MATEMATIKA PRO FYZIKY III

1. FOURIEROVA TRANSFORMACE
2. LAPLACEOVA TRANSFORMACE
3. TEORIE DISTRIBUCÍ
4. ZÁKLADY TEORIE PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

1. FOURIEROVA TRANSFORMACE V $L^1(\mathbb{R}^d)$, V $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a V $L^2(\mathbb{R}^d)$

Nejdříve si řekneme, co znamená obecně TRANSFORMACE či přesněji INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE. Poté si "odvodíme" FOURIEROVU transformaci pomocí FOURIERových řad.

Integrální TRANSFORMACÍ funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s jádrem $\mathfrak{g} : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nazveme funkci $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definovanou vztahem

$$g(w) := \int_E f(t)\, \mathfrak{g}(t,w)\, dt \qquad \text{kde } E \subset \mathbb{R} \text{ je měřitelná množina.}$$

Použijeme-li TRANSFORMACI na nějaký objekt (např. ODR, PDR či IDR) lze získat rovnici jednodušší (např. algebraickou či obyčejnou dif. rovnici v případě PDR či IDR), kterou snadno vyřešíme. AVŠAK, řešení je obraz řešení původního objektu. K úspěchu procesu hledání řešení pomocí transformace tedy potřebujeme umět transformaci invertovat.

MOTIVACE SMĚREM K DEFINICI FOUR. TRANSFORMACE

Uvažujme 2π-periodickou hladkou funkci $f : (0,2\pi) \to \mathbb{C}$. Pak

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \\ c_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx, \\ &\text{a platí} \\ \|f\|^2_{L^2(0,2\pi)} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Připomeňte si, proč vztahy (1) platí a jak jsme je získali.

Je-li f hladká, avšak l-periodická, nemusím si vztahy analogické (1) pamatovat; snadno je odvodím záměnou proměnných. Vskutku:

je-li $f(x+l) = f(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, pak $F(x) := f\left(\frac{l}{2\pi}x\right)$ splňuje

$$F(x+2\pi) = f\left(\frac{l}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{lx}{2\pi}+l\right) = f\left(\frac{lx}{2\pi}\right) = F(x);$$

tedy F je 2π-periodická a splňuje vztahy (1), tj.

$$\left.\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \\
c_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{ikx}\,dx \\
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 &= \|F\|^2_{L^2(0,2\pi)} = \|F\|^2_{L^2(-\pi,\pi)}
\end{aligned}\right\} \quad (1')$$

Přechodem od F k f $\left(F(x) = f\left(\frac{l}{2\pi}x\right)\right)$ a substitucí $y = \frac{lx}{2\pi}$, následovaným přeznačením y zpět na x, dostáváme

$$\boxed{\left.\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{i\frac{2\pi}{l}kx}}{\sqrt{2\pi}} \\
c_k &= \frac{\sqrt{2\pi}}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}\,dx \\
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 &= \frac{2\pi}{l} \int_{-l/2}^{l/2} |f(x)|^2\,dx
\end{aligned}\right\} \quad (2)}$$

Uvažujme nyní f, která není periodická, ale je definována na $\mathbb{R}$. Pak $f|_{(-\frac{l}{2},\frac{l}{2})}$, tj. f zúžená na interval $\left(-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right)$ pro $l \gg 1$, může být rozšířena na $\mathbb{R}$, l-periodicky a pro tuto l-periodickou fci platí vztahy (2). Chceme zkoumat chování (2) pro $l \to \infty$. K tomuto cíli označíme

$$\boxed{\xi_k := \frac{2\pi}{l}k} \quad \text{a} \quad \boxed{g(\xi_k) := \frac{l}{2\pi}c_k}$$

[jedná se o malinko odlišné označení dvou posloupností]

Pak z (2) dostáváme

$$(3)\quad \left[\begin{aligned} g(\xi_\ell) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(x)\, e^{-ix\xi_\ell}\,dx, \\ f(x) &= \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(\xi_\ell)\,\frac{e^{ix\xi_\ell}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2\pi}{\ell} = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(\xi_\ell)\, e^{ix\xi_\ell}(\xi_\ell-\xi_{\ell-1}), \\ \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} |g(\xi_\ell)|^2 \underbrace{(\xi_\ell-\xi_{\ell-1})}_{\frac{2\pi}{\ell}} &= \int_{-\ell/2}^{\ell/2} |f(x)|^2\,dx, \end{aligned}\right]$$

což dává formálně pro $\ell\to\infty$

$$(4)\quad \boxed{\begin{aligned} g(\xi) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ix\xi}\,dx \\ f(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, e^{ix\xi}\,d\xi \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\xi)|^2\,d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx \end{aligned}}$$

Tyto závěrečné formální úvahy nás přivádí k následující definici a závěrům:

Definice Buď $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. Definujme:

- Fourierovu transformaci f, značenou $\mathcal{F}[f]$ či $\hat{f}$, vztahem

$$(FT)\quad \boxed{\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{+ix\cdot\xi}\,dx} \qquad \xi\in\mathbb{R}^d$$

$$x\cdot\xi := \sum_{j=1}^{d} x_j\xi_j$$

- Inverzní Fourierovu transformaci, značenou $\mathcal{F}^{-1}[f]$ či $\check{f}$, vztahem

$$(IF_T)\quad \check{f}(\underset{\uparrow\, x}{\cancel{\xi}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-i\xi\cdot x}\,d\xi$$

Pokud nespecifikujeme, jaké vlastnosti má mít f, aby integrály ve výše uvedené definici byly konečné, je tato definice formální – nic nedefinuje, jen zavádí značení.

