# Matematická analýza - přednáška XIII

## Variace konstant

Nechť $z_1, z_2$ je FS homogenní rovnice (3*)
Řešení nehomogenní rovnice (3) hledáme ve tvaru $y(x) = C_1(x) z_1(x) + C_2(x) z_2(x)$

- Předpokládejme, že $y$ je řešení (3)

- Potom: $y' = C_1 z_1' + C_2 z_2' + C_1' z_1 + C_2' z_2$
  - předpoklad $(C_1' z_1 + C_2' z_2 = 0)$ (nechceme druhé derivace $C_1, C_2$)
  
  $y'' = C_1 z_1'' + C_2 z_2'' + C_1' z_1' + C_2' z_2'$

$$\Rightarrow Ly = C_1 \cdot \underbrace{(z_1'' + a_1 z_1' + a_0 z_1)}_{Lz_1 = 0} + C_2 \underbrace{(z_2'' + a_1 z_2' + a_0 z_2)}_{Lz_2 = 0} + C_1' z_1' + C_2' z_2' = f$$

$\Rightarrow$ Dostaneme:
$$\boxed{\begin{aligned} C_1' z_1 + C_2' z_2 &= 0 \\ C_1' z_1' + C_2' z_2' &= \cancel{0} \leftarrow f \end{aligned}}$$

- Z této soustavy vyřešíme $C_1, C_2$
  (lze dokázat, že řešení má vždy)

Př: $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{2e^{2x}}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

1. Krok: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
$(\lambda - 2)^2 = 0$
$\lambda = 2$ dvojnásobný kořen

$\Bigg\}$ FS: $z_1 = e^{2x}$, $z_2 = x \cdot e^{2x}$

2. Krok: variace konstant:

$$C_1' e^{2x} + C_2' x \cdot e^{2x} = 0$$
$$C_1' \cdot 2e^{2x} + C_2' \cdot e^{2x}(1+2x) = \frac{2e^{2x}}{1+x^2}$$

$C_1' + C_2' \cdot x = 0 \Rightarrow C_1' = -x \cdot C_2'$

- dosadíme: $-2x C_2' + C_2'(1+2x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

$$C_2' = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\underline{\underline{C_2 := 2 \cdot \operatorname{arctg}(x)}}$$

$$C_1' = \frac{-2x}{1+x^2}$$

$$\underline{\underline{C_1 := -\ln(1+x^2)}}$$

Kde $\alpha, \beta$ jsou lib. konstanty

Řešení: $y(x) = \alpha \cdot e^{2x} + \beta x e^{2x} - \ln(1+x^2) \cdot e^{2x} + 2\operatorname{arctg}(x) \cdot x \cdot e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$

POZN: Podobně se počítají LDR $n$-tého řádu $Ly = f$, kde $L$: $Ly = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y$

# 3. Limita podruhé

## 3.1 Nevlastní limity funkcí

- okolí $\pm\infty \in \mathbb{R}^*$: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\forall x \in \mathbb{R}: -\infty < x < +\infty$$

$$-\infty \ \text{———} \ +\infty$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Potom definujme

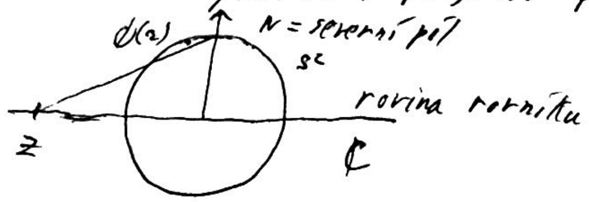
$$V_\varepsilon^*(+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > \tfrac{1}{\varepsilon}\}$$

$$V_\varepsilon^*(-\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\tfrac{1}{\varepsilon}\}$$

$$V_\varepsilon(\pm\infty) := V_\varepsilon^*(\pm\infty) \cup \{\pm\infty\}.$$

- Rozšířená komplexní rovina $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\mathbb{C}^*$ se ztotožňuje s jednotkovou sférou $S^2$ v $\mathbb{R}^3$ pomocí stereografické projekce $\Phi: \mathbb{C}^* \xrightarrow[\text{bijekce}]{\text{na}} S^2$




