Rovnice se separovanými proměnnými

V této kapitole se budeme zabývat následující diferenciální rovnicí:

$$y' = g(y)f(x), \tag{1}$$

kde f a g jsou reálné funkce reálné proměnné. Tato rovnice se nazývá *rovnice se separovanými proměnnými.* V celé kapitole budou písmena I, J označovat otevřené intervaly.

Ihned vidíme, že pokud $g(y_0) = 0$, je $y(x) = y_0$ řešením rovnice definovaným na všech intervalech obsažených v definičním oboru funkce f. Toto řešení se nazývá *stacionární.* Základní věta, která nám umožní najít netriviální řešení rovnice se separovanými proměnnými, je následující:

Věta 1 (Řešení rovnice se separovanými proměnnými)**.** *Je dána rovnice* (1)*. Nechť $f(x)$ je spojitá v I, nechť $g(y)$ je spojitá a nenulová v J. Nechť $F(x)$ resp. $G(y)$ jsou primitivní funkce k $f(x)$ resp. $1/g(y)$ v I resp. v J.*

Označ $G^{-1}(z)$ funkci inverzní ke $G(y)$. Nechť $\tilde{I} \subset I$ a $c \in \mathbb{R}$ jsou zvoleny tak, že $F(x)+c$ leží v definičním oboru $G^{-1}(z)$ (tj. v $G(J)$) pro všechna $x \in \tilde{I}$.

Potom funkce

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c)\,, \quad x \in \tilde{I}$$

je řešení rovnice (1)*.*

Poznámka. Předpoklad "$F(x) + c$ leží oboru hodnot G" je potřeba hlídat – formální výpočet totiž může vést k funkci, jejíž definiční obor je větší než interval, na níž tato funkce řeší naši rovnici.

Příklad 1. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$.

Řešení. Ihned vidíme jediné stacionární řešení $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Dále aplikací předchozí věty nacházíme řešení

1. pro $I = \mathbb{R}$, $J = (-\infty, 0)$: $G(y) = -\sqrt{-y}$, $F(x) = x$. Tedy $G(J) = (-\infty, 0)$, $\tilde{I} = (-\infty, -c)$. nalezené řešení $y(x) = -(x+c)^2$, $x \in (-\infty, -c)$. **Pozor:** pro $x > -c$ daná funkce NENÍ řešení rovnice.

2. pro $I = \mathbb{R}$, $J = (0, \infty)$: $G(y) = \sqrt{y}$, $G(J) = (0, \infty)$. Nalezené řešení $y(x) = (x + c)^2$, $x \in (-c, \infty)$. (Opět není řešení pro $x < -c$).

Nevíme však zatím, zda jsou tato řešení maximální a zda jsou všechna.

Někdy se může stát, že řešení, které nám dává Věta 1, nejsou maximální. Máme-li řešení na intervalech (a, b) a (b, c), je možné, že se nám povede funkci spojitě dodefinovat v bodě b a že získáme řešení na větším intervalu (a, c). O této situaci hovoří následující lemma:

Lemma 2 (O slepování)**.** *Nechť* $y_1(x) : (a, x_0) \to \mathbb{R}$, $y_2(x) : (x_0, b) \to \mathbb{R}$ *jsou řešení rovnice*

$$y' = f(x, y)\,. \tag{2}$$

Nechť $\lim\limits_{x \to x_0-} y_1(x) = y_0 = \lim\limits_{x \to x_0+} y_2(x)$. *Nechť* $f(x, y)$ *je spojitá v bodě* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. *Potom funkce*

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, x_0) \\ y_2(x), & x \in (x_0, b) \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}$$

je řešením rovnice (2) *v celém* (a, b).

Poznámka. Lemma 2 řeší vlastně jedinou věc: že rovnice je splněna v bodě slepení (x_0, y_0) (jinde je to z předpokladů triviálně jasné) a říká, že to je zaručeno, slepím-li řešení spojitě. Může však nastat i situace, že dvě řešení je možné slepit, přestože v bodě lepení není funkce f spojitá.

Řešení. (pokračování) Funkce

$$y(x) = \begin{cases} -(x + c)^2, & x < -c \\ 0, & x \geq -c \end{cases}$$

je dle Lemmatu 2 řešení rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$ v $\mathbb{R}$, neboť vznikne slepením dvou řešení: $y_1(x) = -(x + c)^2$ v $(-\infty, -c)$ a $y_2(x) = 0$ v $(-c, \infty)$. Také funkce

$$y(x) = \begin{cases} (x + c)^2, & x > -c \\ 0, & x \leq -c \end{cases}$$

je řešením rovnice. Tato řešení jsou evidentně maximální, neboť jsou definována na celém $\mathbb{R}$. Zbývá dořešit otázku, zda jsou všechna (samozřejmě nezapomínáme na nulové stacionární řešení).

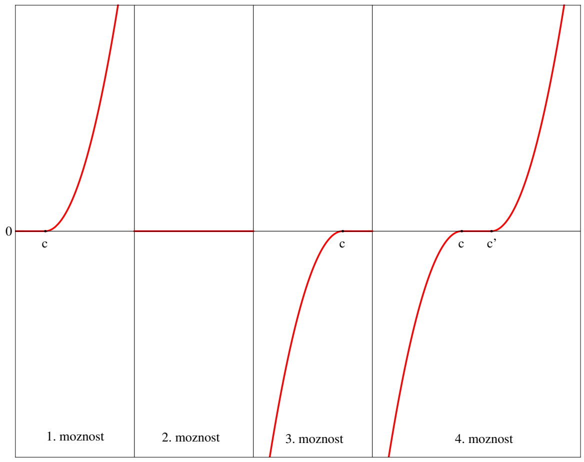
Jak poznáme, že jsme nalezli *všechna* maximální řešení? Picardova věta o existenci a jednoznačnosti nám dává jednoznačnost řešení v bodech, na jejichž okolí jsou funkce $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ a $(x, y) \mapsto f(x)g'(y)$ spojité. Máme-li tedy oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, v níž jsou tyto funkce spojité, a najdu-li sadu řešení, které Ω vyplní (každým bodem prochází aspoň jedno z nich), pak žádná jiná řešení nejsou. Naopak body, v nichž $g'(y)$ neexistuje, jsou obvykle kandidáti na *větvení.* (V bodě (x_0, y_0) nastává *větvení*, jestliže jím procházejí dvě řešení, která se neshodují na žádném $P(x_0, \delta)$.)

V případě rovnice se separovanými proměnnými však platí silnější věta o jednoznačnosti:

Tvrzení 3 (o jednoznačnosti)**.** *Jsou-li f a g spojité v Ω, pak k větvení může dojít pouze v bodech, v nichž g' neexistuje nebo není spojitá a zároveň $g = 0$.*

Nepotřebujeme tedy spojitost $(x, y) \mapsto f(x)g'(y)$, pokud g je nenulová. Toto tvrzení si můžete dokázat jako cvičení (viz níže).

Řešení. (dokončení) Uvažme opět rovnici $y' = 2\sqrt{|y|}$. Sada řešení $y_c(x) = (x - c)^2$, $x \in (c, \infty)$ zjevně vyplňuje horní polorovinu $\Omega = \{(x, y),\ y > 0\}$ (bodem $(x_0, y_0) \in \Omega$ prochází řešení, kde $c = x_0 - \sqrt{y_0}$). Protože f i g jsou v Ω spojité a g navíc nenulová, žádná jiná řešení zde nemohou být. Řešení tvaru $-(x + c)^2$ podobně vyplní dolní polorovinu. K větvení tedy může dojít pouze v bodech $(x_0, 0)$ a všechna tato větvení jsme našli.



Takto tedy vypadá celý postup hledání maximálních řešení rovnice (1):

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce f. (Tím máme vymezeny maximální intervaly, na kterých můžeme hledat řešení.)

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li $g(c) = 0$, potom funkce $y \equiv c$ na libovolném intervalu z 1. kroku je stacionární řešení rovnice (1).

3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy f je na I spojitá a g je na J spojitá a nenulová. Budeme hledat řešení rovnice (1), která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li y takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x).$$

Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J. Potom existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = F(x) + c$$

na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ F(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů řešení musí mít tvar

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G. Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení rovnice (1).

Příklad 2. Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = 2x(1 + y^2)$$

Řešení. Bod 1: $I = \mathbb{R}$. Bod 2: rovnice nemá žádné stacionární řešení. Bod 3: $J = \mathbb{R}$. Bod 4: po vydělení $1 + y^2$ a integraci dostáváme

$$\operatorname{arctg} y = x^2 + c. \tag{3}$$

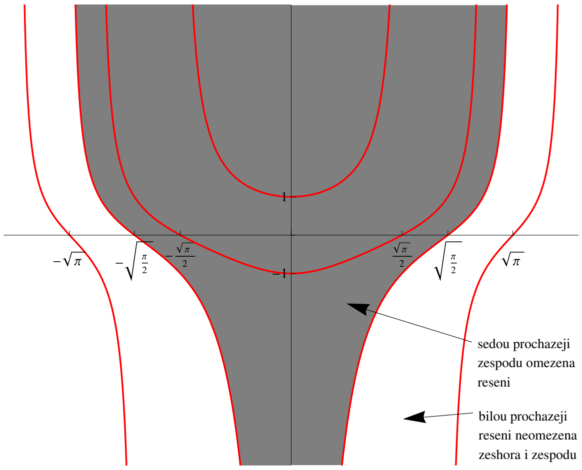
Protože máme jen jeden interval pro x a jeden pro y, nemusíme zde rozlišovat několik případů a úloha se tím výrazně zjednodušuje. Bod 5: protože funkce $G = \operatorname{arctg}$ zobrazuje $J = \mathbb{R}$ na $(-\pi/2, \pi/2)$, musí pravá strana rovnosti (3) ležet v intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$, tj.

$$x^2 \in (-\pi/2 - c, \pi/2 - c)\,.$$

Pokud $c \leq -\pi/2$, je řešení definované na intervalech $x \in (-\sqrt{\pi/2 - c}, -\sqrt{-\pi/2 - c})$ a $x \in (\sqrt{-\pi/2 - c}, \sqrt{\pi/2 - c})$. Pokud $c \in (-\pi/2, \pi/2)$, pak je definované na intervalu $(-\sqrt{\pi/2 - c}, \sqrt{\pi/2 - c})$. Pokud $c \geq \pi/2$, řešení neexistuje. Řešení je dané předpisem

$$y = \operatorname{tg}(x^2 + c).$$

Bod 6: Protože v krajních bodech intervalů $(\pm\sqrt{\pm\pi/2 - c})$ je $\lim y(x) = \pm\infty$, nalezená řešení nelze prodloužit, jsou tedy maximální. Z věty o jednoznačnosti plyne, že jsme nalezli všechna řešení, protože každým bodem roviny prochází některé z námi nalezených řešení. Skutečně, bodem $[x_0, y_0]$ prochází řešení $y = \operatorname{tg}(x^2 + c)$, kde $c = \operatorname{arctg} y_0 - x_0^2$, definované na intervalu $(-\sqrt{\pi/2 - c}, -\sqrt{-\pi/2 - c})$, je-li $x_0 < 0$, $\operatorname{arctg} y_0 - x_0^2 \leq -\pi/2$, nebo na intervalu $x \in (\sqrt{-\pi/2 - c}, \sqrt{\pi/2 - c})$, je-li $x_0 > 0$, $\operatorname{arctg} y_0 - x_0^2 \leq -\pi/2$ a nebo na intervalu $(-\sqrt{\pi/2 - c}, \sqrt{\pi/2 - c})$, je-li $\operatorname{arctg} y_0 - x_0^2 \in (-\pi/2, \pi/2)$.



Úlohy

Nalezněte všechna maximální řešení následujících rovnic:

1. $y' = |y|$

2. $y' = 1 - y^2$

3. $y' = (3/2)\sqrt[3]{y}$

4. $y' = \sqrt{1 - y^2}$

5. $(x^2 - 4x)y' + y = 0$

6. $y' = 3x^2y^2$

7. $y' = \frac{\cos^2 y}{x^2+1}$

8. $y' \sin x = y \ln y$

9. $y' = \sqrt[3]{y^2}$

10. $y' = \exp(-(x + y))$

11. $\frac{yy'}{y^2-1} + \frac{x}{x^2-1} = 0$

12. $y' = 3\sqrt[3]{y^2} \exp x$

13. $y' = y^2 - y$

14. $(x^2+x)y' - (2x+1)y = 0$

15. $y' \cos x + y(y+1) \sin x = 0$

16. $x^2(x^2+4)y' = \cos^2 y$

17. $yy' = \frac{1-2x}{y}$

18. $xy' + y = y^2$

19. $y' = 10^{x+y}$

20. $e^{-y}(1+y') = 1$

21. $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

22. $y' \sin x = y \ln y$, $y(\pi/2) = 1$

23. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$

24. $y' = \sqrt{y} e^{-x}$

25. $y' = 20e^{-x} \sqrt[5]{y^4}$

26. $y' = \frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$

27. $y' = e^{-y} \cos x$

28. $(2-e^x)y' = -3e^x \operatorname{tg} y \cos^2 y$

29. $y' = (1+y^2) \operatorname{tg} x$

30. $y' = \frac{1-x}{y}$

31. $y' = -\frac{x}{y} \cdot \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

32. $y' = \frac{\sqrt{1+y^2}}{xy}$

33. $y' = \frac{2xy^2}{1-x^2}$

34. $xy' \cos y + \sin y = \sin^2 y$

35. Najděte maximální řešení počáteční úlohy $y - xy' = b(1+xy')$, $y(1) = 1$ v závislosti na parametru $b \in \mathbb{R}$.

36. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = \frac{y^2}{x^2}$, která jsou omezená.

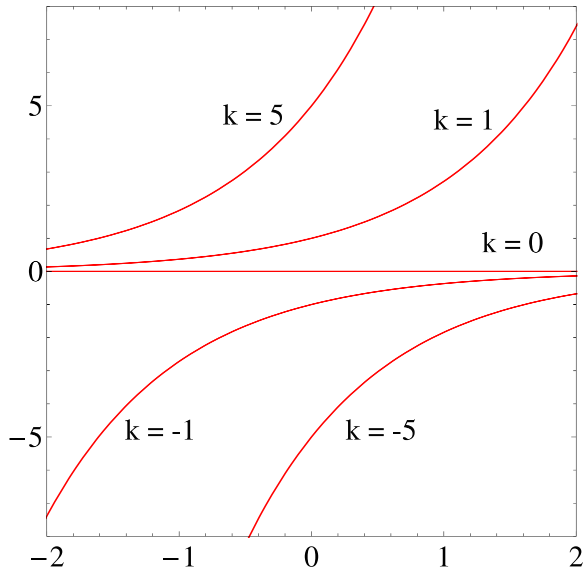
37. Najděte množinu všech bodů v rovině, kterými prochází právě jedno řešení rovnice $y' = \frac{\cos x}{e^y}$ definované na celém $\mathbb{R}$.

38. Najděte všechna $A \in \mathbb{R}$, pro která existuje řešení rovnice $y'(2-e^x) = -3e^x \operatorname{tg} y \cos^2 y$ splňující $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} y(x) = A$.

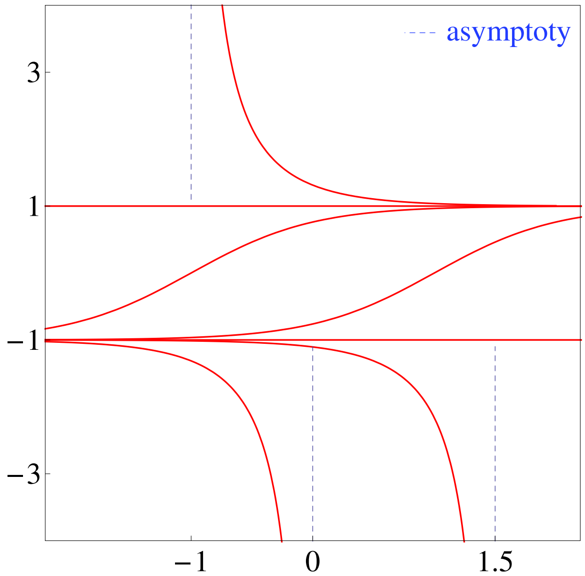
39. Nechť f je spojitá na okolí bodu x_0 a g je spojitá a nenulová na okolí bodu y_0. Pak v bodě (x_0, y_0) nedochází k větvení.

Řešení

1) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$, $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\operatorname{sgn}(y) \ln |y| = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách pro $y < 0$: $y = -\exp(-(x + c))$ a pro $y > 0$: $y = \exp(x + c)$ Závěr: $y(x) = k \exp(x \operatorname{sgn}(k))$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.

