① metrika
- vzdálenost na mapě
- nejkratší vzdálenost jízdy autem
- cena jízdenky

$\rho(x,y) \geq 0$ $\quad \rho(x,y) = 0 \iff x = y$, $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(x,z)$

- vzdálenost na mapě

$\rho(x,y) = \sqrt{|x^2 - y^2|}$

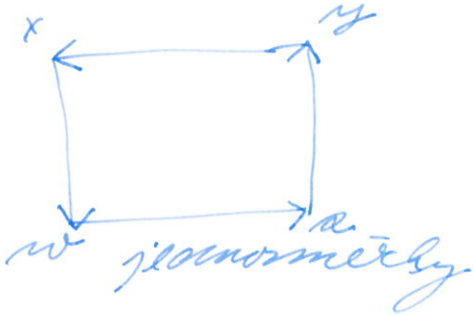
i) $\rho(x,y) \geq 0$ a $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$

ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

iii) $\sqrt{|x^2 - z^2|} \leq \sqrt{|x^2 - y^2|} + \sqrt{|y^2 - z^2|}$ OK

- nejkratší vzdálenost jízdy autem

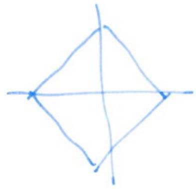
$\rho(x,w) \neq \rho(w,x)$



- cena jízdenky

(2) • $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_n - y_n|$ množiny uspořádaných — $x = (x_1, \dots, x_n)$ jsou metrické prostory?

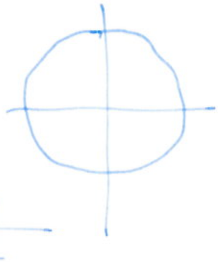
$\rho(x,y) \geq 0$ ✓ } z vlastností $|\cdot|$
$\rho(x,y) = \rho(y,x)$ ✓
$\rho(x,z) = \sum |x_n - z_n| = \sum |x_n - y_n - (z_n - y_n)| \leq$
$\leq \sum |x_n - y_n| + \sum |y_n - z_n|$ ✓



• $\rho(x,y) = \left(\sum |x_n - y_n|^2 \right)^{1/2}$
→ první dvě vlastnosti triviální
→ Hölderova nerovnost $\sum |x_i||y_i| \leq \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum |y_i|^{p'}\right)^{1/p'}$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

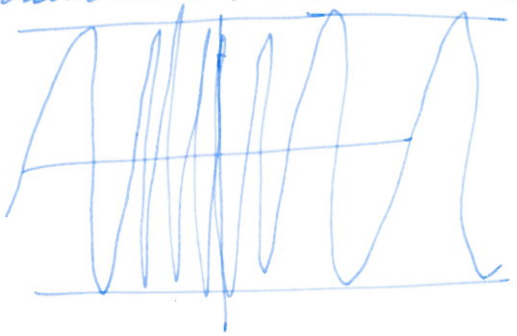
$\rho^2(x,y) = \sum |x_n - y_n|^2 =$
$= \sum |x_n - y_n||x_n - y_n| = \sum |x_n - z_n - (y_n - z_n)||x_n - y_n| \leq$
$\downarrow HÖ$
$\leq \sum |x_n - z_n||x_n - y_n| + \sum |y_n - z_n||x_n - y_n| \leq$
$\leq \left(\sum |x_n - z_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum |x_n - y_n|^2 \right)^{1/2} +$
$\left(\sum |y_n - z_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum |x_n - y_n|^2 \right)^{1/2} =$
$= \rho(x,z)\rho(x,y) + \rho(y,z)\rho(x,y) \Rightarrow$
$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$



• $\rho(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|$
→ první dvě vlastnosti triviální
→ poslední z vlastností sup.
$\rho(x,y) = \sup_n |x_n - y_n| = \sup |x_n - z_n - (y_n - z_n)| \leq$
$\leq \sup |x_n - z_n| + \sup |y_n - z_n|$