Naše úvahy, které nás přivedly k (4), naznačují, že lze očekávat platnost těchto vztahů

$$(5)\quad \boxed{\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[f]) = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]] = f}$$ tzv. FOURIERŮV INVERZNÍ VZOREC

a

$$(6)\quad \boxed{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}$$ PARSEVALOVA nebo PLANCHERELOVA IDENTITA

Naším cílem bude identifikovat třídy funkcí, pro které vztahy (F_T), (IF_T), (5) a (6) platí. Ukážeme si, že obecně $L^1(\mathbb{R}^d)$ dává smysl (F_T) i (IF_T), ale (5) a ani (6) pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ neplatí. Tedy $L^1(\mathbb{R}^d)$ obecně není vhodný prostor.

Na druhou stranu, vztahy (F_T), (IF_T), (5) a (6) byly odvozeny z Fourierových řad. Víme z minulého semestru, že vztah

$$f(x) = \sum c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{platí, pokud } f, f' \in L^2(-\pi,\pi),$$

tedy pokud f je hladká (dostatečně). Hladkost sama však pro platnost vztahů týkajících se Four. transformace nestačí. Musíme přidat dostatečný pokles v ∞. Tento požadavek nás přivede ke <u>Schwartzově prostoru $\mathcal{S}$</u>, viz také Příklad 3.

Uvažujme nejdříve Fourierovu transformaci pro $f \in L^1 := L^1(\mathbb{R}^d)$. Pak

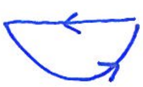
$$|F[f](s)| = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix\cdot s}\, dx \right| \le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \underbrace{|e^{ix\cdot s}|}_{=1} dx = c\|f\|_{L^1}$$

Příklad 1

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{ixs}\, dx$$

$\boxed{\text{Ověřte, že } \frac{1}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R})}$

$$\left.\begin{cases} \overset{s\ge 0}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \operatorname{Res}_i \left(\dfrac{e^{+ixs}}{1+x^2}\right) = \sqrt{2\pi}\, i \dfrac{e^{-s}}{2i} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} e^{-s} \\[2ex] \underset{s\le 0}{=} -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \operatorname{Res}_{-i} \left(\dfrac{e^{-ixs}}{1+x^2}\right) = \sqrt{2\pi}\, i \dfrac{e^{+s}}{2i} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} e^{+s} \end{cases}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$$



Příklad 2

$$\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{ixs}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin s}{s}$$

Vidíme, že
- ačkoli $\chi_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, tak $\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](s) = c\frac{\sin s}{s} \notin L^1(\mathbb{R}^d)$
- ačkoli $\chi_{[-1,1]}$ má kompaktní nosič, tak $\frac{\sin s}{s}$ kompaktní nosič nemá

(7) • $\lim\limits_{s\to\infty} \mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](s) = 0.$

Prostor L^1, jak ukazuje příklad 2, není vhodný prostor, na kterém by obecně platil Fourierův inverzní vzorec (5). Některé zajímavé vlastnosti však Fourierova transformace ~~na~~ na prostoru $L^1(\mathbb{R}^d)$ má a stojí za to si je uvést. Ještě předtím však zavedeme ještě jeden pojem: <u>konvoluce</u> dvou funkcí.

$\boxed{\text{Def.}}$ Buď $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Definujme KONVOLUCI FUNKCÍ f A g předpisem

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

Protože evidentně neplatí implikace „$f \in L^1, g \in L^1 \Rightarrow fg \in L^1$" (Najděte protipříklad!), je překvapivé, že pro definici konvoluce stačí pouze integrovatelnost f a g, jak mimojiné ukazuje následující věta.

<u>Věta 1.1</u> (Vlastnosti konvoluce) Platí následující:

- Jsou-li $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $f * g = g * f$ a $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$
- Jsou-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$

Dk Ověříme „pouze" druhé tvrzení. Platí, pro $p > 1$,

$$\|f*g\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy \right|^p dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\, dy \right)^p dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|}_{G} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}}_{F} dy \Big)^p dx$$

Hölderova nerovnost aplikovaná na $G \in L^p$, $F \in L^{p'}$

$$\overset{\leq}{} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|^p dy \right) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\, dy \right)^{p/p'}}_{\|f\|_{L^1}^{p-1}} dx \right.$$

$\frac{p}{p'} = \frac{p(p-1)}{p} = p-1$

$$\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|^p dy\, dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\, dx}_{\|f\|_{L^1}} \Big) |g(y)|^p dy \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

∎

Cvičení: Projděte si podrobně důkaz pro $p = 1$.

$\boxed{\text{Věta 1.2}}$ Vlastnosti Fourierovy transformace na $L^1(\mathbb{R}^d)$

(i) $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$ a $\sup |\hat{f}(x)| =: \|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

(ii) $f, g \in L^1 \Rightarrow \widehat{f*g} = \hat{f}\cdot\hat{g}\,(2\pi)^{d/2}$

(iii) $\lim\limits_{|s|\to\infty} \hat{f}(s) = 0$ pro $f \in L^1$

(iv) $\widehat{\tau_y f}(s) = e^{iy\cdot s}\hat{f}(s)$ přičemž $(\tau_y f)(x) = f(x+y)$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$ (shift = posun o y)

(v) $\widehat{f(\alpha x)}(s) = \frac{1}{|\alpha|^d}\hat{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$

Dk $\boxed{\text{Ad (i)}}$ $|\hat{f}(s)| = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix\cdot s}dx\right| \underset{|e^{ix\cdot s}|=1}{\le} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int |f(x)|dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

Přechodem k $\sup\limits_s$ dostáváme druhou část tvrzení $\mathcal{F}: L^1 \to L^\infty$. Skutečnost, že $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^d)) \subset C(\mathbb{R}^d)$ plyne z věty o spojitosti integrálu závislém na parametru.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Dle Věty 1.1 víme, že z $f, g \in L^1$ plyne $f*g \in L^1$ a také $f*g = g*f$. Víme tedy, že $\widehat{f*g} \in C(\mathbb{R}^d)$.

