Matematická analýza - cvičení I

- 3 testy : - 1. za 10 bodů, pak za 20 bodů, alespoň 25 bodů => zápočet
  - 5 bodů lze nahradit aktivní účastí
  - 2 opravné termíny (podmínka: účast na 10 ze 14 cvičení)
- příprava příkladu na příští cvičení

Př.: $\frac{2}{1-3i}\frac{(1+3i)}{(1+3i)} = \frac{2+6i}{1+9} = \frac{\cancel{2}^{1}+\cancel{6}^{3}i}{\cancel{10}\,5} = \frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$

Př.: $(1+i\sqrt{3})^3 \cancel{(1+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} =$ $\quad |z| = \sqrt{1+3} = 2$

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $\quad \cos\varphi = \frac{1}{2} \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$

$$\left[2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^3 = 8\cdot(\cos\pi + i\sin\pi) = -8 + i\cdot 0$$

Př.: $-2-2i$, $|z| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos\varphi = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \varphi = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$

Př.: $1 + i^{123} = 1 + i^3 = 1 - i$

Př.: $r\cdot e^{i\varphi}$, $|z| = r \quad \varphi = \varphi$

Př.: Dokažte: $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$

Př.: $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

$z - \bar{z} = a + bi - a + bi = 2bi = 2i\cdot\mathrm{Im}(z)$

Př.: $|\bar{z}| = |z| \quad z = a + bi \quad \bar{z} = a - bi$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad |\bar{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2} \Rightarrow |z| = |\bar{z}|$

Př.: $|z_1\cdot z_2| = |z_1||z_2| \quad z_1\cdot z_2 = (a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)$

$z_1 = a_1 + b_1 i$ $\quad = a_1a_2 + a_1b_2 i + a_2b_1 i - b_1b_2$

$z_2 = a_2 + b_2 i$ $\quad = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

$|z_1 z_2| \quad \sqrt{(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2} = \sqrt{a_1^2a_2^2 - \cancel{2a_1a_2b_1b_2} + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + \cancel{2a_1a_2b_1b_2} + a_2^2b_1^2}$

$|z_1|\cdot|z_2| = \sqrt{(a_1^2+b_1^2)\cdot(a_2^2+b_2^2)} = \sqrt{a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + b_1^2b_2^2}$

2 Mat. ind. $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$

DÚ.

Řešte v C $x^6=-1$

$$|x|^6\cdot(\cos 6\varphi+i\sin 6\varphi)=\cos(\pi+2k\pi)+i\cdot\sin(\pi+2k\pi)$$

$|x|^6=1$ $\quad 6\varphi=\dfrac{\pi+2k\pi}{6}$

$|x|=1$

$x_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ $\qquad x_4=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$

$x_2=\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}$ $\qquad x_5=\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}$

$x_3=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$ $\qquad x_6=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}$

Př: Dokažte: $C\setminus(A\cup B)=(C\setminus A)\cap(C\setminus B)$

Př: Dokažte $(A\Rightarrow B)\equiv(B\vee\neg A)$

A	B	$\neg A$	$A\Rightarrow B$	$B\vee\neg A$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Př: Dokažte: $(A\Rightarrow B)\equiv(\neg B\Rightarrow\neg A)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A\Rightarrow B$	$\neg B\Rightarrow\neg A$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

$\neg(A\Rightarrow B)\equiv(A\wedge\neg B)$

$\neg(A\Rightarrow B)$	$A\wedge\neg B$
0	0
0	0
1	1
0	0

Definice:

$$\boxed{e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi}$$

Dokažte: $|a+b|\le|a|+|b|$ $\quad a,b\in R$

$a\ge 0\wedge b\ge 0$

$a+b=a+b$

$a\le 0\wedge b<0$

$|a+b|=-a-b$

$|a|+|b|=-a-b$

$a\ge 0\wedge b<0\wedge a+b\ge 0$

$|a+b|=a+b=|a|-|b|$

$|a|+|b|=a-b$

$a\ge 0\wedge b<0\wedge a+b<0$

$|a|+|b|=a-b$

$|a+b|=-a-b=-|a|+|b|$

$-|a|+|b|\le|a|+|b|$

~~$a+b<a$ pro $|b|>|a|$~~

$|a|-|b|<|a|+|b|$

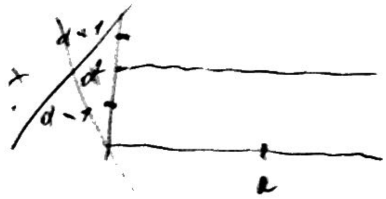
+ záměna a,b

$\Rightarrow$ stejné pro $b\ge 0\wedge a<0\wedge b+a\ge 0$

atd.

Př.: Platí výrok

$\forall a\in R \quad \exists \varepsilon>0 \quad \exists d\in R \quad \forall x\in R: \quad (x\in(a,a+\varepsilon)) \Leftrightarrow |x-d|<1$



Př.: MI $\quad n\le 2^n$

$n=1 \qquad 1\le 2$

předpoklad: $\quad k\le 2^k \ ; \ k\in$.

chceme dokázat $\quad k+1\le 2^{k+1}$

$\cancel{k\le 2^{k+1}}$

$\cancel{k+1\le 2\cdot k}$

$\cancel{-k\le -1} \quad /\cdot(-1)$

$\cancel{k\ge 1}$ platí

$k+1\le 2^{k+1}$

$k\le 2^{k+1}-1$

$2^k\le 2^{k+1}-1$

$\cancel{2^k\le 2^k}$

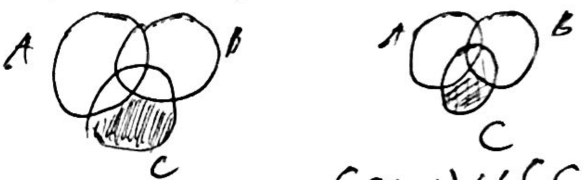
$2^{k+1}-2^k-1\ge 0$

$2^k-1\ge 0$

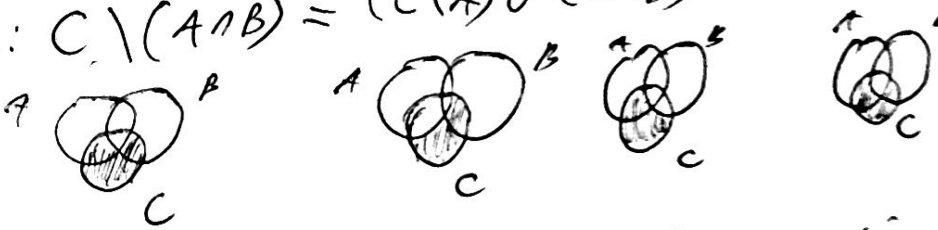
$2^k\ge 2^0$

$k\ge 0$

Př.: $C\setminus(A\cup B)=(C\setminus A)\cap(C\setminus B)$



Př.: $C\setminus(A\cap B)=(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$



a) • $\quad x\in C\setminus(A\cap B) \quad \Rightarrow \quad x\in C \wedge x\notin A\wedge B$