(3) uzávěr grafu – nejmenší uzavřená množina

• $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



$M \to$ nejlepší pomocí
jedné z charakterizací
$\to$ všechny $\forall x_0 \in A \ \exists \{x_n\} \subset A \ x_n \to x_0$ $\quad x, \sin\frac{1}{x}$

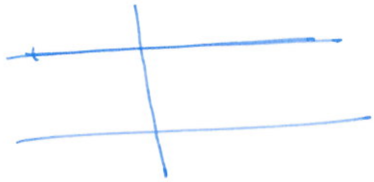
$M = \{ (x, \sin\frac{1}{x}), x \in R \}$

$\overline{M} = M \cup \{ (0, y), y \in [-1, 1] \}$

• $M = \{ (x, D(x)), x \in \mathbb{R} \}$ $\quad D(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \in R \setminus Q \end{cases}$

Q jsou husté v R

$\overline{Q} = \mathbb{R}$ $\quad \overline{M} : R \times [0, 1]$



$\forall x \in P \ \exists (x_n) \subset A \ x_n \to x$

(4) vnitřek, hranice, uzávěr

$A^\circ, \partial A, \overline{A}$

a) $M = Q \cap (0, 1)$

$M^\circ = \emptyset$ v každém okolí $\forall x \in M$ leží iracion.
prvky není z M (Q husté v R)

$M^\circ = \{ x \in M \mid \exists \varepsilon > 0, U_\varepsilon(x) \subset M \}$ nebo

$\overline{M} = [0, 1]$

hranice

∂M charakterizace
def. v okolí je bod z M i $P \setminus M$
$\exists \{x_n\} \in M$ a $\exists \{y_n\} \in P \setminus M$ $x_n \to x_0$ ($y_n \to y_0$
nebo taky $\overline{M} = M^\circ \cup \partial M \to \partial M$ nemusí být $\overline{M}$

④ b) $x^2+y^2<1 \quad y\geq 0$

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$

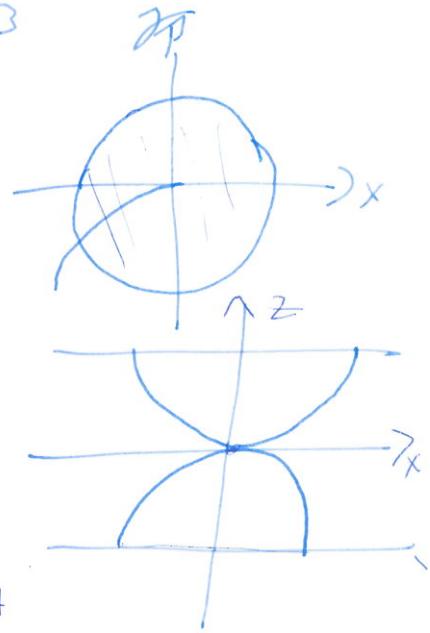
$M^0 = \{[x,y],\ x^2+y^2<1,\ y>0\}$

$\partial M = \{[x,y],\ x^2+y^2=1;\ y\geq 0\}\ \cup$

$\{[x,y],\ x^2 \cancel{+y^2} \leq 1,\ y=0\}$

$\overline{M} = \{[x,y],\ x^2+y^2\leq 1,\ y\geq 0\}$

c) $|z| < x^2+y^2 \leq 1 \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$



$M^0 = \{[x,y,z],\ |z|<x^2+y^2<1\}$

$\overline{M} = \{[x,y,z],\ |z|\leq x^2+y^2\leq 1\}$

$\partial M = \{[x,y,z],\ |z| = x^2+y^2\leq 1\}$

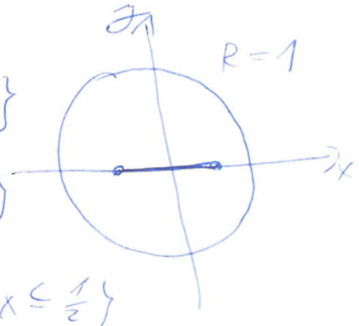
d) $M\ \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\}$

