Matematická analýza - cvičení IV

Př: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx)}{\sin(nx)}$ použijeme $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

také $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx)}{\sin(nx)} \cdot \frac{mx \cdot nx}{nx \cdot mx}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx)}{mx} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{nx}{\sin(nx)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{mx}{nx} = 1 \cdot 1 \cdot$

"limita o složené funkce"

$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{m}{n} = \frac{m}{n}$

TEST: 1) indukce $n^3 + 2n$ je děl. 3

2) max, min, sup, inf množiny $M = \{1 + \frac{2 + (-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin mx}{mx}}_{\text{složená funkce}}$ vnější $f(t) = \frac{\sin t}{t}$, vnitřní $g(x) = mx$

$= \lim_{x\to 0} f(g(x)) = \lim_{t\to A} f(t)$, kde $A = \lim_{x\to 0} g(x)$

musí platit: buď (S) - f je spojitá v A

nebo (P) - g nenabývá hodnoty A na prstencovém okolí bodu x_0

Př: $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ sin je spojitý v $t = 1$ $\Rightarrow \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \sin 1$

problém $\frac{\sin t}{t}$ není spojité v 0

$\Rightarrow$ 2. podmínka t $g(x) = mx$ $mx = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ na prsten. okolí $x = 0$, $mx \neq 0$

další $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$

Př: $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} = \lim$

$= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2} = 1\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2\cdot\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}\cdot 1$

zatím nevíme, zda můžeme použít aritmetiku limit

platí $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}}$

odvození $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2\cdot\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(2\cdot\frac{x}{2})}{x^2\cdot\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\cdot\cos x}$

$= \lim_{x\to0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\cdot\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{2}{\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{4}$

$= \lim_{x\to0}\frac{2}{4\cos x}\cdot1\cdot1 = \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{DÚ}\quad f'(x)=?\quad f(x)=\frac{2x}{1-x^2}}$

Př: $\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{1-x} = \lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t+\pi)}{-t} = \pi$

Př: $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\alpha+2x)-2\sin(\alpha+x)+\sin(\alpha)}{x^2}$

$= \lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha\cos2x+\sin2x\cos\alpha-2\sin\alpha\cos x-2\sin x\cos\alpha+\sin\alpha}{x^2}$

$= \lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha\cdot(\cos2x-2\cos x)+\cos\alpha\cdot(\sin2x-2\sin x)\cancel{+\sin\alpha}}{x^2}$

$= \lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha(\cos^2x-\sin^2x+1-2\cos x)+\cos\alpha(2\sin x\cos x-2\sin x)}{x^2}$

$= \lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha(2\cos^2x-2\cos x)+\cos\alpha(2\sin x\cos x-2\sin x)}{x^2}$

$= \lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha\cdot(2\cos x)\cdot(\cos x-1)+\cos\alpha\cdot(2\sin x)\cdot(\cos x-1)}{x^2}$

$= \lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot(2\sin\alpha\cos x+2\cos\alpha\sin x)$

$= \lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\lim_{x\to0}(2\sin\alpha\cos x+2\cos\alpha\sin x) = -\frac{1}{2}\,2\sin\alpha$

$= -\sin\alpha$

Př: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} \cdot \frac{(\cos bx - 1)(\cos ax - 1)}{(\cos bx - 1)(\cos ax - 1)}$

$\boxed{b \neq 0}$ $= \lim_{x\to 0^*} \frac{\ln(\cos ax)}{\cos ax - 1} \cdot \lim_{x\to 0^*} \frac{\cos bx - 1}{\ln(\cos bx)} \cdot \lim_{x\to 0^*} \frac{\cos ax - 1}{\cos bx - 1}$

platí: $\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1}$ tak $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}}$

1) $\lim_{x\to 0} (\cos ax) = 1$

2) $\lim_{y\to 1} \frac{\ln y}{y-1} = 1$

předpoklad (P): $\cos ax$ nesmí být rovno 1 v prstencovém okolí bodu 0

kde $y = \cos ax$

$\cos ax = 0$

$ax = k \cdot 2\pi$

$x = k \cdot \frac{2\pi}{a}$

např. $0 < |x| < \frac{2\pi}{a}$

$\Rightarrow$ stačí vzít dostatečně malé okolí

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\cos ax - 1} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos bx - 1}{\ln(\cos bx)} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - 1}{\cos bx - 1} = \frac{a^2}{b^2}$

[rozšíříme $\frac{(ax)^2}{(ax)^2} \cdot \frac{(bx)^2}{(bx)^2}$]

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \frac{a^2}{b^2}$

Př: $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e$

"věta o složení funkcí" $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ $f(x) = e^x$

– podmínka (S): f je spojitá v daném bodě

Př: $(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ – analogicky

platí $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1}$ ← považujeme za známou limitu

