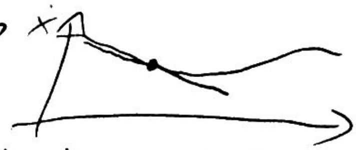
Matematická Analýza I

- Kontakt: Roman Lávička
  MUUK, Karlín, 3. patro
  email: Lavicka@karlin.mff.cuni.cz

- zápočet: - na cvičení
- zkouška: - termíny v SIS
  - písemné: početní, teoretická
- literatura: - J. Kopáček: Mat. Analýza (nejen) pro fyziky I
  - V. Jarník: Diferenciální počet I, II
    Integrální počet I
  - R. Černý, M. Pokorný: Matematická analýza pro fyziky I (online)
  - J. Kopáček: Příklady z matematiky nejen pro fyziky

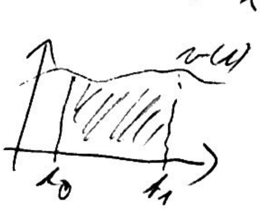
- Cíl v zimním sem.: - infinitezimální kalkulus
  - 17. stol. I. Newton, G. Leibniz
  - základní pojmy: derivace, integrál

Derivace: - proměnná $x(t)$
- derivace $\dot{x}(t)$ ... okamžitá změna proměnné veličiny
- geo. význam



= "směrnice tečny v daném bodě"
- např.: $x(t)$ poloha v čase t
  $\Rightarrow \dot{x}(t)$ ... okamžitá rychlost
  $\Rightarrow \ddot{x}(t)$ ... -//- zrychlení

Integrál $\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$



= "plocha pod grafem $v(t)$"

Základní věta Kalkulu
$$\boxed{x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} x'(t)\,dt}$$
"změna $x(t)$ polohy" "integrál rychlosti"

- 19. stol.: přesná mat. formalace, pojem limity a spojitosti
  - B. Bolzano – teolog, Praha, pojem spojitosti
  - A. Cauchy
  - K. Weighstrass (definice limity)

(Pozn. později se podařilo "nekonečně malé veličiny" = nestandardní analýza

0. ÚVOD

Logika

- **výrok** = tvrzení které buď platí nebo neplatí
  - např.: "3 je prvočíslo", "$5 < 2$" nepravdivý
  - ~~pozor:~~
  - pozor: "Tento výrok je nepravdivý"

- **Negace výroku**: non V ... "není pravda, že platí V"

Logické spojky: U, V výroky

U	V	non V	U ∨ V	U ∧ V	U ⇒ V	U ⇔ V
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

a) Alternativa: $U \vee V$
"U nebo V"

b) Konjunkce: $U \wedge V$
"U a zároveň V"

c) Implikace: $U \Rightarrow V$ U ... předpoklad
"platí-li U, pak platí V" V ... závěr

d) Ekvivalence: $U \Leftrightarrow V$
"U platí právě když V"

Typy důkazů

1. Je-li přirozené číslo n liché, potom n^2 je liché.

a) **přímý důkaz**: Nechť $n = 2k+1$

Potom $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$
$= 2.(2k^2+2k)+1$

• užívá: - tvrzení $U \Rightarrow V$
- ~~my dokazuje~~
- my využíváme $\boxed{(U \Rightarrow V) \Leftrightarrow ((U \wedge V) \vee (\text{non } U))}$

(- U je pravda
→ platí V?)

2. Je-li n^2 sudé, potom je n sudé.

b) **Nepřímý důkaz** - ekvivalentní s (1.)

$\boxed{(U \Rightarrow V) \Leftrightarrow (\text{non} V \Rightarrow \text{non} U)}$

U	V	non U	non V	U ⇒ V	
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

3. $\sqrt{2}$ není racionální.

c) **Důkaz sporem**: Předpokládáme, že tvrzení neplatí.
Odvodím spor.

- Předpoklad: $\sqrt{2}$ je racionální $\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in N$ nemají spol. dělitele
- Potom: $2q^2 = p^2$
$\Rightarrow p^2$ sudé, z (2.) $\Rightarrow p$ je sudé
$\Rightarrow p = 2.r$, $r \in N$
- Potom $2q^2 = 4r^2$, $q^2 = 2r^2$, z (2.) $\Rightarrow q$ je sudé

, což je spor.

• užívá: $\boxed{U \Leftrightarrow (\text{non} U \Rightarrow \underbrace{(U \wedge \text{non} U)}_{\text{"spor"}})}$

• Příklad: "číslo n je prvočíslo"

= Výroková funkce V ve množině X přiřazuje každému $x \in X$ výrok $V(x)$.

Kvantifikátory

a) Existenční K. $\exists x \in X : V(x)$

"Existuje $x \in X$, pro které platí $V(x)$"

$\exists! x$ "Existuje jediné" –"–

b) Univerzální K. $\forall x \in X : V(x)$

"Pro každé $x \in X$ platí $V(x)$"

• Platí: a) $\text{non}\,(\exists x \in X : V(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in X : \text{non}\, V(x))$

"Pro žádné $x \in X$ neplatí $V(x)$"

b) $\text{non}\,(\forall x \in X : V(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in X : \text{non}\, V(x))$

"existuje aspoň 1 x, pro které $V(x)$ neplatí.

Množiny

- 19. stol. G. Cantor, naivní teorie množin
  množina = libovolný soubor objektů
- Russellův paradox: $X := \{x / x \in X\}$ je $X \in X$??
- začátek 20. stol.: Axiomatická teorie množin
  $\Rightarrow$ základ celé matematiky
- Banach-Tarského paradox: - jednotková koule v prostoru
  $O \rightsquigarrow OO$

• Pro nás: množina = soubor prvků, u kterých lze rozhodnout zda do dané množiny patří či nepatří.

• Pojmy: a) $\emptyset$ ... prázdná množina

b) $\exp(M) := \{P \mid P \subset M\}$

potenční množina

- včetně $\emptyset, M$

- příklad: $M = \{1,2\}$ $\exp(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

c) sjednocení $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

d) průnik $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

e) rozdíl $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

f) Kartézký součin $A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

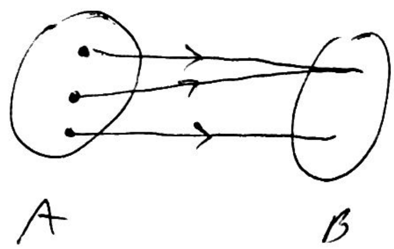
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ ... Kartézký součin

Morganovy vzorce

- Nechť A, B, C jsou množiny.
- Potom a) $C \setminus (A \cup B) = ((C \setminus A) \cap (C \setminus B))$

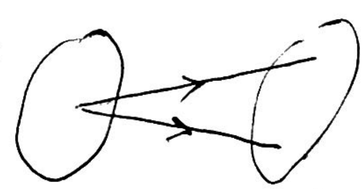
b) $C \setminus (A \cap B) = ((C \setminus A) \cup (C \setminus B))$

Zobrazení φ z množiny A do množiny B je přepis, který přiřazuje každému $a \in A$ nejvýše jeden $\varphi(a) \in B$.