$\Phi(z)$ -- průsečík přímky procházející bodem a severním pólem

- nekonečno se zobrazí na $N$
$(\infty \mapsto N)$

- Okolí $\infty \in \mathbb{C}^*$: (POZN: $\pm\infty = \infty$ v $\mathbb{C}^*$)

Pro $\varepsilon > 0$ definujeme $V_\varepsilon^*(\infty) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \tfrac{1}{\varepsilon}\}$

$$V_\varepsilon(\infty) := V_\varepsilon^*(\infty) \cup \{\infty\}$$

**Definice:** (Limita funkcí i nevlastních)
Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $A \in \mathbb{R}^*$ (resp $\mathbb{C}^*$)
Nechť $f$ je definovaná na nějakém $U^*_{\delta_0}(x_0)$. Potom

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ pokud } \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in U^*_\delta(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

POZN: 1) Definice 1 zobecňuje definici limity i pro nevlastní limity v nevlastních bodech.

2) V definici $\lim_{x \to x_0 \pm} f(x)$ bereme v Def. 1 místo $U^*_\delta(x_0)$ pouze pravá nebo levá okolí. $U^*_{\delta,+}(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$

$U^*_{\delta,-}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$ pro $x_0 \in \mathbb{R}$

• Úmluva: V této kapitole $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $A \in \mathbb{R}^*$ (resp $\mathbb{C}^*$) nebude-li řečeno jinak.

**Věta 1:** Platí:

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{y \to 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right)$, má-li jedna strana smysl.

$\left( \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{y \to 0^-} f\left(\frac{1}{y}\right) \right)$

2) Je-li $f$ reálná, potom

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, právě když $f > 0$ na nějakém $U^*_\delta(x_0)$ a zároveň $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

$\Big( \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, právě když $f < 0$ ..... a zároveň $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \Big)$

3) Je-li $f$ komplexní, potom

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ právě když $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

• Důkaz: 1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in U^*_\delta(\infty) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$

$x > \frac{1}{\delta}$

- vezmu $\frac{1}{y} = x$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : y \in (0, \delta) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) \in U_\varepsilon(A)$

Důkaz 2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in U_\delta^*(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(-\infty)$

tzn.: $f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$

$-\varepsilon < \frac{1}{f(x)} < 0$

neboli $f(x) < 0$ a $\frac{1}{f(x)} \in U_\varepsilon(0)$

atd...

Př: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ protože $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, $x^2 > 0$ pro $x \neq 0$

Př: $\left.\begin{aligned} &\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ &\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \end{aligned}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje

POZN: Rozmyslete jaké naše věty dokázané pro vlastní limity platí pro nevlastní limity, např. o limitě složené funkce, o dvou strážnicích, ...

**Věta 2** (O jednom strážníkovi)

Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $f \leq g$ na nějakém $U_\delta^*(x_0)$.

Potom platí: 1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

**Důkaz:** 2) Nechť $\varepsilon > 0$.

Volíme $\tilde{\delta} \in (0, \delta)$, aby $g(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$ $\forall x \in U_{\tilde{\delta}}^*(x_0)$

- platí $f(x) \leq g(x) \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$

## Věta 4 (L'Hospitalovo pravidlo)

Nechť $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Potom $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ~~pokud~~ jmá-li výraz vpravo smysl a platí-li:

- buď a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
- nebo b) $\lim\limits_{x \to x_0} \cancel{f(x)} |g(x)| = +\infty$

- Důkaz: později
- POZN: 1) Požadujeme, aby existovaly $f'$ a $g'$ (a $g' \neq 0$) na nějakém prstencovém okolí $x_0$ a existovala limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x_0)} \in \mathbb{R}^*$

  2) Platí i pro jednostranné limity.

Př: 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^k}{e^x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{k \cdot x^{k-1}}{e^x} \overset{l'H \ k\text{krát}}{=} \cdots = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{k!}{e^x} = \underline{\underline{0}}$

("$e^x$ roste rychleji než jakákoli mocnina)

2) $\forall \alpha > 0: \lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \cdot \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha \cdot x^{-\alpha-1}} =$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0$

# Matematická analýza - přednáška XIV

POZN: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

$\iff \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$

## Aritmetika nevlastních limit

Problém: nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

Co lze říct obecně o $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = ?$ → NIC!