$\neg(x\in(A\cap B))$

$\neg(x\in A\wedge x\in B)$

$\Rightarrow x\in C \wedge (x\notin A \vee x\notin B)$

b) • $\quad x\in(C\setminus A)\cup(C\setminus B) \Rightarrow x\in(C\setminus A)\vee x\in(C\setminus B)$

$(x\in C\wedge x\notin A)\vee (x\in C\wedge x\notin B)$

$\Rightarrow x\in C\wedge(x\notin A\vee x\notin B)$

$A_i \ , i \in N \quad B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad$ Pokažte $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \Leftarrow (\forall n \in N) \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

↑ Platí, protože ↗ je "silnější" výrok.

$$\Leftrightarrow B_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \Leftrightarrow (\forall m < n, \in N)\ B_m \subset B_n$$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{m} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{m+h} A_i$$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Důkaz inkluzí:} \\ x \in (\text{první množina}) \\ \Rightarrow x \in (\text{druhá množina} \\ \wedge\ x \in (\text{druhá množina}) \\ \Rightarrow x \in (\text{první množina})\end{array}}$

Př: $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$

$\underset{\sim}{k=1} \quad B_1 = A_1$

POZN.: $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \Rightarrow \overset{m<n}{B_m \subseteq B_n} \qquad x \in \bigcup_{i=1}^{n} B_i \Rightarrow x \in B_j \ , j \in \{1, \dots, n\}$

$B_m \subseteq B_n \Rightarrow B_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \qquad \Rightarrow x \in B_n$

Př:

$A_i \ , i \in N \qquad B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

Pokažte $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

$$B_i = \bigcup_{j=1}^{i} A_j \supseteq A_i \qquad B_i \supseteq A_i$$

$$x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\Rightarrow \exists i,\ x \in A_i \Rightarrow \exists,\ x \in B_i$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

- opačná inkluze:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \Rightarrow \exists i : x \in B_i \Rightarrow \exists j \leq i : x \in A_j \Rightarrow x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

Platí? $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: (x \in (a, a+\varepsilon)) \iff |x - \alpha| < 1$

$|x - \alpha| < 1$

$x \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$ $\qquad x \in (a, a + \varepsilon)$

$a = \alpha - 1$

$a + \varepsilon = \alpha + 1$ $\quad \} \ \underline{\varepsilon = 2}$

$\alpha = a + 1$

- web: www.karlin.mff.cuni.cz/~dpokorny
  - příklady na DÚ

Matematická analýza – doplnění ze skript
– po přednášce III

a	b	c	$(a\wedge b)\vee c$
0	0	0	
0	0	1	

$(a\vee c)\wedge(a\vee\dots$

Tvrzení: $(A\setminus B)\cup(A\cap B)=A$

$(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge x\in B)\Leftrightarrow$

$[x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B)]\wedge[x\notin B\vee(x\in A\wedge x\in B)]$

$[(x\in A\vee x\in A)\wedge(x\in A\vee x\in B)]\wedge[(x\notin B\vee x\in A)\wedge(x\notin B\vee x\in B)]$

$[x\in A\wedge(x\in A\vee x\in B)]\wedge(x\notin B\vee x\in A)$

$[(x\in A\wedge x\in A)\vee(x\in A\wedge x\in B)]\wedge(x\notin B\vee x\in A)\Leftrightarrow\quad x\in A$

$x\in(A\cap B)\Rightarrow x\in A$
$x\in(A\setminus B)\Rightarrow x\in A$
$\Big\}\ x\in(A\setminus B)\cup(A\cap B)\subset A$

$x\in A\Rightarrow\ x\in(A\cap B)$

Tvrzení: $P\setminus\bigcup_{M\in m}M=\bigcap_{M\in M}P\setminus M$

nejdříve: $P\setminus\bigcup_{M\in m}M\subset\bigcap_{M\in m}P\setminus M$

$x\in(P\setminus\bigcup_{M\in m}M)\Rightarrow x\in P$, ale nepatří do žádné M
$\Rightarrow x\in P\setminus M$ pro všechna M

teď: $\bigcap_{M\in m}P\setminus M\subset P\setminus\bigcup_{M\in m}M$

$x\in P\setminus M$ pro každé M, tedy $x\in P$ ale $x\notin M$ pro žádné M

Základní vlastnosti inverze

Nechť $\varphi: A \to B$ je prosté zobrazení. Pak

1) φ^{-1} je prosté a $R_{\varphi^{-1}} = D_\varphi$
2) $\varphi^{-1} \circ \varphi = id$ na D_φ a $\varphi \circ \varphi^{-1} = id$ na $D_{\varphi^{-1}}$
3) $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$

Důkaz: 1) $\varphi^{-1}(x_1) = \varphi^{-1}(x_2) = y$ pro $x_1, x_2 \in D_{\varphi^{-1}}$

podle definice φ^{-1}:

$\varphi(y) = x_1 = x_2$

φ je prosté $\Rightarrow \varphi^{-1}$ je prosté.

2) $R_{\varphi^{-1}} = D_\varphi$.

$y \in R_{\varphi^{-1}}$ tehdy když $\varphi^{-1}(x) = y$

$x = \varphi(y) \Rightarrow y \in D_\varphi$

2) $x \in D_\varphi$, $\tilde{x} = \varphi^{-1}(\varphi(x))$

$\varphi(\tilde{x}) = \varphi(x)$

$\tilde{x} = x$ také $\varphi(\varphi^{-1}(x))$

3) $D_{\varphi^{-1}} = R_\varphi$ a $R_{\varphi^{-1}} = D_\varphi \to D_{(\varphi^{-1})^{-1}} = R_{\varphi^{-1}} = D_\varphi$

$(\varphi^{-1})^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(y) \Leftrightarrow \varphi(x) = y$

Tvrzení: Nechť φ, ψ jsou prostá zobrazení a $D_\psi \cap R_\varphi \neq \emptyset$

Pak $\psi \circ \varphi$ je prosté zobrazení.

Důkaz: $x_1, x_2 \in D_{\psi \circ \varphi}$ $\psi(\varphi(x_1)) = \psi(\varphi(x_2))$

$\cancel{\psi(y_1) = \psi}(y_1)$ $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

$x_1 = x_2$

Supremum a Infimum.

Nechť A je množina s úplným uspořádáním a $B \subset A$.

Prvek $S \in A$ nazveme supremem B jestliže je nejmenší horní závorou množiny B, tzn.

1) $x \in B \Rightarrow x \leq S$
2) $(y \in A \wedge y < S) \Rightarrow (\exists x \in B \ \ x > y)$

Prvek $s \in A$ nazveme infimem B, jestliže je největší dolní závorou množiny B, tzn.