Matematická analýza – cvičení VI

Př: $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ spojitá? a) $f(g(x))$
$g(x) = x\cdot(1-x^2)$ b) $g(f(x))$

a) $f(g(x)) = \mathrm{sgn}(x-x^3)$, $\mathrm{sgn}(x)$ je nespojitá pro $x=0$

$\Rightarrow$ ~~$f(g(x))$ je nespojitá pro ta x, kde platí $x-x^3=0$~~
$x\cdot\cancel{(x-1)(x+1)}=0$

$\Rightarrow \mathrm{sgn}(x-x^3)$ je spojitá pro $x \in R\{0,1,-1\}$
(~~limit~~ spojitost složené funkce)

- v bodech $0,1,-1$ v jejich okolí najdeme funkční hodnoty $1,-1$ (sgn je nenulová, když $x\neq 0$)
- v bodech $0,1,-1$ zkonstruujeme okolí (prstencová)
  $\Rightarrow$ funkce sgn nabývá hodnot $-1, 1$,
  - ale funkční hodnota je 0

$\Rightarrow$ funkce $\mathrm{sgn}(x-x^3)$ je nespojitá pro $x\in\{-1,0,1\}$

POZN: spojitost:
0: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ 0 \leq |x| < \delta \Rightarrow |f(0)-f(x)| < \varepsilon$

- tento výrok neplatí pro $-1,0,1$
- zvolíme $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\quad |f(0)-f(x)| < \varepsilon \Rightarrow f(x) = 0$, protože $f(0)=0$
  - na libovolně malém okolí $f(x)$ nabývá hodnot 1, nebo -1
  $\Rightarrow$ nemůže platit
  ($\forall \delta > 0\ \ \exists x_\delta \in [-\delta,\delta] : |f(x_0)| = 1$)

POZN: $\mathrm{sgn}(0)$ je spojitá, přestože $\mathrm{sgn}(x)$ je nespojitá v $x=0$

$$\boxed{\text{DÚ: } 9)\ \int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx}$$

b) $g(f(x)) = \mathrm{sgn}(x) - (\mathrm{sgn}(x))^3 = \mathrm{sgn}(x) - \mathrm{sgn}(x) = 0$

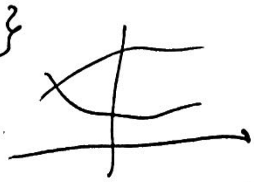
$\Rightarrow g(f(x))$ je spojitá na $\mathbb{R}$

Př: $f(x), g(x)$ jsou spojité v x_0 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$

a) v x_0 je spojitá $\min\{f(x), g(x)\}$

$$\min\{f(x_0), g(x_0)\} \begin{cases} f(x_0), & \text{když } f(x_0) \leq g(x_0) \\ g(x_0), & \text{když } g(x_0) < f(x_0) \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to x_0} \min\{f(x), g(x)\}$



a) buď je jedna funkce stále větší než druhá

b) nebo se protnou v bodě x_0

(POZN. Když se funkce protnou v okolí bodu x_0, můžeme vybrat menší okolí x_0, kde se funkce neprotnou)

($f - g \neq 0$ v x_0 $\Rightarrow$ potom se nerovná 0 i na nějakém okolí)

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \min\{f(x), g(x)\} =$
- $f(x_0) < g(x_0)$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \min\{f(x_0), g(x_0)\}$ $\Rightarrow \min\{f(x), g(x)\}$ je spojitá
- analogicky pro $g(x_0) < f(x_0)$
- $f(x_0) = g(x_0)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_f > 0 \ |x - x_0| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

zároveň $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_g > 0 \ |x - x_0| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$

• potom: $\delta := \min\{\delta_f, \delta_g\}$, platí $f(x_0) = g(x_0)$

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\underbrace{\min\{f(x), g(x)\}}_{\text{buď } f(x) \text{, nebo } g(x)} - f(x_0)| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ funkce $\min\{f(x), g(x)\}$ je spojitá v x_0

$[\ |f(x) - A| < \varepsilon \ \wedge \ |g(x) - A| < \varepsilon \ \Rightarrow |\min\{f(x), g(x)\} - A| < \varepsilon\ ]$

Př: $f(x) = x\cdot|x|$ existuje derivace v $x=0$?

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$ musí ex. tato limita

$\Rightarrow$ musí existovat jedno strané limity a rovnat se

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot|x|-0|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot|x|}{x} = \lim_{x\to 0}|x|$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

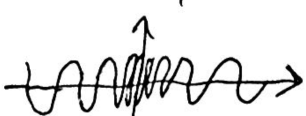
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}(-x) &= 0\\ \lim_{x\to 0^+}(x) &= 0\end{aligned}\right\} \lim_{x\to 0}|x| = 0$$

$\Rightarrow$ funkce $f(x) = x|x|$ má derivaci v bodě $x=0$.

Př: $f(x) = \begin{cases}|x|^\alpha\cdot\sin\frac{1}{x}, & (x\neq 0)\\ 0, & (x=0)\end{cases}$ pro jaké α má derivaci v bodě 0 a kdy je tato derivace spojitá?

