF až na konstantu)
Nechť f má na (a,b) primitivní funkci F.
a) Potom G je primit. fun. k f, právě když existuje $c \in \mathbb{C}$ tak, že $G = F + c$ na (a,b)

b) Nechť $x_0 \in (a,b)$, $c \in \mathbb{C}$. Potom existuje jediná primitivní funkce G k f tak, že $G(x_0) = c$.

Důkaz: a) Protože $(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$,
plyne z lemma 3 (později)

(**Lemma 3:** Fce F na (a,b) je konstantní, právě když $F' = 0$ na (a,b).
Důkaz: později)

Důkaz b) Položí $G := F - F(x_0) + C$

Vlastnosti:

Věta 2: Je-li F primitivní funkce k f na (a,b), potom F je spojitá na (a,b)

Důkaz: Protože $F' = f$, má F vlastní derivaci, tudíž je spojitá v každém $x \in (a,b)$.

Věta 3: (o existenci primitivní funkce)

Je-li f spojitá na (a,b), potom f má primitivní funkci

Důkaz: později

Př: existují nespojité funkce, které mají PF

- např.: $F(x) := x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$

$:= 0$, $x = 0$

- ~~m~~ - má všude na $\mathbb{R}$ vlastní derivaci
- ale F' je nespojitá v 0.

Př: Základní PF:

1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $x \in (0,+\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- tzn: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = x^\alpha$ ("to samé")

2) $\int (x-a)^n dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$, kde $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $a \in \mathbb{C}$, $x \neq a$ (pokud a je reálné)

3) $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|$, $a \in \mathbb{R}$, $x \neq a$

POZN: spočti 3) pro $a \in \mathbb{C}$

4) $\int e^x dx = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

5) $\int \cos x \, dx = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

6) $\int \sin x \, dx = -\cos x$, $x \in \mathbb{R}$

7) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$

$= -\operatorname{arccotg} x$ (liší se o konstantu)

POZN: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$, $x \in (-1,1)$

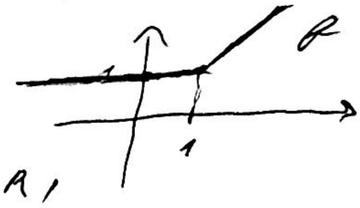
$= -\arccos x$ (liší se o konstantu $\frac{\pi}{2}$)

9) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

10) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x$, $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

atd...

Př: Nechť $f(x) := x, \; x \geq 1$
$:= 1, \; x < 1$



- protože f je spojitá na $\mathbb{R}$, existuje jediná primitivní funkce F, taková, že $F(1) = 0$.
- Potom: a) na $x > 1$ je $F(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_1$
  - platí $F(1) = \underbrace{\lim_{x \to 1^+} F(x)}_{\text{značme } F(1+)}$ (spojitost) $= \frac{1}{2} + C_1$.
  $\Rightarrow \underline{\underline{C_1 = -\frac{1}{2}}}$

  b) na $x < 1$ je $F(x) = \int 1\,dx = x + C_2$
  - platí $F(1) = F(1-) = 1 + C_2$
  $\Rightarrow \underline{\underline{C_2 = -1}}$

závěr: $\left.\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}, \; x \geq 1 \\ &= x - 1, \; x < 1 \end{aligned}\right\}$ "**Slepování PF**"

Věta 4 (integrace součtu)

Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b),
Nechť G je primitivní funkce k g na (a,b).
Potom $F \pm G$ je prim. fun. $f \pm g$ na (a,b)
$c.F$ je prim. fun cf na (a,b), je-li $c \in \mathbb{C}$.

Důkaz: - z aritmetiky derivací:
$(F \pm G)' = F' \pm G'$.
$(cF)' = cF'$

• Tradičně: "$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$" ("rovná se až na konstantu")

Věta 5: (integrace per partes)

Nechť f, g mají všude na (a,b) vlastní derivaci.
Je-li $H = \int f'g$ na (a,b), potom $\int f \cdot g' = f \cdot g - H$ na (a,b).