Počítejme

$$\widehat{f*g}(s) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}(f*g)(x)e^{ix\cdot s}dx \overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)e^{ix\cdot s}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(y)e^{iy\cdot s}e^{iz\cdot s}\,dy\,dz =$$

$$= (2\pi)^{d/2}\left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} f(z)e^{iz\cdot s}dz\right)\left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} g(y)e^{iy\cdot s}dy\right) = (2\pi)^{d/2}\hat{f}(s)\hat{g}(s).$$

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ BÚNO lze předpokládat, že $f \ge 0$ (jinak $f = f^+ - f^-$),
BÚNO — " — , že $f = \chi_{[-\ell,\ell]}$ (neb pro $f \ge 0$ $\exists\, h_n \nearrow f$, h_n schodovité a $\operatorname{supp} h_n$ kompaktní.

Avšak, dle Př. 2,

$$\hat{f}(s) = \hat{\chi}_{[-\ell,\ell]}(s) = c\,\frac{\sin\frac{s}{\ell}}{s/\ell} \longrightarrow 0 \text{ pro } s\to\infty.$$

$\boxed{\text{Ad (iv) a (v)}}$ si dokažte sami pomocí věty o substituci.

∎

Obecně prostor $L^1(\mathbb{R}^d)$ není optimální pro platnost Fourierova inverzního vzorce, viz Příklad 2. Říkali jsme si, že hladké funkce s (dostatečnou) kontrolou chování v ∞ by mohly vést k cíli.

Mohli bychom uvažovat hladké funkce s kompaktním nosičem,

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)\ ;\ \operatorname{supp}\varphi \text{ je kompaktní}\}$$

$= \{$ hladké funkce, které jsou vně nějakého intervalu nulové $\}$

Připomenutí: $\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ \varphi(x) \neq 0\}}$ uzávěr

Jak však ukazuje později druhý příklad (Př. 2 výše), obraz funkcí s kompaktním nosičem není obecně funkce s kompaktním nosičem. Tedy se opět dostávám mimo prostor na kterém jsem chtěl pracovat. K "správné" volbě prostoru nám může pomoci i následující příklad.

<u>Příklad 3</u> (Fourierova transformace $e^{-|x|^2/2}$.)

Spočtěme $\mathcal{F}^{-1}[e^{-|x|^2/2}]$. Dle definice ($x \in \mathbb{R}^d$)

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-|x|^2/2}](s) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x|^2}{2}} e^{-ix\cdot s}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{x_j^2}{2} + ix_js_j\right)}\,dx_1 \dots dx_d$$

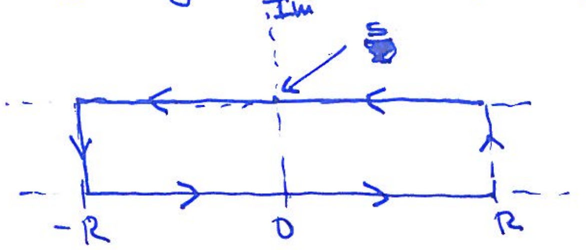
$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \prod_{j=1}^{d} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x_j^2}{2} + ix_js_j - \frac{s_j^2}{2}\right)}\,dx_j\, e^{-\frac{s_j^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \prod_{j=1}^{d} e^{-s_j^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x_j}{2} + i\frac{s_j}{2}\right)^2}\,dx_j$$

K dokončení výpočtu potřebujeme spočítat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y}{2} + i\frac{s}{2}\right)^2}\,dy,$$

což provedeme pomocí residuové (Cauchyho věty) integrací podél křivky načrtnuté na Obr. 1 pro funkci $e^{-\left(\frac{z}{2}\right)^2}$, která je holomorfní v $\mathbb{C}$. Dostaneme



$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-\left(\frac{y}{2} + i\frac{s}{2}\right)^2}\,dy = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-\frac{y^2}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{\pi}\sqrt{2}}}$$

neboť $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \underline{\sqrt{\pi}}$

Po dosazení dostáváme

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}[e^{-|x|^2/2}](s) = e^{-|s|^2/2}}$$

Předchozí příklad říká, že funkce $e^{-|x|^2/2}$ je invariantní vzhledem k Fourierově transformaci a také, že pro ni platí Fourierův inverzní vzorec. Funkce $e^{-|x|^2/2}$ nemá kompaktní nosič, ale klesá velmi rychle v ∞.

Definice Řekneme, že $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ je rychle klesající pro $x \to \infty$

$$\equiv \forall m \in \mathbb{N} \quad \exists M_m > 0 \text{ tak, že } |f(x)| \le M_m |x|^{-m}$$

Ekvivalentně lze říci, že f je rychle klesající pro $x \to \infty$ právě tehdy $\lim_{x \to \infty} p(x) f(x) = 0$ pro libovolný polynom.

Definice (Schwartzův prostor $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).

$$\mathcal{S} := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) ;\ f \text{ a všechny její derivace jsou rychle klesající} \}.$$

Protože $e^{-|x|^2/2} \in \mathcal{S}$, ale nemá kompaktní nosič ($\operatorname{supp} e^{-|x|^2/2} = \mathbb{R}^d$), tak $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Nyní si ukážeme, že $\mathcal{S}$ má spoustu užitečných vlastností, které např. prostor L^1 nemá.