A B

nelze



A B

• značení: - definiční obor $D_\varphi := \{a \in A \mid \varphi(a) \text{ je definován}\}$

- obor hodnot $R_\varphi := \{\varphi(a) \mid a \in D_\varphi\}$

• Je-li $D_\varphi = A$, potom mluvíme o zobrazení φ množiny A.
(ne z množiny A)

• Píšeme $\varphi : A \to B$

Formálně: Zobrazení $\varphi: A \to B$ lze definovat jako $\varphi \subset A \times B$, takovou, že $\forall a \in A$ existuje nejvýše jedno $b \in B$, aby $(a,b) \in \varphi$.

Matematická analýza - doplnění z učebnice I

Podmnožiny

Definice: Řekneme, že množina P je podmnožinou (částí) množiny M, jestliže každý prvek množiny P je také prvkem M.

Píšeme pak $P \subset M$

Př: $\mathbb{R}$ ... množ. všech reál. čísel
$\mathbb{Z}$ ... množ. všech celých čísel
$\mathbb{R}^+$ ... množ. všech klad. r. čís.

platí $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$
neplatí $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^+$ ani $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{Z}$

Rovnost množin

Definice: Řekneme, že množiny M a P se rovnají ($M = P$), jestliže platí $M \subset P$ a současně i $P \subset M$.

Př.: dokažte $M_1 = M_2$, $M_1 = \{x : x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 2 < 0\}$
$M_2 = \{x : x \in \mathbb{R}, x^2 < 4, x > -1\}$

$x \in M_1 \Rightarrow x \in (-1, 2)$

$a + b = 1$
$a \cdot b = -2$

$(x-2)(x+1) < 0$

$-1 \quad 0 \quad 2$

$x \in \mathbb{R} \wedge x - 2 < 0 \wedge x + 1 > 0$
$x < 2 \qquad x > -1$
$x^2 < 4$
$\Big\} \; \underline{x \in M_2}$

$x \in M_2 \Rightarrow x \in (-1, 2)$

$-2 \; -1 \; 0 \; 1 \; 2$

$|x| < 2$

$x \in \mathbb{R} \wedge x^2 < 4 \wedge x > -1$
$|x| < 2 \wedge x > -1$
$x < 2 \wedge x > -2 \wedge x > -1$
$x < 2 \wedge x > -1$
$\Rightarrow \underline{x \in M_1}$

Vlastní podmnožina

Je-li $P \subset M$, $P \neq M$, pak říkáme, že P je vlastní podmnožinou množiny M.

Př: Určete počet prvků $\exp(M)$, kde M má $n \in \mathbb{N}$ prvků

$$\text{počet} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = \underline{2^n}$$

Symetrická diference

- $\Delta(M_1, M_2)$ nazýváme množinu $(M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$
- tj. množinu x, které patří do jedné z těchto množin ale ne do obou

Př.: dokažte $\Delta(M_1, M_2) = (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$

a) $x \in \Delta(M_1, M_2) \Rightarrow x \in (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1) \Rightarrow x \in (M_1 \setminus M_2) \vee x \in (M_2 \setminus M_1)$
$\Rightarrow (x \in M_1 \wedge x \notin M_2) \vee (x \in M_2 \wedge x \notin M_1)$

b) $x \in (M_1 \cup M_2) \wedge x \notin (M_1 \cap M_2) \Rightarrow (x \in M_1 \vee x \in M_2) \wedge (x \notin M_1 \vee x \notin M_2)$

• Důležité:

$$\boxed{\begin{array}{l}(A \wedge B) \vee C \iff (A \vee C) \wedge (B \vee C) \\ (A \vee B) \wedge C \iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C)\end{array}}$$

Př: dokažte $M_1 \setminus M_2 = M_2 \setminus M_1$ když $M_1 = M_2$
- chceme aby následující výrok byl pravdivý:

$$(x \in M_1 \wedge x \notin M_2) \wedge (x \in M_2 \wedge x \notin M_1)$$
$$\Rightarrow x \in \emptyset \Rightarrow M_1 \setminus M_2 = \emptyset \Rightarrow \underline{\underline{M_2 = M_1}}$$

Vlastnosti operací s množinami:

~~Kom~~ • Pro libovolné množiny platí:
- komutativnost
  1. $A \cup B = B \cup A$
  2. $A \cap B = B \cap A$
  } plyne z definic
- asociativnost
  3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- distributivnost
  5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Př: důkaz $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

a) nechť $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ ~~nebo~~, taky $x \in A \cup B$, $x \in A \cup C$ ~~nebo $x \in B \cap C$~~ $\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

nebo $x \in B \cap C$, potom $x \in B$, $x \in C$, tedy i $x \in A \cup B$, $x \in A \cup C$ taky $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- dokázali jsme inkluzi $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, potom $x \in (A \cup B)$, $x \in (A \cup C)$
- buď $x \in A$, pak $x \in A \cup (B \cap C)$
- nebo $x \notin A$, $x \in B$ i $x \in C$, $x \in B \cap C$, $x \in A \cup (B \cap C)$

Sjednocení všech množin

- Nechť $\mathcal{M}$ je množina, jejímiž prvky jsou zase množiny. Sjednocením všech množin z $\mathcal{M}$ nazýváme množinu všech těch x, které patří aspoň do jedné množiny $M \in \mathcal{M}$.

Označujeme ji $\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$

- Je-li $\mathcal{M}$ posloupnost $M_1, M_2 \dots$ pak píšeme $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$,
- Obsahuje-li k množin $M_1, M_2, \dots, M_k$ pak píšeme $\bigcup_{n=1}^{k} M_n$.

Průnik všech množin

Průnikem všech množin z $\mathcal{M}$ nazýváme množina všech těch x, které patří do každé množiny $M \in \mathcal{M}$

Označujeme ji $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$.

$\mathcal{M}$ – posloupnost $M_1, M_2, \ldots$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$

– konečná $M_1, M_2, \ldots, M_k$ $\bigcap_{n=1}^{k} M_n$

Doplněk

Nechť A, M jsou dvě množiny, $A \subset M$.

Množinu $M \setminus A$ nazýváme doplňkem A v M a označujeme ji $C_M(A)$. (či $C(A)$)

Věta: Nechť A, B jsou dvě množiny.

Potom je $(A \setminus B) \cup (B \cap A) = A$.

Speciálně pro $B \subset A$ je $C_A(B) \cup B = A$

Důkaz: – nechť $x \in A$
- buď $x \notin B$, tedy $x \in (A \setminus B)$, také $x \in (A \setminus B) \cup (B \cap A)$
- nebo $x \in B$, pak $x \in (B \cap A)$, také $x \in (A \setminus B) \cup (B \cap A)$

– dokázali jsme inkluzi $A \subset (A \setminus B) \cup (B \cap A)$

– nechť $x \in (A \setminus B) \cup (B \cap A)$
- buď $x \in (A \setminus B)$, takže $x \in A$
- nebo $x \in (B \cap A)$, takže $x \in A$.