Př: Pro $x \to 0$ je $\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}+a\right)}_{\downarrow\,\infty}$, druhá funkce $-\left(\frac{1}{x^2}\right)$

součet $= a$, lim je a

Př: $\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to+\infty}$; $\underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{-\infty}$, součet $\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right) \to +\infty$

Př: $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right) \to -\infty$

Př: $\underbrace{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}_{\downarrow\,+\infty} + \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{\downarrow\,-\infty} = \frac{1}{x}$ nemá limitu v 0

(4 případy) $a \in \mathbb{R}^*$

$\boxed{\bullet \text{ V } \mathbb{R}^* \text{ nedefinujeme } +\infty+(-\infty),\ \text{ani } 0\cdot(\pm\infty),\ \text{ani } \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \text{ani } \frac{a}{0}}$

• Definujeme: pro $a \in \mathbb{R}^*$

$-(\pm\infty) = \mp\infty$

$+\infty + a = \infty$, je-li $a > -\infty$

$-\infty + a = -\infty$, je-li $a < \infty$

$a\cdot(\pm\infty) = \pm\infty$, je-li $a > 0$ (i $+\infty$)

$a\cdot(\pm\infty) = \mp\infty$, je-li $a < 0$ (i $-\infty$)

$\frac{a}{\pm\infty} = 0$, je-li $a \in \mathbb{R}$

• V $\mathbb{C}^*$ nedefinujeme $\infty \pm \infty$, ani $0\cdot\infty$, ani $\frac{\infty}{\infty}$, ani $\frac{0}{0}$

• Definujeme pro $a \in \mathbb{C}^*$: $\infty = \pm\infty$

$a \pm \infty = \infty$, je-li $a \in \mathbb{C}$

$a\cdot\infty = \infty$, je-li $a \neq 0$ (může být $\infty$)

$\frac{a}{\infty} = 0$, je-li $a \in \mathbb{C}$

$\frac{a}{0} = \infty$, je-li $a \neq 0$

**Věta 3: (Aritmetika limit v $\mathbb{R}^*$, resp. v $\mathbb{C}^*$)** (resp. $\in \mathbb{C}^*$)

Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, kde $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $A, B \in \mathbb{R}^*$

Potom: 1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$, pokud má výraz vpravo smysl

2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$, pokud má výraz vpravo smysl

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{A}{B}$, pokud má výraz vpravo smysl

**POZN:** Platí, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, právě když

(*) $\forall K \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in U^*_\delta(x_0): \ f(x) > K$.

**Důkaz:** a) pro $K > 0$, volme $\delta > 0$ z naší definice limity pro $\varepsilon = \frac{1}{K}$.

b) pro $K \leq 0$, volme např. —||— pro $\varepsilon := 1$. hotovo.

**Důkaz:** (máme dokázáno pro $A, B \in \mathbb{R}$)

1) Např. pro součet: $A = +\infty$, $B \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

• Dokážeme si víc: Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ a $g$ je zdola omezená na nějakém prstencovém okolí $x_0$.

tzn. $\exists L \in \mathbb{R}$ taková, že $g(x) \geq L$ $\forall x \in U^*_\delta(x_0)$

(je možná pro $B \in \mathbb{R}$
z POZN vidíme, že když $B = +\infty$, $L$ je libovolné)

Potom $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$

• Nechť $K \in \mathbb{R}$ je dáno.

• Volme $\tilde{\delta} \in (0, \delta)$ tak, že $f(x) > K - L$ $\forall x \in U^*_{\tilde{\delta}}(x_0)$.

tudíž $f(x) + g(x) \geq K$ (neboť $g(x) \geq L$)

• našli jsme $\tilde{\delta}$, pro které $f(x) + g(x) \geq K$ $\blacksquare$

Důkaz 2) Nechť $A=+\infty$, $B=-\infty$.

Pro $x\to x_0$ $\frac{1}{f(x)}, \frac{1}{g(x)} \to 0$, $f>0$ na $U_\rho^*(x_0)$ } zvolíme $\rho$ aby toto platilo
$\quad$ V1 $\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$
$\quad\ 0 \quad 0$ $\qquad g<0$ na $U_\rho^*(x_0)$

$\Rightarrow f\cdot g<0$ na $U_\rho^*(x_0)$

• z V1 je $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=-\infty$

POZN. (nemuseli jsme vycházet z definice, vyšli jsme z Věty 1)

Důkaz 3) Je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ ($\infty$ pro $\mathbb{C}^*$), potom

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$ z V1

• Užijeme důkazu 2) $\Rightarrow$ důkaz hotov ■

POZN: Zkuste rozmyslet zbylé příklady.