1) $x \in B \Rightarrow x \geq s$
2) $(y \in A \wedge y > s) \Rightarrow (\exists x \in B \ \ x < y)$

Příklad: $B = [0,1) \subset R$

- B je omezená, plyne z def. $0 \leq x < 1$
- $\min B = 0$, tzn $0 \in B \wedge (0 \leq x, x \in B)$
- $\max B$ neexistuje, důkaz sporem: $M = \max B$

$$\Rightarrow M \in B \wedge M \geq x$$
$$0 \leq M < 1$$
$$0 \leq \frac{M+M}{2} < \frac{M+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{M+1}{2} \in B, \ \frac{M+1}{2} > M \text{ , spor}$$

- $\inf B = 0$, 1) $0 \leq x, x \in B$

  2) $(\forall y \in R, y > 0) \ \exists x \in B : x < y$

  - zde stačí $x = 0 \Rightarrow 0 < y \wedge y > 0$, ~~nelze~~ platí 2.

- $\sup B = 1$, 1) platí $1 \geq x, x \in B$

  2) $(\underbrace{\forall y \in R, y < 1}_{\text{pro takováto } y}) \Rightarrow \exists x \in B :$

  $x > y$

  např. $x = \frac{y+1}{2}$

  $\left(\frac{y+1}{2}\right) > y$ ✓

  $\wedge \frac{y+1}{2} \in B$ ✓

Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$, A, B neprázdné, shora omezené

$A \cup B$ shora omezená $\Rightarrow$ má supremum

$A \subset (A \cup B) \Rightarrow \sup(A \cup B)$ je nějaká horní závora A

$\Rightarrow \sup A \leq \sup(A \cup B)$

analogicky pro B:

$\sup B \leq \sup(A \cup B)$

$\Big\}\ \sup(A \cup B) \geq \max\{\sup A, \sup B\}$

- důkaz obrácené nerovnosti

$S > \max\{\sup A, \sup B\}$, $\tilde{S}$ ... střed $(\max\{\sup A, \sup B\}, S)$

$\Rightarrow \tilde{S}$ je horní závora $A \cup B$

$\Rightarrow S$ nemůže být supremum (nesplňuje 2.)

$\Rightarrow \sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$

$\Rightarrow \boxed{\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}}$

- Teď: Pokud existuje $\sup(A \cap B)$ pak

$\boxed{\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}}$

$(A \cap B) \subset A \Rightarrow \sup A$ je nějaká horní závora $A \cap B$

$\sup A \geq \sup(A \cap B)$

také pro B | $\sup B \geq \sup(A \cap B)$

- Nechť $A \subset \mathbb{R}$, Definujme $-A := \{-x : x \in A\}$
  Ukažte, že $\sup A$ existuje v $\mathbb{R}$ právě tehdy, když v $\mathbb{R}$ existuje $\inf(-A)$. Navíc pak $\inf(-A) = -\sup(A)$

- $S = \sup A \in R \Rightarrow \forall x \in A : x \leq S$
$$-x \geq -S \Rightarrow -S \text{ je dolní závora } -A$$

$(-S)$ také splňuje 2. vlastnost infima
- Kdyby ne, tak: $\exists \varepsilon > 0 \quad -S + \varepsilon$ je ~~horní~~ dolní záv. $-A$

$\Rightarrow S - \varepsilon$ horní závora A

$\Rightarrow S$ není supremum, **spor**

$\inf(-A) = -\sup(A)$

- Nechť $f, g : (0,1) \to R$, co platí pro $\sup(f+g)$?
  - z definic: $\left.\begin{array}{l} f(x) \leq \sup f \\ g(x) \leq \sup g \end{array}\right\} f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g$ pro $x \in (0;1)$

$\Rightarrow \boxed{\sup(f(x) + g(x)) \leq \sup f + \sup g}$

- nelze vylepšit ($f \equiv 1 \equiv g$

Matematická analýza - cvičení II

zápočtové testy: 1) 24.10.
2) 28.11.
3) 19.12.

Př: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\underline{n=1}$ $\quad 1^2 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$

$1=1$

$\underline{n \to n+1}$ $\quad 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$= \dfrac{(n+1)(2n^2+n)+6(n+1)^2}{6} = \dfrac{(n+1)\cdot(2n^2+n+6n+6)}{6}$

$= \dfrac{(n+1)(n+2)(n+\frac{3}{2})\cdot 2}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$2n^2+7n+6$
$D=49-4\cdot 2\cdot 6$
$D=49-48$
$D=1$
$n_{1,2}=\dfrac{-7\pm 1}{4} \begin{cases} -\frac{8}{4} \\ -\frac{6}{4} \end{cases}$

Př: $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1+\sum_{i=1}^{n} x_i$

$x_i \geq -2$, všechny x_i stejná znaménka

$n=1$ $\quad (1+x_1) \geq 1+x_1$

$n=2$ $\quad (1+x_1)(1+x_2) \geq 1+x_1+x_2$

$1+x_2+x_1+x_1x_2 \geq 1+x_1+x_2$

$x_1x_2 \geq 0$ ✓

$n \to n+1$ $\quad$ platí $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_n$

chceme dokázat $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)(1+x_{n+1}) \geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}$

pro $x_i \geq -1$ $\quad (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)(1+x_{n+1}) \geq (1+x_1+x_2+\ldots+x_n)(1+x_{n+1})$

$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{n+1}) \geq (1+x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}$
$+\underbrace{x_{n+1}(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)}_{\text{kladné číslo}}$

$(1+x_1)\ldots(1+x_{n+1}) \geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}$

pro $x_i \geq -2$
$n \to n+2$
$1(n+1)$

$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\overbrace{(1+x_{n+1})(1+x_{n+2})}^{\text{kladné}} \geq (1+x_1+x_2+\ldots+x_n)(1+x_{n+1})(1+x_{n+2})$

$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{n+2}) \geq (1+\ldots+x_n)(1+x_{n+2}+x_{n+1}+x_{n+1}x_{n+2})$

$\geq 1+\ldots+x_n+x_{n+2}(1+\ldots+x_n)+x_{n+1}(1+\ldots+x_n)$
$+x_{n+1}x_{n+2}(1+\ldots+x_n)$

$\geq 1+\ldots+x_n+x_{n+1}+x_{n+1}(x_1+\ldots+x_n)+x_{n+2}$
$+x_{n+2}(x_1+\ldots+x_n)+x_{n+1}x_{n+2}+x_{n+1}x_{n+2}(x_1+\ldots+x_n)$