Disjunktní množiny

Říkáme, že množiny A a B jsou disjunktní, jestliže je $A \cap B = \emptyset$.

de Morganovy vzorce

– Nechť je $\mathcal{M} \subset \exp M$. Potom platí:

1. $C_M\left(\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A\right) = \bigcap_{A \in \mathcal{M}} C_M(A)$ "doplněk sjednocení je roven průniku doplňků"
2. $C_M\left(\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A\right) = \bigcup_{A \in \mathcal{M}} C_M(A)$ "doplněk průniku je roven sjednocení doplňků"

Matematická analýza – přednáška II

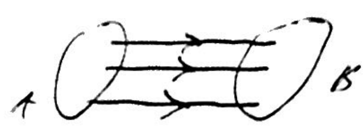
Zobrazení: $\varphi: A \to B$, D_φ, R_φ

Př.: 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- reálná funkce jedné reálné proměnné
- např. $f(x) = 3x+1$, $x \in \mathbb{R}$
  $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$
  $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$

2) $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ reálné posloupnosti
$\phantom{a: \mathbb{N} \to{}} \mathbb{C}$ komplexní posloupnosti
- např.: $\{2n+3\}_{n=1}^{\infty}$

3) $Id: A \to A$ identita
$Id(a) := a$, $a \in A$

Definice: Zobrazení $\varphi: A \to B$ je
1) <u>prosté (injektivní)</u>, pokud $\forall a_1, a_2 \in D_\varphi$:
$a_1 \neq a_2 \Rightarrow \varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$

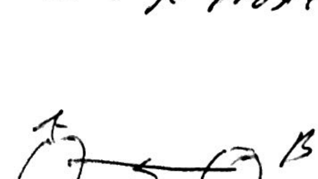


$\varphi(a_1) = \varphi(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$
(každý obraz pouze 1 vzor)

2) <u>na (surjektivní)</u>, pokud $R_\varphi = B$

3) <u>vzájemně jednoznačné (bijekce)</u> pokud $D_\varphi = A$, $R_\varphi = B$ a φ je prosté

Inverzní zobrazení

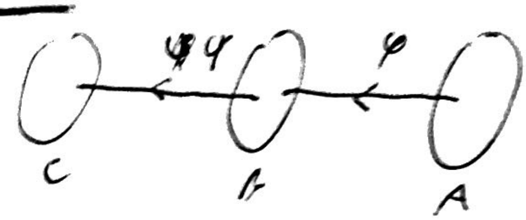


Definice: Nechť $\varphi: A \to B$ je prosté.
Potom definujeme inverzní zobrazení $\varphi^{-1}: B \to A$ následovně: $D_{\varphi^{-1}} = R_\varphi$
$\varphi^{-1}(b) = a \iff \varphi(a) = b$

Př.: $f(x) = x^2$ je prosté na $x \in [0; +\infty)$
$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Složení zobrazení

(Kompozice):



Definice: Nechť $\varphi: A \to B$ a $\psi: B \to C$.

~~Potom~~ Nechť $R_\varphi \cap D_\psi \neq \emptyset$.

Potom definujeme složení $\psi \circ \varphi: A \to C$ následovně:

$$D_{\psi\circ\varphi} := \{a \in A \mid \varphi(a) \in D_\psi\}$$

$$(\psi \circ \varphi)(a) = \psi(\varphi(a)), \quad a \in D_{\psi\circ\varphi}$$

- Pozn.: záleží na pořadí

Př: $f(x) = 3x+1, \ x \in \mathbb{R}$

$g(y) = \sqrt{y}, \ y \in [0; +\infty)$

$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x+1 \geq 0\}$

$x \geq -\frac{1}{3}$

$x \in [-\frac{1}{3}; +\infty)$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{3x+1}$

Číselné obory

Přirozená čísla: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

- Konstrukce $\mathbb{N}_0$: $0 = \emptyset, \ 1 = \{\emptyset\}, \ 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ 3 = \{0, \{0\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$3 = 2 \cup \{2\}, \dots$

Celá čísla: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

-

Racionální čísla: ~~$\mathbb{Q} \in \{\frac{p}{q}\}$~~

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

Reálná čísla: $\mathbb{R}$, algeb. operace $+, -, \cdot, :$, uspořádání $<$

- Konstrukce $\mathbb{R}$: − např.: − pomocí řezů, Jarník

Komplexní čísla: $\mathbb{C}$

Základní vlastnosti $\mathbb{R}$

- Definice: Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Potom
  minimum M nazveme $s \in \mathbb{R}$ takové, že a) $s \in M$
  (nejmenší prvek) b) s je dolním odhadem M
  tzn. $\forall x \in M: s \leq x$
  – značíme $\min M$
  Potom max. M

Př.: Je-li $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, konečná, pak M má minimum i maximum.

Př.: Je-li $\emptyset \neq M \subset \mathbb{N}$, potom existuje $\min M$
"libovolná, neprázdná $M \subset \mathbb{N}$"

Důkaz: Je-li $m_0 \in M$, potom $\underbrace{M \cap \{1, \dots, m_0\}}_{\text{konečná množina}}$

$\Rightarrow$ platí $\min(M \cap \{1, \dots, m_0\}) = \min M$

- $\mathbb{N}$ nemá maximum

Př.: $M = (0, 1)$ nemá maximum ani minimum
0 je dolní odhad M, a to a to největší

- Definice: Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Potom infimem M nazveme $s \in \mathbb{R}$, které je největší dolní odhad M.
  tzn.: 1) $\forall x \in M: s \leq x$ (dolní odhad)
  2) $\forall s' \in \mathbb{R}: s' > s$ (největší)
  $\Rightarrow \exists x \in M: x < s'$
  – značíme $\inf M$

- Existuje-li $\min M$, potom $\inf M = \min M$.

- Definice: Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Potom:
  maximem M nazveme $s \in \mathbb{R}$ takové, že: a) $s \in M$
  (největší prvek) b) s je horní odhad M
  tzn. $\forall x \in M: x \leq s$
  – značíme $\max M$

- Definujeme: Nechť $M \in \mathbb{R}$. Potom:
  supremum M je nejmenší horní odhad M
  tzn.: 1) $\forall x \in M: x \leq s$
  2) $\forall s' \in \mathbb{R}$: $s' < s$
  $\Rightarrow \exists x \in M: x > s'$

Definice: Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá
1) <u>zdola omezená</u> pokud má M dolní odhad.
2) <u>shora omezená</u> pokud má M horní odhad

Př: $M = \mathbb{N}$ – omezená zdola
– není om. shora

Matematická indukce:

Nechť V je výroková funkce na $\mathbb{N}$.
Nechť platí: 1) $V(1)$ platí
2) $\forall n \in \mathbb{N}: V(n) \Rightarrow V(n+1)$.

Potom $V(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí.

- Důkaz: – sporem: neplatí závěr, platí předpoklady
  – Předpokládám, že exis. $n \in \mathbb{N}$ tak že $V(n)$ neplatí
  Polož $M := \{n \in \mathbb{N} \mid V(n) \text{ neplatí}\}$
  Potom $\emptyset \neq M \subset \mathbb{N}$ a existuje $n_0 = \min M$
  – z 1. předpokladu: $n_0 > 1$
  – tedy $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ a $V(n_0 - 1)$ platí
  – z 2. předpokladu: $V(n_0)$ platí, což je spor.