# Limita posloupnosti

Definice 2: 1) Posloupnost je zobrazení $\varphi: \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)

Píšeme: $\{\varphi(n)\}_{n=1}^{\infty}$, nebo $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, nebo $\{\varphi_n\}$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n = A\in\mathbb{R}^*$ (resp $\mathbb{C}^*$), pokud platí:

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0:\ \varphi_n\in U_\varepsilon(A)$.

Píšeme $\varphi_n\to A$.

Př: $\varphi_n := \frac{1}{n}$ $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

Př: $\varphi_n := (n+1)^2$ $\quad 4, 9, 16, \dots$

$\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^2=+\infty$

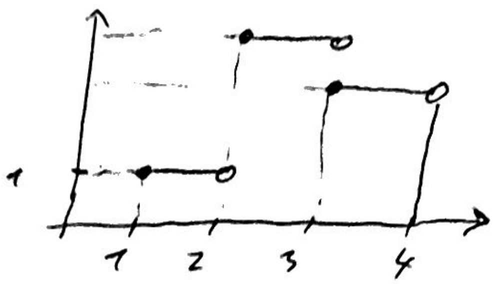
Př: $y_n := (-1)^n$ $\quad -1, 1, -1, \dots$

nemá limitu

• POZN: Posloupnost $\{y_n\}$ je konvergentní, pokud má $\{y_n\}$ vlastní limitu. Jinak je divergentní.

• POZN: 1) Nechť $\{y_n\}$ je posloupnost, potom ji můžeme rozšířit na funkci, např. následovně:

$\varphi(x) = \varphi(n)$, $x \in [n, n+1]$ a $n \in \mathbb{N}$



Potom z definic zřejmě

$\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$, má-li aspoň 1 strana smysl.

<u>Důkaz:</u> Skutečně, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 : y_n \in U_\varepsilon(A)$

pro $\varphi(x)$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall x \in [n_0, +\infty) : \varphi(x) \in U_\varepsilon(A)$

– ekvivalentní podmínky ⊠.

$\Rightarrow$ ("limita post. lze převést na limitu funkce)

POZN 2) Z 1) dostaneme, že i pro limity posloupností platí např. věta o aritmetice limit, o strážnicích, apod.

Rozmyslete!

• <u>Jiný postup</u>: zobecnění pojmu limity (viz. skripta Pokorný)

– Zobecníme pojem limity funkce, aby zahrnoval i limitu posloupností. Ověříme, že pro tuto obecnou limitu platí naše věty.

Definice 3 ('Obecná'' li

**Definice 3** ('Obecná' limita)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $A \in \mathbb{R}^*$ (resp. ($\mathbb{C}^*$))

Předpokládejme, že $\forall \eta > 0: U_\eta^*(x_0) \cap D_f \neq \emptyset$.

Potom $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$\forall x \in U_\delta^* \cap D_f : f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

(viz. skripta)

**Věta 5** (Heineho věta)

Platí, že $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, právě když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ platí:

$x \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to A.$ (**)

~~Důkaz~~ Důsledek: Funkce $f$ je spojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$, právě když

$\forall \{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\} : x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.

Důkaz: a) $\Rightarrow$ Nechť $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$. Ukážeme, že $f(x_n) \to A$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Volme $\delta > 0$, aby $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ $\forall x \in U_\delta^*(x_0)$.

Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n > n_0 : x_n \in U_\delta^*(x_0)$

tudíž je $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$.

b) $\Leftarrow$ důkaz sporem

→ předpoklad: existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\forall \delta > 0 \ \exists x \in U_\delta^*(x_0)$:

($\Delta$) $f(x) \notin U_\varepsilon(A)$.