Důkaz: - z derivování součinu
$(fg - H)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

• Tradičně: "$\int fg' = fg - \int f'g$" ("rovná se až na konstantu")

Př: $\int x \sin x \, dx \overset{v5}{=} -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x$

$f := x \quad g' := \sin x$
$f' = 1 \quad g = -\cos x$

Věta 6 (1. substituční metoda)

Nechť $F = \int f$ na (a,b) a nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a,b)$ má všude v (α,β) vlastní derivaci.

Potom: $F \circ \varphi = \int (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na (α, β)

Důkaz: - z věty o derivování složené funkce

$$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Př: $\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} dx = \int \frac{1}{\varphi(x)^2} \varphi'(x) dx \overset{v6}{=} F(\varphi(x)) = -\frac{1}{x^2+2x+2} + C$

$\varphi(x) = x^2+2x+2 \qquad y = \varphi(x) \quad F(y) := \int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y} \quad \forall y \neq 0$

$\varphi'(x) = 2x+2$

- platí $x^2+2x+2 > 0, x \in \mathbb{R}$

POZN.: "$dy = \varphi'(x) dx$", protože $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$

- píše se ~~platí~~ - funguje díky platnosti věty 6

Věta 7 (2. substituční metoda)

Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \xrightarrow{na} (a,b)$ je ryze monotónní a má všude na (α, β) vlastní derivaci $\varphi' \neq 0$.

Nechť $G := \int (f \circ \varphi) \varphi'$ na (α, β). Potom

$(G \circ \varphi^{-1}) = \int f$ na (a,b).

Důkaz: - z vět o derivování složené funkce a inverzní funkce

$$\forall y \in (a,b): (G(\varphi^{-1}(y)))' = G'(\varphi^{-1}(y)) \cdot \underbrace{(\varphi^{-1})'(y)}_{} =$$
$$= f(\varphi(\varphi^{-1}(y))) \cdot \cancel{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} \cdot \frac{1}{\cancel{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}} = f(y)$$

Př: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, $x \in (-1,1)$

$x = \varphi(t) = \sin t : (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \xrightarrow{na} (-1,1)$ ~~[illegible]~~ roste

$dx = \varphi'(t)\,dt = \cos t\,dt$, $\neq 0$, $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

$$\int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos t} \cdot \cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t$$

$$= \underbrace{\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t \cos t}_{\text{toto je ta složitější PF } G}, \text{ kde } t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{V7}{=} G(\varphi^{-1}(x)) = \underline{\underline{\frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{1-x^2}}}$$

$t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin x$

Př: Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $I_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ $x \in \mathbb{R}$

a ~~$I_n(0)=0$~~. $I_n(0) = 0$

Potom: $I_1 = \operatorname{arctg} x$ Dále:

$$I_n = \int 1 \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(I_n - I_{n+1})$$

$f' = 1$ $g := \frac{1}{(1+x^2)^n}$

$f := x$ $g' = \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}}$

- dostaneme:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \quad \text{atd.,..}$$

Př: $$\int \frac{4x+3}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = 2\underbrace{\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx}_{\text{Př předchozí}} - \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx}_{G(x):=}$$

$$G(x) = \int \frac{1}{((x+1)^2+1)^2}\,dx = \int \frac{dy}{(y^2+1)^2} = \underbrace{I_2}_{\text{předchozí příklad}}(y) = I_2(x+1)$$

$y = x+1$
$dy = dx$

Obecně: $\int \frac{kx+d}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$ lze takto spočítat

$\uparrow$ reálný polynom $\neq 0$ na $\mathbb{R}$

Př: Nechť $J_n(x) = \int \sin^n(x)\,dx$, $x \in \mathbb{R}$ a $J_n(0) = 0$, pro $n \in \mathbb{N}_0$