Př.: Dokažte $\forall n \in \mathbb{N}: 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n+1}{2} \cdot n$

1) $n = 1$: $1 = \frac{2}{2} \cdot 1$
$\underline{\underline{1 = 1}}$ ✓

2) předpoklad: platí pro n. Dokážeme, že platí i pro $n+1$.
$n \to n+1$: – máme $1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n+1}{2} \cdot n + n + 1 = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right)$
$= \cancel{\frac{n^2 + n + 2n + 2}{2}} = \cancel{\frac{2n^2 + n + 2}{2}}$

Matematická analýza - přednáška III

Ex.: 1) $\sup (0,1) = 1$

2) $\emptyset$ nemá supremum

3) M není shora omezená $\Rightarrow$ M nemá supremum

Axiomy reálných čísel

1) Axiomy pro + a $\cdot$:

A1) $\forall x,y \in R: \quad x+y = y+x$ (komutativita)

A2) $\forall x,y,z \in R \quad (x+y)+z = x+(y+z)$ (asociativita)

A3) $\exists 0 \in R \ \forall x \in R: \ x+0 = x$ (existuje nulový prvek)

nula

POZN. 0 je jednoznačná

$\rightarrow$ důkaz sporem $0' = 0 + 0' = 0$

A4) $\forall x \in R \ \exists -x \in R: \quad x + (-x) = 0$

POZN: Píšeme $x+(-y)$ jako $x-y$

A5) $\forall x,y \in R: \quad x \cdot y = y \cdot x$ (asociativní)

A6) $\forall x,y,z \in R: (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

A7) $\exists 1 \in R \ \forall x \in R: x \cdot 1 = x$

jednotka

A8) $\forall x \in R \setminus \{0\} \ \exists x^{-1} \in R: \ x \cdot x^{-1} = 1$

POZN. Píšeme $x^{-1} = \frac{1}{x}$ a $x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y} = x : y$

A9) $\forall x,y,z \in R: \quad (x+y) z = xz + y \cdot z$ (distributivita)

2) Axiomy pro ~~porovnávání~~ uspořádání

A10): $\forall x,y \in R$ nastane jediná možnost : $x<y, \ x=y, \ x>y$

A11) $\forall x,y,z \in R: \quad (x<y) \wedge (y<z) \Rightarrow (x<z)$ (tranzitivita)

A12): $\forall x,y,z \in R: \quad x<y \Rightarrow x+z < y+z$ (nerovnost se zachová)

A13) $\forall x,y,z \in R: \quad (x<y) \wedge (z>0) \Rightarrow xz < y \cdot z$

3) Axiom – úplnost reálných čísel

A14) Každá zdola omezená, neprázdná $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ má infimum.

(POZN. ekvivalentně lze definovat pomocí suprema)

A14*) Každá shora omezená, $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ má supremum.

- Existuje jediné $\mathbb{R}$ splňující všechny axiomy.
  (až izomorfismus) – stejné výsledky pro různé modely reálných čísel
- Racionální čísla splňují všechny axiomy až na (A14)

Označení

1. Intervaly : Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$ ... otevřený interval

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$ .... uzavřený interval

pozn: $x \leq y$ místo $(x < y) \vee (x = y)$

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$ ... polouzavřený

(taté $(a, b]$, ... $a < x \leq b$)

2) Rozšířená reálná čísla $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty$

$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ apod...

3) Absolutní hodnota $x \in \mathbb{R}$

$$|x| := x \ ,\ x \geq 0 \qquad\qquad := -x \ ,\ x < 0$$

geometrický význam = vzdálenost od počátku

- Platí : - trojúhelníková nerovnost $|x+y| \leq |x| + |y|$

$||x| - |y|| \leq |x+y|$

Definice: $M \subset \mathbb{R}$ je omezená, pokud existuje $K \in [0, +\infty)$ tak, že $\forall x \in M: |x| \leq K$

- M je omezená právě když M je omezená shora i zdola.

- Př: – libovolně malý interval
  → najdu nekonečně mnoho racionál. i reálných čísel

Věta: (Archimédův princip)

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $p \in \mathbb{Z}$ takové, že ~~$p \le x < p+1$~~
$p \le x < p+1$

Důkaz: a) Celá čísla nejsou shora ani zdola omezená.
- důkaz sporem: „$\mathbb{Z}$ není zdola omezená"
→ „$\mathbb{Z}$ je zdola omezená". Potom ~~$a = \inf \mathbb{Z}$)~~ $a = \inf \mathbb{Z}$
→ Existuje $k \in \mathbb{Z}$ tak, že $k < a+1$
$\underbrace{(k-1)}_{\text{celé číslo}} < a$ ⇒ a není dolní odhad, spor

b) Nechť $x \in \mathbb{R}$. Existují $k, l \in \mathbb{Z}$ takové, že $k < x < l$.
Potom $M := \{ m \in \mathbb{Z} \mid k \le m \le x \}$, potom $M \neq \emptyset$,
M je konečná, tudíž existuje $p = \max M$
Potom $p \le x < p+1$.

Př: $\inf \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \} = 0$, protože
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

Archimédův princip pro $x = \frac{1}{\varepsilon}$ ⇒ platí.

Věta (o hustotě $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)

V každém otevřeném intervalu existuje aspoň jedno rac. číslo.

Důkaz: 
Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$

$\forall \varepsilon > 0$ ~~$\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$~~ $\exists q \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{q} < (y-x)$

$\underbrace{1+qx}_{\text{Archimédův princip na tato čísla}} < qy$ (1)

⇒ Existuje $p \in \mathbb{Z}$ tak, že $p \le 1 + qx < p+1$ (2), (3)

Potom $qx < p$ (ze (3))
⇒ $p < qy$ (ze (2) a (1) ...)
neboli $x < \frac{p}{q} < y$

Důsledek: V každém otevřeném intervalu existuje nekonečně mnoho racionálních a nekonečně mnoho iracionálních čísel.

Důkaz: 1) sporem: V intervalu (x,y) leží jen konečně mnoho rac. čísel.
Označme r_0 nejmenší takové.
$\to$ Věta o hustotě Q v R $\to$ v (x, r_0) leží rac. číslo
$(x, r_0) \cap Q \neq \emptyset$ což je spor.

2) - pro iracionální čísla
- Dle 1) víme, že v $(x-\sqrt{2}, x+\sqrt{2})$ existuje nekonečně mnoho rac. čísel.
Je-li $r \in Q \cap (x-\sqrt{2}; x+\sqrt{2})$, potom $r+\sqrt{2} \in (x,y)$ a není racionální
důkaz: kdyby $r+\sqrt{2}$ byla racionální
tak $(r+\sqrt{2})-r$ je racionální $\Rightarrow \sqrt{2}$ je rac.
$\to$ spor

Komplexní čísla $z = x+iy$

- 18./19. stol.: Gauss - komplex. čísla lze ztotožnit s body roviny

Definice: Množina komplexních čísel $\mathbb{C}$ je $\mathbb{R}^2$ s operacemi:
1) $(x,y)+(u,v) = (x+u, y+v)$
2) $(x,y).(u,v) = (xu-yv, xv-yu)$

Pozn.: 3) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: $x \in \mathbb{R} \longleftrightarrow (x,0) \in \mathbb{C}$
4) $i := (0,1) \quad i^2 = -1$
$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$
5) $z = (x,y) = x\cdot(1,0) + y(0,1) = x+iy$

Označení: Pro $z = x+iy \in \mathbb{C}$

$\bar{z} := x-iy$ komplexně sdružené číslo
$Re\, z = x$ ... reálná část
$Im\, z = y$ ... imaginární část
$|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ absolutní hodnota

Vlastnosti:

Matematická analýza – přednáška IV

Vlastnosti komplexních čísel: $\forall z, w \in \mathbb{C}$

1) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\overline{(\overline{z})} = z$

   $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

2) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

3) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (troj. nerovnost)

4) $\mathbb{C}$ splňuje axiomy I. (sčítání, násobení jako u reálných č.)