Př: $(1+x)^n \ge 1+nx$

$n=1 \quad (1+x) \ge 1+x$ ✓

$n=2 \quad (1+x)^2 \ge 1+2x \qquad \boxed{x \ge -2}$

$1 \cancel{+2x} + x^2 \ge \cancel{1+2x}$

$x^2 \ge 0$

$(1+x)^{n+2} \ge 1+(n+2)x$

$n \to n+2 \quad (1+x)^n \cdot (1+x)^2 \ge (1+nx)(1+x)^2$

$(1+x)^{n+2} \ge (1+nx)(1+2x+x^2)$

$(1+x)^{n+2} \ge 1+2x+x^2+nx+2nx^2+nx^3$

stačí dokázat

$\cancel{1+(n+1)x \ge 1+2x+x^2+nx+2nx^2+nx^3}$

$\cancel{nx+x \ge 2x+x^2+nx+2nx^2+nx^3}$

$\cancel{1+(n+2)x \ge} \; 1+2x+x^2+nx+2nx^2+nx^3 \ge 1+(n+2)x$

$\cancel{1+nx+2x} \ge \cancel{1} + \cancel{2x} + x^2 + \cancel{nx} + 2nx^2 + nx^3 \ge \cancel{1} + \cancel{nx} + \cancel{2x}$

$x^2 \cdot (1+2n+nx) \ge 0$

$1+2n+nx \ge 0$

$nx \ge -1-2n$

$x \ge -2-\frac{1}{n}$

platí pro $x \ge -2$

$$\boxed{\text{DÚ 5)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x^2}+1}{\sqrt{\frac{3}{x^4}-\frac{6}{x^2}+5}}}$$

Př: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

$n=0 \quad \binom{0}{0} = 2^0 \qquad n=1 \quad \binom{1}{0}+\binom{1}{1} = 2^1$

$1=1 \qquad\qquad 2=2$ ✓

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}$$

$$\boxed{k \ge 1,\; k \le n}$$

$n \to n+1 \quad \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$

$\cancel{\sum_{k=0}^{n+1}} \left(\binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] + \binom{n+1}{n+1} \right)$

$= \underbrace{1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}} + 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1}$

$= 2^n + \underbrace{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + 1}_{2^n}$

$= 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = \underline{\underline{2^{n+1}}}$

Př: a) $M = (0; 1]$

$\max M = 1 \qquad \inf M = 0$

$\sup M = 1 \qquad \min M$ neexistuje

~~Důkaz: $\inf M = 0$: $\forall x \in M: 0 \geq x$~~

Důkaz: $\min M$ neexistuje

– důkaz sporem: $\min M$ existuje

$0 < \min M \leq 1$

$0 < \frac{\min M + \min M}{2} < \frac{\min M + 1}{2} \leq \frac{1+1}{2} = 1$

$\frac{\min M + 1}{2} \in M \wedge \frac{\min M + 1}{2} > \min M$

$\Rightarrow$ spor

Důkaz: $\inf M = 0$: 1) $\forall x \in M: 0 \leq x$

2) $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}\ \ \varepsilon > 0) \Rightarrow \exists x \in M: x < \varepsilon$

např.: $x = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2\varepsilon - \varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$. $i\left(\frac{\varepsilon}{2} > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} \in M\right)$

$\wedge \left(\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\right)$

Př: $[0; 1]$ $\sup M = \max M = 1$

$\inf M = \min M = 0$

Př: $(0; \infty)$

- neexistuje maximum: – důkaz sporem: – existuje M a $2x$ $(x \in M)$ $(a \in M)$ $2a$ taky $\in M$ $\Rightarrow$ a nemůže být supremum

- supremum neexistuje:
  – předpokládám: existuje horní závora ε
  $\Rightarrow 2\varepsilon$ je horní závora
  $\Rightarrow \varepsilon$ nemůže být supremum, spor

- $\inf M = 0$ (viz. předchozí)

b) $M = \{ \frac{m}{m+n} ; m, n \in N \}$

~~$\sup M = \max M \neq \frac{1}{2}$~~
~~$\inf M$~~

• $\frac{m}{m+n} \leq \frac{1}{2} \quad | \cdot 2(m+n)$

$2m \leq m + n$

$m \leq n$

neplatí

$\sup M = 1$

- důkaz: $1 \geq \frac{m}{m+n} \quad \forall m, n \in N$

- Sporem: $(1-\varepsilon)$ je horní závora pro nějaké $\varepsilon > 0$

$$\frac{m}{m+n} \leq 1-\varepsilon$$

$$m \leq (m+n)(1-\varepsilon)$$

$$\cancel{m} \leq \cancel{m} - m\varepsilon + n - n\varepsilon$$

$$\varepsilon m \leq (1-\varepsilon) n$$

$$m \leq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} n$$

stačí najít m, n, které toto nesplňují
$\Rightarrow (1-\varepsilon)$ není horní závora
- spor

- podle Archimedova axiomu existuje pro každé $\varepsilon > 0$ a $m \in N$ nějaké n přirozené, že $m > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} n$

$\Rightarrow \underline{\sup M = 1}$

• $\inf M = 0$

- důkaz 1) $0 \leq \frac{m}{m+n} \quad \forall m, n \in N$

2) - sporem $(0+\varepsilon)$ je dolní závora pro nějaké $\varepsilon > 0$

$$\frac{m}{m+n} \leq 0 + \varepsilon$$

$$m \leq \varepsilon (m+n)$$

$$m \leq \varepsilon m + \varepsilon n$$

$$m \cdot (1-\varepsilon) \leq \varepsilon n$$

$$n \geq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} m \qquad \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} n \geq m$$

- podle Archimedova axiomu existuje $\forall \varepsilon \in R, \varepsilon > 0$ nějaké n takové, že $m > \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} n$
- spor

$\Rightarrow \underline{\inf M = 0}$

• min M $\quad M = \{ \frac{m}{m+n} , m,n \in N \}$

neexistuje $\left(\frac{m}{m+n} > 0 \right)$

• max M

neexistuje $\left(\frac{m}{m+n} < 1 \right)$

Př: $\sup(A+B) = \sup A + \sup B \quad A+B = \{ x, x = \alpha+\beta, \alpha \in A, \beta \in B \}$

a ... horní závora A
b ... horní hr. B $\Big\}$ $a+b$ je horní závora $A+B$

dokazujeme: $(a \wedge b) \Rightarrow (a+b)$

~~$c \leq a+b$~~, $c \in A+B$

$x \in (A+B)$: $\quad x = \alpha + \beta$ ~~$\alpha + b$~~, $\alpha \in A$, $\beta \in B$

$x = \alpha + \beta \leq a + b$ (horní závory)

$\Rightarrow$ $a+b$ je horní závora $A+B$

• Důkaz $(a+b)$ je supremum $A+B$

- Sporem: - nechť existuje $\varepsilon > 0$, že $(a+b-\varepsilon)$ je horní závora

$\sup A = a \Rightarrow a - \frac{\varepsilon}{2}$ není horní odhad A

$\Rightarrow$ existuje $\exists \alpha \in A: \ \alpha > a - \frac{\varepsilon}{2}$