- zvolme takové $\varepsilon$
- Potom $\forall n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in U_{\frac{1}{n}}^*(x_0)$: (volíme $\delta = \frac{1}{n}$)

  $f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$
- Potom $x_0 \neq x_n \to x_0$, tedy z (**)

  je $f(x_n) \to A$ = spor s ($\Delta$). ■

Ukážeme, že $x_n \to x_0$. Nechť $\eta > 0$, potom

$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} < \eta$, je-li $n > \frac{1}{\eta}$ $\Rightarrow$ volíme $n_0 > \frac{1}{\eta}$ ■

Př: $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ neexistuje, protože

$x_n := \frac{1}{n\pi} \to 0$, $\sin \frac{1}{x_n} = 0 \to 0$

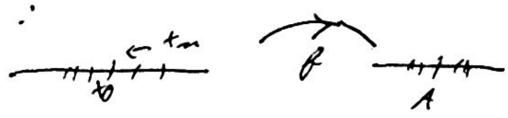
$y_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \to 0$, $\sin \frac{1}{y_n} = 1 \to 1$

$\Big\}$ Heineho věta

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

# Matematická analýza – přednáška XV

Heineho věta :




Př: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Nechť $\varphi(x) := \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $x>0$

Potom $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \exp\Big(\underbrace{x\cdot\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)}_{\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\to 1}\Big) \overset{\text{exp. spojitá v 1}}{=} \exp 1 = e$

$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\varphi(x_n)} = e$ (z Heineho věty, protože $x_n := n\to+\infty$)

, $x_n := n\to+\infty$

## 3. 3. Limity monotónních funkcí a posloupností

**Věta 6** (limitní přechod v nerovnosti)

Nechť $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a $f\le g$ na nějakém $U^*_\delta(x_0)$.

Potom $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, pokud obě limity existují.

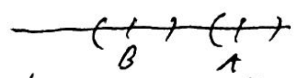
- POZN: analogická věta platí i pro posloupnosti

POZN: pro $f<g$ neplatí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Př: $0 < \frac{1}{n}$ ← ostrá nerovnost, ale limity se rovnají

**Důkaz**: Nechť $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R}^*$ a $B = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\in\mathbb{R}^*$.

- důkaz sporem:
  - platí předpoklady: $A>B$
  - neplatí závěr




- Potom existuje $\varepsilon>0$ tak, že $U_\varepsilon(A)\cap U_\varepsilon(B)=\emptyset$
- Existuje $\delta_1\in(0,\delta)$ takový, že $f(x)\in U_\varepsilon(A)$ $\forall x\in U^*_{\delta_1}(x_0)$
- Analogicky pro $B$ dostaneme $\delta_2$, lze volit $\delta_1$ tak, že platí
  → $g(x)\in U_\varepsilon(B)$ $\forall x\in U^*_{\delta_1}(x_0)$
- zřejmě $\forall x\in U^*_{\delta_1}(x_0)$: $g(x)<f(x)$, což je spor. ∎

• Úmluva: Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Definujeme:

$\sup M := +\infty$, není-li $M$ shora omezená
$\quad := -\infty$, je-li $M = \emptyset$,

$\inf M := -\infty$, není-li $M$ zdola omezená
$\quad := +\infty$, je-li $M = \emptyset$.

• Potom každá $M \subset \mathbb{R}$ má $\sup M$, $\inf M$ v $\mathbb{R}^*$.

**Definice 4**: Řekneme, že $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ je
1) rostoucí, pokud $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n < a_{n+1}$
2) neklesající, pokud $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq a_{n+1}$
3) klesající –"– $a_n > a_{n+1}$
4) nerostoucí –"– $a_n \geq a_{n+1}$

POZN: je [ monotónní pro 1) až 4)
ryze monotónní pro 1), 3)

**Věta 7** (Limita monotónních posloupností)
Nechť $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ je neklesající (nerostoucí).
Potom platí: $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
($= \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$) pro nerostoucí.
• Tato limita je vlastní, pokud $\{a_n\}$ je shora omezená.
(zdola omezená)

**Důkaz**: Pro neklesající $\{a_n\}$.
Nechť $S := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

a) nechť $S = +\infty$, tzn $\{a_n\}$ není shora omezená.
Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$ ($\frac{1}{\varepsilon}$ není horní odhad)
Z monotónnosti $\forall n \geq n_0$: $a_n \geq a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$.
Neboli $a_n \to +\infty$.

b) Nechť $S \in \mathbb{R}$.
Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{n_0} > S - \varepsilon$ ($S-\varepsilon$ není horní odhad)
tudíž $\forall n \geq n_0$: $\cancel{a_{n_0} \leq a_n}$ $S - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq S < S + \varepsilon$,
tedy $a_n \in U_\varepsilon(S)$. Neboli $a_n \to S$.