   $\Rightarrow \mathbb{C}$ je komutativní těleso

Např.: ověření axioma (A8) (existence inverzního prvku)

$$z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \;, \Rightarrow z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \qquad (z \text{ 1) toho})$$

5) Na $\mathbb{C}$ nelze zavést uspořádání $<$, aby platilo II. (axiomy pro $\mathbb{R}$)

   - důkaz sporem:

     - „lze uspořádat $\mathbb{C}$"

       1) Nechť $i > 0$. Potom $-1 = i^2 > 0$, spor

       2) Nechť $i < 0$ Potom $-1 = i^2 > 0$, spor

POZN.: Hamilton: Jde zavést v $\mathbb{R}^3$ geometrický součin ·,

tzn. splňující 1) až 5) ?

-> lze v $\mathbb{R}^4$, objevil <u>Kvaterniony</u>, značí se $\mathbb{H}$ (pol 19. stol)

$\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ a operace $+, \cdot$

- platí $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, ale není komutativní

  = nekomutativní těleso ($ij = -ji$)

$x = x_0 + i x_1 + j x_2 + k x_3 \qquad -1 = i^2 = j^2 = k^2$

POZN.: <u>Oktoniony</u> $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$, sčítání, násobení

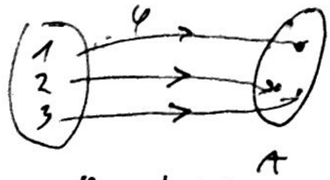
$x = x_0 + x_1 i_1 + \ldots + x_7 i_7 \qquad (i_j^2 = -1)$

- nejsou ani komutativní, ani asociativní
- splňují 2)

POZN.: <u>Hurwitz</u>: - geometrický součin v $\mathbb{R}^n$ existuje právě pro $n = 1, 2, 4, 8$ a to $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ a $\mathbb{O}$

Mohatnost množin = velikost

Konečné množiny - např. $\emptyset$
- mají konečný počet prvků



φ .. bijekce

Množina A má n prvků, právě když existuje bijekce φ množiny $\{1, \dots, n\}$ na A.

Definice: Řekneme, že množiny A, B mají stejnou mohatnost, pokud existuje bijekce φ množiny A na B.

- Píšeme $m(A) = m(B)$, také $|A| = |B|$

Př: $S := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sudá čísla

$\varphi : \mathbb{N} \to S$, $\varphi(n) := 2n$, bijekce ✓

$\Rightarrow$ $m(\mathbb{N}) = m(S)$

Definice: Mohutnost množiny A je menší než mohatnost množiny B, pokud $m(A) \neq m(B)$ a existuje $C \subset B$ taková, že $m(A) = m(C)$.

- Píšeme: $m(A) < m(B)$

Př: Je-li A konečná, potom $m(A) < m(\mathbb{N})$

• Pozn.: Lze ukázat, že pro každé dvě množiny A, B platí právě jedna možnost:
1) $m(A) < m(B)$
2) $m(A) = m(B)$
3) $m(A) > m(B)$ pokud platí tzv. axiom výběru.

(předpokládáme v analýze)

Axiom výběru
- libovolný soubor neprázdných množin
- zároveň vybere 1 prvek z každé množiny

Definice: Množina je <u>spočetná</u>, pokud má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$.

Množina je <u>nespočetná</u>, pokud není konečná ani spočetná.

(POZN: Konečné množiny nejsou spočetné)

Tvrzení: 1) Každá nekonečná $A \subset \mathbb{N}$ je spočetná.

2) Každá nekonečná množina obsahuje spočetnou podmnožinu. ("spočetné mn. = nejmenší nekonečné množiny)

3) Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.

4) $\mathbb{R}$ je nespočetné

5) Pro každou množinu M je $m(M) < m(\exp M)$ (potenční množina)

Důkaz 3): • označení: Pro každé $j \in I$ máme množinu A_j.

Potom definujme $\bigcup_{j \in I} A_j := \{x \mid \exists j \in I: x \in A_j\}$

také $\bigcap_{j \in I} A_j := \{x \mid \forall j \in I: x \in A_j\}$

Pro $I = \mathbb{N}$, potom $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

Nechť $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ a každé A_j je spočetná množina.

- Pro každé $j \in \mathbb{N}$ existuje $\varphi_j : \mathbb{N} \xrightarrow{na} A_j$, nebo-li $A_j = \{\varphi_j(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

- pro A_1: $\varphi_1(1) \quad \varphi_1(2) \rightarrow \varphi_1(3) \; \ldots$
- pro A_2: $\varphi_2(1) \quad \varphi_2(2) \quad \varphi_2(3) \; \ldots$
- pro A_3: $\varphi_3(1) \quad \varphi_3(2) \quad \varphi_3(3) \; \ldots$
- pro A_4: $\varphi_4(1) \quad \varphi_4(2) \quad \varphi_4(3) \; \ldots$

• Existuje bijekce $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{na} A$, např. následovně

$\varphi(1) = \varphi_1(1)$.

$\varphi(2) = \varphi_2(1)$

$\varphi(3) = \varphi_1(2)$

$\vdots$

Podle definice $m(A) = m(\mathbb{N})$

• POZN. podobně lze ukázat, že jsou spočetné např. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, nebo $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q} \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$)

$\Rightarrow$ Racionální čísla jsou spočetná.

Důkaz: <u>nespočetnost $\mathbb{R}$</u>

Stačí ukázat, že $(0,1)$ je nespočetný.

[pozn. $m(\mathbb{R}) = m((0,1))$ – stačí najít bijekci $m(0,1)$ na $\mathbb{R}$]

- Využijeme toho, že každé číslo z $(0,1)$ má nekonečný desetinný rozvoj tvaru $0{,}a_1a_2a_3\ldots$ kde $a_i \in \{0,1,\ldots,9\}$
- Aby toto vyjádření bylo jednoznačné vynecháme desetinné rozvoje obsahující od určitého místa samé 9.

  [$0{,}4999\ldots = 0{,}5$] [$0{,}5$ chápeme jako $0{,}5000\ldots$]

- Důkaz sporem: že $(0,1)$ je nespočetná

  ⇒ předpoklad: "$(0,1)$ je spočetný", tzn. $(0,1) = \{a^i \mid i \in N\}$.

$$a^1 = 0{,}\boxed{a_1^1}a_2^1a_3^1\ldots$$
$$a^2 = 0{,}a_1^2\boxed{a_2^2}a_3^2\ldots$$
$$a^3 = 0{,}a_1^3a_2^3\boxed{a_3^3}\ldots$$
$$\vdots$$

Uvažme následující $a \in (0,1)$: $a = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$, kde

$$a_k = 2, \text{ pokud } a_k^k = 1$$
$$a_k = 1, \text{ pokud } a_k^k \neq 1$$

- číslo a je různé od všech a^k. (liší se aspoň na k-tém místě desetinného rozvoje)

⇒ spor [pozn. "diagonální metoda"]

⇒ $\mathbb{R}$ jsou nespočetná

- Pozn. Iracionální čísla $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ jsou nespočetná, protože $\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{nespoč.}} = \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{spč.}} \cup (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$

<u>Hypotéza kontinua</u>

- Každá nekonečná podmnožina $\mathbb{R}$ ~~je~~ má buď mohutnost N (spočetná) nebo mohutnost $\mathbb{R}$.