$\boxed{\text{Vlastnosti } \mathcal{S}}$

	VLASTNOST	MATEMATICKÝ ZÁPIS	L^1 ANO ČI NE?
1	$\mathcal{S}$ je vektorový prostor	$f,g \in \mathcal{S},\ \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha f, f+g \in \mathcal{S}$	✓
2	$\mathcal{S}$ je algebra	$f,g \in \mathcal{S} \Rightarrow fg \in \mathcal{S}$	×
3	$\mathcal{S}$ je uzavřený na násobení polynomem	$f \in \mathcal{S},\ p \in \mathcal{P} \Rightarrow pf \in \mathcal{S}$	×
4	$\mathcal{S}$ je uzavřený na derivování	$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ multiindex $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ $f \in \mathcal{S} \Rightarrow D^\alpha f := \frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \in \mathcal{S}$	×
5	$\mathcal{S}$ je uzavřená na posunutí a násobení $e^{ix \cdot s}$	$f \in \mathcal{S} \Rightarrow \tau_y f \in \mathcal{S},\ e^{ix\cdot s} f \in \mathcal{S}$	✓
6	$\mathcal{S}$ je podmnožina integrovatelných funkcí	$f \in \mathcal{S} \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pro $\forall p \in [1, \infty]$	částečně $L^1 \not\subset L^p$, $p>1$; $L^p \not\subset L^1$, $p>1$; POZOR JSEM NA CELÉM PROST.

Vlastnosti ① – ⑤ si ověřte sami. Ukážeme, že:

$\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$

Buď $f \in \mathcal{S}$, pak $\exists\, M_{d+1} > 0$ tak, že $|f(x)| \leq \dfrac{M_{d+1}}{|x|^{d+1}}$ a $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus B_R(0)$
$\exists\, R \gg 1$

Tedy
$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,dx \leq \int_{B_R(0)} |f(x)|\,dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)} |f(x)|\,dx$$
$$\leq \underbrace{\sup_{x \in \overline{B_R(0)}} |f(x)|\,|B_R(0)|}_{<+\infty} + M_{d+1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)} \frac{dx}{|x|^{d+1}}}$$

subst.: zobecněné sférické souř.
$$" \tilde{C} \int_R^{\infty} \frac{r^{d-1}}{r^{d+1}}\,dr \leq \frac{\tilde{C}}{R} < +\infty,$$

což jsme chtěli ukázat.

Z poslední vlastnosti plyne, že vše o vlastnostech Fourierovy transformace na L^1 platí i pro Fourierovu transformaci na $\mathcal{S}$. Mimo jiné máme

$$\boxed{f, g \in \mathcal{S} \implies \mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{d/2}\, \mathcal{F}(f)\, \mathcal{F}(g)}$$

Protože $\mathcal{F}^{-1}[F(x)] = \mathcal{F}[F(-x)]$, tak také platí
$$\mathcal{F}^{-1}(f)\,\mathcal{F}^{-1}(g) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\, \mathcal{F}^{-1}(f * g)$$

Substitucí
$f = \mathcal{F}(f)$ a $g = \mathcal{F}(g)$ dostaneme (za předpokladu, že platí Fourierova inverzní věta)
$$f \cdot g = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\, \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]\right).$$
Aplikujeme-li na tuto rovnici Fourierovu transformaci, dostaneme
$$\boxed{\mathcal{F}[f \cdot g] = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\, \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]}$$

Tedy, za předpokladu že na $\mathcal{S}$ platí Fourierova inverzní věta (což očekáváme), dostáváme
- Fourierova transformace konvoluce je součin Fourierových transf.
- Fourierova –"– součinu je konvoluce Four. transformací.

Následující tvrzení ilustruje jednu z klíčových vlastností Fourierovy transformace, opět ve dvou tvarech:

- Fourierova transformace derivace je "polynomiální" násobek Fourierovy transformace.
- Fourierova transf. "polynomiálního násobku fce" je derivace Fourierovy transf.

Věta 1.3 (α) $\forall f \in \mathcal{S}$ platí
- $\widehat{D^\alpha f}(s) = (-1)^{|\alpha|}(is)^\alpha \hat{f}(s)$
- $\widehat{(ix)^\alpha f(x)}(s) = D^\alpha \hat{f}(s)$

(β) $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ a $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$

Dk **Ad (α)** Provedeme pro $\alpha = (0, \dots, \underset{\uparrow_{j\text{-té místo}}}{1}, \dots)$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right](s) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{ix\cdot s} dx$$

$x \cdot s = \underbrace{x_1 s_1 + \dots + x_d s_d}_{\hat{x}\cdot\hat{s}} + x_j s_j$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{ix_j s_j} dx_j\right)}_{\text{per partes - zde využíváme, že } f \in \mathcal{S}} e^{i\hat{x}\cdot\hat{s}} d\hat{x}$$

$$= -\frac{is_j}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix_j s_j} dx_j\right) e^{i\hat{x}\cdot\hat{s}} d\hat{x} = \underline{-is_j \mathcal{F}[f](s)}$$

Dále

$$\mathcal{F}[ix_j f(x)](s) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} ix_j f(x) e^{ix\cdot s} dx \qquad ix_j f(x) e^{ix\cdot s} = \frac{\partial}{\partial s_j}\left(e^{ix\cdot s}\right) f(x)$$

záměna integrálu a derivace $\longrightarrow$

$$= \frac{\partial}{\partial s_j}\left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix\cdot s} dx\right) = \frac{\partial}{\partial s_j}\mathcal{F}[f](s)$$

Ad (β) Připomeň $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d);\ \sup |x^\beta D^\alpha f(x)| < +\infty$ pro libovolné multiindexy α a $\beta\}$.