Potom $J_0 = x$

$J_1 = \cos x - 1$

Dále:

$$J_n = \int 1 \cdot \sin^n(x)\,dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}\,dx$$

$f = \sin^{n-1} x \quad g' = \sin x$

$f' = (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x \quad g = -\cos x$

$$\Rightarrow J_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \cdot \left(J_{n-2} - J_n\right)$$

$$J_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{(n-1)}{n} J_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$J_2 = -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x$$

Matematická analýza - přednáška XI

Integrace racionálních funkcí

$\int R(x)dx$, kde $R=\frac{P}{Q}$, P, Q jsou polynomy

- 1. krok: vydělíme, pokud stupeň P ≥ stupeň Q. (st P ≥ st Q)

  - Dostaneme, že $R = P_1 + \frac{P_2}{Q}$, kde st P_2 < st Q

  - Př: $\frac{x^3}{x^2+1}$ $\quad x^3:(x^2+1) = x - \frac{x}{x^2+1}$
  $-(x^3+x)$
  $-x$

- Předpokládáme st P < st Q:

- 2. krok: - rozložíme $Q(x) = c\cdot(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_n)^{k_n}$

  α_j ... kořen násobnosti k_j

- 3. krok - rozložíme R na jednoduché (parciální) zlomky

  - tzn.
  $$R(x) = \left(\frac{A_1^1}{(x-\alpha_1)} + \dots + \frac{A_{k_1}^1}{(x-\alpha_1)^{k_1}}\right) + \dots \quad \text{(stejně pro všechny kořeny)}$$
  kde A_m^j jsou vhodné konstanty

4. krok - zintegrujeme jednoduché zlomky

POZN: Nechť Q je reálný polynom.
Je-li $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ kořen Q násobnosti k, potom $\bar{z}$ bude taky kořen stejné násobnosti.

$Q(x) = \dots (x-z)^k \dots$

$\overline{Q(x)} = \dots (x-\bar{z})^k \dots = Q(x)$ (předpoklad: reálný polynom $Q(x) = \overline{Q(x)}$)

Dále: $(x-z)\cdot(x-\bar{z}) = x^2-(z+\bar{z})x + |z|^2 = x^2+\beta x + \gamma \in \mathbb{R}$

kde $\beta = -2\,\mathrm{Re}(z)$, $\gamma = |z|^2$

Dostaneme: $Q(x) = c\cdot(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_n)^{k_n}\cdot(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1}\cdots(x^2+\beta_L x+\gamma_L)^{l_L}$

3. krok*: $R(x) = \left(\frac{A_1^1}{x-\alpha_1}+\dots+\frac{A_{k_1}^1}{(x-\alpha_1)^{k_1}}\right)+\dots$

$$\dots + \left(\frac{B_1^1 x + C_1^1}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \dots + \frac{B_{l_1}^1\cdot x + C_{l_1}^1}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1}}\right) + \dots$$

Př: $\int \frac{2x^5+5x^4+7x^3+11x^2+7x+4}{(x+1)^2\cdot(x^2+1)^2}\,dx$

$$R(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2}$$

– s komplex. čísly: $\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}{x+i}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{i}{2}}{x-i}$

Důležité substituce vedoucí na integraci rac. funkcí

Značení: – rac. funkce $R(t)$

– rac. funkce ve 2 proměnných

$$R(u,v)=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)},\ \text{kde } P(u,v)=\sum_{0\le i,j\le n} a_{ij}\,u^i v^j$$

1) $\int R(e^{\alpha x})\,dx$ $\boxed{y=e^{\alpha x}}$

– substituce:

Př: $\int \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,dx=\int\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\cdot\frac{2e^{2x}}{2e^{2x}}=\int\frac{y+1}{y-1}\cdot\frac{dy}{2y}$