- označení $m(\mathbb{R})$ = mohutnost kontinua
- nezávislá na axiomech teorie množin
- nedá se dokázat ani vyvrátit

"mezi spočetnými množinami a mohutností kontinua nic není"

Matematická analýza – doplnění po přednášce IV

- Tvrzení: Množina $\mathbb{N}$ není omezená shora.
  - Důkaz: – sporem: $S := \sup \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}$

    1) $S \geq n$, $n \in \mathbb{N}$

    2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}: n_0 > S - 1$ ($(S-1)$ není supremum $\Rightarrow$ musí ex. $\mathbb{N}$ větší než toto)

    – úpravy:

    $$n_0 + 1 > S$$

    – platí $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ spor, S není supremum

- Platí: $\alpha \leq \beta \wedge \gamma \leq \delta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \delta$

  $\alpha < \beta \wedge \gamma \leq \delta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta$

Vlastnosti reálných čísel

- Tvrzení: 1) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > x$

  2) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové že $\varepsilon n > x$

Důkaz: 1) – sporem: Kdyby 1) nebylo pravdivé, nalezneme x takové, že je horní závora $\mathbb{N}$

$\Rightarrow \mathbb{N}$ je shora omezená, spor

2) – zafixujeme $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$

– podle 1) existuje $n > \frac{x}{\varepsilon}$

- Tvrzení: Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. Pak

$$x \leq y \Leftrightarrow x \leq y + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Důkaz: a) "$\Rightarrow$" zřejmé

b) "$\Leftarrow$" důkaz nepřímo: $x > y \Rightarrow x > y + \varepsilon$ ~~$\exists \varepsilon > 0$~~

– kde: $\varepsilon := \frac{x-y}{2} > 0$ $\quad y + \varepsilon = y + \frac{x-y}{2} = x - \frac{x-y}{2} < x$

$$\underline{\underline{x > y + \varepsilon}}$$

- Pozn.: platí $x \leq \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x \leq 0$

• Tvrzení: Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ a $x < y$. Pak existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $x < q < y$

Důkaz: - zafixujeme dost velké $m \in \mathbb{N}_0$ aby $m + x > 0$
- zafixujeme $n \in \mathbb{N}$ dost velké aby $\frac{1}{n} < y - x$
- nalezneme $q \in \mathbb{N}$ minimální aby platilo $\frac{q}{n} > m + x$ (existence q plyne z omezenosti zdola $\mathbb{N}$)
- proto: $\frac{q-1}{n} \leq m + x$
- dostaneme: $x < \frac{q}{n} - m = \frac{q-1}{n} - m + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + y - x = y$
- proto $\frac{q}{n} - m = \frac{q - nm}{n}$ má vlastnosti hledaného $q \in \mathbb{Q}$

• Tvrzení: Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ a $x < y$. Pak existuje nekonečně mnoho racionálních čísel z intervalu (x, y)

Důkaz: - existuje aspoň jedno, důkaz sporem: "existuje jich konečný počet"
- označíme q_1 to nejmenší
- existuje $q_0 \in \mathbb{Q}$ takové, že $x < q_0 < q_1$
- spor, q_1 mělo být nejmenší

• Tvrzení: Množina $\mathbb{Q}$ nesplňuje podmínku (C1) z definice reál. čísel

Důkaz: - označíme $M = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 2\}$
- ukážeme, že nemá supremum v $\mathbb{Q}$
- sporem: "M má supremum v $\mathbb{Q}$", $S := \sup M \in \mathbb{Q}$
- musí platit $S \neq \sqrt{2}$ ($\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)
  a) $S < \sqrt{2} \Rightarrow$ lze najít rac. číslo $q \in (S, \sqrt{2})$, spor
  b) $S > \sqrt{2} \Rightarrow$ lze najít rac. číslo $q \in (\sqrt{2}, S)$
  = horní závora M ~~větší~~ menší než S, spor

Tvrzení: Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ a $x < y$. Pak existuje nekonečně mnoho iracionálních čísel z intervalu (x, y).

Důkaz: 1) existuje aspoň jedno: - víme, že existuje $q \in \mathbb{Q} \cap (x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2})$
- tedy $q + \sqrt{2} \in (x, y)$, což je iracionální číslo

2) nekonečně mnoho: - sporem
- pokud konečný počet, označíme r_1 to nejmenší
- nalezneme iracionální číslo v intervalu (x, r_1)
$\Rightarrow$ spor

Základní rovnosti a nerovnosti

- Trojúhelníková nerovnost: $|x+y| \leq |x| + |y|$

$$||x|-|y|| \leq |x-y|$$

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$$

Důkaz: $-|x| \leq x \leq |x|$ a $-|y| \leq y \leq |y|$

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

pro $a = |x|+|y|$ dává $|x+y| \leq |x|+|y|$

- dále: $|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$
  - odtud $|x|-|y| \leq |x-y|$
  - prohozením x a y: $|y| - |x| \leq |y-x| = |x-y|$
  - poslední dva odhady $\Rightarrow$ $||x| - |y|| \leq |x-y|$

- Platí: $\max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$

Cauchy-Schwarzova nerovnost

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

$$\sum_{k=1}^{N} (a_k b_k)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{N} b_k^2\right)$$

také: $\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{N} a_k^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \sum_{k=1}^{N} b_k^2$

- platí: $(a-b)^2 \geq 0$

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

- dosadíme $a = \alpha\sqrt{2\varepsilon}$, $b = \frac{\beta}{\sqrt{2\varepsilon}}$

$\rightarrow \alpha\beta \leq \varepsilon\alpha^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\beta^2$

- použijeme pro každý člen zvlášť

Youngova nerovnost

$$a \cdot b \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}}, \quad p \in (1,\infty), \text{ např. } ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

Binomická věta

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Matematická analýza – přednáška V

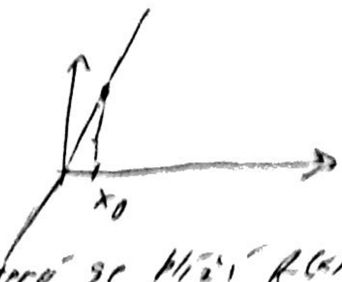
- funkce: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - reálná funkce jedné reálné proměnné

  $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\quad f = f_1 + i f_2$, kde $f_1 = \operatorname{Re} f$, $f_2 = \operatorname{Im} f$
  - komplexní funkce jedné reálné p.

Limita

- Nedefinice: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Př: 1) $f(x) = 2x+1, x \in \mathbb{R}$



- limita je hodnota, ke které se blíží $f(x)$, pokud se x "blíží" k x_0

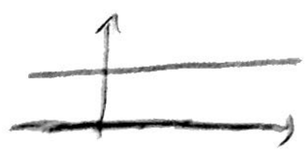
Př: 2) $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x-1} = 2x+1, x \neq 1$

Př: 3) $\operatorname{Signum}(x) := 1, \; x > 0$
$\qquad := 0, \; x = 0$
$\qquad := -1, \; x < 0$

Pozn.: $|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$

$\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ neexistuje.