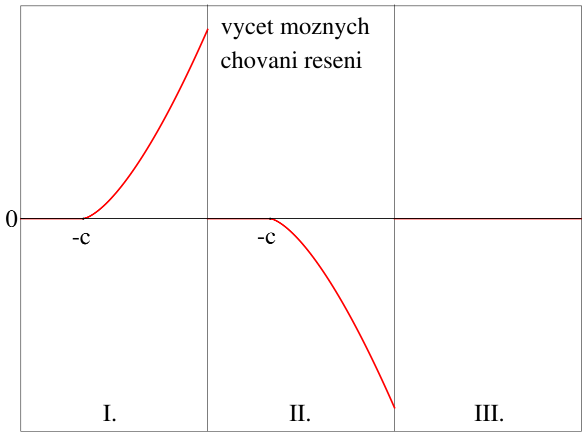


2) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = \pm 1$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; -1)$, $y \in (-1; 1)$, $y \in (1; +\infty)$. Po integraci $\frac{1}{2} \ln(|\frac{y+1}{y-1}|) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách pro $y \in (-\infty; -1)$ a pro $y \in (1; +\infty)$ máme $y = \operatorname{cotgh}(x + c)$ pro $y \in (-1; 1)$ $y = \operatorname{tgh}(x + c)$. Závěr: $y(x) = \pm 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y(x) = \operatorname{tgh}(x + c)$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$; $y(x) = \operatorname{cotgh}(x + c)$, $x \in (-\infty; -c)$ nebo $x \in (-c; +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

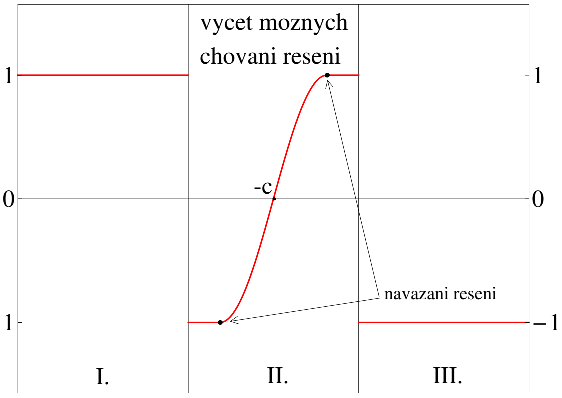


3) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$, $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\sqrt[3]{y^2} = x + c$, $c \in \mathbb{R}$, tj. $x > -c$. Po úpravách pro $y < 0$: $y = \sqrt{(x+c)^3}$ a pro $y > 0$: $y = -\sqrt{(x+c)^3}$. Lze nalepit v $-c$. Závěr:

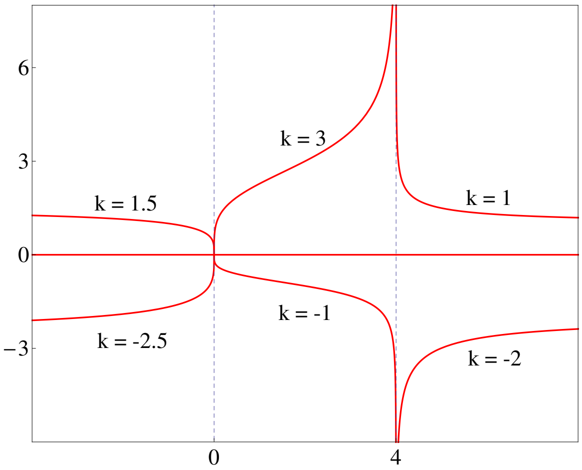
$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -c), \\ \pm\sqrt{(x+c)^3} & x \in [-c; +\infty), \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}^*$$



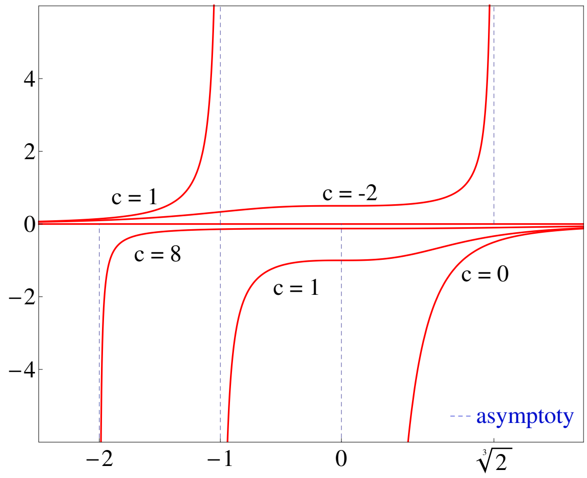
4) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in [-1; 1]$. Stacionární řešení $y = \pm 1$ na $\mathbb{R}$. Pro $y \in (-1; 1)$ řešíme rovnici $\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 1$, po integraci $\arcsin y = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $y = \sin(x + c)$, $x \in (-\frac{\pi}{2} - c; \frac{\pi}{2} - c)$. Řešení lze napojovat ve všech bodech, kde $y = -1$ nebo $y = 1$. Každé maximální řešení rovnice je určeno vzorcem $y(x) = \sin(x+c)$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2} - c; \frac{\pi}{2} - c)$, $y(x) = -1$ na $(-\infty; -\frac{\pi}{2} - c]$ a $y(x) = -1$ na $[\frac{\pi}{2} - c; +\infty)$ kde c je reálné číslo.



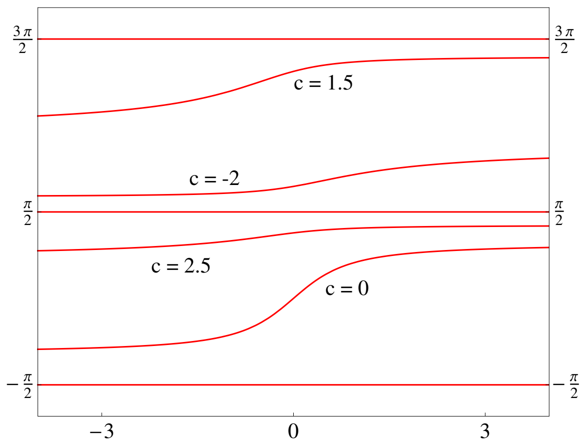
5) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $x \in (-\infty; 0)$, $x \in (0; 4)$, $x \in (4; +\infty)$, $y \in (-\infty; 0)$ nebo $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\ln(|y|) = \frac{1}{4}\ln(|\frac{x}{x-4}|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách pro $y < 0$: $y = -k\sqrt[4]{|\frac{x}{x-4}|}$, $k > 0$ a pro $y > 0$: $y = k\sqrt[4]{|\frac{x}{x-4}|}$, $k > 0$. Závěr: $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y(x) = \pm k\sqrt[4]{|\frac{x}{x-4}|}$, $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; 4)$ nebo $x \in (4; +\infty)$, $k \in \mathbb{R}^+$.



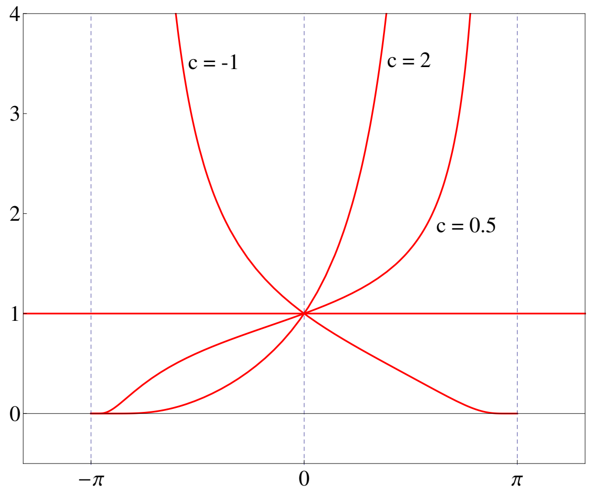
6) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$ nebo $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $-\frac{1}{y} = x^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = \frac{-1}{x^3+c}$. Závěr: $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y(x) = \frac{-1}{x^3+c}$, $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{c})$ nebo $x \in (-\sqrt[3]{c}; +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$.



7) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{R}$. Po integraci: $\operatorname{tg}(y) = \operatorname{arctg}(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x + c) + k\pi$. Závěr: $y(x) = k\pi + \operatorname{arctg}(c + \operatorname{arctg}(x))$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$; $y(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

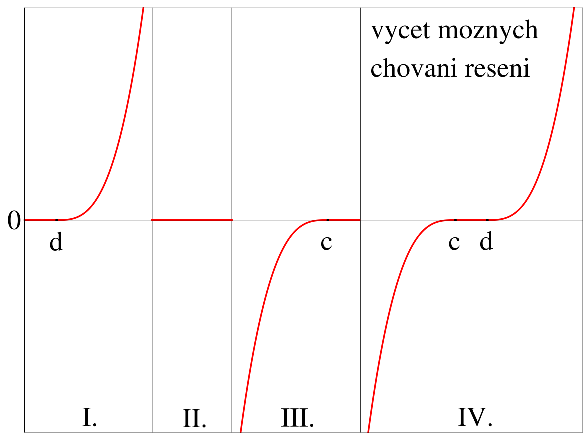


8) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 1$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $x \in (k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}^+$. Po integraci: $\ln|\ln y| = c - \operatorname{arctgh}(\cos x)$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách pro $y < 1$: $y = \exp(-c\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+cosx}}) = \exp(-c|\operatorname{tg}(\frac{x}{2})|)$, $c > 0$ a pro $y > 1$: $y = \exp(c\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}) = \exp(c|\operatorname{tg}(\frac{x}{2})|)$, $c > 0$. V $x = 2k\pi$ lze nalepit. Závěr: $y(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y(x) = \exp(c \cdot \operatorname{tg}(\frac{x}{2}))$, $x \in ((2k-1)\pi; (2k+1)\pi)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

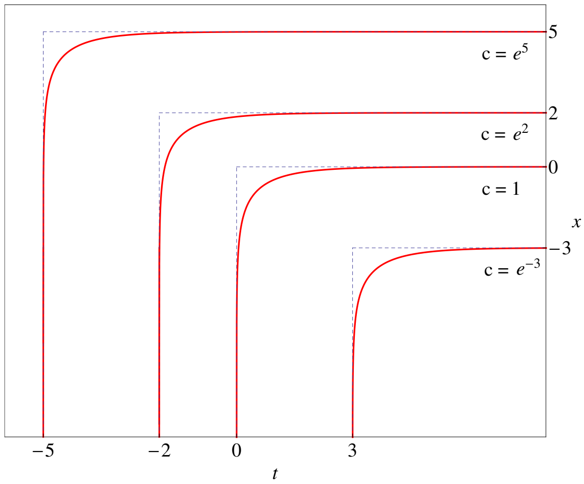


9) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$ nebo $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $3\sqrt[3]{y} = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = (\frac{x+c}{3})^3$ pro $x \in (-\infty; -c)$ nebo $x \in (-c; +\infty)$. Závěr:

$$y(x) = \begin{cases} (\frac{x+c}{3})^3; & x \in (-\infty; -c] \\ 0; & x \in (-c; -d) \\ (\frac{x+d}{3})^3; & x \in= [-d; +\infty) \end{cases} \qquad c, d \in \mathbb{R}^*, c \geq d$$

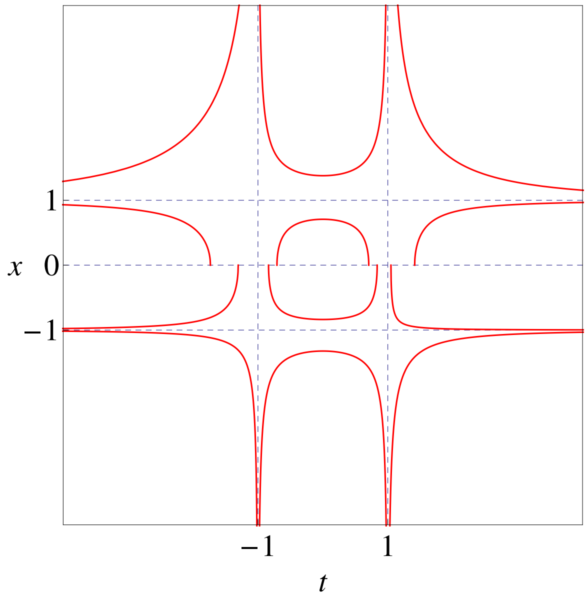


10) Má smysl pro $x, y \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Po integraci: $\exp y = c - \exp(-x)$, $c > 0$. Po úpravách $y = \ln(c - \exp(-x))$ pro $x \in (-\ln c; +\infty)$. Závěr: $y(x) = \ln(c - \exp(-x))$; $x \in (-\ln c; +\infty)$, $c > 0$.



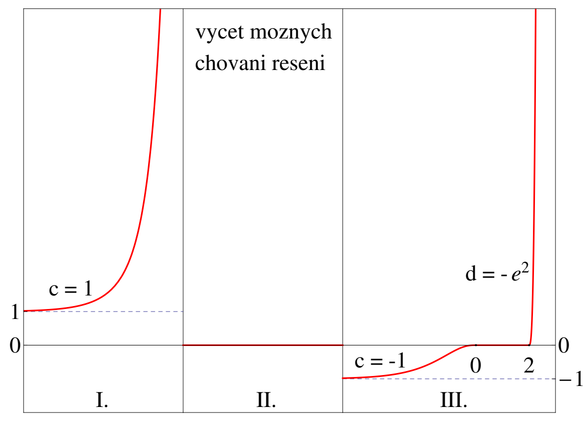
11) Má smysl pro $x \in (-\infty; -1)$ nebo $x \in (-1; 1)$ nebo $x \in (1; +\infty)$, žádná stacionární řešení. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; -1)$, $y \in (-1; 1)$, $y \in (1; +\infty)$. Po integraci: $\frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| = -\frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + \frac{1}{2}c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = \pm\sqrt{1 + \frac{k}{x^2-1}}$. Závěr: $y = \pm\sqrt{1 + \frac{k}{1-x^2}}$ pro $x \in (-1; 1)$ a pro $y \in (-1; 1)$

$$y = \pm\sqrt{1 + \frac{k}{x^2 - 1}} \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{1-k}) \text{ nebo } x \in (\sqrt{1-k}; +\infty) \\ \hfill \text{pro } k \in (-\infty; -1] \\ x \in (-\infty; -\sqrt{1-k}) \text{ nebo } x \in (-1; 1) \text{ nebo } x \in (\sqrt{1-k}; +\infty) \\ \hfill \text{pro } k \in (-1; 0) \\ x \in (-\infty; -1) \text{ nebo } x \in (-\sqrt{1-k}; \sqrt{1-k}) \text{ nebo } x \in (1; +\infty) \\ \hfill \text{pro } k \in (0; 1) \\ x \in (-\infty; -1) \text{ nebo } x \in (1; +\infty) \\ \hfill \text{pro } k \in [1; +\infty) \end{cases}$$



12) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$ nebo $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\sqrt[3]{y} = \exp(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = (c + \exp(x))^3$. Pro $c < 0$ lze slepit v $y = 0$. Závěr: $y(x) = (\exp(x) + c)^3$, $x \in \mathbb{R}$ $c \in \mathbb{R}_0^+$,

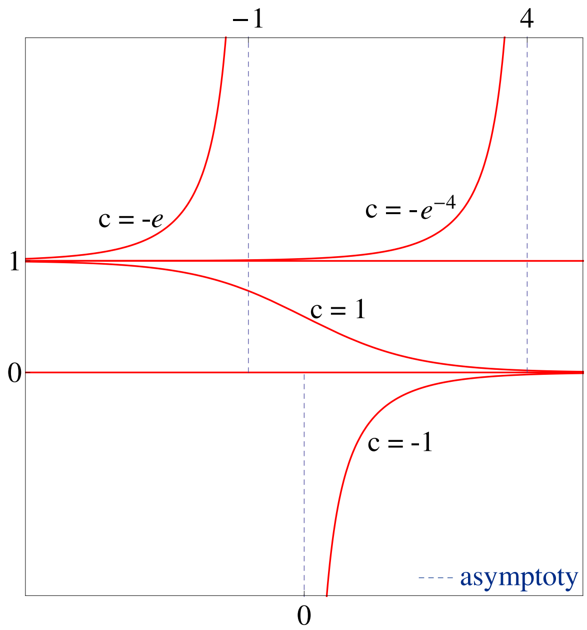
$$y(x) = \begin{cases} (\exp x + c)^3; & x \in (-\infty; \ln(-c)] \\ 0; & x \in (\ln(-c); \ln(-d)) \qquad c, d \in \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\},\ c > d \\ (\exp x + d)^3; & x \in= [\ln(-d); +\infty) \end{cases}$$



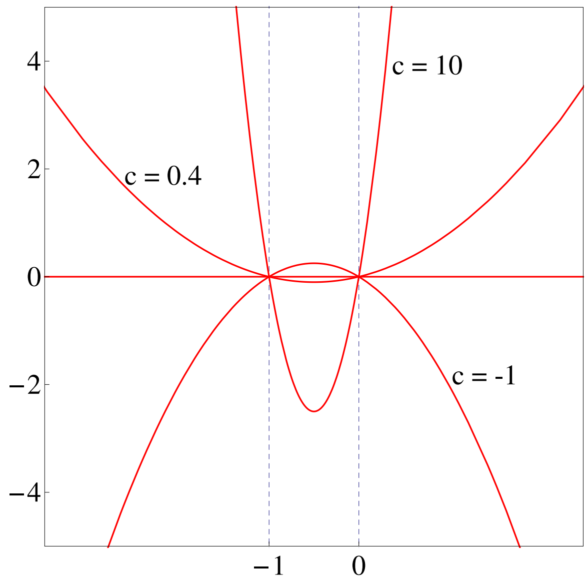
13) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$ a $y = 1$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$, $y \in (0; 1)$, $y \in (1; +\infty)$. Po integraci:

$\ln |\frac{y-1}{y}| = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = \frac{1}{1-c\exp x}$. Závěr: $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \frac{1}{1 + c\exp x}, \begin{cases} x \in \mathbb{R} \text{ pro } c \in (-\infty; 0] \\ x \in (-\infty; -\ln c) \text{ nebo } x \in (-\ln c; +\infty) \text{ pro } c \in (0; +\infty) \end{cases}$$