$M^0 = M\setminus\{0\} \leftarrow x\in M \ \exists\varepsilon>0\ U_\varepsilon(x)\subset A$

$\overline{M} = \mathbb{R}$

$\partial M = \{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$

e) $M = \{[x,y],\ x^2+y^2\leq 1\}\setminus\{[x,0],\ -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}\}$



$M^0 = \{[x,y],\ x^2+y^2<1\}\setminus\{[x,0],\ -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}\}$

$\partial M = \{[x,y],\ x^2+y^2=1\}\cup\{[x,0],\ -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}\}$

∂M hraniční bod - ani vnější ani vnitřní
- v každém okolí nalezneme bod nepatřící do vnitřku

$\overline{M} = \{[x,y],\ x^2+y^2\leq 1\}$

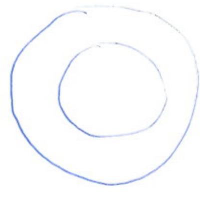
⑤ a) $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$x^2+y^2+z^2>1$

- otevřená, neboť $\forall (x,y,z)\in M\ \exists \varepsilon>0\ U_\varepsilon(x,y,z)\subset M$

b) $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$1<x^2+y^2+z^2\leq 2$

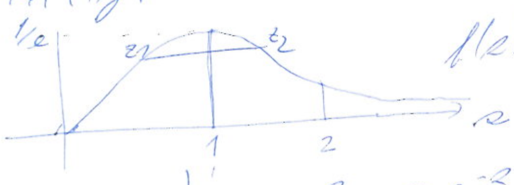


- ani otevřená ani uzavřená

⑥ vnitřek a vnějšek v závislosti na $s\in\mathbb{R}$

$M_s=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ (|x|+|y|)e^{-(|x|+|y|)}\leq s\}$

$r=|x|+|y|$



$f(r)=re^{-r}$

$(re^{-r})'=e^{-r}-re^{-r}=e^{-r}(1-r)$

$(re^{-r})''=e^{-r}(1-r)+e^{-r}(-1)=e^{-r}(r+2)$

$r\geq 0 \rightarrow s\in(0,\infty)$ aby byla množina neprázdná

$s<0 \rightarrow M_s=\emptyset$

$\overline{M_s}=M_s^0=\emptyset$

$s=0 \qquad \overline{M_s}=M_s=\{(x,y)=(0,0)\}$

$s\geq\frac{1}{e}\quad M_s=\mathbb{R}^2$

$M_s^0=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y):|x|+|y|=1\}$

$\partial M=\{(x,y);|x|+|y|=1\}$

$s\in(0,\frac{1}{e})\quad \overline{M_s}=\{x,y: z_1\leq|x|+|y|\leq z_2\}$

$M_s^0=\{x,y\mid z_1<|x|+|y|<z_2\}$

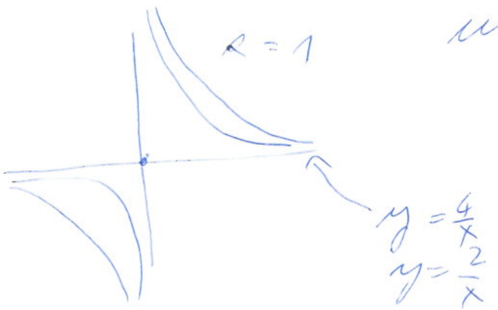
(7) Je množina

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \le xyz < 4\}$

ohraničená?

M, P $\quad |(P,S)|$ $\quad M \subset P$

množina ohraničená (práve keď existuje $x \in P$ a $r > 0$ taký, že $\forall y \in A$ je $\rho(x,y) \le r$



uvažujme $x_0 = (0,0,0)$, $z = 1$

(potom ohraničená $x = (x,y,z)$ pre stačí rozmerom r).