Př: 4) Dirichletova funkce $D(x) := 1, \; x \in \mathbb{Q}$
$\qquad := 0, \; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$



$\lim\limits_{x \to 0} D(x)$

Definice 1. (Vlastní limita)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$). Nechť $\delta > 0$ a $D_f \supset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.
Potom vlastní limitou f v x_0 rozumíme číslo $A \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) takové, že $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ $\quad$ (L)

Př: Nechť $\varepsilon > 0$. Hledáme $\delta > 0$ aby platila def. limity.

Máme též $\varepsilon > |f(x) - 3| = |2x - 2|$ $\Big\}$ dostanu $\frac{\varepsilon}{2} > |x - 1|$

$\lim\limits_{x \to 1} (2x - 1) = 3$? $\quad \Leftrightarrow$ stačí zvolit $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$

POZN: – píšeme: $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

nebo $f(x) \to A$ pro $x \to x_0$

Př.: $D(x) := 1$, $x \in \mathbb{Q}$
$D(x) := 0$, $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$\lim_{x\to 0} D(x)$ neexistuje

- důkaz sporem: - předpoklad $\lim_{x\to 0} D(x) = A$, $A\in\mathbb{R}$
- Pro $\varepsilon := \frac{1}{2}$ musí platit definice.

→ existuje $\delta>0$ tak, že $0<|x|<\delta \Rightarrow |D(x)-A|<\frac{1}{2}$

a) nechť $A\geq\frac{1}{2}$. Potom $(\forall x\in(0,\delta),\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \neq \emptyset$:

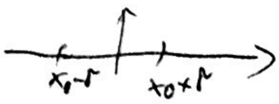
$D(x)=0$ a $|A|<\frac{1}{2}$, spor.

b) nechť $A<\frac{1}{2}$. Potom $(\forall x\in(0,\delta),\ x\in\mathbb{Q}) \neq \emptyset$:

$D(x)=1$ a $1-A<\frac{1}{2}$, tzn. $A>\frac{1}{2}$ spor

Pojem okolí

1) Nechť $x_0\in\mathbb{R}$ a $\delta>0$. Definujeme $U_\delta(x_0) := \{x\in\mathbb{R} \mid |x-x_0|<\delta\}$,
= „δ-okolí bodu x_0“



b) $U^*_\delta(x_0) := U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$
„prstencové (redukované) δ-okolí bodu x_0“

2) $x_0\in\mathbb{C}$ .... $U_\delta(x_0) := \{x\in\mathbb{C} \mid |x-x_0|<\delta\}$

• POZN.: V této kapitole předpokládáme $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) a $x_0\in\mathbb{R}$ a $A\in\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$), pokud není řečeno jinak.

Lemma 1 (Limita pomocí okolí)

$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, právě když existuje $\delta>0$ tak, že $D_f\supset U^*_\delta(x_0)$
a $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x\in U^*_\delta(x_0): f(x)\in U_\varepsilon(A)$ (L*)

• Důkaz: - plyne z definice

• POZN.: $\lim_{x\to x_0} f(x)$ je lokální pojem

- nezávisí na $f(x_0)$
- nemusí existovat

2) později bude limita nevlastní $\pm\infty$ v nevlastním bodě $x_0 \to \pm\infty$

Věta 1 (o jednoznačnosti limity)

Existuje nejvýše jedna $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Důkaz: - sporem: Nechť A_1, A_2 jsou dvě vlastní limity f v x_0, $A_1 \neq A_2$

Potom z (L) máme:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0: \ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0: \ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon$

Pro $\varepsilon := \frac{|A_1 - A_2|}{4}$ volíme δ_1, δ_2 aby byly splněny podmínky výše.

Pro $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ je: $\forall x \in U^*_\delta(x_0)$:

$$4\varepsilon = |A_1 - A_2| = |A_1 - f(x) + f(x) - A_2| \underset{\text{trojúh. nerovnost}}{\leq} |A_1 - f(x)| + \underbrace{|f(x) - A_2|}_{< 2\varepsilon}$$

což je spor

Jednostranné limity

• V $\mathbb{R}$ se mohu blížit k x_0 zprava nebo zleva.

Definice 2 (Jednostranné limity)

1) $A = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

(L^+) "limita zprava"

2) $A = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

(L^-) "limita zleva"

POZN: Věta o jednoznačnosti platí i pro jednostranné limity.

Př: $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \end{array}\right\}$ $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ neexistuje

Věta 2: Platí, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \left(A = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \right)$

Důkaz:

a) "$\Rightarrow$" Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že (L)

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

tudíž platí i (L^+)

$x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow$ —"—

$x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow$ —"—

b) "$\Leftarrow$" Nechť $\varepsilon > 0$. Z (L^+) existuje $\delta_1 > 0$ takové, že

$x \in (x_0, x_0 + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ a

z (L^-): existuje $\delta_2 > 0$ takové, že:

$x \in (x_0 - \delta_2, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Pro $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ platí (L).

Věta 3 (Komplexní limita)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $f = f_1 + i f_2$

Potom pro $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ platí: $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = A_1$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = A_2$,

právě když $\lim_{x \to x_0} f(x) = A_1 + i A_2$

Důkaz:

a) "$\Leftarrow$" Nechť $\varepsilon > 0$. Z (L) existuje $\delta > 0$ takové, že

$\forall x \in U_\delta^*(x_0): \varepsilon > |f(x) - (A_1 + i A_2)|$

Víme $\left.\begin{array}{l} |z| \geq |Re(z)| \\ |z| \geq |Im(z)| \end{array}\right\}$ $\varepsilon > |f(x) - (A_1 + i A_2)| \geq |f_1(x) - A_1|$

$\geq |f_2(x) - A_2|$

b) "$\Rightarrow$" Nechť $\varepsilon > 0$. ~~Existuje~~ Volíme δ_1 a δ_2 z definice $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = A_1$ a $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = A_2$.

Potom pro $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ je $\forall x \in U_\delta^*(x_0)$: "splněny obě podmínky"

$$|f(x) - (A_1 + i A_2)| = \left.\sqrt{(\underbrace{f_1(x) - A_1}_{<\varepsilon})^2 + (\underbrace{f_2(x) - A_2}_{<\varepsilon})^2}\right\} < \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2}$$
$$< \sqrt{2}\,\varepsilon$$

Pozn.: nerovnost "$< \sqrt{2}\,\varepsilon$" stačí, nemusíme mít "$< \varepsilon$"

– položíme $\varepsilon := \frac{\tilde{\varepsilon}}{\sqrt{2}} > 0$, najdu δ jako výše

Matematická analýza - přednáška VI

Věta 4 limita absolutní hodnoty

Je-li $A = \lim_{x \to x_0} f(x)$, potom $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |A|$

Př: $\lim_{x \to 0} |\operatorname{sgn}(x)| = 1$, $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ neexistuje

• Důkaz: Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in U_\delta^*(x_0)$:
$\varepsilon > |f(x) - A| \geq ||f(x)| - |A||$

Věta 5: Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nechť $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ a f je omezená na nějakém $U_\delta^*(x_0)$

Tzn.: $\exists K \in [0, \infty) : \forall x \in U_\delta^*(x_0) : |f(x)| \leq K$

Potom $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

Př: $\lim_{x \to 0} D(x) \cdot x = 0$ protože $\lim_{x \to 0} x = 0$

• Důkaz: Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta' : \forall x \in U_{\delta'}^* : \varepsilon > |g(x)|$
Lze volit $\delta' \in (0, \delta)$ tak, že platí —"—.
Tudíž i $|f(x) \cdot g(x)| < \underbrace{\varepsilon \cdot (K+1)}$

nevadí, to samé jako ε

Věta 6: Nechť $A = \lim_{x \to x_0} f(x)$ je vlastní limita.
1) Potom $\exists \delta > 0$ tak, že f je omezená na $U_\delta^*(x_0)$.
2) Je-li $A \neq 0$, potom existuje $\delta > 0$ tak, že $\frac{1}{f}$ je omezená na $U_\delta^*(x_0)$

Př: Pro $k \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{x^k}$ nemá vlastní limitu v 0.
$\Rightarrow \frac{1}{x^k}$ není omezená v okolí (prsten.) bodu 0.