$y=e^{2x}$

$dy=2e^{2x}dx$

2) $\int R(\ln x)\frac{dx}{x}$, substituce: $\boxed{y=\ln x}$

$\Rightarrow =\int R(y)\,dy$

Př: $\int\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\frac{dx}{x}=\int\frac{y+1}{y-1}\,dy$

3) $\int R\left(x,\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, substituce $\boxed{y=\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}}$

Př: $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$ $\quad y=\sqrt[6]{x+1}$ $\rightarrow \int\frac{1-y^3}{1+y^2}\cdot 6y^5\,dy$

$x+1=y^6$

$dx=6y^5$

4) $\int R(\cos x,\sin x)\,dx$, substituce $\boxed{y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ – vždy funguje

$x=2\operatorname{arctg} t$ $\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$

Je-li $R(-\cos x,\sin x)=-R(\cos x,\sin x)$, lze $\boxed{t=\sin x}$

Je-li $R(\cos x,-\sin x)=-R(\cos x,\sin x)$, lze $\boxed{t=\cos x}$

Je-li $R(-\cos x,-\sin x)=R(\cos x,\sin x)$, lze $\boxed{t=\operatorname{tg} x}$

Př: $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx = G(\operatorname{tg}(x))$

$t = \operatorname{tg} x \longrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = t^2$

$x = \operatorname{arctg} t$ $\quad \sin^2 x = t^2 \cdot (1-\sin^2 x)$

$dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$ $\quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$

$\Bigg\} \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1+t^2}{1+2t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt =: G(t)\big|_{t\in\mathbb{R}}$

$x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi) =: I_k$, kde $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \operatorname{arctg} x + k\pi$

! počítáme na intervalech I_k !

- obecně platí

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = G(\operatorname{tg} x) + C_k \quad | x \in I_k$$

$\Rightarrow$ primitivní funkci pro $\mathbb{R}$ slepíme

tzn. PF na celém $\mathbb{R}$ dostaneme "slepováním" PF na jednotlivých I_k

Pozn "Eulerovy substituce" – viz. cvičení

Jednoduché diferenciální rovnice

a) Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

$$y'(x) + p(x)\,y(x) = f(x), \quad x \in (a,b), \text{ počáteční podmínky: } y(x_0) = y_0$$

- zadané: $f, p : (a,b) \to \mathbb{R}$ jsou spojité
  $x_0 \in (a,b)$ a $y_0 \in \mathbb{R}$

- Hledáme řešení $y(x)$, tzn: $y: (a,b) \to \mathbb{R}$, která splňuje DR pro všechna $x \in (a,b)$ a také poč. podmínku.

(Pozn: Je-li $p = 0 \to$ hledáme PF k f)

Metoda integračního faktoru

Nechť $y(x)$ je řešení DR s poč. podmínkami. Potom

$$y'(x) + p(x)\,y(x) = f(x) \quad \Big|\, e^{P(x)}, \text{ kde } P(x) = \int p(x)\,dx$$

$$y' \cdot e^P + e^P p \cdot y = f \cdot e^P$$

$$(y \cdot e^P)' = f \cdot e^P \quad \text{na } (a,b)$$

Je-li $Q := \int f \cdot e^P$, potom $y \cdot e^P = Q + c$

$$\underline{y = Qe^{-P} + ce^{-P}} \quad \text{na } (a,b)$$

- Spočtu c z (2) poč. podmínky
- Dokázali jsme, že úloha má jediné řešení a vyjádřili jsme ho pomocí PF P a Q.