$r \to r + \rho(x_0 \cancel{x})$

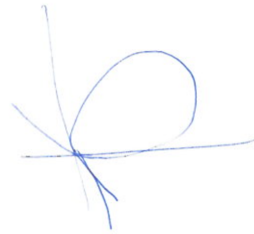
zafixujme z

pre $\forall r$ sa nájde x,y takých, že $\rho(x_0,(x,y,z)) > r$, $(x,y,z) \in M$

~~$\rho(x_0, \ldots)$~~

$\to$ nie je ohraničená

(8) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \ge 0, y \ge 0\}$



od pohľadu

$\to$ sfér. súradnice

$r^3\cos^3\varphi + r^3\sin^3\varphi = 2r\cos\varphi\sin\varphi$

$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 1. kvadrant

$$r^2 = \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$$

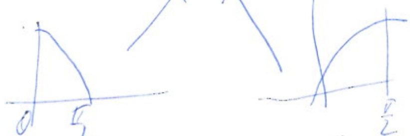
čo je min. hodnota $\cos^3\varphi + \sin^3\varphi$

~~...~~ der.: $-3\cos^2\varphi\sin\varphi + 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 0$

$3\cos\varphi\sin\varphi\underbrace{(\cos\varphi - \sin\varphi)}_{}= 0$

na $[0, \frac{\pi}{2}]$ nie je záporné

$\cos\varphi = \sin\varphi \to \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$



$$\Rightarrow r^2 \le \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} \le \frac{2}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$r \le \frac{2}{\sqrt[4]{2}}$ $\quad \Rightarrow$ je ohraničená

(1) dokázat konvexitu množiny $A \subset \mathbb{R}^n$

$\forall a, b \in A$ leží úsečka a a b

$\forall a, b \in A \quad \forall\, 0 < \lambda < 1 \quad (1-\lambda)a + \lambda b \in A$

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ |x| + e^y < e,\ x^2+y^2+z^2 \le 2\}$

$(x_1, y_1, z_1) \in M,\ (x_2, y_2, z_2) \in M \to (x_1(1-\lambda) + x_2\lambda,\ y_1(1-\lambda) + y_2\lambda,\ z_1(1-\lambda) + z_2\lambda)$

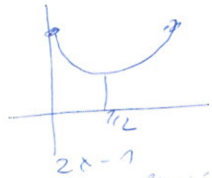
$0 \le x^2+y^2+z^2 \le 2 \quad \forall \lambda \in (0,1)$

$(\underbrace{x_1^2+y_1^2+z_1^2}_{\le 2})(1-\lambda)^2$

$(\underbrace{x_2^2+y_2^2+z_2^2}_{\le 2})\lambda^2$

$2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)\lambda(1-\lambda) \qquad \forall \lambda \in (0,1)$

$\le 2(1-\lambda)^2 + 2\lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda) = 2(1-2\lambda+\lambda^2+\lambda^2+\lambda-\lambda^2) = 2(1-\lambda+\lambda^2)$



věta $\quad \sum |x_i||y_i| \le (\sum |x_i|^p)^{1/p} (\sum |y_i|^{p'})^{\frac{1}{p'}}$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$|x_1(1-\lambda) + \lambda x_2| + e^{y_1(1-\lambda)+\lambda y_2} < \frac{1}{e}$?

$|x_1(1-\lambda) + \lambda x_2| + e^{y_1(1-\lambda)+\lambda y_2} \le$

$\le |1-\lambda|\,|x_1| + \lambda|x_2| + e^{(1-\lambda)y_1}e^{\lambda y_2}$

$< \lambda(e - e^{y_1}) + (1-\lambda)(e - e^{y_2}) + e^{(1-\lambda)y_1}e^{\lambda y_2}$

$= e - \underbrace{\lambda e^{y_1}}_{>0} - \underbrace{(1-\lambda)e^{y_2}}_{>0} + \underbrace{e^{(1-\lambda)y_1}}_{>0}\underbrace{e^{\lambda y_2}}_{>0}$

zobecnění AG nerovnost

$(1-\lambda)e^{y_1} + \lambda e^{y_2} \ge e^{(1-\lambda)y_1}e^{\lambda y_2}$

$\le e - e^{(1-\lambda)y_1}e^{\lambda y_2} + e^{(1-\lambda)y_1}e^{\lambda y_2} = e$