$\sup B = b \Rightarrow b - \frac{\varepsilon}{2}$ není horní odhad B

$\Rightarrow \exists \beta \in B: \ \beta > b - \frac{\varepsilon}{2}$

• položíme $x = \alpha + \beta$ (definice)

$$\alpha + \beta > a - \frac{\varepsilon}{2} + b - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\alpha + \beta > a + b - \varepsilon$$

spor

$\Rightarrow (a+b)$ je supremum $(A+B)$

Matematická analýza – příklady limit

Definice: Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $A \in \mathbb{R}^*$.
Řekneme, že A je limitou funkce f pro x jdoucí k x_0, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že
$$x \in P_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$
- píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Př: $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, bod $x_0 = 1$, ukážeme že $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$
- libovolné $\varepsilon > 0$
- chceme najít δ aby: $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow 0 \leq |f(x) - 1| < \varepsilon$
- platí $|f(x) - 1| = |x - 1|$
- stačí volit $\delta := \varepsilon$ (platí $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

Př: - podobně pro $f(x) = c$

Př: $f(x) \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$ Tvrdíme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

- platí: $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow |f(x) - 0| = 0 < \varepsilon$, $\forall \varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$

Př: $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, bod $x_0 = 2$. Ukažme, že $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 4$
- zvolíme libovolné $\varepsilon \in (0, 2)$
- pro $x \in (\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$ pak máme $4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon$, tzn. $|x^2 - 4| < \varepsilon$
- zvolíme $\left.\begin{array}{l} \delta_1 = 2 - \sqrt{4-\varepsilon}, \ \delta_1 > 0 \\ \delta_2 = \sqrt{4+\varepsilon} - 2, \ \delta_2 > 0 \end{array}\right\} \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$
- platí: $(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}) = (2 - \delta_1, 2 + \delta_2) \supset (2 - \delta, 2 + \delta)$
- celkově: $x \in (2 - \delta, 2 + \delta) \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$

Limita absolutní hodnoty

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$.
Jestliže $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ pak $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |A|$

- **Důkaz:** - zvolíme $\varepsilon > 0$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že
$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ pro } 0 < |x - x_0| < \delta$$
- trojúh. nerovnost
$$||f(x)| - |A|| \leq |f(x) - A| \text{ pro } x \in D_f$$
- proto
$$||f(x)| - |A|| < \varepsilon \text{ pro } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Aritmetika limit

Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}$ a nechť $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = B$. Pak:

a) $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = A + B$

b) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = AB$

c) pokud $B \neq 0$ máme $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

Př: $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x}{2x + 1} = \frac{\lim_{x \to 0} (x^2 + 3x)}{\lim_{x \to 0} (2x + 1)} = \frac{\lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} x + (\lim_{x \to 0} 3) \cdot \lim_{x \to 0} x}{\lim_{x \to 0} 2 \cdot \lim_{x \to 0} x + \lim_{x \to 0} 1} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$

Př: $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = \underline{0}$

Př: $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x \cancel{(x-1)^2}}{\cancel{(x-1)^2}(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$

O limitě složené funkce I

Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, dále nechť $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$,

$\lim_{y \to A} g(y) = B \in \mathbb{R}$ a navíc $f(x) \neq A$ na jistém prstencovém
$\Updownarrow$
okolí bodu x_0. Pak $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = B$ [ekvivalentní: $g(A) = B$]

O limitě složené funkce II

Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, dále nechť $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$

a funkce g je spojitá v A. Pak

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(A)$$

Př: $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, kde $a > 0$

Důkaz: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ musí platit $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$

- vezmeme $\delta = \min(\varepsilon \sqrt{a}, a)$
- předpokládáme $|x - a| < \delta$
- protože platí $\sqrt{x} + \sqrt{a} > \sqrt{a}$, dostaneme

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} \leq \varepsilon$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x^2}+1}{\sqrt{\frac{3}{x^4}-\frac{6}{x^2}+5}} \cdot \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2+x^2}{\sqrt{3-6x^2+5x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{2+x^2}{\sqrt{3}\sqrt{1-2x^2+\frac{5}{3}x^4}}$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{3-6x^2+5x^4} = \sqrt{\underbrace{\lim_{x\to 0} 3-6x^2+5x^4}_{A}} \quad ?$$

$\lim_{x\to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje δ takové, že

$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow 0 \le |f(x)-\sqrt{3}| < \varepsilon$

$x \in (3-\delta, 3+\delta)$ $\qquad |\sqrt{x}-\sqrt{3}| < \varepsilon$

pro $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ $\qquad \sqrt{x} \in (\sqrt{3}-\varepsilon, \sqrt{3}+\varepsilon)$

$x \in (3-\frac{\varepsilon}{2}, 3+\frac{\varepsilon}{2})$ $\qquad \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{3}|^2 < \varepsilon^2$

$\sqrt{x} \in (\sqrt{3-\frac{\varepsilon}{2}}, \sqrt{3+\frac{\varepsilon}{2}})$ $\qquad x - 2\sqrt{3}\sqrt{x} + 3 < \varepsilon^2$

$x < \varepsilon^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{x} - 3$

$\cancel{\sqrt{3-\frac{\varepsilon}{2}}}$ $\cancel{\sqrt{3+\frac{\varepsilon}{2}}}$ $\qquad \sqrt{3}+\varepsilon - \sqrt{3+\frac{\varepsilon}{2}} > 0$

$\sqrt{3}+\varepsilon > \sqrt{3+\frac{\varepsilon}{2}}$

$3+2\sqrt{3}\varepsilon+\varepsilon^2 > 3+\frac{\varepsilon}{2}$

$\varepsilon^2 + \frac{4\sqrt{3}}{2}\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} > 0$

$\varepsilon^2 + \frac{4\sqrt{3}-1}{2}\varepsilon > 0$ ✓

$x \in (3-\varepsilon^2, 3+\varepsilon^2)$

$\varepsilon^2 < 3 \quad \varepsilon \in (0, 3)$

$\sqrt{x} \in (\sqrt{3-\varepsilon^2}, \sqrt{3+\varepsilon^2})$

$\underbrace{\sqrt{3}-\varepsilon < \sqrt{3-\varepsilon^2}} < x < \underbrace{\sqrt{3+\varepsilon^2} < \sqrt{3}+\varepsilon}$

$\sqrt{3} < \sqrt{3-\varepsilon^2}+\varepsilon$

$3 < 3-\varepsilon^2+2\sqrt{3-\varepsilon^2}+\varepsilon^2$

$0 < 2\sqrt{3-\varepsilon^2}$ ✓

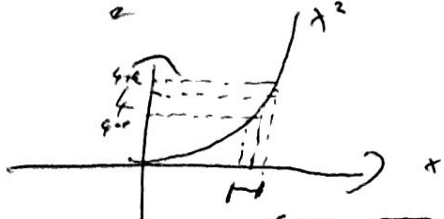
$|\sqrt{x}-\sqrt{3}| < \varepsilon$

$\delta = \min(\varepsilon\sqrt{a}, a) \quad \Rightarrow \quad |x-a| < \delta$

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} \le \varepsilon$$

$x \in (a-\varepsilon\sqrt{a}, a+\varepsilon\sqrt{a})$

Př:



$x \in (\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$ chci vyjádřit jako $x \in (2-\delta, 2+\delta)$