Př: Najdi limitu $\lim_{n\to\infty} a_n$, pokud $a_0 > 0$ a $a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Máme, že $a_n \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
  - zřejmě: $a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + \frac{1}{a_0}) \underset{AG}{\geq} \sqrt{\frac{a_0}{a_0}} = 1$ (nebo přímo)
  - indukcí zbytek členů
- $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je nerostoucí, protože $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$$

$$\frac{1}{a_n} \leq 1 \leq a_n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) \leq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n$$

- Podle věty 7 je $a_n \to A$, platí $A \geq 1$ (věta 6)
- $A = 1$, protože $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & = & \frac{1}{2}(A + \frac{1}{A}) \end{array}$$

$$A = \frac{1}{A}, \; A^2 = 1, \; \underline{\underline{A = 1}}$$

**Věta 7*** (limity monotónních funkcí)

Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je neklesající.

Potom máme $f(a+) :\overset{\text{ozn.}}{=} \lim_{x\to a+} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in (a,b)\}$

a $f(b-) :\overset{\text{ozn.}}{=} \lim_{x\to b-} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in (a,b)\}$

(analogicky pro nerostoucí funkci)

- **Důkaz**: Podobně jako V7 $\boxtimes$

# 3.4. Vybraná podposloupnost, Bolzano – Cauchyho podmínka

**Definice 5** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. ("posl. indexů")
Potom $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ nazýváme podposloupností vybranou z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Př: $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$

$-1, 1, -1, 1, \dots$

Vybraná podposloupnost: $a_{2k} := 1$, $k \in \mathbb{N}$

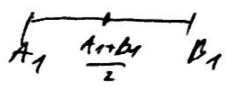
$a_{2k-1} := -1$

POZN: Je-li $a_n \to A$, potom $a_{n_k} \to A$. (neplatí obrácené)
- důkaz: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : a_n \in U_\varepsilon(A)$,
$\forall k \geq n_0 :\ n_k \geq k \geq n_0$ a $a_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$. ∎

**Věta 8** (Weierstrassova věta)
Každá omezená posloupnost $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ má konvergentní podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

**Důkaz:** Podposloupnost zkonstruujeme induktivně "metodou půlení intervalu".
1\. Krok: Protože $\{a_n\}$ omezená, existuje $A_1, B_1 \in \mathbb{R}$ tak, že
$\forall n \in \mathbb{N} : A_1 \leq a_n \leq B_1$. Volme $n_1 := 1$ a $I_1 := [A_1, B_1]$.

2\. Krok: Aspoň v jednom intervalu $[A_1, \frac{A_1+B_1}{2}]$, nebo $[\frac{A_1+B_1}{2}, B_1]$ leží nekonečně mnoho členů z $\{a_n\}$




Označme takový interval $I_2$.
- Volme $n_2 > n_1$ aby $a_{n_2} \in I_2$.
- interval $I_2$ rozpůlíme atd...
- Induktivně sestrojíme $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a intervaly $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_k \supset \dots$ takové, že $\forall k \in \mathbb{N} : a_{n_k} \in I_k$ a $I_{k+1}$ je půlka $I_k$.
- Označme $I_k = [A_k, B_k]$.

Potom $\{A_k\}$ … posl. počátečních bodů intervalů je neklesající, $\{B_k\}$ je nerostoucí $\Big\}$ z V7 $A_k \to A \in \mathbb{R}$ a $B_k \to B \in \mathbb{R}$.

• Máme dokonce, že $A = B$, protože
- délka intervalu $I_k$: $(B_k - A_k) = (B_1 - A_1) \cdot \frac{1}{2^{k-1}}$

pro $k \to \infty$ $(B_k - A_k) \to 0$

tzn. $(B - A) = 0$

$B = A$

• Konečně VĚTA:

$$\left.\begin{matrix} A_k \le a_{n_k} \le B_k \\ \downarrow \qquad\quad \downarrow \\ A \qquad\quad A \end{matrix}\right\} \text{ věta o dvou strážnících } a_{n_k} \to A$$

$\blacksquare$

POZN

- Každá omezená $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ má konvergentní podposloupnost.
- Každá ~~po~~ $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) má podposloupnost $\{a_{n_k}\}$, která má v $\mathbb{R}^*$ (resp $\mathbb{C}^*$) limitu.