- Protože $D^\alpha \hat{f}(s) = \widehat{(ix)^\alpha f(x)}(s)$ a $(ix)^\alpha f(x) \in \mathcal{S}$ a Fourierova transformace funkcí z $\mathcal{S}$ je konečná, tak $D^\alpha \hat{f}(s) < \infty$ pro $\forall \alpha$ a navíc je spojitá dle věty o spojité závislosti integrálu na parametru. Tj. $\forall \alpha$ $D^\alpha \hat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$.
- Chceme ukázat, že $\forall$ polynom p a $\forall \alpha$: $\sup_s |p(s) D^\alpha \hat{f}(s)| < \infty$ stačí $\sup_s |s^\beta \hat{f}(s)| < \infty$. Dle části (α), však tvrzení plyne ze skutečnosti, že $D^\beta f \in \mathcal{S}$.

$\square$

Shrňme si základní vlastnosti Fourierovy transformace do následující tabulky

Funkce f (x)	Fourierova transformace $\hat{f}$ (s)
$f(x)$	$\hat{f}(s)$
$\tau_y f(x) := f(x+y)$	$e^{ix\cdot s}\hat{f}(s)$
$e^{ix\cdot y} f(x)$	$\hat{f}(s+y) = \tau_y \hat{f}(s)$
$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$	$-is_k \hat{f}(s)$
$i x_k f(x)$	$\frac{\partial}{\partial s_k}(\hat{f}(s))$
$p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) f(x)$	$p(-is_k)\hat{f}(s)$
$p(x) f(x)$	$p\left(-i\frac{\partial}{\partial s}\right)\hat{f}(s)$
$(f*g)(x)$	$(2\pi)^{d/2}\hat{f}(s)\hat{g}(s)$
$f(x)g(x)$	$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}(\hat{f}*\hat{g})(s)$

Šipky indikují jistou symetrii operací a Fourierovy transformace.

Řešení Cauchyho úlohy pro obecnou nehomogenní rci vedení tepla

Uvažujme lineární evoluční PDR $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$ v celém prostoru $\mathbb{R}^d$. Cílem je nalézt řešení tzv. Cauchyho úlohy, tedy hledám řešení rovnice v celém prostoru $\mathbb{R}^d$ s zadanou počáteční podmínkou v čase $t=0$. Tedy

<u>Cauchyho úloha pro rovnici vedení tepla</u>

nalézt $u: (0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ splňující

$$(T) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{v } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{v } \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

kde $f: (0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a $u_0: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jsou <u>data</u> úlohy, tedy <u>dané</u> libovolné.

Úloha (T) je lineární (Proč?) a lze ji získat z rovnice bilancující energii v termodynamice kontinua:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + v \cdot \nabla e = \mathbb{T} \cdot \left(\frac{\nabla v + (\nabla v)^T}{2}\right) - \operatorname{div} \vec{q} + r$$

za předpokladu, že těleso je v klidu a tak rychlost $\vec{v} = 0$ a vnitřní energie e je úměrná teplotě u (tj. $e = c_v u$, kde $c_v > 0$ je měrné teplo při konstantním objemu) a tepelný tok $\vec{q}$ je nepřímo úměrný gradientu teploty (tj. $\vec{q} = -\kappa \nabla u$, kde $\kappa > 0$ je koeficient tepelné vodivosti). Pak

$$c_v \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u = r,$$

kde r je daný objemový zdroj (radiace). [Symbol $\mathbb{T}$ uvedený výše představuje tensor napětí.]

Předpokládejme, že pro $\forall\, \tau > 0$ je $f(\tau,\cdot) \in \mathcal{S}$ a také $u_0 \in \mathcal{S}$. Hledáme řešení splňující (T) tak, aby $u(t,\cdot) \in \mathcal{S}$ pro $t > 0$.

Řešení budeme hledat tak, že na rovnici vedení tepla aplikujeme Four. transformaci, tj. násobím rovnici $e^{-i x \cdot s}$, integruji přes $\mathbb{R}^d$ vzhledem $\underline{x}$ a poté vše vydělím $(2\pi)^{d/2}$. Čas t je nyní pro nás parametr. Dostáváme:

$$(\hat{T}) \begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,s) + |s|^2 \hat{u}(t,s) = \hat{f}(t,s) & \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ \hat{u}(0,s) = \hat{u}_0(s) & \text{v } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Zdánlivě jsme si příliš nepolepšili. Opak je však pravdou. V $(\hat{T})$ již nemáme Laplaceův operátor a na $(\hat{T})_1$ se lze dívat jako na ODR pro $\hat{u}$, kde proměnná je čas a $s\in\mathbb{R}^d$ je parametr. Rovnici $(\hat{T})$ násobíme integračním faktorem $e^{|s|^2t}$, člen $(\hat{T})_1$ vynásobíme a dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{u}(t,s)e^{|s|^2t}\right) = \hat{f}(t,s)e^{|s|^2t}$$

Integrací přes čas od 0 do t a s použitím $(\hat{T})_2$ dostaváme

$$\hat{u}(t,s)e^{|s|^2t} - \hat{u}_0(s) = \int_0^t \hat{f}(\tau,s)e^{|s|^2\tau}\,d\tau,$$

což po vynásobení $e^{-|s|^2t}$ vede k vztahu

$$(*) \qquad \hat{u}(t,s) = \hat{u}_0(s)e^{-|s|^2t} + \int_0^t \hat{f}(\tau,s)e^{-|s|^2(t-\tau)}\,d\tau$$