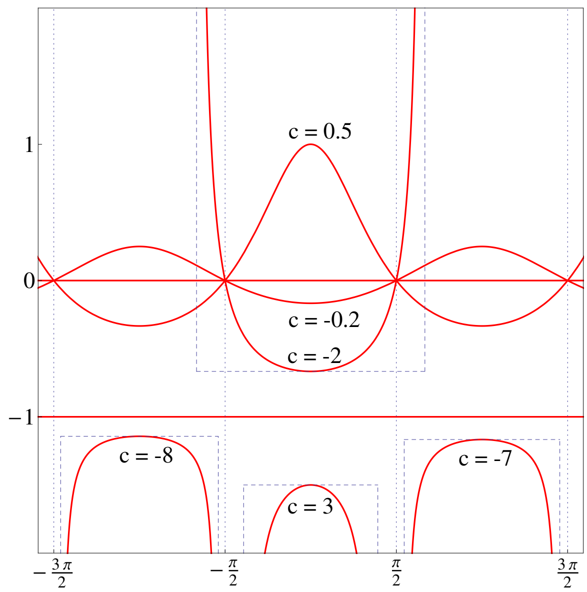


14) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $x \in (-\infty; -1)$, $x \in (-1; 0)$, $x \in (1; +\infty)$, $y \in (-\infty; 0)$, $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\ln |y| = c + \ln |x^2 + x|$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = c(x^2 + x)$. Závěr:



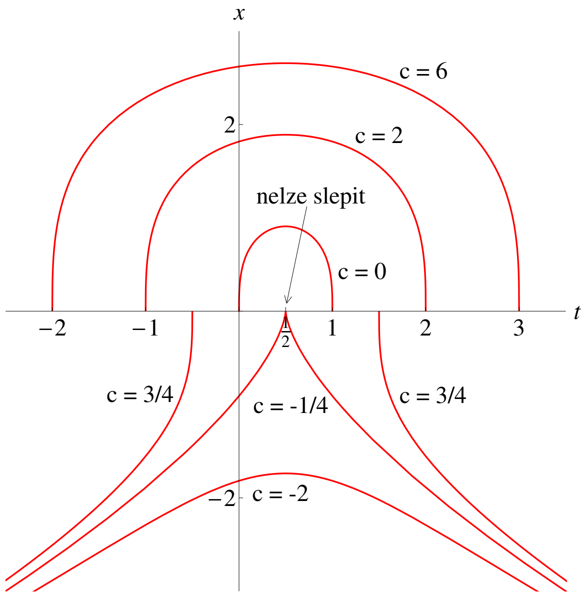
15) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ a $y = -1$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $y \in (-\infty; -1)$, $y \in (-1; 0)$, $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\ln|\frac{y}{y+1}| = \ln|\cos x| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = \frac{c \cdot \cos x}{1 - c \cdot \cos x}$. Závěr: $y(x) = -1$, $x \in \mathbb{R}$ a

$$y(x) = \frac{c \cdot \cos(x)}{1 - c \cdot \cos(x)} \begin{cases} x \in (2k\pi - \arccos(\frac{1}{c}); 2k\pi + \arccos(\frac{1}{c})),\ \ k \in \mathbb{Z} \\ \hfill \text{pro } c \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \\ x \in (2k\pi + \arccos(\frac{1}{c}); 2(k+1)\pi - \arccos(\frac{1}{c})), \\ \hfill \text{pro } c \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty),\ \ k \in \mathbb{Z} \\ x \in \mathbb{R} \text{ pro } c \in (-1; 1) \end{cases}$$

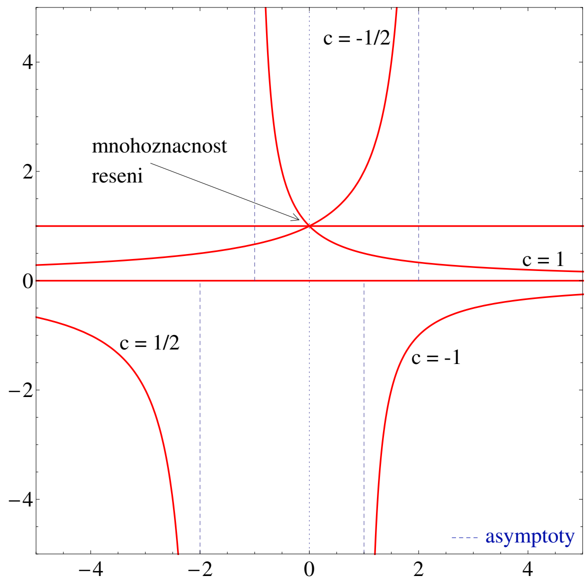


16) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Řešíme na intervalech $x \in (-\infty; 0)$, $x \in (0; +\infty)$, $y \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{R}$. Po integraci: $\operatorname{tg}(y) = \frac{1}{8} \operatorname{arctg}(\frac{x}{2}) - \frac{1}{4x} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = \operatorname{arctg}(\frac{1}{8} \operatorname{arctg}(\frac{x}{2}) - \frac{1}{4x} + c)$. Závěr: $y(x) = k\pi + \operatorname{arctg}(\frac{1}{8} \operatorname{arctg}(\frac{x}{2}) - \frac{1}{4x} + c)$, $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ a $y(x) = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

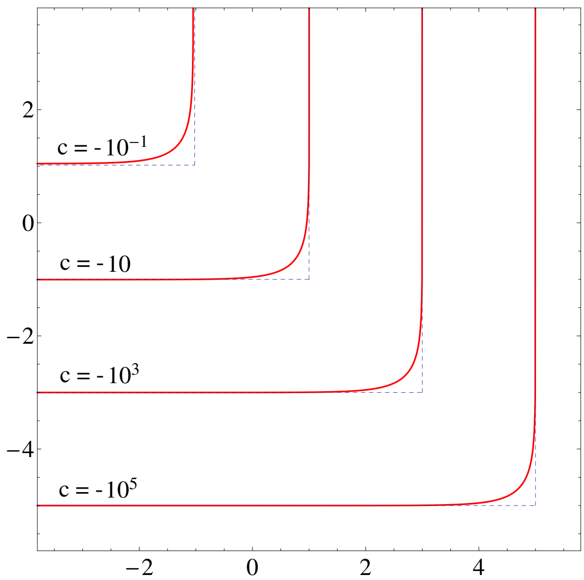
17) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, žádná stacionární řešení. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$, $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\frac{1}{3}y^3 = x - x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = \sqrt[3]{3(x - x^2 + c)}$. Závěr: $y(x) = \sqrt[3]{3(x - x^2 + c)}$ na intervalech: Pokud $c \in (-\infty; -\frac{1}{4})$, pak $x \in \mathbb{R}$. Pokud $c = -\frac{1}{4}$, $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$ nebo $x \in (\frac{1}{2}; +\infty)$. A pokud $c \in (-\frac{1}{4}; +\infty)$, pak $x \in (-\infty; \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + c})$ nebo $x \in (\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + c}; \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + c})$ nebo $x \in (\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + c}; +\infty)$.



18) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ a $y = 1$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $x \in (-\infty; 0)$, $x \in (0; +\infty)$, $y \in (-\infty; 0)$, $y \in (0; 1)$, $y \in (1; +\infty)$. Po integraci: $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách pro $y < 0$ a $y > 1$: $y = \frac{1}{1+k|x|}$, $k > 0$ a pro $0 < y < 1$: $y = \frac{1}{1-k|x|}$, $k > 0$. Závěr: $y(x) = \frac{1}{1+kx}$, $x \in (-\infty; -\frac{1}{k})$ nebo $x \in (-\frac{1}{k}; +\infty)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y(x) = 0$, $y(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

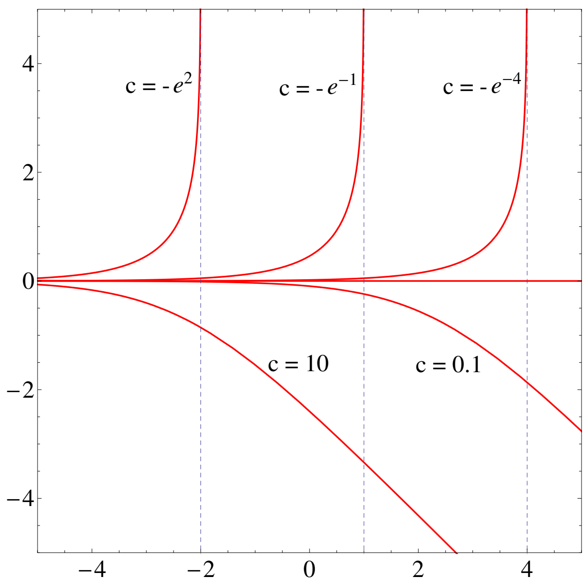


19) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, žádná stacionární řešení. Po integraci: $-\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} + \frac{c}{\ln 10}$, $c < 0$. Po úpravách $y = -\log_{10}(-10^x - c)$. Závěr: $y(x) = -\log_{10}(-10^x - c)$, $x \in (-\infty; \log_{10}(-c))$, $c \in \mathbb{R}^-$.



20) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$, $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\ln|1 - \exp(-y)| = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách pro $y < 0$: $y = -\ln(k \exp x + 1)$ a pro $y > 0$: $y = -\ln(1 - k \exp x)$. Závěr:

$$y(x) = -\ln(1 + k\exp(x)), \quad \begin{cases} x \in (-\infty; -\ln(-k)) & \text{pro } k \in (-\infty; 0) \\ x \in \mathbb{R} & \text{pro } k \in [0; +\infty) \end{cases}$$



21) Má smysl pro $x \in (-\infty; -1)$ nebo $x \in (-1; +1)$ nebo $x \in (1; +\infty)$, stacionární řešení $y = \pm 1$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $x \in (-1; 1)$ a $y \in$

$(-1;1)$. Po integraci: $\arcsin(y) = \arcsin(x) + c$, $c \in (-\pi;\pi)$. Po úpravách $y = \sin(c + \arcsin(x))$. Na intervalech $x \in (-\infty;-1)$ nebo $x \in (1;+\infty)$ a $y \in (-\infty;-1)$ nebo $y \in (1;+\infty)$ získáme po integraci $\operatorname{argcosh}(x) = \operatorname{argcosh}(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Rozebereme-li jednotlivé možnosti a podíváme-li se na to, která řešení je možno jak lepit, obdržíme následující závěr:
<u>stacionární řešení:</u>

$$y(x) = \pm 1,\ x \in (-\infty;-1) \text{ nebo } x \in (-1;+1) \text{ nebo } x \in (1;+\infty)$$

<u>řešení pro $c \in (-\infty;-\pi]$:</u>

$$y(x) = \pm\cosh(c + \operatorname{argcosh}|x|),\ \ x \in (-\infty;-\cosh c) \text{ nebo } x \in (\cosh c;+\infty)$$

<u>řešení pro $c \in (-\pi;0]$:</u>

$$y(x) = \pm\cosh(c + \operatorname{argcosh}|x|),\ \ x \in (-\infty;-\cosh c) \text{ nebo } x \in (\cosh c;+\infty)$$

$$y(x) = \sin(c + \arcsin x),\ x \in (-1;1)$$

$$y(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1;\cos c] \\ \sin(c + \arcsin x), & x \in [\cos c;1) \end{cases}$$

<u>řešení pro $c \in [0;\pi)$:</u>

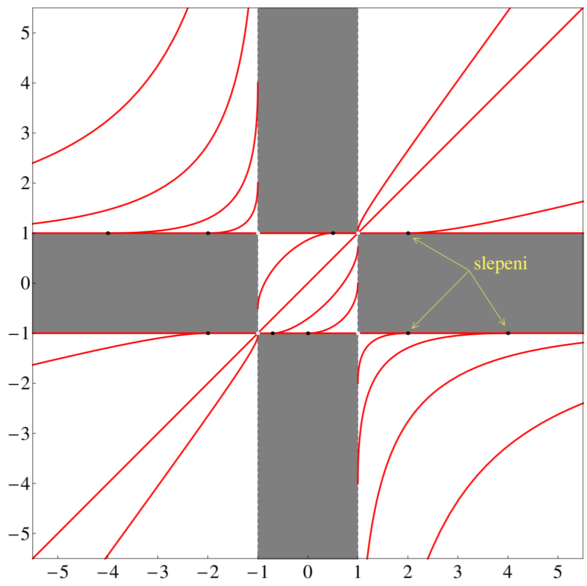
$$y(x) = \pm\cosh(c + \operatorname{argcosh}|x|),\ x \in (-\infty;-1) \text{ nebo } x \in (1;+\infty)$$

$$y(x) = \sin(c + \arcsin x),\ x \in (-1;1)$$

$$y(x) = \begin{cases} \sin(c + \arcsin x), & x \in (-1;\cos c] \\ 1, & x \in [\cos c;1) \end{cases}$$

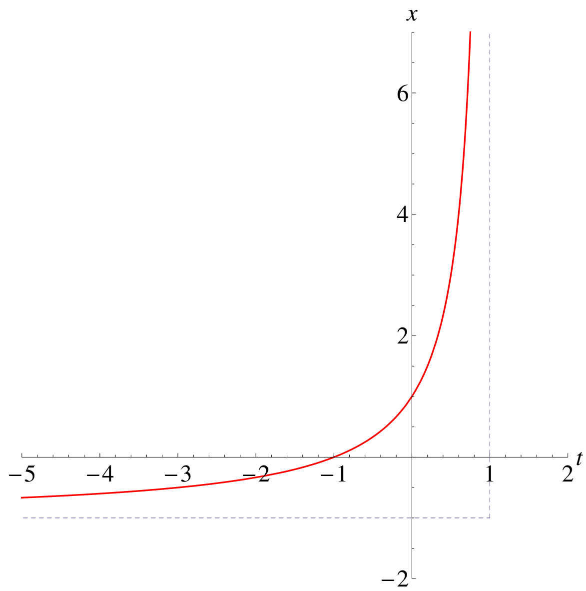
<u>řešení pro $c \in [\pi;+\infty)$:</u>

$$y(x) = \pm\cosh(c + \operatorname{argcosh}|x|),\ x \in (-\infty;-1) \text{ nebo } x \in (1;+\infty)$$



22) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 1$ na $\mathbb{R}$. Po integraci: $\ln|\ln|y|| = \frac{1}{2}\ln|\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = \exp(k\sqrt{|\frac{1-cos(x)}{1+cos(x)}|})$, $k \in \mathbb{R}$. Závěr: Řešení splňující počáteční podmínku je $y(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

23) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$. Po integraci: $\operatorname{arctg}(y) = \operatorname{arctg}(x) + c$, $c = \frac{\pi}{4}$. Po úpravách $y = \exp(k\sqrt{|\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}|})$, $k \in \mathbb{R}$. Závěr: Řešení splňující počáteční podmínku je $y(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} x)$, $x \in (-\infty, \operatorname{tg}\frac{\pi}{4})$.

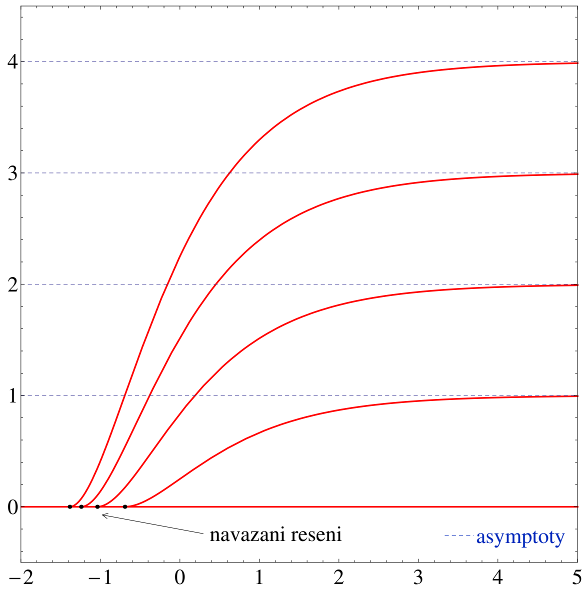


24) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in [0; +\infty)$. Stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Pro $y > 0$ řešíme rovnici $\frac{y'}{\sqrt{y}} = \exp(-x)$. Po integraci máme $2\sqrt{y} = c - \exp(-x)$,

$c \in \mathbb{R}^+$, pro $c - \exp(-x) > 0$. Po úpravě $y = \frac{(c-\exp(-x))^2}{4}$. Závěr:

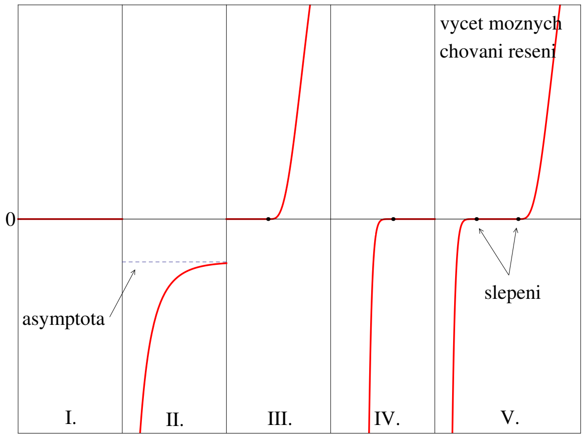
$$y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; -\ln c] \\ \frac{1}{4}(c - \exp(-x))^2, & x \in (-\ln c; +\infty) \text{ pro } c \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