$\to$ konvexní soustava množin zobrazit

(10) $A \subset P \quad \partial A = \overline{A} \cap \overline{(P \setminus A)}$

– body hranice obsahuje body z A i z $P \setminus A$

$B = P \setminus A$

$\partial B = \overline{B} \cap \overline{(P \setminus B)}$ ← je symetrie

$\partial (P \setminus A) = \overline{P \setminus A} \cap \overline{(\underbrace{P \setminus P \setminus A}_{A})} = \overline{P \setminus A} \cap \overline{A} = \partial A$

(11) $A, B \subset \mathbb{R}^N$

$(\partial A \times B) \cup (A \times \partial B) \subset \partial (A \times B)$ kdy platí rovnost?

$\underline{\partial A \times B}$

$x \in \partial A, y \in B$

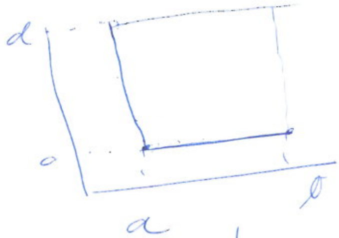
$\exists x_n \in A \quad x_n \to x$

$\exists \tilde{x}_n \in P \setminus A \quad \tilde{x}_n \to x$

$\left.\begin{matrix} (x_n, y \in B) \in A \times B \\ (\tilde{x}_n, y) \in (P \setminus A) \times B \end{matrix}\right\} (x, y) \in \partial (A \times B)$

analogicky pro $A \times \partial B$

→ rovnost pro A nebo B uzavřené



$A = (a, b)$

$B = (c, d)$

⇒ uvažujme $A = \overline{A}$

$(x, y) \in \partial (A \times B)$

$\exists (x_n, y_n) \in (A \times B) : (x_n, y_n) \to (x, y)$

$\exists (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \times P \setminus (A \times B) \quad (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \to (x, y)$

$x_n \to x, x \in A$ (A uzavřená) a $y \in B$ nebo $y \in P \setminus B$

~~a $y \in B$ ...~~

$y \in B \to y \in \partial B$

(12) X, Y $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$A, B \subset X$

a) $\bar{A} = A^\circ \cup \partial A$ (disjunktní)

$\bar{A} = A \cup \partial A$ a aby by muselo platit $A^\circ \cap \partial A = \emptyset$

$A^\circ \cap \partial A \neq \emptyset$

Pokud $x \in A^\circ \to$ otevřená množina $\exists \varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(x) \subset A$

a aby nemůže být problém ∂A (musí obsahovat bod z A i $P \setminus A$)

$x \in \partial A$ $U_\varepsilon \cap P \setminus A \neq \emptyset$ a $U_\varepsilon \cap A \neq \emptyset \to$ nemůže být otevřená

b) $X = A^\circ \cup A^{ext} \cup \partial A$ (disjunktní)

$A^{ext} = X \setminus \bar{A}$

$x \in A^\circ \to$ otevřená $\exists \varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(x) \subset A$ a aby $U_\varepsilon \cap P \setminus A^\circ = \emptyset$ (v okolí se nenachází žádný bod z $P \setminus A$) U_ε

$x \in A^{ext} \to$ otevřená $\exists \varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(x) \subset P \setminus A$ a $U_\varepsilon(x) \cap A \neq 0$

$x \in \partial A \to \forall \varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ $U_\varepsilon(x) \cap P \setminus A \neq \emptyset$

a aby nemůže být prvek A° ani A^{ext}

• c-e) A^0 největší otevřená podmnožina A

A^0 otevřená $x_0 \in A^0$ $\exists \varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(x_0) \subset A$

zvolme $x \in U_\varepsilon(x_0)$ libovolné a $\delta := \varepsilon - \rho(x, x_0)$

$y \in U_\delta(x) \Rightarrow \rho(x_0, y) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_0) < \delta + \rho(x, x_0) = \varepsilon$