V tomto okamžiku jsme našli řešení úlohy, ale to řešení máme popsané v obrazu Fourierovy transformace. Potřebujeme tedy aplikovat na $(*)$ inverzní Four. transf. Pokud platí Fourierův inverzní vzorec (což předpokládáme), tak na levé straně $(*)$ dostaneme u. Napravo máme součiny, které chceme dostat do tvaru součinu dvou Fourierových transformací a pak použijeme vlastnost, že Four. transformace konvoluce je (až na $(2\pi)^{d/2}$ násobek) součin Four. transformací příslušných funkcí.

Snadno si z Příkladu 3 ověříme, že

$$e^{-|s|^2t} = \mathcal{F}_s\left[\frac{1}{(2t)^{d/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right]$$

Definujme

$$\boxed{G(t,x) = G_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}$$

čas t má roli parametru, proto dvojí značení.

Pak (*) přepíšeme do tvaru

$$(*)_{mod} \qquad \hat{u}(t,s) = (2\pi)^{d/2}\, \hat{u}_0(s)\, \widehat{G_t(x)}(s) + \int_0^t (2\pi)^{d/2}\, \hat{f}_\tau(s)\, \widehat{G_{t-\tau}}(s)\, d\tau$$

z věty 1.2 (ii), pak $(*)_{mod}$ přepíšeme do tvaru

$$\hat{u}(t,s) = \widehat{u_0 * G_t}(s) + \int_0^t \widehat{f(\tau,\cdot) * G_{t-\tau}(\cdot)}(s)\, d\tau$$

Aplikací Inverzní Fourierovy transformace nakonec dostaneme

$$(\check{R}) \qquad \boxed{u(t,x) = (u_0 * G_t)(x) + \int_0^t \big(f(\tau,\cdot) * G_{t-\tau}\big)(x)\, d\tau}$$

což je hledané řešení pro libovolné u_0 a f.

Dosadíme-li explicitní vzorec pro G_t, dostaneme

$$\boxed{u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\, \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{d/2}}\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(\tau,y)\, \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}}}{(4\pi(t-\tau))^{d/2}}\, dy\, d\tau}$$

Gaussián G_t se také nazývá Fundamentální řeš. rovnice vedení tepla. Má několik význačných vlastností (viz následující) Lemma a řeší $\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \text{ s } u(0,\cdot) = \delta_0\right]$ jak vidíme později.

Diracova distribuce v poč.

Lemma (Důležité vlastnosti Gaussiánu G_t)

(1) $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[G_t]] = G_t$

(2) $G_t \geq 0$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} G_t(x)\, dx = 1$ (rozdělení 1)

(4) $\lim_{t \to 0+} G_t(x) = 0$ if $x \neq 0$ (konvergence je stejnoměrná na $|x| \geq \varepsilon$ pro $\forall \varepsilon > 0$)

(5) $\lim_{t \to 0+} G_t * u_0 = u_0$ (NABÝVÁNÍ POČ. PODMÍNKY ŘEŠENÍM $(\check{R})$)

Dk (1)–(4) si povedte sami pomocí Př. 3, škálování!

Ad (5) Platí

$$(G_t * u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, u_0(y)\, dy = \frac{1}{(\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|z|^2}\, u_0(x + 2\sqrt{t}z)\, dz$$

$z = \frac{y-x}{2\sqrt{t}} \iff y_i = x_i + 2\sqrt{t} z_i$

záměnou $\lim_{t\to 0}$ a $\int_{\mathbb{R}^d}$, pomocí Lebesgueovy věty, dokážeme tvrzení. ☐

Věta 1.4 (Schwartzova – Laurent Schwarz – Francouzský mat. 20. století)

$\mathcal{F}: \mathcal{S} \xrightarrow{na} \mathcal{S}$ a $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S} \xrightarrow{na} \mathcal{S}$ a platí $\|\mathcal{F}[f]\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}^{-1}[f]\|_{L^2}$.

(Dk) Tvrzení dokážeme tak, že ověříme platnost Fourierova inverzního vzorečku.

Důkaz nelze provést přímo:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[f])(s) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-is\cdot y} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int f(x) e^{iy\cdot x}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{iy\cdot(x-s)}\, dx\, dy = f(s) \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} dy = +\infty.$$

vzhledem k y nenulové jen pro $x=s$

Využijeme však vlastnosti G_t.

Buď $f \in \mathcal{S}$ libovolné. Definujme $H_t(x) := (G_t * f)(x)$.

Pak

$$\hat{H}_t(s) = (2\pi)^{d/2} \hat{G}_t(s) \hat{f}(s)$$

a

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{H}_t(s)](x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot s} \hat{H}_t(s)\, ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot s} \hat{G}_t(s) \hat{f}(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot s} \hat{G}_t(s) \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{iy\cdot s}\, dy\, ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{G}_t(s) e^{-is\cdot(x-y)}\, ds}_{\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[G_t]](x-y) \overset{\text{Lemma (1)}}{=} G_t(x-y)}\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) G_t(x-y)\, dy = (f * G_t)(x)$$

z věty o konvoluci $\quad \|f * G_t\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1} \|G_t\|_{L^1}$.