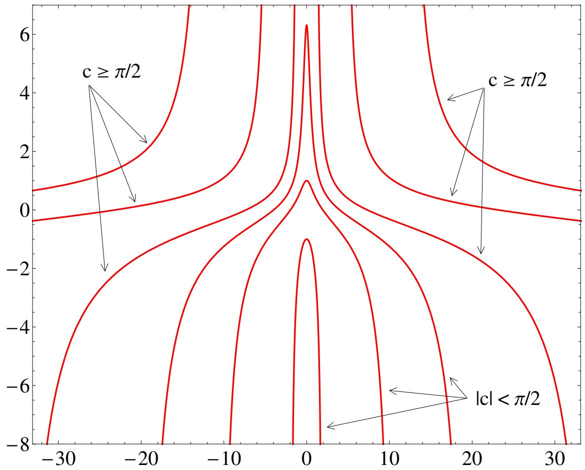


25) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$, $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\sqrt[5]{y} = c - 4\exp(-x)$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = (c - 4\exp x)^5$. Závěr: $y(x) = (c - 4\exp(x))^5$, $x \in \mathbb{R}$ pro $c \in (-\infty; 0]$ a

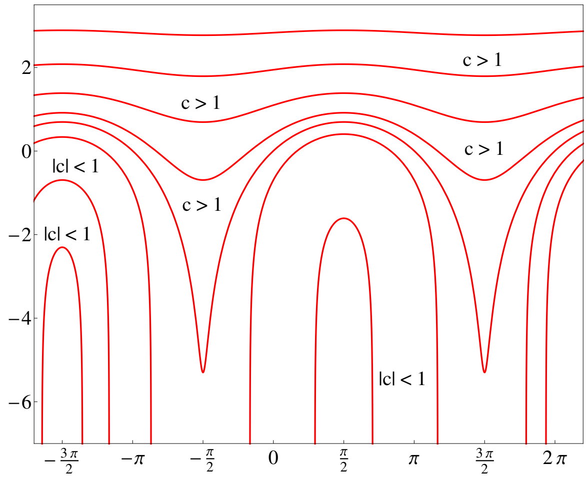
$$y(x) = \begin{cases} (c - 4\exp x)^5, & x \in (-\infty; -\ln(\frac{c}{4})) \\ 0, & x \in (-\ln(\frac{c}{4}); -\ln(\frac{d}{4})) \quad c, d \in [0; +\infty],\ c \geq d \\ (d - 4\exp x)^5, & x \in (-\ln(\frac{d}{4}; +\infty)) \end{cases}$$



26) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$. Po integraci: $\operatorname{arctg}(y) = c - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, $c \in (-\frac{\pi}{2}; +\infty)$. Po úpravách $y = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2}\ln(x^2+1))$. Závěr: $y(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2}\ln(x^2+1))$ na intervalu $(-\sqrt{\exp(2c+\pi)-1}; \sqrt{\exp(2c+\pi)-1})$ pokud $c \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ a na intervalech $(-\sqrt{\exp(2c+\pi)-1}; \sqrt{\exp(2c-\pi)-1})$ nebo $(\sqrt{\exp(2c-\pi)-1}; \sqrt{\exp(2c+\pi)-1})$ pokud $c \in [\frac{\pi}{2}; +\infty)$.



27) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$. Po integraci: $\exp(y) = \sin(x) + c$, $c \in (-1; +\infty)$. Po úpravách $y = \ln(\sin(x) + c)$. Závěr: $y(x) = \ln(\sin(x) + c)$ na intervalech $(-\arcsin(c) + 2k\pi; -\arcsin(c) + (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ pro $c \in (-1; 1)$, na intervalech $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ pro $c = 1$ a na $\mathbb{R}$ pro $c \in (1; +\infty)$.



28) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Stacionární řešení $y = k\pi$. Pro $y \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi)$ a pro $y \in (k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$ máme po integraci $\ln|\operatorname{tg} y| = 3\ln|2 - e^x| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Označme $d = (\operatorname{sgn} \operatorname{tg} y)e^c$. Potom $\operatorname{tg} y = d(2 - e^x)^3$, odtud $y = k\pi + \operatorname{arctg}(d(e^x - 2)^3)$. Závěr:

$$y(x) = k\pi + \operatorname{arctg}(d(e^x - 2)^3),\ x \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$$

29) Má smysl pro $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Po integraci $\operatorname{arctg} y = c - \ln|\cos x|$, $c \in (-\infty; \frac{\pi}{2})$, neboť pro $c \geq \frac{\pi}{2}$ je $c - \ln|\cos x| \geq \frac{\pi}{2}$, ale $\operatorname{arctg} y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Tedy:

$$y(x) = \operatorname{tg}\left(c - \ln|\cos x|\right).$$

Řešení je definováno na intervalech

$$\begin{cases} x \in (k\pi - \arccos e^{c-\frac{\pi}{2}}; k\pi - \arccos e^{c+\frac{\pi}{2}}),\ k \in \mathbb{Z} & c \in (-\infty; -\frac{\pi}{2}] \\ x \in (k\pi + \arccos e^{c+\frac{\pi}{2}}; k\pi + \arccos e^{c-\frac{\pi}{2}}),\ k \in \mathbb{Z} & c \in (-\infty; -\frac{\pi}{2}] \\ x \in (k\pi - \arccos e^{c-\frac{\pi}{2}}; k\pi + \arccos e^{c-\frac{\pi}{2}}),\ k \in \mathbb{Z} & c \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

30) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$. Po integraci máme $\frac{1}{2}y^2 = c - \frac{1}{2}(x-1)^2$, $c > 0$, neboť pro $c \leq 0$ je $c - \frac{1}{2}(x-1)^2 \leq 0$, ale $\frac{1}{2} \geq 0$. Řešení $y(x) = \pm\sqrt{2c - (x-1)^2}$, $x \in (1 - \sqrt{2c}; 1 + \sqrt{2c})$ pro $c \in (0; +\infty)$.

31) Má smysl pro $x \in (-1; 1)$. Stacionární řešení $y = \pm 1$ pro $x \in (-1; 1)$. Po integraci máme rovnici $\sqrt{1 - y^2} = c - \sqrt{1 - x^2}$. Musí platit $c - \sqrt{1 - x^2} \in [0; 1)$, neboli $\sqrt{1 - x^2} \in (c - 1; c]$. Odtud $x \in (-1; -\sqrt{1 - c^2})$ nebo $x \in (\sqrt{1 - c^2}; 1)$ pro $c \in (0; 1)$ a $x \in (-\sqrt{1 - (c-1)^2}; \sqrt{1 - (c-1)^2})$ pro $c \in [1; 2)$. Pro jiné hodnoty konstanty c není splněno $c - \sqrt{1 - x^2} \in [0; 1)$. Podmínka $y \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 - (c-1)^2$ je splněna, k lepení dojde v bodě, kde $y = \pm 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - c^2$. Řešení:

pro $c \in (0;1)$:

$$y(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-(c-\sqrt{1-x^2})^2}, & x \in (-1; -\sqrt{1-c^2}) \\ -1, & x \in [-\sqrt{1-c^2}; \sqrt{1-c^2}] \\ -\sqrt{1-(c-\sqrt{1-x^2})^2}, & x \in (\sqrt{1-c^2}; 1) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{1-(c-\sqrt{1-x^2})^2}, & x \in (-1; -\sqrt{1-c^2}) \\ 1, & x \in [-\sqrt{1-c^2}; \sqrt{1-c^2}] \\ \sqrt{1-(c-\sqrt{1-x^2})^2}, & x \in (\sqrt{1-c^2}; 1) \end{cases}$$

pro $c \in (1;2)$:

$$y(x) = \pm\sqrt{1-(c-\sqrt{1-x^2})^2},\ x \in (-\sqrt{1-(c-1)^2}; \sqrt{1-(c-1)^2})$$

další řešení:

$$y(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1; 0] \\ \sqrt{1-(1-\sqrt{1-x^2})^2}, & x \in (0; 1) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{1-(1-\sqrt{1-x^2})^2}, & x \in (-1; 0) \\ 1, & x \in [0; 1) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1; 0] \\ -\sqrt{1-(1-\sqrt{1-x^2})^2}, & x \in (0; 1) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-(1-\sqrt{1-x^2})^2}, & x \in (-1; 0) \\ -1, & x \in [0; 1) \end{cases}$$

$$y(x) = \pm 1,\ x \in (-1; 1)$$

32) Má smysl pro $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$. Po integraci a vynásobení dvěma $\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + 1 - c$, $c \in \mathbb{R}$. Musí být $\ln|x| + 1 - c \geq 1$, neboli $\ln|x| \geq c$, tj. $x \in (-\infty; -e^c)$ nebo $x \in (e^c; +\infty)$. řešení na těchto intervalech: $y(x) = \pm\sqrt{(\ln|x| + 1 - c)^2 - 1}$.

33) Řešíme pro $x \in (-\infty; -1)$, $x \in (-1; 1)$, $x \in (1; +\infty)$ a $y \in \mathbb{R}$. Stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Pro $y \in (-\infty; 0)$ nebo $y \in (0; +\infty)$ řešíme rovnici $\frac{-y'}{y^2} = \frac{2x}{x^2-1}$. Po integraci $\frac{1}{y} = c + \ln|x^2 - 1|$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $y = \frac{1}{c+\ln|x^2-1|}$ pro x taková, že $x^2 - 1 \neq \exp(-c)$. Závěr:

$$y(x) = \frac{1}{c + \ln|x^2 - 1|},$$

Řešení je definováno pro $x \in (-\infty; -\sqrt{1 + e^{-c}})$, $x \in (-\sqrt{1 + e^{-c}}; -1)$, $x \in (-1; 1)$, $x \in (1; \sqrt{1 + e^{-c}})$, $x \in (\sqrt{1 + e^{-c}}; +\infty)$, pokud $c \in (-\infty; 0)$ a nebo pro $x \in (-\infty; -\sqrt{1 + e^{-c}})$, $x \in (-\sqrt{1 + e^{-c}}; -1)$, $x \in (-1; -\sqrt{1 - e^{-c}})$, $x \in (-\sqrt{1 - e^{-c}}; \sqrt{1 - e^{-c}})$, $x \in (\sqrt{1 - e^{-c}}; 1)$, $x \in (1; \sqrt{1 + e^{-c}})$, $x \in (\sqrt{1 + e^{-c}}; +\infty)$, pokud $c \in [0; +\infty)$

34) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Rovnici upravíme na tvar $xy' \cos y = \sin y(\sin y - 1)$. Stacionární řešení $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, na $\mathbb{R}$ a $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, na $\mathbb{R}$. Pro $x \neq 0$ a pro $y \in (2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $y \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; (2k + 1)\pi)$ nebo $y \in ((2k + 1)\pi; (2k + 2)\pi)$ máme $\frac{y' \cos y}{\sin y(\sin y-1)} = \frac{1}{x}$. Po integraci máme $\ln|1 - \frac{1}{\sin y}| = \ln|x| + \ln c$, $c \in \mathbb{R}^+$, odtud $|1 - \frac{1}{\sin y}| = c|x|$. Pro $y \in (2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ řešení $y = \arcsin\frac{1}{1+c|x|} + 2k\pi$. Pro $y \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; (2k+1)\pi)$ řešení $y = \pi - \arcsin\frac{1}{1+c|x|} + 2k\pi$. Pro $y \in ((2k + 1)\pi; (2k + 2)\pi)$ řešení $y = \arcsin\frac{1}{1-c|x|} + (2k+2)\pi$ a řešení $y = \pi - \arcsin\frac{1}{1-c|x|} + (2k+2)\pi$. Řešení lze spojovat v bodě $x = 0$. Závěr:
<u>řešení pro $y \in (2k\pi; \pi + 2k\pi)$</u>, ve vzorcích $c, d \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = \begin{cases} \arcsin\frac{1}{1-c|x|} + 2k\pi, & x \in (-\infty; 0] \\ \arcsin\frac{1}{1-d|x|} + 2k\pi, & x \in [0; +\infty) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \arcsin\frac{1}{1-c|x|} + 2k\pi, & x \in (-\infty; 0] \\ \pi - \arcsin\frac{1}{1-d|x|} + 2k\pi, & x \in [0; +\infty) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \pi - \arcsin\frac{1}{1-c|x|} + 2k\pi, & x \in (-\infty; 0] \\ \arcsin\frac{1}{1-d|x|} + 2k\pi, & x \in [0; +\infty) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \pi - \arcsin\frac{1}{1-c|x|} + 2k\pi, & x \in (-\infty; 0] \\ \pi - \arcsin\frac{1}{1-d|x|} + 2k\pi, & x \in [0; +\infty) \end{cases}$$

<u>stacionární řešení</u>

$$y(x) = k\pi,\ x \in \mathbb{R}$$

řešení pro $y \in (\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi)$, ve vzorcích $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$y(x) = \arcsin \frac{1}{1 - c|x|} + (2k+2)\pi,\ x \in (-\infty; -\frac{2}{c})$$
$$y(x) = \arcsin \frac{1}{1 - c|x|} + (2k+2)\pi,\ x \in (\frac{2}{c}; +\infty)$$
$$y(x) = \pi - \arcsin \frac{1}{1 - c|x|} + (2k+2)\pi,\ x \in (-\infty; -\frac{2}{c})$$
$$y(x) = \pi - \arcsin \frac{1}{1 - c|x|} + (2k+2)\pi,\ x \in (\frac{2}{c}; +\infty)$$

Ve všech vzorcích platí $k \in \mathbb{Z}$.

35) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, po úpravě řešíme rovnici $(b+1)xy' = y - b$. Pro $b = -1$ řešení $y = -1$ nesplňuje počáteční podmínku. Řešíme pro $b \neq -1$. Stacionární řešení $y = b$ splní počáteční podmínku pro $b = 1$. Pro $b \neq \pm 1$ řešíme na intervalech $y \in (-\infty; b)$, $y \in (b; +\infty)$. Po integraci: $(b+1)\ln(|y - b|) = ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $|y - b| = k \exp\left(\frac{\ln(x)}{b+1}\right)$, kde $k = e^c$. Dosazením počáteční podmínky $y(1) = 1$ dostaneme $|1 - b| = k$. Řešení pro $y < b$: $y = b - |b-1| \exp\left(\frac{ln(|x|)}{b+1}\right)$ a pro $y > b$: $y = b + |b-1| \exp\left(\frac{ln(|x|)}{b+1}\right)$. Závěr:

$$\begin{array}{lll}
\text{pro } b \in (-\infty; -1): & y(x) = b + (1-b)\exp\left(\frac{\ln(x)}{b+1}\right), & x \in (0; +\infty) \\
\text{pro } b \in \{-1\}: & \text{nemá řešení} & \\
\text{pro } b \in (-1; +\infty): & y(x) = \begin{cases} \left\{\begin{array}{l} b - (b-1)\exp\left(\frac{\ln(-x)}{b+1}\right), \\ b, \\ b + (b-1)\exp\left(\frac{\ln(-x)}{b+1}\right), \end{array}\right\} & x \in (-\infty; 0) \\ b, & x \in \{b\} \\ b + (1-b)\exp\left(\frac{\ln(x)}{b+1}\right), & x \in (0; +\infty) \end{cases} &
\end{array}$$

36) Má smysl pro $x \in (-\infty; 0)$ a pro $x \in (0; +\infty)$. Stacionární řešení $y = 0$ vyhovuje zadání. Řešíme pro $y \in (-\infty; 0)$ a pro $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} - c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravě: $y = \frac{x}{cx+1}$. Omezená řešení jsou:

$$y(x) = \frac{x}{cx+1}, \quad \begin{cases} x \in (-\infty; 0) & \text{pro } c \in (-\infty; 0) \\ x \in (0; +\infty) & \text{pro } c \in (0; +\infty) \end{cases}$$
$$y(x) = 0, \quad \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \\ x \in (0; +\infty) \end{cases}$$

37) Nejprve vyřešíme diferenciální rovnici. Ta má smysl pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Řešíme tedy rovnici $y' \exp y = \cos x$, po integraci $\exp y = \sin x + c$, $c \in (-\infty; 1)$. Řešení $y(x) = \ln(\sin x + c)$. Určíme hodnotu konstanty c tak, abby definiční obor tohoto řešení bylo celé $\mathbb{R}$: Musí být $\sin x + c > 0$, odtud $c > -\sin x = \sin(-x) \forall x \in \mathbb{R}$. Tedy $c > 1$. Protože pravá strana rovnice je funkce, která je v každém bodě lokálně lipschitzovská vzhledem k proměnné y (neboť je třídy $\mathcal{C}^\infty \subseteq \mathcal{C}^1$), tak každým bodem roviny $\mathbb{R}^2$ prochází právě jedno řešení. Proto hledanou množinou je množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \exp y - \sin x > 1\}$ (jsou to body roviny ležící nad grafem funkce $y = \ln(1 + \sin x)$).

38) Z příkladu 28 víme, že všechna maximální řešení rovnice mají tvar $y(x) = k\pi + \operatorname{arctg}(d(e^x - 2)^3)$, kde $x \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{Z}$. Všechna jsou tedy definována na okolí plus i minus nekonečna. Počítejme: $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = k\pi + \operatorname{arctg}(-8d)$ a $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = k\pi + (\operatorname{sgn} d)\frac{\pi}{2}$. Položíme-li $\lim_{x \to -\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} y(x)$, máme $k\pi + \operatorname{arctg}(-8d) = k\pi + (\operatorname{sgn} d)\frac{\pi}{2}$. Protože $\forall d \in \mathbb{R}$ $\operatorname{arctg}(-8d) \notin \{\pm\frac{\pi}{2}\}$, dostáváme odtud $\operatorname{sgn} d = d = 0$. Tedy $\lim_{x \to -\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} y(x) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Závěr: $A \in \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

39) Pokud $x \mapsto y(x)$ je řešení procházející bodem (x_0, y_0), pak funkce y splňuje rovnici z bodů 4 postupu řešení, tj. $G(y(x)) = F(x) + c$, kde $c = G(y_0) - F(x_0)$. Protože G jako funkce zobrazující okolí y na okolí x je prostá, lze ji invertovat a tedy

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + G(y_0) - F(x_0)).$$

Řešení je tedy na okolí bodu určeno jednoznačně. (rozmyslete si detaily uvedeného postupu)

Homogenní rovnice

Uvažujme rovnici

$$y' = f(x, y), \tag{4}$$

kde

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)\,, \qquad \forall \lambda \neq 0\,.$$

Tato rovnice se nazývá *homogenní rovnice 1. řádu*. Ukážeme, že tuto rovnici lze převést substitucí na rovnici se separovanými proměnnými.