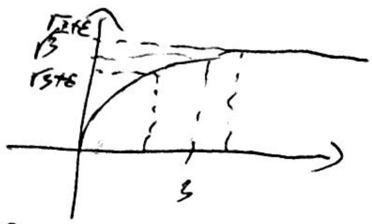
$$2-\delta_1 = \sqrt{4-\varepsilon} \qquad 2+\delta_2 = \sqrt{4+\varepsilon}$$
$$\delta_1 = 2-\sqrt{4-\varepsilon} \qquad \delta_2 = \sqrt{4+\varepsilon} - 2$$

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

pro $x \in (2-\delta, 2+\delta)$ platí $< \varepsilon$ ~~x~~

(interval $(2-\delta, 2+\delta)$ je podmnožina $(2-\delta_1, 2+\delta_2)$)

Př:



~~$x \in (\sqrt{3}+\varepsilon, \sqrt{3}-\varepsilon)$~~

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$$

interval $((\sqrt{3}-\varepsilon)^2, (\sqrt{3}+\varepsilon)^2)$

chci vyjádřit jako $(3-\delta_1, 3+\delta_2)$

$(3 - 2\sqrt{3}\varepsilon + \varepsilon^2, \; 3+2\sqrt{3}\varepsilon+\varepsilon^2)$

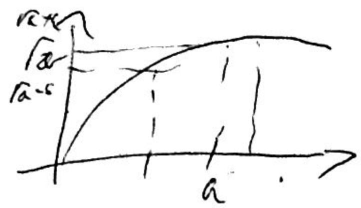
$\delta_1 = (2\sqrt{3}\varepsilon - \varepsilon^2), \; \delta_2 = (2\sqrt{3}\varepsilon + \varepsilon^2)$

$\delta = \min(2\sqrt{3}\varepsilon - \varepsilon^2, \; 2\sqrt{3}\varepsilon + \varepsilon^2)$

$\delta > 0 \quad 2\sqrt{3}\varepsilon - \varepsilon^2 > 0$

$2\sqrt{3}\varepsilon > \varepsilon^2$

$\varepsilon < 2\sqrt{3}$



$\sqrt{a} \geq 0$

$a \geq 0$

$x \in ((\sqrt{a}-\varepsilon)^2, (\sqrt{a}+\varepsilon)^2)$

$x \in (a - 2\sqrt{a}\varepsilon + \varepsilon^2, \; a + 2\sqrt{a}\varepsilon + \varepsilon^2)$

$x \in (a-\delta_1, a+\delta_2) \quad , \; \delta_1, \delta_2 > 0$

$2\sqrt{a}\,\varepsilon - \varepsilon^2 > 0$

$2\sqrt{a}\varepsilon > \varepsilon^2$

$\varepsilon < 2\sqrt{a}$

$a - \delta_1 = a - 2\sqrt{a}\varepsilon + \varepsilon^2 \qquad a+\delta_2 = a + 2\sqrt{a}\varepsilon + \varepsilon^2$

$\delta_1 = 2\sqrt{a}\varepsilon - \varepsilon^2 \qquad \delta_2 = 2\sqrt{a}\,\varepsilon + \varepsilon^2$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow \delta = 2\sqrt{a}\,\varepsilon - \varepsilon^2$

platí $((\sqrt{a}-\varepsilon)^2, (\sqrt{a}+\varepsilon)^2) = (a-\delta_1, a+\delta_2) \supset (a-\delta, a+\delta)$

celkově: $x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow |\sqrt{x}^2 - \sqrt{a}|$

$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$

ZK.: $a = 3 \qquad \varepsilon < 2\sqrt{3}$

např. $\varepsilon = 2$

$\delta = 2\sqrt{3} \cdot 2 - 4 \doteq 4\sqrt{3} - 4 = 4 \cdot (\sqrt{3}-1)$

$x \in (3 - 4(\sqrt{3}-1), \; 3+4(\sqrt{3}-1)) \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{3}| < 2$

$x \in (3 - 4\sqrt{3} + 4, \; 3 - 4 + 4\sqrt{3}) \qquad \sqrt{x} \in (\sqrt{3}-2, \sqrt{3}+2)$

$x \in (0{,}071, \; 5{,}92) \Rightarrow \sqrt{x} \in (0{,}266, \; 2{,}433) \qquad (-0{,}267, \; 3{,}73)$

Matematická analýza – limity, příklady

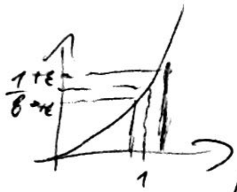
1) Dokažte z definice: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0:\ \forall x\in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x_0)\in U$

$0<|x-1|<\delta \Rightarrow 0\le\left|\left(\frac{x}{2}\right)^3-\frac{1}{8}\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{x^3}{8}-\frac{1}{8}\right|<\varepsilon$

$|x^3-1|<8\varepsilon$



$\left(\frac{x}{2}\right)^3\in\left(\frac{1}{8}-\varepsilon,\frac{1}{8}+\varepsilon\right)$

$x^3\in(1-8\varepsilon,1+8\varepsilon)$

$x\in(\sqrt[3]{1-8\varepsilon},\sqrt[3]{1+8\varepsilon})$

chci vyjádřit ve tvaru

$x\in(1-\delta_1,1+\delta_2)$

$1-\delta_1=\sqrt[3]{1-8\varepsilon}$ $\quad 1+\delta_2=\sqrt[3]{1+8\varepsilon}$

$\delta_1=1-\sqrt[3]{1-8\varepsilon}$ $\quad \boxed{\delta_2=\sqrt[3]{1+8\varepsilon}-1}$

0,027 $\quad \delta=\min(\delta_1,\delta_2)$

$\sqrt[3]{1+8\varepsilon}>1$ $\quad \varepsilon>0$

$1+8\varepsilon>1$

$8\varepsilon>0$

$\boxed{\varepsilon>0}$

pro $x\in(1-\delta_1,1+\delta_2)$ platí $\left|\left(\frac{x}{2}\right)^3-\frac{1}{8}\right|<\varepsilon$

jelikož $(1-\delta,1+\delta)\subset(1-\delta_1,1+\delta_2)$, tak pro něj platí $\left|\left(\frac{x}{2}\right)^3-\frac{1}{8}\right|<\varepsilon$

$\delta=\sqrt[3]{1+8\varepsilon}-1$

$x\in\left(1-(\sqrt[3]{1+8\varepsilon}-1),1+\sqrt[3]{1+8\varepsilon}-1\right)$

$x\in\left(2-\sqrt[3]{1+8\varepsilon},\sqrt[3]{1+8\varepsilon}\right)$ $\quad |x^3-1|<8\varepsilon$

$x^3\in\left((2-\sqrt[3]{1+8\varepsilon})^3,1+8\varepsilon\right)$ $\quad x^3\in(1-8\varepsilon,1+8\varepsilon)$