# Matematická analýza - přednáška XVI

Věta 8 Westrasova - opakování

pozn

1) lze zobecnit pro komplexní posl.
$\Rightarrow$ Každá omezená $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ má konvergentní $\{a_{n_k}\}$

2) také: Každá $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) má podposloupnost $\{a_{n_k}\}$, která má limitu v $\mathbb{R}^*$ (resp. $\mathbb{C}^*$)

Důkaz 1)

- z weis. věty 8 existuje $\{a_{n_k}\}$ tak, že $\{Re(a_{n_k})\}$ konverguje.

$\left(a_{n_k^1}\right)$ - označení

- Z věty 8 existuje vybraná posl. $\{a_{n_k^2}\}$ z posloupnosti $\{a_{n_k^1}\}$ tak, že $\{Im(a_{n_k^2})\}$ konverguje. Potom $\{a_{n_k^2}\}$ konverguje,
- ~~Potom~~ protože i $\{Re(a_{n_k^2})\}$ konverguje.

Důkaz 2) a) pro $\mathbb{R}$: stačí si rozmyslet, že $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, která není shora omezená, má $a_{n_k} \to +\infty$.
(analogicky: není zdola om $\Rightarrow a_{n_k} \to -\infty$)

Důkaz:

- indukcí: 1. Existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_1} > 1$.

2. Předpoklad., že jsme sestrojili $a_{n_1}, \dots, a_{n_k}$ takové, že $n_i < n_{i+1}$ a $a_{n_i} > i$ pro všechna $i$.

Potom existuje $n_{k+1} > n_k$ tak, že $a_{n_{k+1}} > k+1$

- důkaz sporem:
  - předpoklad: $\forall n > n_k: a_n \leq k+1$
  - Potom: $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq \underbrace{\max\{k+1, a_{n_1}, \dots a_{n_k}\}}_{\text{horní odhad}}$
  - to je spor (předpokládáme, že není shora omezená.

- Tedy máme $k < a_{n_k}$

$k \to +\infty \Rightarrow a_{n_k} \to +\infty$ $\blacksquare$

Důkaz 2) b) pro $\mathbb{C}$ – rozmyslet

**Věta 9** (Bolzano – Cauchyho podmínka)

1) Nechť $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ (resp $\mathbb{C}$). Potom existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} a_n$, právě když platí: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$ (BC)

2) Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (resp $\mathbb{C}$), $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Potom existuje vlastní $\lim_{x\to x_0} f(x)$, právě když platí: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, \tilde{x} \in U_\delta^*(x_0) : |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$ (BC*)

POZN: ~~Ře~~ Říkáme, že posl. $\{a_n\}$ je <u>Cauchyovská</u>, pokud platí (BC).
Potom: 1) $\{a_n\}$ je konvergentní, právě když je $\{a_n\}$ Cauchyovská.

**Důkaz** a) $\Rightarrow$ Nechť $A := \lim_{n\to\infty} a_n$ je vlastní.
Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje ~~n~~ $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$: $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Potom $m, n \geq n_0$: $|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

b) $\Leftarrow$ Nechť (BC) platí. Potom

1) posloupnost $\{a_n\}$ je omezená:
– důkaz: pro $\varepsilon = 1$ volme $n_0$ tak, aby $\forall n, m \geq n_0$: $|a_n - a_{n_0}| < 1$ (volme $m = n_0$)

tudíž $|a_n| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_n|$
potom $\forall n \in \mathbb{N}$: $|a_n| \leq \underbrace{\max\{1 + |a_{n_0}|, |a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|\}}_{\text{odhad shora}}$

$\Rightarrow a_n$ je omezená

2) z věty 8 existuje podposloupnost $a_{n_k} \to A$ je vlastní.

3) Ukážeme, že $a_n \to A$.