Postup řešení. Pozorujeme, že (pro $x \neq 0$) je

$$f(x, y) = f(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x})\,,$$

tj. pravá strana rovnice závisí pouze na y/x.

Definujeme tedy $z(x) = y(x)/x$, takže

$$\begin{aligned} y(x) &= xz(x)\,, \\ y'(x) &= xz'(x) + z(x)\,. \end{aligned}$$

Rovnice přechází na $xz' + z = f(x, xz) = f(1, z)$, tj.

$$z' = \frac{1}{x}\big[f(1, z) - z\big], \tag{5}$$

což je rovnice se *separovanými proměnnými* (pro neznámou funkci $z = z(x)$). Standarním postupem najdeme $z(x)$ a tedy $y(x) = xz(x)$.

Poznámka. Uvědomme si, že je-li z řešení rovnice (5) na nějakém podintervalu $(0, +\infty)$, nebo $(-\infty, 0)$, pak je $y := z \cdot x$ řešením rovnice (4) na stejném intervalu. Platí i opačná implikace. Protože jsme pro účely výpočtu řešení museli vyloučit případ $x = 0$, je v konkrétních případech potřeba na závěr ověřit, zda nalezná řešení můžeme prodloužit až do počátku.

Příklad 3. Řešme rovnici $x^2y' + xy = x^2 + y^2$.

Řešení. Pro $x \neq 0$ rovnici přepíšeme do tvaru

$$y' = \frac{-xy + x^2 + y^2}{x^2}\,,$$

jedná se tedy o homogenní rovnici 1. řádu. Substituce $y(x) = xz(x)$ dává

$$\begin{aligned} xz' + z &= -z + 1 + z^2\,, \\ xz' &= (z - 1)^2\,. \end{aligned}$$

To je rovnice se separovanými proměnnými. Zjevně $z \equiv 1$ je řešení, tj. $y(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ je řešení původní rovnice.

Hledejme řešení za podmínky $z \neq 1$, $x \neq 0$. Tedy

$$-\frac{z'}{(z-1)^2} = -\frac{1}{x}$$

a integrací dostáváme

$$\frac{1}{z-1} = c - \ln|x|\,.$$

Pro $I = (0, +\infty)$, $J = (1, +\infty)$ zobrazuje funkce na levé straně interval J na $(0, +\infty)$. Tedy $c - \ln x \in (0, +\infty)$ a zároveň $x \in (0, +\infty)$, což nám dává

$x \in (0, e^c)$. Pro $I = (-\infty, 0)$ dostáváme $x \in (-e^c, 0)$. Na těchto intervalech je řešení dáno předpisem

$$z(x) = \frac{c + 1 - \ln|x|}{c - \ln|x|}, \qquad y(x) = x\frac{c + 1 - \ln|x|}{c - \ln|x|}. \tag{6}$$

Podobně pro $J = (1, +\infty)$ a $I = (0, +\infty)$, resp. $I = (-\infty, 0)$, zobrazuje funkce G interval J na $(-\infty, 0)$. Máme tedy $c - \ln|x| \in (-\infty, 0)$ a zároveň $x > 0$, resp. $x < 0$. Odtud dostáváme řešení na intervalech $(-\infty, -e^c)$, resp. $(e^c, +\infty)$ definovaná opět předpisem (6).

Jsou tato řešení maximální? Protože limity řešení v bodech $\pm e^c$ zprava a zleva nejsou vlastní, jistě řešení nepůjdou prodloužit tímto směrem. Zbývá vyšetřit prodloužení do počátku. Protože

$$\lim_{x\to 0} y(x) = 0$$

a po dodefinování $y(0) := 0$ je

$$y'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{y(x) - y(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{c + 1 - \ln|x|}{c - \ln|x|} = 1\,,$$

snadno dosazením ověříme, že v bodě $x = 0$ je rovnice splněna. Dodefinovaná funkce je tedy řešením na celém intervalu $(-e^c, e^c)$.

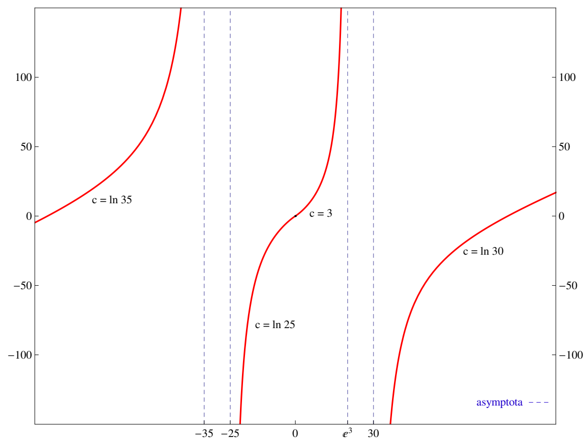
Všimněte si, že všechna tato řešení procházejí počátkem a mají zde stejnou derivaci. Můžeme je tedy vzájemně napojovat. Takovéto singulární chování je pro homogenní rovnice typické!

Všechna maximální řešení rovnice tedy jsou:

$$y(x) = \begin{cases} x\frac{c+1-\ln|x|}{c-\ln|x|}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x\frac{d+1-\ln|x|}{d-\ln|x|}, & x < 0, \end{cases}$$

c, $d \in (-\infty, +\infty]$ (kde pro $c = \infty$ máme na mysli limitní případ $y(x) = x \cdot 1$) a

$$y(x) = x\frac{c + 1 - \ln|x|}{c - \ln|x|}, x \in (-\infty, -e^c),\ \text{resp. } x \in (e^c, +\infty).$$



Příklad 4. Řešte rovnici $y' = \frac{y-x}{y+x}$.

Řešení. Substituce $y = xz$ vede na

$$xz' + z = \frac{z-1}{z+1}$$
$$z' = -\frac{1}{x} \cdot \frac{z^2+1}{z+1}$$

Vidíme, že neexistují stacionární řešení a řešení budeme hledat na intervalech $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, +\infty)$ a pro z: $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, +\infty)$. Po vydělení $g(z)$ a zintegrování máme

$$\ln\sqrt{z^2+1} + \operatorname{arctg} z = c - \ln|x|. \tag{7}$$

Funkci na levé straně rovnice si označme G. Tuto funkci neumíme zinvertovat (z se nám z rovnice nepovede vyjádřit), nicméně víme, že funkce G je pro $z < -1$ klesající a pro $z > -1$ rostoucí a zobrazuje tedy $(-\infty, -1)$ prostě na $(\ln\sqrt{2} - \pi/4, +\infty)$ a interval $(-1, +\infty)$ prostě tamtéž. Máme tedy

$$\ln|x| \in (-\infty, c + \pi/4 - \ln\sqrt{2})$$

nebo-li

$$x \in (0, e^{c+\pi/4-\ln\sqrt{2}}), \quad \text{resp. } x \in (-e^{c+\pi/4-\ln\sqrt{2}}, 0).$$

Řešení z je tedy dáno implicitním vztahem (7) a je definováno na jednom z výše uvedených intervalů. Konkrétněji řešení na prvním intervalu je dáno vztahem

$$\ln\sqrt{z^2+1} + \operatorname{arctg} z = c - \ln x\,, \quad \text{tj.} \quad \sqrt{z^2+1}\cdot e^{\operatorname{arctg} z} = \frac{e^c}{x}$$

a řešení na druhém intervalu

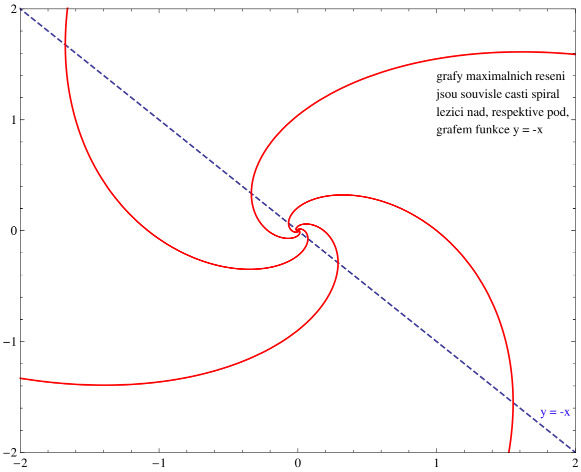
$$\ln\sqrt{z^2+1}+\operatorname{arctg} z = c-\ln(-x)\,, \quad \text{tj.} \quad \sqrt{z^2+1}\cdot e^{\operatorname{arctg} z} = -\frac{e^c}{x}$$

Dosadíme $z = y/x$, násobíme obě strany $|x|$ a máme implicitně zadaná řešení y

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot e^{\operatorname{arctg} y/x} = e^c\,, c\in\mathbb{R}$$

definovaná na výše uvedených intervalech.

Jsou tato řešení maximální? Pro $x\to 0+$, $y>0$ máme $y\to e^{c_1-\pi/2}$ a $x\to 0-$, $y>0$ máme $y\to e^{c_2+\pi/2}$, můžeme tedy napojit, pokud $c_1 = c_2+\pi$ a získáme řešení na $(-e^{c_2+\pi+\pi/4-\ln\sqrt{2}}, e^{c_2+\pi/4-\ln\sqrt{2}})$. V krajních bodech tohoto intervalu máme $z\to -1$, tj. $y\to -x$. Po dodefinování limitou nebude tedy mít původní rovnice smysl. Nalezená řešení jsou tedy maximální. Že jsou všechna plyne opět z věty o jednoznačnosti a z toho, že každým bodem roviny prochází některé z nalezených řešení (to je vidět z následující poznámky).



Poznámka. Řešení předcházející úlohy můžeme elegantně vyjádřit v polárních souřadnicích $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ ($r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\phi = \operatorname{arctg} y/x + k\pi$). Řešením úlohy jsou části spirál $r = de^{-\phi}$. Více o substitucích v diferenciálních rovnicích se dozvíte v kapitole o nelineárních systémech.

Příklad 5. Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = e^{y/x}+y/x.$$

Řešení. Substitucí $y = x\cdot z$ převedeme na

$$e^{-z}z' = 1/x.$$

Pro $x \in (-\infty, 0)$, resp. $(0, +\infty)$ a $z \in \mathbb{R}$ integrací dostaneme

$$-e^{-z} = \ln|x| + c.$$

Funkce na levé straně zobrazuje interval $\mathbb{R}$ na interval $(-\infty, 0)$, tj.

$$\ln|x| + c < 0.$$

Odtud

$$|x| < e^{-c},$$

tedy

$$x \in (0, e^{-c}), \quad \text{resp.} \quad x \in (-e^{-c}, 0).$$

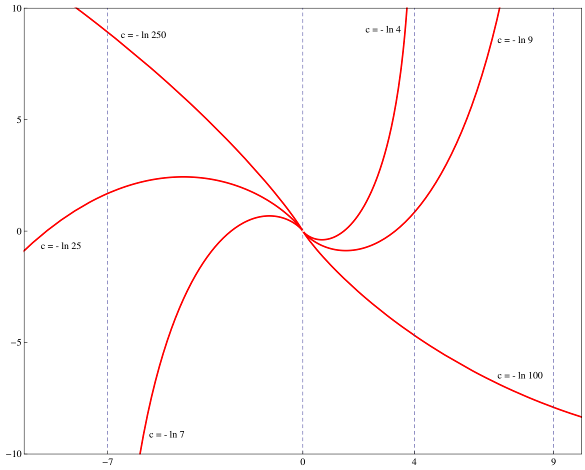
Ze vztahu mezi x a z dostáváme

$$z(x) = -\ln(-\ln|x| - c)$$

a

$$y(x) = -x\ln(-\ln|x| - c)$$

na výše uvedených intervalech. Tato řešení jsou maximální, protože pro $x = 0$ nemá původní rovnice smysl a v bodech $\pm e^{-c}$ má řešení nevlastní limitu. Řešení jsou všechna, protože vyplní celou množinu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\}$.



Úlohy

40. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$

41. $x^2y' + xy = 2y^2$

42. $x^2y' = y^2 + 2xy$

43. $xy' = y(1 + \ln\frac{y}{x})$

44. $xy + x^2 = x^2y'$

45. $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$

46. (zpracovano DP) $xyy' = y^2 - x^2$

47. $xy' = x - y$

48. $xy' = y - x$

49. $xy' = -(x + y)$

50. $x^2y' = y(x - y)$

51. $2xyy' = x^2 + y^2$

52. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

53. $2xyy' = 3y^2 - x^2$

54. $2\sqrt{xy} - y = -xy'$

55. * $y^2 + x^2y' = xyy'$

56. * $(x^2 - y^2)y' = 2xy$

57. * $(4y^2 + 3xy + x^2)y' = -(y^2 + 3xy + 4x^2)$

58. * $(y^2 - 3x^2)y' + 2xy = 0$

59. * $xy' = \frac{x^2+y^2}{x+y}$ $xy' = \frac{x^2+y^2}{x+y}$

60. * $x + 2y + yy' = 0$

61. * $(x^3 + y^3)y' = x^2y$

62. * $y' = \frac{y-2x}{x+2y}$

63. * $y' = \frac{x+2y}{x}$

64. * $y' = \frac{y}{x}\cos\left(\ln\frac{y}{x}\right)$

65. * $y' = \frac{y+\sqrt{xy}}{x}$

66. * $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$

Řešení

40) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě řešíme rovnici $xz' = \frac{z-z^3}{1+z^2}$. Stacionární řešení $z = 0$ a $z = 1$. Pro $z \notin \{0;1\}$ a $x \neq 1$ máme $z'\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) = \frac{1}{x}$. Po integraci $\ln(|\frac{z}{z^2-1}|) = \ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravě dostaneme $z = \frac{1\pm\sqrt{1+4k^2x^2}}{2kx}$, kde $k = \pm e^c$. Protože $y = xz$, dostáváme závěr:

$$y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$$
$$y(x) = x, x \in \mathbb{R}$$
$$y(x) = \frac{1}{2c}\left(1 \pm \sqrt{1 + 4c^2x^2}\right), x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

41) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě řešíme rovnici $xz' = 2(z^2 - z)$. Stacionární řešení $z = 0$ a $z = 1$. Pro $z \notin \{0; 1\}$ a $x \neq 0$ máme $z'\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{x}$. Po integraci a úpravě $\ln(|\frac{z}{z-1}|) = 2\ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud dostáváme $z = \frac{kx^2}{kx^2-1}$, kde $k = \pm e^c$. Protože $y = xz$, dostaváme závěr:

$$
\begin{aligned}
&y(x) = 0, x \in \mathbb{R} \\
&y(x) = x, x \in \mathbb{R} \\
&y(x) = \frac{cx^3}{cx^2 - 1}, \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & c \in (-\infty; 0) \\ x \in (-\infty; -\frac{1}{\sqrt{c}}), & c \in (0; +\infty) \\ x \in (-\frac{1}{\sqrt{c}}; \frac{1}{\sqrt{c}}), & c \in (0; +\infty) \\ x \in (\frac{1}{\sqrt{c}}; +\infty), & c \in (0; +\infty) \end{cases}
\end{aligned}
$$

42) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě řešíme rovnici $xz' = z(z+1)$. Stacionární řešení $z = 0$ a $z = -1$. Pro $z \notin \{-1; 0\}$ a $x \neq 0$ máme $z'\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) = \frac{1}{x}$. Po integraci a úpravě dostáváme $z = (z+1)cx$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vynásobením x a dosazením $y = xz$ převedeme rovnici na tvar $y = cxy + cx^2$. Odtud vypočteme $y = \frac{x^2}{d-x}$, kde $d = \frac{1}{c}$ pro $c \neq 0$, resp. $y \equiv 0$ pro $c = 0$. Závěr po napojení řešení v $x = 0$:

<u>první řešení</u>

$$y(x) = -x, y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$$

<u>druhé řešení</u>

$$y(x) = \frac{x^2}{c - x}, x \in (-\infty; c) \text{ pro } c \in (-\infty; 0) \text{ a } x \in (c; +\infty) \text{ pro } c \in (0; +\infty)$$

<u>třetí řešení</u>

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{c - x}, x \in (-\infty; 0] \text{ pro } c \in (0; +\infty) \text{ nebo } x \in (c; 0] \text{ pro } c \in (-\infty; 0) \\ \\ \dfrac{x^2}{d - x}, x \in [0; +\infty) \text{ pro } d \in (-\infty; 0) \text{ nebo } x \in [0; d) \text{ pro } d \in (0; +\infty) \end{cases}$$

43) Řešíme pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \cdot y > 0$. Po substituci a úpravě řešíme rovnici $xz' = z\ln(z)$ pro $z \in (0; +\infty)$. Stacionární řešení $z = 0$ a $z = 1$. Po integraci $\ln\big(|\ln(z)|\big) = \ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Tedy $z = \exp(dx)$, kde $d = \pm e^c$. Řešení nelze napojovat. Celkem tedy dostáváme:

$$y(x) = x\exp(cx), x \in (-\infty; 0) \text{ nebo } x \in (0; +\infty), c \in \mathbb{R}$$

44) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě řešíme rovnici $xz' = 1$. Po integraci $z = c + \ln|x|$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $y = x(c + \ln|x|)$. Protože $\lim_{x\to 0} y(x) = 0$, ale $y'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{y(x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}(c + \ln|x|) = -\infty$, nelze řešení spojit v počátku. Závěr: $y(x) = x(\ln|x| + c)$, $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (0; +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$. (Lze řešit také jako lineární rovnici.)

45) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě řešíme rovnici $2xzz' = -(z^2 + 1)$. Po integraci $\ln(1 + z^2) = c - \ln(|x|)$, $c \in \mathbb{R}$. Tedy $x^2 + y^2 = 2kx$, kde $k = \pm e^c$. Závěr:

$$y(x) = \pm\sqrt{c^2 - (x - c)^2}, x \in (2c; 0) \text{ pro } c \in (-\infty; 0) \text{ a } x \in (0; 2c) \text{ pro } c \in (0; +\infty)$$

(Lze řešit také jako Bernoulliho rovnici.)

46) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě pro $x \neq 0$ dostaneme rovnici $2zz' = -\frac{2}{x}$, po integraci $z^2 = c - \ln(x^2)$, $c \in \mathbb{R}$. Nelze napojovat. Závěr:

$$y(x) = \pm x\sqrt{c - \ln(x^2)}, x \in (-\exp(\tfrac{c}{2}); 0) \text{ nebo } x \in (0; \exp(\frac{c}{2})), c \in \mathbb{R}$$

(Lze řešit také jako Bernoulliho rovnici.)

47) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě $x^2z' = x(1 - 2z)$. Stacionární řešení $z = \frac{1}{2}$. Pro $z \neq \frac{1}{2}$ a $x \neq 0$ řešíme rovnici $\frac{z'}{1-2z} = \frac{1}{x}$. Po integraci $-\frac{1}{2}\ln(|1 - 2z|) = \ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravě $y = \frac{x}{2} + \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}$. Závěr:

$$y(x) = \frac{x}{2} + \frac{c}{x}, x \in (-\infty; 0) \text{ nebo } x \in (0; +\infty) \text{ pro } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y(x) = \frac{x}{2}, x \in \mathbb{R}$$

(Lze řešit také jako lineární rovnici.)

48) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě $x^2z' = -x$. Pro $x \neq 0$ řešíme rovnici $z' = -\frac{1}{x}$, která po integraci přejde v $z = -\ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Závěr:

$$y(x) = -x\ln|x| + cx, x \in (-\infty; 0) \text{ nebo } x \in (0; +\infty), c \in \mathbb{R}$$

(Lze řešit také jako lineární rovnici.)

49) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě $x^2z' = -x(2z+1)$. Pro $x \neq 0$ řešíme rovnici $\frac{-z'}{2z+1} = \frac{1}{x}$. Po integraci $-\frac{1}{2}\ln(|2z+1|) = ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravě $y = -\frac{x}{2} + \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}$. Závěr:

$$y(x) = \frac{c}{x} - \frac{x}{2}, x \in (-\infty; 0) \text{ nebo } x \in (0; +\infty), c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y(x) = -\frac{x}{2}, x \in \mathbb{R}$$

50) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a pro $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě pro $x \neq 0$ řešíme rovnici $xz' = -z^2$. Stacionární řešení $z = 0$. Pro $z \neq 0$ máme $\frac{-z}{z^2} = \frac{1}{x}$. Po integraci $\frac{1}{z} = \ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $z = \frac{1}{\ln(|kx|)}$, kde $c = \ln(k)$, $k > 0$, a dále $y = xz = \frac{x}{\ln(|kx|)}$. Řešení lze napojit v bodě $x = 0$. Závěr:

$$y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{x}{\ln(|cx|)}, x \in (-\infty; -\tfrac{1}{c}) \text{ nebo } x \in (\tfrac{1}{c}; +\infty), c \in (0; +\infty)$$

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln|cx|}, & x \in (-\frac{1}{c}; 0], c \in (0; +\infty) \\[2ex] \dfrac{x}{\ln(|dx|)}, & x \in [0; \frac{1}{d}), d \in (0; +\infty) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0] \\[2ex] \dfrac{x}{\ln(|cx|)}, & x \in [0; \frac{1}{c}), c \in (0; +\infty) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln|cx|}, & x \in (-\frac{1}{c}; 0], c \in (0; +\infty) \\[2ex] 0 \end{cases}$$

51) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě $2x^3zz' = x^2(1-z^2)$. Stacionární řešení $z = \pm 1$. Pro $z \notin \{-1; 1\}$ a $x \neq 0$ máme $-z'\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right) = \frac{1}{x} + c$. Po itegraci a úpravě $\ln(|1-z^2|) = -\ln(|x|) - c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravě a uvážení, že $y = xz$ dostáváme závěr:

$$y(x) = \pm x, x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \pm x\sqrt{1 + \frac{c}{x}}, x \in (-\infty; \min(0; -c)) \text{ nebo } x \in (\max(0; -c); +\infty), c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

52) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě $x^2 z' = |x|\sqrt{1+z^2}$. Pro $x \neq 0$ máme $\frac{z'}{1+z^2} = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{x}$. Po integraci $\operatorname{sgn}(z)\ln\left(|z| + \sqrt{z^2+1}\right) = \operatorname{sgn}(x)\ln(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Označíme-li $k = e^c$, potom $k > 0$ a pro $x > 0$ dostaneme $z = \frac{k^2x^2-1}{2kx}$ a pro $x < 0$ dostaneme $z = \frac{x^2-k^2}{2kx} = \frac{p^2x^2-1}{2px}$, kde $p = \frac{1}{k}$. Řešení lze napojit v bodě $x = 0$. Závěr:

$$y(x) = \frac{c^2x^2-1}{2c} = \frac{c}{2}x^2 - \frac{1}{2c}, x \in \mathbb{R}, c \in (0; +\infty)$$

53) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě pro $x \neq 0$ dostaneme rovnici $2xzz' = z^2 - 1$. Staconární řešení $z = \pm 1$. Pro $z \notin \{-1; 1\}$ a $x \neq 0$ přejde rovnice po integraci na tvar $\ln(|z^2 - 1|) = \ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Řešení jdou napojovat pro $x = 0$. Závěr:

$$y(x) = \pm x\sqrt{cx+1}, \begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{1}{c}) & \text{pro } c \in (-\infty; 0) \\ x \in \mathbb{R} & \text{pro } c \in \{0\} \\ x \in (-\frac{1}{c}; +\infty) & \text{pro } c \in (0; +\infty) \end{cases}$$

54) Řešíme pro taková $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$, pro která $x \cdot y \geq 0$. Stacionární řešení $y = 0$. Po substituci $2|x|\sqrt{z} = -x^2 z$. Pro $z \neq 0$ a $x \neq 0$ řešíme rovnici $\frac{z'}{2z} = -\frac{\operatorname{sgn}(x)}{x}$. Po integraci $\frac{1}{2}\ln(|z|) = -\operatorname{sgn}(x)\ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Tedy $z = (c - \operatorname{sgn}(x)\ln(|x|))^2$, neboť $x \cdot y \geq 0 \Rightarrow z > 0 \Rightarrow |z| = z$. Označme $c\operatorname{sgn}(x) = \ln(k)$ pro $k > 0$. Potom $z = (\ln(\frac{k}{|x|}))^2$. Řešení lze napojit se stacionárním v bodě $|x| = k$. Závěr:

$$y(x) = \begin{cases} x\ln^2(cx), & x \in (-\infty; \frac{1}{c}] \\ 0, & x \in [\frac{1}{c}; +\infty) \end{cases}$$

pro $c \in (-\infty; 0)$

$$y(x) = \begin{cases} x\ln^2(cx), & x \in (0; \frac{1}{c}] \\ 0, & x \in [\frac{1}{c}; +\infty) \end{cases}$$

pro $c \in (0; +\infty)$

55) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Substitucí $y = xz$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $x^3(z-1)z' = x^2 z$. Stacionární řešení $z = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme pro $x \neq 0$ a $z \neq 0$. Po integraci $z - \ln|z| = c + \ln|x|$, $c \in \mathbb{R}$. Pro $z \in (-\infty; 0)$ je $z - \ln|z| \in (-\infty; +\infty)$, tedy $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$, pro $z \in (0; +\infty)$ je $z - \ln|z| \in [1; +\infty)$, tedy $x \in (-\infty; -e^{1-c})$ nebo $x \in (e^{1-c}; +\infty)$. Po zpětné substituci $z = \frac{y}{x}$ a drobné úpravě dostáváme závěrečný implicitní vztah $y = x(c + \ln|y|)$, $c \in \mathbb{R}$, který určuje řešení pro

$x \in (-\infty; 0)$, pro $x \in (0; +\infty)$, pro $x \in (-\infty; -e^{1-c})$ a pro $x \in (e^{1-c}; +\infty)$. Dále máme stacionární řešení $y(x) = 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$ a pro $x \in (0; +\infty)$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-\infty; 0)$ leží ve druhém kvadrantu, neboť v tomto případě je $z \in (-\infty; 0)$, a tedy $0 < xz < +\infty$. Graf řešení definovaného na intervalu $(0; +\infty)$ leží ve čtvrtém kvadrantu, neboť v tomto případě je $z \in (-\infty; 0)$, a tedy $-\infty < xz < 0$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-\infty; -e^{1-c})$ leží ve třetím kvadrantu, neboť v tomto případě je $z \in (0; +\infty)$, a tedy $-\infty < xz < 0$. Graf řešení definovaného na intervalu $(e^{1-c}; +\infty)$ leží v prvním kvadrantu, neboť v tomto případě je $z \in (0; +\infty)$, a tedy $0 < xz < +\infty$. Ze vztahu $z - \ln|z| = c + \ln|x|$ lze pro $x \to 0$ usoudit, že $z - \ln|z| \to -\infty$, odkud $z \to -\infty$. Pro řešení definované na intervalu $(-\infty; 0)$ nebo na intervalu $(0; +\infty)$ usoudíme ze vztahu $z = c + \ln|y|$ pro $x \to 0$ (zleva, resp. zprava, podle toho, zda je řešení definováno pro $x < 0$, resp. $x > 0$), že $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$, a dále $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} z(x) = -\infty$, tedy řešení ze druhého kvadrantu nejde spojit s řešením ze čtvrtého kvadrantu (v bodě $x = 0$ by nebyla vlastní derivace). Pro řešení definované na intervalu $(-\infty; -e^{1-c})$, resp. $(e^{1-c}; +\infty)$ můžeme do vztahu $z - \ln|z| = c + \ln|x|$ za x dosadit hodnotu $x = \pm e^{1-z}$ a obdržíme $z - \ln|z| = 1$. Tato rovnice má pro $z \in (0; +\infty)$ jediné řešení $z = 1$. Můžeme tedy usoudit, že $\lim\limits_{x\to\pm e^{1-c}} y(x) = \lim\limits_{x\to\pm e^{1-c}} xz(x) = \pm e^{1-c}$, a dále $|y'(\pm e^{1-c})| = |\lim\limits_{x\to\pm e^{1-c}} \frac{y^2(x)}{xy(x)-x^2}| = |\lim\limits_{x\to\pm e^{1-c}} (\frac{y(x)}{x} \frac{y(x)}{y(x)-x})| = |\lim\limits_{x\to\pm e^{1-c}} (\frac{1}{z(x)} \frac{y(x)}{y(x)-x})| = +\infty$, tedy řešení mající graf ve třetím, rep. prvním kvadrantu nelze prodloužit za bod $x = -e^{1-c}$, resp. před bod $x = e^{1-c}$. Dostáváme tak maximální řešení určená implicitním vztahem definovaná na intervalu $(-\infty; 0)$, $(-\infty; -e^{1-c})$, $(0; +\infty)$ a $(e^{1-c}; +\infty)$ a dále stacionární řešení $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

56) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Substitucí $y = xz$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $x^3(1 - z^2)z' = z^3 + z$. Dále řešíme pro $x \neq 0$. Stacionární řešení $z = 0$ na $\mathbb{R}$. Pro $z \neq 0$ dostáváme $z'\left(\frac{1}{z} - \frac{2z}{1+z^2}\right) = \frac{1}{x}$. Po integraci $\ln|z| - \ln(z^2 + 1) = \ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $z = \frac{1\pm\sqrt{1-4k^2x^2}}{2kx}$, kde $k = e^c > 0$, a tedy $y = xz = \frac{1\pm\sqrt{1-4k^2x^2}}{2k}$. Závěr:

$$y(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4k^2x^2}}{2k},\ x \in (-\frac{1}{2k}; \frac{1}{2k})$$

57) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Substitucí $y = xz$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $x^3(4z^2+3z+1)z' = -4x^2(z^3+z^2+z+1)$. Dále řešíme pro $x \neq 0$. Stacionární řešení $z = -1$ na $\mathbb{R}$. Pro $z \neq -1$ dostáváme po dalších úpravách rovnici $z'\left(\frac{3z}{z^2+1} + \frac{1}{z+1}\right) = -\frac{4}{x}$. Po integraci a úpravě $\ln\sqrt{(z^2+1)^3(z+1)^2} = c - \ln(x^4)$, $c \in \mathbb{R}$. Pro $z \in (-\infty; 0)$ je $\ln\sqrt{(z^2+1)^3(z+1)^2} \in (-\infty; +\infty)$, tedy $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$, pro $z \in (0; +\infty)$ je $\ln\sqrt{(z^2+1)^3(z+1)^2} \in (-\infty; +\infty)$, tedy opět $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$.. Označíme-li $e^c = k > 0$, dostaneme rovnici $(z^2+1)^3(z+1)^2 = \frac{k^2}{x^8}$, kterou po přenásobení x^8 můžeme dále upravit na tvar $(x^2z^2+x^2)^3(xz+x)^2 = k^2$ Použijeme-li zpětně vztah $y = xz$, dostaneme po přeznačení $c = k^2$ závěrečný implicitní vztah $(y^2+x^2)^3(y+x)^2 = c$, $c \in [0; +\infty)$, který určuje řešení pro $(-\infty; 0)$ a pro $x \in (0; +\infty)$. Z tohoto vztahu však můžeme pro $x \to 0$ usoudit, že $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = \pm\sqrt[8]{c}$, a potom $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-(y^2(x)+3xy(x)+4x^2)}{4y^2(x)+3xy(x)+x^2} = -\frac{1}{4}$, tedy implicitní vztah $(y^2+x^2)^3(y+x)^2 = c$ určuje pro každé $c \in [0; +\infty)$ řešení definované na $\mathbb{R}$.

58) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Substitucí $y = xz$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $x^3z'(z^2-3) = x^2z(1-z^2)$. Dále řešíme pro $x \neq 0$. Stacionární řešení $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$ na $\mathbb{R}$. Pro $z \notin \{-1; 0; 1\}$ dostáváme po dalších úpravách rovnici $z'\left(\frac{-3}{z} + \frac{-1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right) = \frac{1}{x}$. Po integraci a úpravě $\ln|\frac{z^2-1}{z^3}| = \ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$, neboli označíme-li $e^c = k > 0$, potom dostaneme vztah $|\frac{z^2-1}{z^3}| = k|x|$. Pro $z \in (-\infty; -1)$ je $|\frac{z^2-1}{z^3}| \in (-\infty; \frac{2\sqrt{3}}{9}]$, tedy $x \in (-\frac{2\sqrt{3}}{9k}; 0)$ nebo $x \in (0; \frac{2\sqrt{3}}{9k})$, pro $z \in (-1; 0)$ je $|\frac{z^2-1}{z^3}| \in (-\infty; +\infty)$, tedy $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$, pro $z \in (0; 1)$ je $|\frac{z^2-1}{z^3}| \in (-\infty; +\infty)$, tedy $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$, a pro $z \in (1; +\infty)$ je $|\frac{z^2-1}{z^3}| \in (-\infty; \frac{2\sqrt{3}}{9}]$, tedy $x \in (-\frac{2\sqrt{3}}{9k}; 0)$ nebo $x \in (0; \frac{2\sqrt{3}}{9k})$. Po zpětné substituci $y = xz$ a přeznačení $c = k$ dostáváme závěrečný implicitní vztah $|\frac{y^2-x^2}{y^3}| = c$, $c \in [0; +\infty)$, který určuje řešení pro $x \in (-\infty; 0)$, pro $x \in (0; +\infty)$, pro $x \in (-\frac{2\sqrt{3}}{9c}; 0)$ a pro $x \in (0; \frac{2\sqrt{3}}{9c})$. (Uvažujeme-li dále výraz $\frac{2\sqrt{3}}{9c}$, mlčky předpokládáme $c > 0$. V případě c=0 tak máme jen řešení pro $x \in (-\infty; 0)$ a pro $x \in (0; +\infty)$) Dále máme stacionární řešení $y(x) = 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$ a pro $x \in (0; +\infty)$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-\infty; 0)$ leží ve druhém kvadrantu pro případ $z \in [-1; 0)$, neboť potom je $0 < xz \leq x$, a pro případ $z \in (0; 1]$ leží ve třetím kvadrantu, neboť potom je $-x \leq xz < 0$. Graf řešení definovaného na intervalu $(0; +\infty)$ leží v prvním kvarantu pro případ $z \in [-1; 0)$, neboť potom je $-x \leq xz < 0$, a pro případ $z \in (0; 1]$ leží ve čtvrtém kvadrantu, neboť potom je $0 < xz \leq x$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-\frac{2\sqrt{3}}{9c}; 0)$ leží ve druhém kvadrantu pro případ $z \in (-\infty; -1]$, neboť potom je $-x \leq xz < +\infty$, a pro případ $z \in [1; +\infty)$ leží ve třetím kvadrantu, neboť potom je $-\infty < xz \leq -x$. Graf řešení definovaného na intervalu $(0; \frac{2\sqrt{3}}{9c})$ leží ve čtvrtém kvadrantu pro případ $z \in (-\infty; -1]$, neboť potom je $-\infty < xz \leq -x$, a pro případ $z \in [1; +\infty)$ leží v prvním kvadrantu, neboť potom je