$(2-\sqrt[3]{1+8\varepsilon})^3>\sqrt[3]{1-8\varepsilon}$ $\quad \varepsilon$ malé

$1 > 2\sqrt[3]{1-8\varepsilon}$

$1>1-8\varepsilon$

$0>-8\varepsilon$

$\underline{\varepsilon>0}$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{\lim_{x\to0}x\lim_{x\to0}x-\lim_{x\to0}1}{\lim_{x\to0}2\lim_{x\to0}x\lim_{x\to0}x-\lim_{x\to0}x-\lim_{x\to0}1}=\frac{-1}{-1}=\underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\cancel{\frac{1\cdot1-1}{2\cdot1\cdot1-1-1}}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{2\cdot(x+\frac{1}{2})\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}$$

$$=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

nelze, $\lim_{x\to1}(2x^2+x-1)=0$

$D=b^2-4ac$

$D=1-4\cdot2\cdot(-1)$

$D=9\quad\sqrt{D}=3$

$x_{1,2}=\frac{1\pm3}{4}$ $\frac{4}{4}=1$; $-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

$$3)\ \lim_{x\to2}\left(\frac{1(x^2-4)-x^2(x^2-2x)}{(x^2-2x)\cdot(x^2-4)}\right)=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+2-x^3)}{x\cdot\cancel{(x-2)}(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-(x-2)(x+1)}{x\cdot(x-2)(x+2)}=\frac{-(3)}{2\cdot(4)}=\underline{\underline{-\frac{3}{8}}}$$

$-x^2+x+2$

$=-(x^2-x-2)$

$D=b^2-4ac$

$D=1-4\cdot1\cdot(-2)$

$D=9$ $x_{1,2}=\frac{1\pm3}{2}$ $\frac{4}{2}=2$; $-\frac{2}{2}=-1$

$$4)\ \lim_{x\to0}\frac{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)-1}{x},\ n\in N$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1\cdot(1+2x)(1+3x)(1+4x)\dots(1+nx)+x\,(1+2x)(1+3x)\dots(1+nx)-1}{x}\qquad\frac{1+(n+1)x}{1+nx}=\frac{1+nx+1}{1+nx}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\dots+a_nx^n\ \cancel{-1}+x(1+2x)\dots(1+nx)}{x}$$

$(1+x)^n-1$

$n=1\quad (1+x)$

$n=2\quad (1+x)(1+2x)=1+2x+x+2x^2=1+3x+2x^2$

$n=3\quad (1+x)(1+2x)(1+3x)=(1+3x+2x^2)(1+3x)=1+3x+2x^2+3x+9x^2+6x^3$

$=1+6x+11x^2+6x^3$

$a_{n+1}=a_n\cdot(1+(n+1)x)\qquad a_1=(1+x)$

$$5)\ \lim_{x\to1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$$

$(x^{100}-2x+1):(x^{50}-2x+1)=x^2+\frac{2x^3-x^2-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

$-(x^{100}-2x^3+x^2)$

$(2x^3-x^2-2x+1):(x-1)=(2x^2+x-1)$

$-(2x^3-2x^2)$

$(x^{50}-2x+1):(x-1)=x^{49}+x^{48}$

$-(x^{50}-x^{49})$

$x^{49}-2x+1$

$-(x^{49}-x^{48})$

$x^{47}-2x+1$

$-(x^2-x)$

$-x+1$

$(-x+1)$

0

x^2-2x+1

$-(x^2-x)$

$-x+1$

$(-x+1)$

0

$(x^{50}-2x+1)(x-1)$

$$\frac{x^{50}\cdot1^{50}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$$

$$x^{49}+x^{48}\dots+x-1$$

$$=\lim_{x\to1}x^2+\frac{\cancel{(x-1)}(2x^2+x-1)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x^{49}+\dots+x^2-1)}$$

$$1+\frac{2+1-1}{48-1}$$

$$\underline{1+\frac{2}{47}}$$

Mat. analýza – cvičení III

Př: $(1+x)^n \geq (1+nx)$ pro $x \in \langle -2, -1 \rangle$ $\quad 1+nx \leq -1$

$\Rightarrow (1+x)^n \geq 1 - 1$

není třeba Mat. indukce

- písemka: mat. indukce, suprema, minima

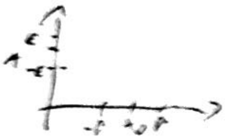
  2 příklady, 30 min, 10 bodů

Př: $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ z definice:

víme: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

konkrétně: $\quad 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^3}{8} - \frac{1}{8}\right| < \varepsilon$

– zvolíme $\varepsilon > 0$



$\frac{1}{8}|x^3 - 1| < \varepsilon$

$|x^3 - 1| < 8\varepsilon$

$|(x-1)(x^2+x+1)| < 8\varepsilon$

$|x-1| \cdot \underbrace{|x^2+x+1|}_{\boxed{<7}} < 8\varepsilon$

– předpoklad $\varepsilon < 1$

$y = \left(\frac{x}{2}\right)^3 \quad y_1 = \frac{1}{8} + \varepsilon$

$\quad y_2 = \frac{1}{8} - \varepsilon$

$2\sqrt[3]{y} = x \quad \left|\frac{x^3}{8} - \frac{1}{8}\right| < \varepsilon$

~~$\Rightarrow x \in (2 \cdot \sqrt[3]{7}$~~

$|x^3 - 1| < 8\varepsilon$

$\frac{x^3}{8} \in \left(\frac{1}{8} - \varepsilon, \frac{1}{8} + \varepsilon\right) \quad x \in \left(2\sqrt[3]{\frac{1}{8} - \varepsilon}, 2\sqrt[3]{\frac{1}{8} + \varepsilon}\right)$

$\Rightarrow x^3 \in (1 - 8\varepsilon, 1 + 8\varepsilon)$

$x \in (\sqrt[3]{1-8\varepsilon}, \sqrt[3]{1+8\varepsilon})$

$x^3 \in (1 - 8\varepsilon, 1 + 8\varepsilon)$ chceme

$x \in (\sqrt[3]{1-8\varepsilon}, \sqrt[3]{1+8\varepsilon}) \quad x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$

$x \in (1-\delta, 1+\delta)$

$1 - \delta_1 = \sqrt[3]{1-8\varepsilon} \quad 1 + \delta_2 = \sqrt[3]{1+8\varepsilon}$

$\delta_1 = 1 - \sqrt[3]{1-8\varepsilon} \quad \delta_2 = \sqrt[3]{1+8\varepsilon} - 1$

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

$1 - \delta_1 = 2\sqrt[3]{\frac{1}{8} - \varepsilon} \quad 1 + \delta_2 = 2\sqrt[3]{\frac{1}{8} + \varepsilon}$

$\delta_1 = 1 - 2\sqrt[3]{\frac{1}{8} - \varepsilon} \quad \delta_2 = 2\sqrt[3]{\frac{1}{8} + \varepsilon} - 1$

$$\boxed{\text{DÚ: } 3) \; \lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{1 - x}}$$