Tedy $\lim_{t\to 0} f * G_t = f$

Napravo však máme $\lim_{t\to 0} \mathcal{F}^{-1}(\hat{H}_t(s))(x)$, což vede k

$$\lim_{t\to 0+} \mathcal{F}^{-1}(\hat{H}_t(s))(x) = \lim_{t\to 0+} \mathcal{F}^{-1}\left((2\pi)^{d/2} \hat{G}_t(s) \hat{f}(s)\right)(x)$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\Big(\underbrace{\lim_{t\to 0+} (2\pi)^{d/2} \hat{G}_t(s)}_{=1 \text{ (viz výše)}} \hat{f}(s)\Big)(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(s))(x)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(s))(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x).$$

Zbývá dokázat platnost Parsevalových rovností. Buď $f, g \in \mathcal{S}$, pak dle definice

$$\underline{(\hat{f}, \hat{g})_{L^2(\mathbb{R}^d)}} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(s)\overline{\hat{g}(s)}\,ds = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(s) \overline{\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{ix\cdot s}\,dx}\,ds$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(s) \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x)}\, e^{-ix\cdot s}\,dx\,ds$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(s)\overline{g(x)}\, e^{-ix\cdot s}\,dx\,ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(s) e^{-ix\cdot s}\,ds \right)}_{\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x)} \overline{g(x)}\,dx$$

$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x)$, což se dle dokázaného Fourierovy inverzního tvrzení rovná $f(x)$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

$$= \underline{(f, g)_{L^2(\mathbb{R}^d)}}$$

Tedy $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ $(\ast)$

Nechť $g \in \mathcal{S}$ a $\check{g} =: h \in \mathcal{S}$, pak $\hat{h} = g$ a dle $(\ast)$

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\check{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Ověříme, pro úplnost, že $\lim_{t\to 0} \mathcal{F}^{-1}(\hat{G}_t(s)\hat{f}(s)) = \mathcal{F}^{-1}(\lim \hat{G}_t(s)\hat{f}(s))$.

Máme však

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{G}_t(s)\hat{f}(s))(y) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|y|^2 t} \hat{f}(y) e^{iy\cdot s}\,dy =: I$$

a $|I| \le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(y)|\,dy < \infty$ neboť $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}$ dle Věty 1.3 (b). a $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$

Tedy dle Lebesgueovy věty můžu zaměnit $\lim_{t\to 0+}$ a $\mathcal{F}^{-1}$.

Důkaz Věty 1.4 je úplný. ∎

FOURIEROVA TRANSFORMACE NA $L^2(\mathbb{R}^d)$

Poslední část první kapitoly věnujeme rozšíření Fourierovy transformace z $\mathcal{S}$ na L^2. Klíčem bude Parsevalova rovnost dokázaná ve větě 1.5, která platí pro funkce z $\mathcal{S}$ a hustota fcí $\mathcal{S}$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$.

ÚMLUVA: v následující části $\hat{f}$ značí Fourierovu transf. pro $f \in \mathcal{S}$

zatímco $\mathcal{F}[f]$ —— — —— pro $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Tu teď budeme konstruovat. Pozor,

$\mathcal{F}[f]$ pro $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ **NENÍ** dána integrálem $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix\cdot s} dx$.

$\boxed{\text{Konstrukce}}$ [Užitečný matematický postup.]

① Protože $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ jsou husté v $L^2(\mathbb{R}^d)$ a

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d), \text{ tak}$$

$\underline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \text{ jsou husté v } L^2(\mathbb{R}^d)}$

Pro $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tak $\exists \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ tak, že

$$f_n \to f \text{ v } L^2(\mathbb{R}^d) \text{ tzn. } \|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Je-li $\{f_n\}$ konvergentní, je cauchyovská. Tedy $(\forall \varepsilon > 0)$ od jistého n_0 $\|f_n - f_m\|_{L^2} < \varepsilon$ pro všechna $n, m \geq n_0$

② Aplikujeme-li Parsevalovu rovnost a větu 1.5 na $f_n - f_m \in \mathcal{S}$ dostáváme

$$\|f_n - f_m\|_{L^2} = \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{L^2} = \|\check{f}_n - \check{f}_m\|_{L^2}$$

Z cauchyovskosti $\{f_n\}$ a a této identity plyne, že $\{\hat{f}_m\}_{m=1}^{\infty}$ a $\{\check{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou cauchyovské. Mají tedy limitu (neboť L^2 je úplný) a tyto limity jsou hledané Fourierovy transformace:

$$\underline{\underline{\mathcal{F}[f] \stackrel{def.}{=} \lim\{\hat{f}_m\}}} \quad \text{a} \quad \underline{\underline{\mathcal{F}^{-1}[f] \stackrel{def}{=} \lim\{\check{f}_m\}}}$$

$\boxed{\text{Věta 1.6}}$ (Vlastnosti Fourierovy transf. na $L^2(\mathbb{R}^d)$)

(1) Je-li $f \in L^2$, pak $\mathcal{F}[f]$ nezávisí na volbě $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

(2) $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$ jsou inverzní, tzn. $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$ pro $\forall f \in L^2$

(3) Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, pak $\mathcal{F}[f] = \hat{f}$ s.v. v $\mathbb{R}^d$

(4) Je-li $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ a $\hat{f}_n(s) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{B_n(0)} f(x)\, e^{ix\cdot s}\, dx$,

$$\text{pak } \mathcal{F}[f](s) = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(s) \quad \text{v } L^2(\mathbb{R}^d)$$

[toto je návod, jak počítat Four. transf. pro $f \in L^2$].