Př: $y' + x\cdot y = x$, $y(0) = 2$

$p(x) = x$, tzn $P(x) = \frac{x^2}{2}$

$$y' e^{x^2/2} + x\cdot y\cdot e^{x^2/2} = x\cdot e^{x^2/2}$$

$$\left(y\cdot e^{x^2/2}\right)' = x e^{x^2/2}$$

$$Q(x) = \int x e^{\frac{x^2}{2}}\,dx = \int e^{z}\,dz = e^{z} = e^{x^2/2}$$

$z = \frac{x^2}{2}$
$dz = x\,dx$

$$\Rightarrow y\cdot e^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}} + C$$

$$\underline{y = 1 + C\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

$2 = 1 + C\cdot e^{0}$

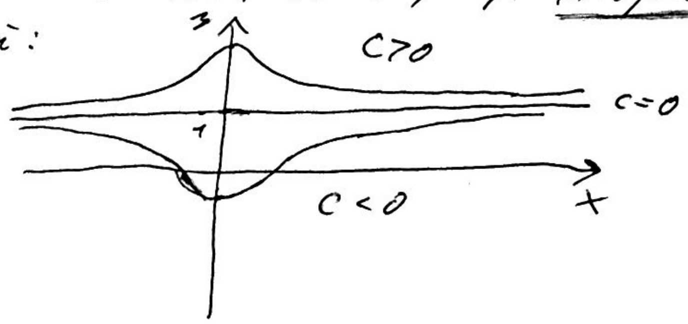
$\underline{C = 1}$

$$\Rightarrow \underline{y = 1 + 1\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

je řešení (1),(2)

POZN. Grafy řešení se nazývají <u>integrální křivky</u>

Př:



$$\boxed{y = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}}$$

Př:

Matematická analýza – přednáška XII

Př: $y' - ay = 0$, $a > 0$ konstanta ... vývoj populace

Př: $y'' + ay = 0$ ... kyvadlo

Lineární dif. rov. 2. řádu s konstantními koeficienty

(3) $y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$

(4) - počáteční podmínky: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$

- Zadané: - $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ spojitá
  - $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$
- Hledáme řešení úlohy $y(x)$ tzn.:

  $y: (a,b) \to \mathbb{R}$ splňuje (3) v každém bodě (a,b) a splňuje (4).

Definice: Nechť $k \in \mathbb{N}_0$. Potom $f \in C^k(a,b)$ (k krát spojitě diferencovatelná) pokud $f^{(k)}$ je spojitá na (a,b).

Zde $f^{(0)} := f$, $C^0(a,b)$ jsou spojité

POZN. $f \in C^k(a,b) \iff f, f', \dots, f^{(k)}$ jsou spojité na (a,b).

Skutečně, existuje-li vlastní $f^{(k-1)}$, potom $f^{(k-1)}$ je spojitá.

- Lineární dif. rov. $Ly = f$, kde ~~ale~~ diferenciální operátor L je lineární zobrazení, tzn:

$$L(\alpha \cdot y + \beta \cdot z) = \alpha L(y) + \beta \cdot L(z), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

POZN: Pro $y'(x) + p(x) y(x) = f(x)$

$Ly = y' + py$, $L: C^1(a,b) \to C(a,b)$

Pro $y'' + a_1 y' + a_0 y = f$

$Ly = y'' + a_1 y' + a_0 y$, $L: C^2(a,b) \to C(a,b)$

($C^k(a,b)$ ... prostor spojitě (k krát) diferencovatelných funkcí)

• Z linearity L dostaneme:

a) $L(y)=f$, $L(z)=f$ $\Rightarrow$ $L(y-z)=Ly-Lz=f-f=0$

"liší se o řešení $L(y-z)=0$"

b) $L(y)=f$, $L(z)=0$ $\Rightarrow$ $L(y+z)=Ly+Lz=f$

POZN: $L(y)=f$ ... nehomogenní rovnice s pravou stranou f
$L(z)=0$ ... homogenní rovnice

c) $Lz_1=0$ $Lz_2=0$ $\Rightarrow$ $L(\alpha z_1+\beta z_2)=\alpha L(z_1)+\beta L(z_2)=0$

neboli: $\operatorname{Ker} L := \{z \mid Lz=0\}$
- prostor všech řešení homogenní rovnice
- je to vektorový (lineární) prostor