$2\sqrt[3]{\frac{1}{8}+\varepsilon} - 1 < \frac{8}{7}\varepsilon$

$2\sqrt[3]{\frac{1}{8}+\varepsilon} < \frac{8}{7}\varepsilon + 1$

$8\left(\frac{1}{8}+\varepsilon\right) < \left(\frac{8}{7}\varepsilon\right)^3 + 3\left(\frac{8}{7}\varepsilon\right)^2 + 3 \cdot \frac{8}{7}\varepsilon + 1$

$0 < \left(\frac{8}{7}\varepsilon\right)^3 + 3\left(\frac{8}{7}\varepsilon\right)^2 + \frac{8}{7}\varepsilon \ldots$

např: $|x - 1| < \frac{8\varepsilon}{|x^2+x+1|}$; $\delta = \frac{8\varepsilon}{7} \quad \delta = \min\left(1, \frac{8}{7}\varepsilon\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{8}|x^3 - 1| < \varepsilon$ musí platit pro $\delta = \frac{8\varepsilon}{7}$

$\left|\frac{x^3}{8} - \frac{1}{8}\right| = \frac{1}{8}|x^3 - 1|$

$|x - 1| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - \frac{1}{8}\right| < \varepsilon \}$ chceme ukázat

$\left|f(x) - \frac{1}{8}\right| = \left|\frac{x^3}{8} - \frac{1}{8}\right| = \left|\frac{x^3 - 1}{8}\right| = \frac{1}{8}|x-1||x^2+x+1| \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{7}\varepsilon \cdot 7 = \varepsilon$

Př: Dokažte z definice: A

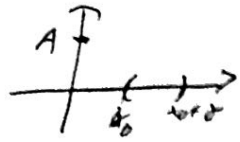
a) $\lim\limits_{x\to 1^+} [x] = 1$ ($x \to x_0$)

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} [x] = 0$

$[x]$ = nejmenší celé číslo $\leq x$

a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < x-1 < \delta \Rightarrow |[x] - A| < \varepsilon$

$\forall x \in (1, 1+\delta) \qquad |[x] - 1| < \varepsilon$



$[x] = 1$ pro $x \in (1, 1+\delta)$, $x \in (1,2)$ $\Big\}$ $\delta > 0 \wedge \delta < 1 \Rightarrow \delta \in (0,1)$

$\Rightarrow |1-1| < \varepsilon$

$\underline{0 < \varepsilon \text{ pro } \varepsilon > 0}$

b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in (1-\delta, 1)$

$-\delta < x-1 < 0 \Rightarrow |[x] - 0| < \varepsilon$

$[x] = 0$ pro $x \in (1-\delta, 1)$, $x \in (0,1)$ $\Big\}$ $\delta > 0,\ \delta < 1$, $\delta \in (0,1) \Rightarrow |0-0| < \varepsilon$

$\underline{\varepsilon > 0}$

Př: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \dfrac{-1}{-1} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{(2x+1)\cancel{(x-1)}} = \underline{\underline{\dfrac{2}{3}}}$

$(2x^2-x-1):(x-1) = 2x+1$
$-(2x^2-2x)$
$x-1$

Př: $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x^2-2x} - \dfrac{x}{x^2-4} \right) = \lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x+2-x^2}{x\cdot(x-2)(x+2)} \right) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(-x-1)}{x\cancel{(x-2)}(x+2)}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-3}{2\cdot 4} = \underline{\underline{\dfrac{-3}{8}}}$

$-x^2+x+2 : x-2 = -x-1$
$-(-x^2+2x)$
$-x+2$

Př: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2}{x^2}+1}{\sqrt{\frac{3}{x^4} - \frac{6}{x^2} + 9}} \cdot \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2+x^2}{\sqrt{3-6x^2+5x^4}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$n \in N$

Př: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x^k-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\ldots+(x^n-1)}{(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \left(1 + (x+1) + (x^2+x+1) + \ldots + (x^{n-1}+\ldots+x^2+x+1)\right) = 1+2+3+\ldots+n$

$\underline{= \dfrac{n}{2}(n+1)}$

$$\boxed{(x^n-1) = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)}$$

Př: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1-x)}{x} \cdot \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+(1-x)}{\sqrt{1-2x-x^2}+(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-2x-x^2-(1-x)^2}{x\cdot(\sqrt{1-2x-x^2}+(1-x))}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}-\cancel{2x}-x^2-(\cancel{1}-\cancel{2x}+x^2)}{x\cdot(\sqrt{1-2x-x^2}+(1-x))} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2}{x\cdot(\sqrt{1-2x-x^2}+(1-x))} = \frac{-0}{\sqrt{1}+1} = \underline{\underline{0}}$

$$\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$$

$$\boxed{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

Př: $\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4} \cdot \frac{(x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}\cdot 2+x^{\frac{1}{4}}\cdot 4+8)}{(x^{\frac{3}{4}}+2x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{4}}+8)}$

$(A^4-B^4):(A-B) = A^3+A^2B+AB^2+B^3$

A^4-A^3B

A^3B-B^4

$-(A^3B-A^2B^2)$

$(A^4-B^4)=(A-B)\cdot(\dots)$

$A=x^{\frac{1}{4}} \quad B=2$

$= \lim_{x\to 16} \frac{(\cancel{x-16})(\sqrt{x}+4)}{(\cancel{x-16})(x^{\frac{3}{4}}+2x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{4}}+8)}$

$A^2B^2-B^4$

$-(A^2B^2-AB^3)$

AB^3-B^4

$= \frac{4+4}{(\sqrt[4]{16})^3+2\cdot\sqrt{16}+4\cdot\sqrt[4]{16}+8} = \frac{8}{8+8+8+8} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

POZN.: $\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}\cdot\frac{\sqrt[4]{x}+2}{\sqrt[4]{x}+2} = \frac{\cancel{x^{\frac{1}{2}}-4}}{(\cancel{\sqrt{x}-4})(\sqrt[4]{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}+2}$

$a^6-b^6=(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$

Př: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}} \cdots$ ~~$A=(1+x)$ $B=(1-x)$~~

$= \lim_{x\to 0} \frac{[(1+x)^3-(1-x)^2]\ (x+x)}{[(1+x)^2-(1-x)^3]\ (\dots)}$

jmenovatel $\to A=(1+x) \quad B=(1-x)$

čitatel $\to A=1+x \quad B=(1-x)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{[1+3x+3x^2+x^3-(1-2x+x^2)](x+x)}{[(1+2x+x^2)-(1-3x+3x^2-x^3)](\dots)}$ $\quad A=1,\ B=1$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^3+2x^2+5x)(x+x)}{(x^3-2x^2+5x)(\dots)} = \frac{1+1+1+1+1+1}{1+1+1+1+1+1} = \frac{6}{6} = 1$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+2x+5)}{(x^2-2x+5)}\frac{(x+x)}{(\dots)} = \frac{5\cdot 6}{5\cdot 6} = \underline{\underline{1}}$