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|^\alpha\sin\frac{1}{x}}{x}$$

$|\sin\frac{1}{x}|\leq 1$, zároveň $\sin\frac{1}{x}$ nabývá 1 (-1) na libovolném okolí 0

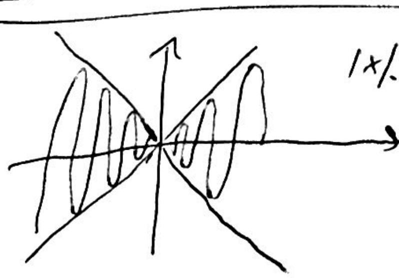


$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \lim_{x\to 0}|x|^{\alpha-1}\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right| \begin{cases}\alpha>1 & =0 \text{ „omezená" krát nula}\\ \alpha\leq 1 & \text{limita neexistuje}\end{cases}$$

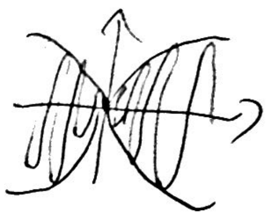
$\Rightarrow$ neexistuje limita zleva pro $\alpha\leq 1$, $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|^\alpha\sin\frac{1}{x}}{x}$.

$\Rightarrow f'(0)$ existuje $\Leftrightarrow \alpha>1$

$|x|\cdot\sin\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ není možné spočítat derivaci

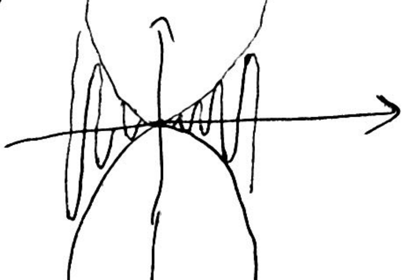


$\alpha=1$



$\alpha>1$

- oproti $x^2\cdot\sin\frac{1}{x}$



$\alpha>1$

- Kdy je derivace v $x=0$ spojitá?

$$\underset{x>0}{\cancel{x\neq 0}}\quad f'(x) = \left(x^\alpha\cdot\sin\frac{1}{x}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}\cdot\sin\frac{1}{x} + x^\alpha\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$= \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} + -x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$$ $\Rightarrow$ kdy má limitu 0

$\Rightarrow$ $\underline{\alpha>2}$

Př: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ $[-2, ?]$ tečna, normála?

$y = 5 = -8 + 8 + 8 - 3 \Rightarrow [-2, 5]$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$

$f'(-2) = 3 \cdot 4 - 8 - 4 = 12 - 12 = 0 \Rightarrow$ tečna $y = kx + q$

$y = q$

$[-2, 5]: \underline{\underline{y = 5}}$

normála v bodě $[-2, 5]$

$\underline{\underline{x = -2}}$

POZN: tečna: ~~$f'(x)(x-x) = T(x)$~~

$T(t) = f'(x_0)(t - x_0) + f(x_0)$ x_0… pod ve kterém píšeme derivaci

t… proměnná

Př: $f(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$

$$f'(x) = \frac{2 + 2x}{(1 - x^2)^2} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$$

POZN: derivace počítáme pouze na definičním oboru původní funkce

Př: $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos(x^2)}$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos(x^2) + \sin^2 x \cdot \sin(x^2) \cdot 2x}{\cos^2(x^2)}$$

Př: $f(x) = \ln\left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}} \cdot \left(e^x + \frac{1}{2} \cdot (1 + e^{2x})^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{2x} \cdot 2\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}} \cdot \left(e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}}\right)$$

platí na $\mathbb{R}$

Př: $f(x) = 2^{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}$

$f'(x) = e^{\ln 2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}$

$$\boxed{(a^x)' = \left(e^{\ln a \cdot x}\right)' = e^{\ln a \cdot x} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a}$$

$$f'(x) = e^{\ln 2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2} = \underline{\underline{\frac{-\ln(2) \cdot 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}}{x^2 \cdot \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}}}$$

$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$ musí být defin., $\frac{1}{x}$ také

$\frac{1}{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Př: $f(x) = x \cdot \arcsin^2(5x+7)$

$$f'(x) = \arcsin^2(5x+7) + x \cdot 2 \cdot \arcsin(5x+7) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(5x+7)^2}} \cdot 5$$

$$f'(x) = \arcsin^2(5x+7) + \frac{10x \cdot \arcsin(5x+7)}{\sqrt{1-(5x+7)^2}}$$

Př: $\Delta u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i^2}$ $\quad u(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}$ $\quad |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x_1 = \frac{-x_1}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} u(\vec{x})\right) = \frac{-\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{3}{2}} + x_1 \cdot \frac{3}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x_1}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^3}$$

$\Delta u = -3 \cdot |\vec{x}|^{\frac{3}{2}} \cdot$