• Důkaz 1) Pro $\varepsilon := 1$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in U_\delta^*(x_0)$:

$|f(x) - A| < 1$, tudíž i $|f(x)| \leq |f(x) - A| + |A|$

$\Rightarrow |f(x)| \leq 1 + |A|$

$\Rightarrow f(x)$ je omezená pro dané okolí

2) Pro $\varepsilon := \frac{|A|}{2} > 0$ najdeme $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in U_\delta^*(x_0)$:

$|f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$, tudíž i $|f(x)| \geq |A| - |f(x) - A| \geq \frac{|A|}{2} > 0$

neboli $\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \frac{2}{|A|}$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ je omezená pro dané okolí.

POZN: použili jsme trojúhelníkovou nerovnost

Věta 7: Aritmetika limit

Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ a $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$ jsou vlastní limity.

Potom: 1) $\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = A \pm B$

2) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$

3) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, je-li $B \neq 0$.

Př: Je-li $B = 0$ v 3) potom o $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ obecně nevíme nic.

a) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje

b) $\lim_{x \to 0} \frac{ax}{x} = a$

• Důkaz: 1) Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ tak, že
$\forall x \in U^*_\delta(x_0)$: $|f(x) - A| < \varepsilon$
a $|g(x) - B| < \varepsilon$

úvaha: Pro lim. A zvolím δ_1, pro lim. B zvolím δ_2
a za δ vezmu $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$
$\Rightarrow$ platí obě nerovnosti zároveň.

Potom $\forall x \in U^*_\delta(x_0)$: $|(f \pm g)(x) - (A \pm B)| \leq \underbrace{|f(x) - A| + |g(x) - B|}_{< 2\varepsilon}$

že nevadí samotné ε

Pozn.: Rozmysli, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, právě když $\lim_{x \to x_0} (f(x) - A) = 0$

(z definice → to samé)

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} (f(x) - A) = 0\right)$$

• Důkaz: 2) Máme, že $f(x)g(x) - A \cdot B$ (chceme ukázat → 0)

$\underline{f(x)g(x)} + f(x)B \underline{- f(x)B} - AB$

$$= \underbrace{f(x)}_{} \cdot \underbrace{(g(x) - B)}_{\to 0} + \underbrace{B}_{} \cdot \underbrace{(f(x) - A)}_{\to 0}$$

f má vl. limitu, je omezená na daném okolí

B je konstantní funkce → omezená (Věta 9)

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left[f(x)(g(x) - B) + B(f(x) - A) \right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x)(g(x) - B) + \lim_{x \to x_0} B(f(x) - A) = 0 + 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left[f(x)g(x) - A \cdot B \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = A \cdot B$$

• Důkaz 3) Stačí dokázat, že $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$ a potom užít lim. součinu.

Máme, že: $\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} = \underbrace{\frac{1}{g(x)B}} \cdot \underbrace{(B-g(x))}_{\to 0}$

- pro $x \to x_0$:

má nenulovou vlastní limitu

$\Rightarrow \frac{1}{g(x)B}$ je omezená na prst. okolí x_0

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$

Př: Nechť $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, $x \in \mathbb{R}$ a $a_j \in \mathbb{C}$

je (komplex.) polynom. Potom z aritmetiky limit máme

$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$

Skutečně máme $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, kde $f(x) = a$, $x\in\mathbb{R}$ je konstantní

$f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ je identita } z def.

$f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \dots x}_{n \text{ krát}}$

Věta 8: O dvou strážnících, sandwich lemma

Nechť $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a existuje $\delta > 0$ tak, že

$\forall x \in U^*_\delta(x_0)$: $f(x) \le g(x) \le h(x)$.

Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A = \lim_{x\to x_0} h(x)$ A.. vlastní limita

Potom $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$

• Důkaz: Nechť $\varepsilon > 0$. Volíme $\delta' \in (0, \delta)$ tak aby $\forall x \in U^*_{\delta'}(x_0)$:

$|f(x) - A| < \varepsilon$ a $|h(x) - A| < \varepsilon$

Potom $\forall x \in U^*_{\delta'}(x_0)$: $A - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < A + \varepsilon$

tudíž

$-\varepsilon < g(x) - A < \varepsilon$

$|g(x) - A| < \varepsilon$.

Limita složené funkce

Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ a $\lim_{x\to A} g(x) = B$.

Kdy platí: $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = B$?

- substituce $y = f(x)$ => mělo by platit

Př: Vždy to neplatí: $f(x) = 0,\ x\in\mathbb{R}$

$g(y) = 1,\ y \neq 0$
$\quad\ = 0,\ y = 0$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 0$ $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$ ale $g(f(x)) = 0$ pro $x\in\mathbb{R}$

=> $\lim_{x\to 2} g(f(x)) = 0$ (ne 1)

Věta 9 : Limita složené funkce

Nechť $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$

Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ a $\lim_{y\to A} g(y) = B$.

Potom $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = B$, pokud platí buď

a) existuje $\delta > 0$ tak že $x \in U^*_\delta(x_0)$: $f(x) \neq A$ (a)

nebo b) $g(A) = B$ (b)

Důkaz: - bez podmínek: Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta_1 > 0$ tak, že

$\forall y \in U^*_{\delta_1}(A)$: $|g(y) - B| < \varepsilon$ (1)

Pro $\delta_1 > 0$ existuje $\delta_2 > 0$ tak, že

$\forall x \in U^*_{\delta_2}(x_0)$: $|f(x) - A| < \delta_1$ (2)

Nechť $x \in U^*_{\delta_2}(x_0)$

Je-li $f(x) \neq A$, potom $f(x) \in U^*_{\delta_1}(A)$

a z (1) dostaneme $|g(f(x)) - B| < \varepsilon$ (3)

a) Nechť platí (a). Položíme $\delta_3 = \min\{\delta_2, \delta\}$

Potom $\forall x \in U^*_{\delta_3}(x_0)$: $f(x) \neq A$ => platí (3)

b) Nechť platí (b). $g(A) = B$. Potom (3) platí snadno i v případě že $f(x) = A$.

Spojitost funkce

Definice: Funkce f je spojitá v $x_0 \in R$, pokud

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Př: 1) polynomy P jsou spojité pro $x \in R$