$\Rightarrow y \in U_\varepsilon(x_0) \subset A$

x bylo libovolné $\to A^0$ je otevřená

$A^0 \subset A$, pokud by existovala $G \subset A$ otevřená, každý vnitřní bod jejího okolí, který leží v $G \subset A$ a proto musí ležet v A^0. Tedy $G \subset A_0$

$\bar{A}$ nejmenší uzavřená množina

$\bar{A} = P \setminus (P \setminus A^{c})^0$ $\quad P \setminus A^0$

$\to$ doplněk největší otevřené podmnožiny $\to$ nejmenší uzavřená podmnožina

největší otevřená množina

$A^0 \to A$

$(P \setminus A)^0 \to P \setminus A$

největší otevřená množina

$A \subset \bar{A}$, pokud by existovala $F \supset A$ $\bar{A} \setminus F \neq \emptyset$, pak by $P \setminus (\bar{A} \cap F)$ otevřená spor s $(P \setminus A)^0$ ~~nejmenší~~ největší otevřená podmnožina

A^{u} $\quad \bar{A} = P \setminus \underbrace{(P \setminus A)^0}_{P^u}$

$\overline{(P \setminus A)^0} = P \setminus (P \setminus P \setminus A)^0 = P \setminus \underbrace{A^0}_{\text{min}}$

$A^{u} = P \setminus \bar{A}$

~~největší~~ nejmenší uzavřená

$\Rightarrow A^{u}$ nejmenší otevřená navíc $x \in P \setminus A$ a není $x \in P$ a $x \in P \setminus \bar{A}$

$\to$ doplněk

(1) $x_0 \in \bar{A} \iff$ existuje $x_n \in A$ $x_n \to x_0$

$\to$ stačí vzít $x_n \equiv x_0$ pro $x_0 \in A$

$\Rightarrow$ $x_0 \in \partial A$ $x_n \in A \cap U_{(\frac{1}{n})}(x_0)$ $\forall n \in N$

$\Leftarrow$ platí-li pro $x_n \in A$ a $x_n \to x_0$, x_0 nemůže být vnějším bodem (v jeho okolí už vždy nemůže být z A^c)

(2) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\qquad \bar{A} = A \cup \partial A$

$\to$ $x \in \overline{A \cup B}$ a tedy je buď z A nebo ∂A nebo B nebo ∂B

$\Leftarrow$ $x \in \bar{A}$ pak je jistě i prvkem většiny množiny

$x \in \bar{B}$ podobně

h) ? $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$?

$\overline{A \cap B} \subset \bar{A}$ a $\overline{A \cap B} \subset \bar{B}$

$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

$A = (0,1)$ $\quad B = (1,2)$

$A \cap B = \emptyset$ $\qquad \bar{\emptyset} = \emptyset$

$\to \overline{A \cap B} = \emptyset$

$\Leftarrow \bar{A} = [0,1]$ $\quad \bar{B} = [1,2]$ $\quad \to \bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$

i) $X \to Y$ $\quad F(\bar{A}) \subset \overline{F(A)}$ $\quad F$ spojité

$\exists x_n \subset A$ $\quad x_n \to x \in A$

f spojité $\{f(x_n)\} \subset f(A)$ a f

$\{f(x_n)\} \to f(x)$

Funkce více proměnných

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega \in \mathbb{R}^n \quad n \geq 2$

$\mathbb{R}^n$ normovaný lineární prostor

limita

$x_0 \in \bar{\Omega}$ $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : x \in \Omega$ a

$0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

limita zobrazení

$(P_1, \rho_1) \to (P_2, \rho_2)$ $\quad \varphi: P_1 \to P_2 \quad x_0 \in P_1$ bod

D_φ a $y_0 \in P_2$ množiny? bodů

φ má v bodě x_0 limitu rovnu y_0

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad x \in P_\delta(x_0) \cap D_\varphi \Rightarrow \varphi(x) \in U_\varepsilon(y_0)$

- obvykle si nezavádíme nevlastními limitami

Heineho věta, spojitost složeného zobrazení, aritmetika limit, dva strážníci