(5) $\mathcal{F} : L^2 \xrightarrow{\text{na}} L^2$ je isometrie: $\|\mathcal{F}[f]\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

(Dk) $\boxed{\text{Ad (1)}}$ Uvažujme dvě různé posloupnosti $\{f_n^1\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ a $\{f_n^2\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ konvergující k f v $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pak však $f_n^1 - f_n^2 \to 0$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$.
Dále víme, že prvky $h \in \mathcal{S}$ splňují:

$$\|h\|_{L^2} = \|\hat{h}\|_{L^2} = \|\check{h}\|_{L^2} \quad \text{a} \quad (\hat{h})^{\vee} = h.$$

(dle Schwartzovy věty).
Tedy

$$\|f_n^1 - f_n^2\|_{L^2} = \|\hat{f}_n^1 - \hat{f}_n^2\|_{L^2} = \|\check{f}_n^1 - \check{f}_n^2\|_{L^2}.$$

Protože první člen konverguje k nule, tak vidíme, že $\hat{f}_n^1$ a $\hat{f}_n^2$ (a $\check{f}_n^1$ a $\check{f}_n^2$) dávají stejnou limitu a to $\mathcal{F}[f]$ (resp. $\mathcal{F}^{-1}[f]$).

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Buď $\{f_n\} \subset \mathcal{S}$ takové, že $f_n \to f$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pak

$$f_n = [\hat{f}_n]^{\vee} \quad \text{a} \quad \hat{f}_n \to \mathcal{F}[f] \text{ v } L^2(\mathbb{R}^d)$$

Víme, že $g_n := \hat{f}_n \to \mathcal{F}[f] =: g$ v L^2 a $\{g_n\} \subset \mathcal{S}$

Tedy $\check{g}_n \to \mathcal{F}^{-1}[g]$. Avšak tzn. $f_n \to \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$ v L^2.
Protože $f_n \to f$ v L^2 tak musí platit $\underline{f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]}$.

$\boxed{\text{Ad (3)}}$ Je-li $f \in L^1 \cap L^2$, pak $\exists \{f_n\} \subset \mathcal{S}$ tak, že $f_n \to f$ v L^1, $f_n \to f$ v L^2

a $\boxed{\hat{f}_n(s) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f^n(x)\, e^{ix\cdot s}\, dx}$ (•)

Protože $f^n \to f$ v L^1, tak $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f^n(x)\, e^{ix\cdot s}\, dx \to \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{ix\cdot s}\, dx$.

[Skutečně $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f^n(x) - f(x))\, e^{ix\cdot s}\, dx \right| \le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |f^n(x) - f(x)|\, dx$
$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d/2} \|f^n - f\|_{L^1}$.

Protože $f^n \to f$ v L^2, tak $\hat{f}_n \to \mathcal{F}[f]$ v L^2
a dle Rieszovy věty existuje vybraná podposloupnost $\hat{f}^{m_k}$,
tak, že $\hat{f}^{m_k} \to \mathcal{F}[f]$ s.v. v $\mathbb{R}^d$.
Tvrzení plyne z limitního přechodu v (0) aplikovaného na f^{m_k}.

$\boxed{\text{Ad (5)}}$ Isometrie Fourierovy transformace plyne z rozšíření platnosti Parsevalovy/Plancherelovy rovnosti z $\mathcal{S}$ na L^2, viz bod (2).

$\boxed{\text{Ad (4)}}$ Buď $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ a označme $f_m := f\chi_{B(0,m)}$.
Pak zjevně $f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ a $f_m \to f$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$,
což znamená, že $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_m(0)} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_m|^2 \to 0$ pro $n \to \infty$.

Dále $\mathcal{F}\{f_m\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dle (3)}}}{=} \hat{f}_m$ s.v. a $\mathcal{F}[f_m] \to \mathcal{F}[f]$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$
díky rozšíření verzí Parsevalovy rovnosti pro funkce z $L^2(\mathbb{R}^d)$

$\boxed{\text{DODATEK}}$ Vlastnosti $\hat{f}$ na $L^1(\mathbb{R}^d)$

Platí následující tvrzení, která nebudeme dokazovat.

Tvrzení 1 Buď $f \in L^1(\mathbb{R})$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že

(i) $\exists \lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = f(x_0 \pm)$

(ii) $\exists\ \delta > 0\ \exists M$
$|f(x) - f(x_0+)| \leq M|x - x_0| \quad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$
$|f(x) - f(x_0-)| \leq M|x - x_0| \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0)$

Potom $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)]$

Tvrzení 2 Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]] = f$

Důsledek Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{F}[f] = 0$ s.v. $\Rightarrow f = 0$ s.v.
a
$\mathcal{F} : L^1 \to$ "prostor funkcí s $\mathcal{F}[f] \in L^1$" je prosté zobrazení

$\boxed{\text{Důkaz Tvrzení 2}}$ provedeme pomocí Lemmatu

Lemma Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ splňuje $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Pak $f = 0$ s.v. v $\mathbb{R}^d$.

Nechť $f, \mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Protože $\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tak $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x)\varphi(x)\,dx < \infty$ pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Navíc:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[f(x)](y)\, \underbrace{e^{-iy\cdot x}\,\varphi(x)}\, dy\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[f(x)](y)\, \mathcal{F}^{-1}[\varphi(x)](y)\, dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{ix\cdot y}\, \mathcal{F}^{-1}[\varphi(x)](y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\big](x)\, dx$$

Avšak $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a tedy $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a pro taky φ platí inverzní Fourierův vzoreček, tj.:

$$\mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\big](x) = \varphi(x).$$

Tedy

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big[\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) - f(x)\Big]\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d),$$

což dle Lemmy dává tvrzení. $\boxtimes$