- Nechť $\varepsilon > 0$. Volme $k_0 \in \mathbb{N}$, aby $\forall k \geq k_0$: $|a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.
- Z (BC) volme $m_0 \in \mathbb{N}$, aby $\forall m, n \geq m_0$: $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$
- Nechť $n \geq m_0$. Potom ~~$|a_n - A|$~~ volme $k \geq k_0$, aby $n_k \geq m_0$.

Potom $|a_n - A| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Důkaz: BC pro funkce

a) $\Rightarrow$ podobně jako pro posl.

b) $\Leftarrow$ Nechť (BC*). Ukážeme, že existuje $A \in \mathbb{R}$ (C) takové, že $\forall \{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$:

$$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to A. \text{ (Heineho věta)}$$

- důkaz:

Nechť $x_0 \neq x_n \to x_0$. Potom

1) $\{f(x_n)\}$ je Cauchyovská:

- Nechť $\varepsilon > 0$. Volme $\delta > 0$ z (BC*).
- Protože $x_0 \neq x_n \to x_0$, existuje $n_0$ tak, aby $\forall n \geq n_0$: $x_n \in U^*_\delta(x_0)$.
- z (BC*) je $\forall n, m \geq n_0$: $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$

- Podle 1) máme že $f(x_n) \to A$ je vlastní.

2) Nechť $x_0 \neq y_n \to x_0$. Z 1) víme, že $f(y_n) \to B$ je vlastní.

Ukážeme, že $A = B$.

- Uvažme $z_n = x_k$, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.
$\phantom{Uvažme z_n} = y_k$, $n = 2k-1$

- Potom $x_0 \neq z_n \to x_0$ a z 1) platí $f(z_n) \to C$

$$\left.\begin{array}{l} \text{tudíž } f(\underbrace{z_{2k}}_{x_k}) \to C \Rightarrow f(z_{2k}) \to A \\ \text{stejně tak } f(\underbrace{z_{2k-1}}_{y_k}) \to C \Rightarrow f(z_{2k-1}) \to B \end{array}\right\} A = B$$

∎

## 3.5. Symboly $O$, $o$, $\sim$, $\cong$

• Porovnáme velikosti $f, g$ v okolí $x_0 \in \mathbb{R}^*$

**Definice 6**: Píšeme

1) $f(x) \cong g(x)$ pro $x \to x_0$, pokud $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
("silně ekvivalentní")

2) $f(x) \sim g(x)$ pro $x \to x_0$, pokud $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
("ekvivalentní") (resp. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$)

3) $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to x_0$, pokud $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
("funkce $f$ je podstatně menší než $g$")

4) $f(x) = O(g(x))$ pro $x \to x_0$, pokud existuje $U_\delta^*(x_0)$
a existuje $K > 0$, že $|f(x)| \leq K \cdot |g(x)|$ $\forall x \in U_\delta^*(x_0)$
("funkce $f$ je nejvýše tak velká jako $g$ v $U_\delta^*(x_0)$")

Př: 1) $\sin x \cong x$ pro $x \to \cancel{x_0}\ 0$
protože $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2) $1 - \cos x \cong \frac{x^2}{2}$ pro $x \to 0$; $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$1 - \cos x \sim x^2$ pro $x \to 0$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{N}$: $x^\lambda = o(e^x)$ pro $x \to +\infty$, tzn. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\lambda}{e^x} = 0$.

4) $x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = O(x)$ pro $x \to 0$, protože
$\left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$, $x \neq 0$

POZN: 1) Pro $x \to x_0$ je $f(x) \cong g(x) \Rightarrow f(x) \sim g(x)$
$\Rightarrow f(x) = O(g(x))$ a $g(x) = O(f(x))$

- důkaz: Nechť $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, pak $\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = |A| \in (0; +\infty)$

Pak existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in U_\delta^*(x_0)$: $\frac{|f(x)|}{|g(x)|} < |A| + 1$
(pro $\varepsilon = 1$)

tudíž $|f(x)| < (|A| + 1)\,|g(x)|$

$\boxtimes$

2) Pro $x \to x_0$ je $f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$

Př: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \overset{l'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$

• platí: $\sin x - x \sim x^3$ pro $x \to 0$; dále $\sin x - x \cong -\frac{x^3}{6}$; $\sin x = x + O(x^3)$ pro $x \to 0$
$\sin x = x + o(x^\alpha)$ $\alpha < 3$