POZN: - pro $y'+py=f$; $L= y'+py$
$\Rightarrow$ $\operatorname{Ker} L$ je lineární podprostor $C^1(a,b)$, dimenze 1.
- Skutečně: nechť z_1 řeší $Lz_1=0$ a poč. podmínku $z_1(x_0)=1$
je-li $y\in \operatorname{Ker} L$ (libovolné jiné řešení)
a $y(x_0)=y_0$, potom $y(x)=y_0\cdot z_1(x)$

$\Rightarrow$ z_1 je báze ~~(...)~~ $\operatorname{Ker} L$

POZN - pro $y''+a_1y'+a_0y=f$
- je $\operatorname{Ker} L$ lineární podprostor $C^2(a,b)$ dimenze 2
(- ukážeme později, že úloha (3),(4) má jediné řešení)
- Potom nechť $z_1,z_2\in \operatorname{Ker} L$ a $z_1(x_0)=1$, $z_1'(x_0)=0$
$z_2(x_0)=0$, $z_2'(x_0)=1$ $\Big\}$ jednoznačné

- Je-li $y\in \operatorname{Ker} L$, potom $y(x)=y_0 z_1(x)+y_1\cdot z_2(x)$,
pokud $y_0=y(x_0)$ a $y_1=y'(x_0)$.
(lze dosadit a přesvědčit se)

- Neboli z_1,z_2 tvoří bázi $\operatorname{Ker} L$, tzn. tvoří <u>fundamentální systém</u> (3).
(FS)

• Řešení: $y'' + a_1 y' + a_0 y = f$ (3)

1. Krok: - Najdeme FS z_1, z_2 pro homogenní rovnici (3*) $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ na (a,b)

2. Krok: - najdu jedno řešení ~~y_p~~ y_p (tzv. partikulární řešení) nehomogenní rovnice (3).

- Potom: y je libovolné řešení (3), právě když existují $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$y(x) = c_1 \cdot z_1(x) + c_2 z_2(x) + y_p(x)$$

3. Krok: - z počátečních podmínek (4) spočteme c_1, c_2.

1. Krok obecně: - Hledáme 2 nezávislé řešení homogení rovnice (3*)

- Zkusmo: $z(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

- Potom: $Lz = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0$

$$\underbrace{(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0)}_{\text{"~~charakteristický polynom~~"}} e^{\lambda x} = 0$$

, právě když $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ (CH) "**charakteristická rovnice** (3)"

a) Kořeny (CH) jsou $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

Potom: $z_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ a $z_2(x) = e^{\lambda_2 (x)}$ tvoří FS.

- důkaz: - lineární nezávislost:

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = 0$$

$$c_1 + c_2 \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} = 0 \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$c_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} = 0$$

$$\underline{c_2 = 0} \Rightarrow \underline{c_1 = 0} \Rightarrow LN$$

b) Kořeny (CH) jsou $\lambda_1, \lambda_2 = a \pm i b$, $b \neq 0$ (komplexně sdružené kořeny)

Potom: 2 nezávislá řešení:

$$z_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad z_2 = e^{\lambda_2 x}$$

$$z_1 = e^{ax} \cdot (\cos(bx) + i \sin(bx)), \quad z_2 = e^{ax} \cdot (\cos(bx) - i \sin(bx))$$

Reálný FS je např.:

$$\tilde{z}_1 := \frac{z_1 + z_2}{2} = e^{ax} \cdot \cos(bx)$$

$$\tilde{z}_2 := \frac{z_1 - z_2}{2i} = e^{ax} \cdot \sin(bx)$$

c) (CH) má dvojná sobný, reálný kořen $\lambda_0 \in \mathbb{R}$

- Potom $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda-\lambda_0)^2 = \lambda^2 - 2\lambda_0\lambda + \lambda_0^2 = 0$
- Potom: $u_1(x) = e^{\lambda_0 x}$ a $u_2(x) = x \cdot e^{\lambda_0 x}$

u_1 a u_2 tvoří FS.

1) dokážeme, že u_2 je řešením (3*):

$u_2 = x e^{\lambda_0 x}$

$u_2' = e^{\lambda_0 x} + x \cdot \lambda_0 e^{\lambda_0 x} = (1+\lambda_0 x) e^{\lambda_0 x}$

$u_2'' = \cancel{(\lambda_0 + \lambda_0^2 x)} = (2\lambda_0 + \lambda_0^2 x) e^{\lambda_0 x}$

platí $(a_1 = -2\lambda_0)$, $a_0 = \lambda_0^2$

- dosadíme:

$L u_2 = (2\lambda_0 + \lambda_0^2 x) \cancel{e^{\lambda_0 x} - 2\lambda_0 - 2\lambda_0^2 x + \lambda_0^2 x}$

$= (2\lambda_0 + \lambda_0^2 x - 2\lambda_0 - 2\lambda_0^2 x + \lambda_0^2 x) e^{\lambda_0 x} = 0$

2) dokážeme, že jsou LN

$c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 \cdot x e^{\lambda_0 x} = 0$

$c_1 + c_2 x = 0 \quad / \frac{d}{dx}$

$\underline{c_2 = 0} \Rightarrow \underline{c_1 = 0} \Rightarrow$ LN

2. krok obecně: Partikulární řešení $Ly = f$

- 3 metody: a) uhodnout
  b) pravá strana má speciální tvar
  c) variace konstant

Věta 8: Nechť $f(x) = e^{\mu x}(S(x) \cdot \sin(\nu x) + T(x) \cdot \cos(\nu x))$,

kde $S(x), T(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše m ($st \leq m$)

- Nechť $k \in \mathbb{N}_0$ je násobnost $\mu + i\nu$ jako kořenu charakterist. rovnice (CH).
- Potom existují $\tilde{S}, \tilde{T}$ ($st \leq m$) tak, že

$y_p(x) = x^k e^{\mu x}(\tilde{S}(x) \sin(\nu x) + \tilde{T}(x) \cos(\nu x))$ řeší (3).

(Nebudeme dokazovat)

Pozn.: a) Když $S=0, T=0$, může být $\tilde{S} \neq 0$, $\tilde{T} \neq 0$

b) Nebudeme dokazovat

Př: $y'' + 3y' + 2y = e^{x} + e^{-x}$, $x \in R$

1. Krok: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ (CH)

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$

FS: e^{-x}, e^{-2x}

2. Krok: speciální prav. strana

a) $f := e^{x}$ $\mu = 1$, $\nu = 0$, $S = 0$, $T = 1$

$\mu + i\nu = 1$ není kořen (CH)

$\Rightarrow$ násobnost 0

- Hledáme řešení ve tvaru: $y_{P1} = A \cdot e^{x}$

$L y_{P1} = Ae^{x} + 3Ae^{x} + 2Ae^{x} = e^{x}$

$6Ae^{x} = e^{x}$

$A = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow$ $y_{P1} = \frac{1}{6} e^{x}$

b) $f := e^{-x}$ $\mu = -1$, $\nu = 0$

$\mu + i\nu = -1$ je kořen (CH)

$\Rightarrow y_{P2} = x e^{-x} \cdot B$ 1.2

$y_{P2}' = (B - Bx) e^{-x}$ 1.3

$y_{P2}'' = (-B + Bx - B) e^{-x}$

$L y_{P2} = (-2B + Bx + 3B - \cancel{3Bx} + \cancel{2Bx}) e^{-x} = e^{-x}$

$Be^{-x} = e^{-x}$

$B = 1$ $\Rightarrow y_{P2} = xe^{-x}$

Obecné řešení:

$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{6} e^{x} + x \cdot e^{-1}$, kde $c_1, c_2 \in R$

POZN: pravou stranu lze rozložit na "jednodušší kousky"