$x \leq xz < +\infty$. Máme tři typy řešení:
1) Libovolné řešení definované na intervalu $(-\infty; 0)$ nebo řešení definované na intervalu $(-\frac{2\sqrt{3}}{9c}; 0)$, pro které $\lim_{x\to 0-} y(x) = 0$ (tj. které je klesající), jehož graf leží ve druhém kvadrantu, lze spojit s libovolným řešením definovaným na intervalu $(0; +\infty)$ nebo s řešením definovaným na intervalu $(0; \frac{2\sqrt{3}}{9c})$, pro které $\lim_{x\to 0+} y(x) = 0$ (tj. které je klesající), jehož graf leží ve čtvrtém kvadrantu, přičemž dodefinujeme $y(0) = 0$. (Libovolností řešení máme na mysli, že pro $x < 0$ může být řešení určenou konstantou c_1, pro $x > 0$ může být určeno konstantou c_2, přičemž může být $c_1 \neq c_2$.) To lze, neboť v takovém případě ze vztahu $\ln|\frac{z^2-1}{z^3}| = \ln|x| + c$ pro $x \to 0$ plyne $\ln|\frac{z^2-1}{z^3}| \to -\infty$, odkud dostáváme $z \to -1$,a tedy potom $\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0} xz(x) = 0$. Navíc (bereme-li příslušné jednostranné derivace) $y'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to 0} z(x) = -1$, což souhlasí s tím, že spojujeme řešení z druhého kvadrantu se řešením ze čtvrtého kvadrantu. Obdobně se zdůvodní, že každé řešení definované na intervalu $(-\infty; 0)$ nebo řešení definované na intervalu $(-\frac{2\sqrt{3}}{9c}; 0)$, pro které $\lim_{x\to 0-} y(x) = 0$ (tj. které je rostoucí), jehož graf leží ve třetím kvadrantu, lze spojit s libovolným řešením definovaným na intervalu $(0; +\infty)$ nebo s řešením definovaným na intervalu $(0; \frac{2\sqrt{3}}{9c})$, pro které $\lim_{x\to 0+} y(x) = 0$ (tj. které je rostoucí), jehož graf leží v prvním kvadrantu, přičemž dodefinujeme $y(0) = 0$. Zdůvodnění se liší jen v tom, že ze znalosti $\ln|\frac{z^2-1}{z^3}| \to -\infty$ usoudíme $z \to 1$, což bude souhlasit s tím, že spojujeme řešení ze třetího kvadrantu se řešením z druhého kvadrantu. Tímto postupem dostáváme maximální řešení definovaná na intervalech $(-\infty; \frac{2\sqrt{3}}{9c})$, $(-\frac{2\sqrt{3}}{9c}; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$ a $(-\frac{2\sqrt{3}}{9c}; \frac{2\sqrt{3}}{9c})$.
2) Řešení definované na intervalu $(-\frac{2\sqrt{3}}{9c}; 0)$, jehož graf leží ve druhém kvadrantu (a které je rostoucí) lze spojit s řešením definovaným na intervalu $(0; \frac{2\sqrt{3}}{9c})$, jehož graf leží v prvním kvadrantu (a které je klesající), pokud je konstanta c různá od nuly a pro $x < 0$ stejná jako pro $c > 0$. V takovém případě totiž z podmínky $\ln|\frac{z^2-1}{z^3}| \to -\infty$ pro $x \to 0$ usoudíme, že $|z| \to +\infty$. Ze vztahu $|\frac{y^2-x^2}{y^3}| = c$ poté můžeme usoudit, že $\lim_{x\to 0} y(x) = \frac{1}{c}$, a z rovnice $y'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{2xy(x)}{3x^2-y^2(x)} = \frac{0}{1/c^2} = 0$. Proto dodefinujeme $y(0) = \frac{1}{c}$. Analogicky lze zdůvodnit, že řešení definované na intervalu $(-\frac{2\sqrt{3}}{9c}; 0)$, jehož graf leží ve třetím kvadrantu (a které je klesající) lze spojit s řešením definovaným na intervalu $(0; \frac{2\sqrt{3}}{9c})$, jehož graf leží ve čtvrtém kvadrantu (a které je rostoucí) (opět stejná nenulová konstanta c). Rozdíl bude jen takový, že ze vztahu $|\frac{y^2-x^2}{y^3}| = c$ usoudíme $\lim_{x\to 0} y(x) = -\frac{1}{c}$, a proto dodefinujeme $y(0) = -\frac{1}{c}$. Opět bude platit $y'(0) = 0$. Dostáváme tak maximální řešení definovaná na inter-

valu $(-\frac{2\sqrt{3}}{9c}; \frac{2\sqrt{3}}{9c})$.
3) Stacionární řešení $y(x) = 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$ spojíme v bodě $x = 0$ hodnotou $y(0) = 0$ se stacionárním řešením $y(x) = 0$ pro $x \in (0; +\infty)$. Dostaneme tak maximální řešení definované na $\mathbb{R}$. Jiné spojování řešení již možné není, protože ze vztahu $\ln|\frac{z^2-1}{z^3}| = \ln|x| + c$ dostáváme pro $x \to 0$, že $z \to a$, kde $a \in \{-\infty; -1; 1; +\infty\}$ a ze vztahu $|\frac{y^2-x^2}{y^3}| = c$ dostáváme pro $x \to 0$, že $y \to 0$ nebo $y \to \frac{1}{c}$, a všechny tyto možnosti jsme již probrali.
Poznámka: Body $x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{9c}$ odpovídají hodnotám $y = \pm\frac{2}{3c}$ které leží v množině $y^2 - 3x^2 = 0$, kde si rovnice vynucuje $|y'(x)| = +\infty$.

59) Řešíme na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \neq 0\}$. Substitucí $y = xz$, $z \neq -1$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $x^2z'(z + 1) = x(1 - z)$. Rovnici řešíme pro $x \neq 0$ a bez podmínky $z \neq -1$, kterou budeme v průběhu řešení používat nebo nepoužívat dle potřeby. Stacionární řešení $z = 1$ na $\mathbb{R}$. Po úpravě pro $z \neq 1$ máme $z'\left(1 + \frac{2}{z-1}\right) = -\frac{1}{x}$. Po integraci $z + 2\ln|z - 1| = c - \ln|x|$, $c \in \mathbb{R}$. Pro $z \in (-\infty; 1) \setminus \{-1\}$ je $z + 2\ln|z - 1| \in (-\infty; \ln\frac{4}{e})$, tedy $x \in (-\infty; -\frac{1}{4}e^{c+1})$ nebo $x \in (\frac{1}{4}e^{c+1}; +\infty)$, a pro $z \in (1; +\infty)$ je $z + 2\ln|z - 1| \in (-\infty; +\infty)$, tedy $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$. Po úpravě vztahu máme $z + 2\ln|xz - x| = c + \ln|x|$. Dosadíme-li $z = \frac{y}{x}$, dostaneme po drobné úpravě závěrečný implicitní vztah $y + 2x\ln|y - x| = x\ln|x| + cx$, který určuje řešení pro $x \in (-\infty; 0)$, pro $x \in (-\infty; -\frac{1}{4}e^{c+1})$, pro $x \in (0; +\infty)$ a pro $x \in (\frac{1}{4}e^{c+1}; +\infty)$. Dále máme řešení $y(x) = x$ pro $x \in (-\infty; 0)$ a pro $x \in (0; +\infty)$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-\infty; 0)$ leží ve třetím kvadrantu, neboť v tomto případě $z \in (1; +\infty)$, a tedy $-\infty < xz < -x$. Graf řešení definovaného na intervalu $(0; +\infty)$ leží v prvním kvadrantu, neboť v tomto případě $z \in (1; +\infty)$, a tedy $-x < xz < +\infty$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-\infty; -\frac{1}{4}e^{c+1})$ leží ve druhém kvadrantu a ve třetím kvadrantu, neboť v tomto případě $z \in (-\infty; 1)$, a tedy $x < xz < +\infty$. Graf řešení definovaného na intervalu $(\frac{1}{4}e^{c+1}; +\infty)$ leží v prvním kvadrantu a ve čtvrtém kvadrantu, neboť v tomto případě $z \in (-\infty; 1)$, a tedy $-\infty < xz < x$. Řešení definované na intervalu $(-\infty; 0)$, resp. na intervalu $(0; +\infty)$ nelze v bodě $x = 0$ navázat, neboť ze vztahu $z+2\ln|z-1| = c-\ln|x|$ pro $x \to 0$ dostáváme $z+2\ln|z-1| \to +\infty$, odkud můžeme usoudit, že $z \to +\infty$, a ze vztahu $z+2\ln|y-x| = \ln|x|+c$ máme $2\ln|y-x| = \ln|x|+c-z$, tedy pro $x \to 0$ dostáváme $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$. Potom ale $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} z(x) = +\infty$. Pro řešení definovaná na intervalu $(-\infty; -\frac{1}{4}e^{c+1})$, resp. $(\frac{1}{4}e^{c+1}; +\infty)$ můžeme ze vztahu $z+2\ln|z-1| = c - \ln|x|$ s vědomostí $z \in (-\infty; 1)$ usoudit, že $\lim\limits_{x\to 0} z(x) = -1$, což je ale vyloučená hodnota. Tedy maximální řešení jsou řešení určená implicitním vztahem definovaná na intervalech $(-\infty; 0)$, $(-\infty; -\frac{1}{4}e^{c+1})$, $(\frac{1}{4}e^{c+1}; +\infty)$ a

$(0;+\infty)$, a řešení $y(x) = x$, $x \in (-\infty;0)$ nebo $x \in (0;+\infty)$, které nejde v bodě $x = 0$ napojit, neboť máme prodmínku $x + y \neq 0$.

60) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Substitucí $y = xz$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $x^2zz' = -x(z+1)^2$. Dále řešíme pro $x \neq 0$. Stacionární řešení $z = -1$ na $\mathbb{R}$. Pro $z \neq -1$ dostáváme po dalších úpravách rovnici $z'\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2}\right) = -\frac{1}{x}$. Po integraci $\frac{1}{z+1} + \ln|z+1| = c - \ln|x|$, $c \in \mathbb{R}$. Pro $z \in (-\infty;-1)$ je $\frac{1}{z+1} + \ln|z+1| \in (-\infty;+\infty)$, tedy $x \in (-\infty;0)$ nebo $x \in (0;+\infty)$, a pro $z \in (-1;+\infty)$ je $\frac{1}{z+1} + \ln|z+1| \in [1;+\infty)$, tedy $x \in (-e^{c-1};0)$ nebo $x \in (0;e^{c-1})$. Použijeme-li zpětnou substituci $y = xz$, obdržíme závěrečný implicitní vztah $\frac{x}{x+y} + \ln|x+y| = c$, $c \in \mathbb{R}$, který určuje řešení pro $x \in (-\infty;0)$, pro $x \in (0;+\infty)$, pro $x \in (-e^{c-1};0)$ a pro $x \in (0;e^{c-1})$. Dále máme řešení $y(x) = -x$ pro $x \in (-\infty;0)$ a pro $x \in (0;+\infty)$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-\infty;0)$ leží ve druhém kvadrantu, neboť v tomto případě $z \in (-\infty;-1)$, a tedy $-x < zx < +\infty$. Graf řešení definovaného na intervalu $(0;+\infty)$ leží ve čtvrtém kvadrantu, neboť v tomto případě máme $z \in (-\infty;-1)$, a tedy $-\infty < xz < -x$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-e^{c-1};0)$ leží ve druhém kvadrantu a ve třetím kvadrantu, neboť v tomto případě $z \in (-1;+\infty)$, tedy $-\infty < xz < -x$. Graf řešení definovaného na intervalu $(0;e^{c-1})$ leží v prvním kvadrantu a ve čtvrtém kvadrantu, neboť v tomto případě $z \in (-1;+\infty)$, tedy $-x < xz < +\infty$. Máme dva typy řešení:

1) Libovolné řešení ze druhého kvadrantu (které je klesající), tj. řešení $y(x) = -x$ pro $x \in (-\infty;0)$ nebo implicitně určené řešení na intervalu $(-e^{c-1};0)$ můžeme spojit s libovolným řešením ze čtvrtého kvadrantu, tj. s řešením $y(x) = -x$ pro $x \in (0;+\infty)$ nebo s implicitně určeným řešením na intervalu $(0;e^{c-1})$, přičemž konstanta c pro $x < 0$ se může lišit od konstanty c pro $x > 0$. Ze vztahu $\frac{1}{z+1} + \ln|z+1| = c - \ln|x|$ usoudíme pro $x \to 0$, že $z \to -1+$, a ze vztahu $\frac{1}{z+1} + \ln|x+y| = c$ můžeme pro $x \to 0$ usoudit, že $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$. Dodefinujeme-li $y(0) = 0$, potom (bereme-li příslušné jednostranné derivace) $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} z(x) = -1$, což souhlasí s tím, že spojujeme řešení z druhého kvadrantu s řešením ze čtvrtého kvadrantu. Dostáváme tak maximální řešení definované na intervalu $(-\infty;e^{c-1})$, $(-e^{c-1};+\infty)$ a $(-e^{c-1},e^{c-1})$.

2) Řešení z prvního kvadrantu definované na intervalu $(0;e^{c-1})$ můžeme spojit s řešením z druhého kvadrantu definovaným na intervalu $(-\infty;0)$, pokud je v obou případech určeno stejnou hodnotou konstanty c. Ze vztahu $\frac{1}{z+1} + \ln|z+1| = c - \ln|x|$ nyní usoudíme pro $x \to 0$, že $|z| \to +\infty$, a ze vztahu $\frac{1}{z+1} + \ln|x+y| = c$ poté můžeme pro $x \to 0$ usoudit, že

$\lim\limits_{x\to 0} y(x) = e^c$. Dodefinujeme-li $y(0) = e^c$, potom (bereme-li příslušné jednostranné derivace) máme $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+2y(x)}{-y(x)} = \frac{2e^c}{-e^c} = -2$, což souhlasí s tím, že spojujeme klesající řešení. Analogicky lze zdůvodnit, že řešení ze třetího kvadrantu definované na intervalu $(-e^{c-1}; 0)$ můžeme spojit s řešením ze čtvrtého kvadrantu definovaného na intervalu $(0; +\infty)$, pokud je v obou případech určeno stejnou hodnotou konstanty c. Dodefinujeme $y(0) = -e^c$, a podle předchozího postupu nám vyjde $y'(0) = 2$, což souhlasí s tím, že spojujeme rostoucí řešení. Dostáváme tak maximální řešení definované na intervalu $(-\infty; e^{c-1})$ a $(-e^{c-1}; +\infty)$. Pro tato řešení platí: $\lim\limits_{x\to\pm e^{c-1}} y(x) = 0$, neboť ze vztahu $\frac{1}{z+1} + \ln|z+1| = c - \ln|x|$ pro $x \to \pm e^{c-1}$ plyne $\frac{1}{z+1} + \ln|z+1| \to 1$, což je pro $z \in (-1; +\infty)$ možné, jen pokud $z \to 0$, a odtud $\lim\limits_{x\to\pm e^{c-1}} y(x) = \lim\limits_{x\to\pm e^{c-1}} xz(x) = 0$. Potom ale $|y'(\pm e^{c-1})| = |\lim\limits_{x\to\pm e^{c-1}} \frac{x+2y(x)}{-y(x)}| = |\lim\limits_{x\to\pm e^{c-1}} (-\frac{x}{y(x)} - 2)| = +\infty$.

61) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Substitucí $y = xz$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $x^4(1+z^3)z' = -x^3z^4$. Dále řešíme pro $x \neq 0$. Stacionární řešení $z = 0$ na $\mathbb{R}$. Pro $z \neq 0$ dostáváme po dalších úpravách rovnici $z'\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^4}\right) = -\frac{1}{x}$. Po integraci $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} = c - \ln|x|$, $c \in \mathbb{R}$. Pro $z \in (-\infty; 0)$ je $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} \in [\frac{1}{3}; +\infty)$, tedy $x \in (-e^{c-\frac{1}{3}}; 0)$ nebo $x \in (0; e^{c-\frac{1}{3}})$, a pro $z \in (0; +\infty)$ je $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} \in \mathbb{R}$, tedy $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$. Po úpravě vztahu máme $\ln|xz| - \frac{x^3}{3(xz)^3} = c$. Použijeme-li zpětnou substituci $y = xz$, dostaneme závěrečný implicitní vztah $\ln|y| - \frac{x^3}{3y^3} = c$, $c \in \mathbb{R}$, který určuje řešení pro $x \in (-\infty; 0)$, pro $x \in (0; +\infty)$, pro $x \in (-e^{c-\frac{1}{3}}; 0)$ a pro $x \in (0; e^{c-\frac{1}{3}})$. Dále máme stacionární řešení $y(x) = 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$ a pro $x \in (0; +\infty)$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-\infty; 0)$ leží ve třetím kvadrantu, neboť v tomto případě je $z > 0$, tedy i $y < 0$. Graf řešení definovaného na intervalu $(0; +\infty)$ leží v prvním kvadrantu, neboť v tomto případě je $z > 0$, tedy i $y > 0$. Naopak grafy řešení definovaných na intervalu $(-e^{c-\frac{1}{3}}; 0)$ (resp. $(0; e^{c-\frac{1}{3}})$) leží ve druhém (resp. čtvrtém) kvadrantu, neboť v tomto případě je $z < 0$, a tedy $y > 0$ (resp. $y < 0$). Máme dva typy řešení: 1) Libovolné řešení definované na intervalu $(-e^{c-\frac{1}{3}}; 0)$ (mající graf ve druhém kvadrantu), pro které $\lim\limits_{x\to 0-} y(x) = 0$ (tj. které je klesající), nebo stacionární řešení $y(x) = 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$ můžeme v bodě $x = 0$ spojit s libovolným řešením definovaným na intervalu $(0; e^{c-\frac{1}{3}})$ (majícím graf ve čtvrtém kvadrantu), pro které $\lim\limits_{x\to 0+} y(x) = 0$ (tj. které je klesající), nebo se stacionárním řešením $y(x) = 0$ pro $x \in (0; +\infty)$, přičemž dodefinujeme $y(0) = 0$. (Libovolností řešení máme na mysli, že pro $x < 0$ může být řešení určenou

konstantou c_1, pro $x > 0$ může být určeno konstantou c_2, přičemž může být $c_1 \neq c_2$.) To lze, neboť v takovém případě platí (bereme příslušné jednostranné derivace) $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} z(x) = 0$, protože ze vztahu $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} = c - \ln|x|$ pro $x \to 0$ plyne, že $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} \to +\infty$, a protože navíc víme, že $z < 0$, musí nutně $\lim\limits_{x\to 0} z(x) = 0-$ (ve smyslu, že se $z(x)$ blíží k nule ze záporných hodnot, což souhlasí s tím, že spojujeme řešení z druhého kvadrantu se řešením ze čtvrtého kvadrantu), a protože potom ze vztahu $\ln|y| - \frac{1}{3z^3} = c$ plyne, že platí-li $\lim\limits_{x\to 0} z(x) = 0-$, potom nutně $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$. Dostáváme tak maximální řešení definovaná na intervalech $(-\infty; e^{c-\frac{1}{3}})$, $(-e^{c-\frac{1}{3}}; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$ (použijeme-li stacionární řešení) a $(-e^{c-\frac{1}{3}}; e^{c-\frac{1}{3}})$.
2) Řešení definované na intervalu $(-e^{c-\frac{1}{3}}; 0)$ (mající graf ve druhém kvadrantu), pro které $\lim\limits_{x\to 0-} y(x) = e^c$ (tj. které je rostoucí), můžeme v bodě $x = 0$ spojit řešením definovaným na intervalu $(0; +\infty)$ (majícím graf v prvním kvadrantu a které je rostoucí), pokud je konstanta c pro $x < 0$ stejná jako pro $x > 0$. To lze, neboť: a) pro řešení z druhého kvadrantu ze vztahu $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} = c - \ln|x|$ pro $x \to 0-$ dostáváme $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} \to +\infty$ a odtud s vědomostí $z < 0$ $z(x) \to -\infty$, což implikuje při použití vztahu $\ln|y| - \frac{1}{3z^3} = c$, že $\lim\limits_{x\to 0-} |y(x)| = e^c$, a tedy i $\lim\limits_{x\to 0-} y(x) = e^c$ (jsme ve druhém kvadrantu, kde $y > 0$); b) pro řešení z prvního kvadrantu ze vztahu $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} = c - \ln|x|$ pro $x \to 0+$ dostáváme $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} \to +\infty$ a odtud s vědomostí $z > 0$ $z(x) \to +\infty$, což implikuje při použití vztahu $\ln|y| - \frac{1}{3z^3} = c$, že $\lim\limits_{x\to 0+} |y(x)| = e^c$, a tedy i $\lim\limits_{x\to 0-} y(x) = e^c$ (jsme v prvním kvadrantu, kde $y > 0$); c) bereme-li příslušené jednostranné derivace, pak $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 y}{x^3+y^3} = \frac{0}{0+e^c} = 0$. Dostaneme tak maximální řešení definované na intervalu $(-e^{c-\frac{1}{3}}; +\infty)$. Analogicky lze zdůvodnit, že Řešení definované na intervalu $(-\infty; 0)$ (mající graf ve třetím kvadrantu), pro které $\lim\limits_{x\to 0-} y(x) = -e^c$ (tj. které je rostoucí), můžeme v bodě $x = 0$ spojit s řešením definovaným na intervalu $(0; e^{c-\frac{1}{3}})$ (majícím graf ve čtvrtém kvadrantu a které je rostoucí) (opět pro stejnou konstantu c). Změna oproti předchozímu zdůvodnění bude jedině taková, že z poznatku $\lim\limits_{x\to 0\mp} |y(x)| = e^c$ usoudíme $\lim\limits_{x\to 0\mp} y(x) = -e^c$, protože $y < 0$. Dostaneme tak maximální řešení definované na intervalu $(-\infty; e^{c-\frac{1}{3}})$.
Poznámka: Body $x = \pm e^{c-\frac{1}{3}}$ odpovídají hodnotám $y = \mp e^{c-\frac{1}{3}}$ které leží v množině $x^3 + y^3 = 0$, kde si rovnice vynucuje $|y'(x)| = +\infty$.

62) Řešíme na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 2y \neq 0\}$. Substitucí $y = xz$, $z \neq -\frac{1}{2}$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $x(\frac{2z}{z^2+1} +$

$\frac{1}{z^2+1})z' = -2$. Rovnici řešíme pro $x \neq 0$. Po integraci $\ln(z^2+1) - \operatorname{arctg} z = c - 2\ln|x|$, $c \in \mathbb{R}$. Pro $x \to 0$ se pravá strana blíží k $+\infty$, tedy na levé straně $z \to +\infty$. Po úpravě a zpětném dosazení $y = xz$ dostaneme implicitní vztah $\ln(x^2+y^2) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = c$, který určuje řešení pro $x \in (-\infty; -2\sqrt{\frac{1}{5}e^{c-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}})$, pro $x \in (-2\sqrt{\frac{1}{5}e^{c-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}}; 0)$, pro $x \in (0; 2\sqrt{\frac{1}{5}e^{c-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}})$ a pro $x \in (2\sqrt{\frac{1}{5}e^{c-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}}; +\infty)$. Pro $x \to 0$ máme $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \to \frac{\pi}{2}$ a tedy $y \to \pm e^{\frac{c}{2}-\frac{\pi}{4}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tedy z rovnice $y' = \frac{y-2x}{x+2y} \to \frac{1}{2}$. Řešení lze tedy navázat v bodě $x = 0$ pro stejnou hodnotu konstanty c. Vyloučené hodnoty $x \neq \pm 2\sqrt{\frac{1}{5}e^{c-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}}$ odpovídají hodnotám $y \neq \mp\sqrt{\frac{1}{5}e^{c-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}}$, jež leží na vyloučené přímce $x + 2y = 0$.

63) Řešíme pro $x \neq 0$. Substitucí $y = xz$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $xz' = 1 + z$. Stacionární řešení $z = -1$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pro $z \neq -1$ máme $\frac{z'}{z+1} = \frac{1}{x}$. Po integraci $\ln|z+1| = \ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravě $z = cx - 1$, $c \in \mathbb{R}$. Protože $y = xz$, dostáváme $y = cx^2 - x$. Závěr:

$$y(x) = cx^2 - x,\ x \in (-\infty; 0) \text{ nebo } x \in (0; +\infty),\ c \in \mathbb{R}$$

64) Řešíme na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\ \&\ \frac{y}{x} > 0\}$. Substitucí $y = xz$ ($z > 0$), $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $xz' = z(\cos(\ln z) - 1)$. Stacionární řešení $z = e^{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro $z \in (e^{2k\pi}; e^{2(k+1)\pi})$ máme $\frac{z'}{z(\cos(\ln z)-1)} = \frac{1}{x}$. Po integraci $\operatorname{cotg}\frac{\ln z}{2} = \ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$ ($\int \frac{dz}{z(\cos(\ln z)-1)} = \int \frac{du}{\cos u - 1}$, $u = \ln z$). Po úpravě $\ln\frac{z}{2} = k\pi + \operatorname{arccotg}(c + \ln|x|)$. Odtud $z = \exp\bigl(2k\pi + 2\operatorname{arccotg}(c + \ln|x|)\bigr)$, tedy $y = x\exp\bigl(2k\pi + 2\operatorname{arccotg}(c + \ln|x|)\bigr)$, $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

65) Řešíme na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\ \&\ x \cdot y > 0\}$. Substitucí $y = xz$ ($z > 0$), $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $|x|z' = \sqrt{z}$, neboli $\frac{z'}{\sqrt{z}} = \frac{\operatorname{sgn} x}{x}$. Po integraci $2\sqrt{z} = \operatorname{sgn}(x)\ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$, pro $\operatorname{sgn}(x)\ln|x| + c > 0 \Leftrightarrow |x|^{\operatorname{sgn} x} \geq e^{-c}$. Odtud $z = \left(\frac{\operatorname{sgn}(x)\ln|x|+c}{2}\right)^2 = \bigl(\operatorname{sgn}(x)(\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{c}{2}\operatorname{sgn}(x))\bigr)^2$, a tedy $y = x(\ln\sqrt{|x|} + \frac{c}{2})^2$, $c \in \mathbb{R}$. Závěr:

$$y(x) = x\left(\ln\sqrt{|x|} + \frac{c}{2}\right)^2,\ x \in (-e^{-c}; 0) \text{ nebo } x \in (e^{-c}; +\infty),\ c \in \mathbb{R}$$

66) Řešíme na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \geq |y|\}$. Substitucí $y = xz$ ($|z| \leq 1$), $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $|x|z' = \sqrt{1-z^2}$. Stacionární řešení $z = \pm 1$ pro $x \in \mathbb{R}$. Dále řešíme pro $z \in (-1; 1)$. Máme $\frac{z'}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\operatorname{sgn} x}{x}$. Po integraci $\arcsin z = \operatorname{sgn}(x)\ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$, pro $\operatorname{sgn}(x)\ln|x| + c \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow |x|^{\operatorname{sgn} x} \in (e^{-c-\frac{\pi}{2}}; e^{-c+\frac{\pi}{2}})$. Po úpravě $z = \sin(c+$

$\operatorname{sgn}(x)\ln|x|)$, tedy $y = x\sin(c + \operatorname{sgn}(x)\ln|x|)$. Řešení lze napojit v bodech $x = \pm\exp(-c - \frac{\pi}{2})$. Závěr:

$$y(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty; -e^{c+\frac{\pi}{2}}) \\ x\sin(c - \ln(-x)), & x \in [-e^{c+\frac{\pi}{2}}, -e^{c-\frac{\pi}{2}}) \\ x, & x \in [-e^{c-\frac{\pi}{2}}; +\infty) \end{cases}$$

$$c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$y(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty; e^{-c-\frac{\pi}{2}}) \\ x\sin(c + \ln x), & x \in [e^{-c-\frac{\pi}{2}}; e^{-c+\frac{\pi}{2}}) \\ x, & x \in [e^{-c+\frac{\pi}{2}}; +\infty) \end{cases}$$

$$c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Rovnice typu $y' = \frac{ay+bx+c}{dy+ex+f}$

Rovnice typu

$$y' = \frac{ay + bx + c}{dy + ex + f}$$

lze převést na homogenní rovnice substitucí $X := x + A$, $Y(X) := y(x) + B$ pro vhodná čísla A a B, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 6. Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}.$$

Řešení. Substitucí $Y(X) = y(x) + B$, $X = x + A$ získáváme

$$Y'(X) = y'(x) = \frac{2x - y(x) + 1}{x - 2y(x) + 1} = \frac{2X - 2A - Y(X) + B + 1}{X - A - 2Y(X) + 2B + 1} = \frac{2X - Y(X)}{X - 2Y(X)},$$

kde poslední nerovnost platí, pokud $-2A + B + 1 = 0$ a $-A + 2B + 1 = 0$, tj. $A = 1/3$, $B = -1/3$.

Rovnice

$$Y' = \frac{2X - Y}{X - 2Y}$$

už je homogenní, řešíme ji tedy substitucí $Y = X \cdot Z$, tj. převedením na

$$Z' = 2\frac{Z^2 - Z + 1}{1 - 2Z} \cdot \frac{1}{X}.$$

Pro $X \in (-\infty, 0)$, resp. $(0, +\infty)$ a $Z \in (-\infty, 1/2)$, resp. $(1/2, +\infty)$ integrací dostaneme

$$\ln(Z^2 - Z + 1) = -2\ln|X| + C.$$

Funkce na levé straně zobrazuje každý z intervalů $(-\infty, 1/2)$, $(1/2, +\infty)$ na interval $(\ln(3/4), +\infty)$, tj.

$$-2\ln|X| + C > \ln(3/4).$$

Odtud

$$\ln(|X|e^{-C/2}) = \ln|X| - \frac{C}{2} < \ln(3/4)^{-1/2} = \ln(2/\sqrt{3})$$

a

$$X \in \left(0, \frac{2e^{C/2}}{\sqrt{3}}\right), \quad \text{resp.} \quad X \in \left(-\frac{2e^{C/2}}{\sqrt{3}}, 0\right).$$

Ze vztahu mezi X a Z dostáváme

$$Z^2 - Z + 1 - e^C X^{-2} = 0,$$

tj.

$$Z = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4e^C X^{-2} - 3}).$$

Dosazením do substituce máme

$$Y(X) = \frac{1}{2}(X \pm X\sqrt{4e^C X^{-2} - 3}) = \frac{1}{2}(X \pm \sqrt{4e^C - 3X^2})$$

a vidíme, že toto řešení lze dodefinovat v 0 a v bodě 0 bude rovněž vyhovovat rovnici. Dále tedy

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(x + 1 \pm \sqrt{4e^C - 3(x + 1/3)^2}\right)$$

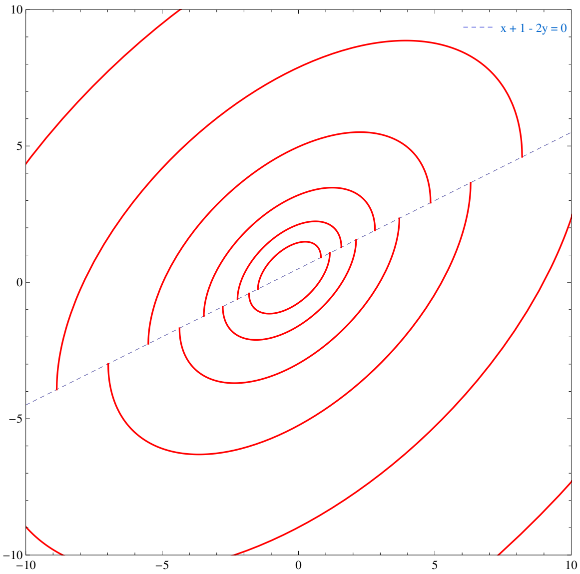
na intervalu

$$x \in \left(-\frac{2e^{C/2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}, \frac{2e^{C/2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right).$$

Tento interval je maximální, protože v jeho krajních bodech je $y = 1/2(x+1)$ a pravá strana rovnice není definována. Nalezli jsme všechna řešení, protože každým bodem roviny kromě bodů $x + 1 - 2y = 0$ prochází nějaké řešení:

$$4e^C = \left(y_0 - \frac{x_0 + 1}{2}\right)^2 + 3\left(x_0 + \frac{1}{3}\right)^2$$

a protože výraz na pravé straně je kladný (nulový je jen v případě $x_0 = -1/3$, $y_0 = 1/3$, což ovšem leží na vyloučené přímce), existuje C splňující tuto rovnici.



Úlohy

67. $y' = \frac{2y-x-5}{2x-y+4}$.

68. $y' = \frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$

69. $y' = \frac{2x+y+2}{4x+2y+9}$

70. $y' = \frac{4-x-2y}{2(1+x+2y)}$

71. $y' = \frac{2y-x+1}{4y-2x+6}$

72. $y' = \frac{x+y+1}{x-y+3}$

Řešení

67) Řešíme na množině $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2x-y+4 \neq 0\}$. Substitucí $x = X-1$ a $y = Y+2$ převedeme zadanou rovnici na homogenní rovnici $Y' = \frac{2Y-X}{2X-Y}$ pro $Y \neq 2X$. Použijeme substituci $Y = X \cdot z$ $(z \neq 2)$. Po úpravě přejde rovnice do tvaru $(2-z)Xz' = z^2-1$, která má stacionární řešení $z = \pm 1$. Pro $X \neq 0$ a $z \notin \{-1;1\}$ máme $z'\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{z-1} - \dfrac{\frac{3}{2}}{z+1}\right) = \dfrac{1}{X}$. Po integraci a drobné úpravě dostaneme $\ln\left(\left|\frac{z-1}{(z+1)^3}\right|\right) = \ln(X^2) + 2c$, $c \in \mathbb{R}$. Pro $z \in (-\infty;-1)$ a pro $z \in (-1;1)$ je $\ln\left(\left|\frac{z-1}{(z+1)^3}\right|\right) \in (-\infty;+\infty)$, tedy $X \in (-\infty;0)$ nebo $X \in (0;+\infty)$, pro $z \in (1;+\infty) \setminus \{2\}$ je $\ln\left(\left|\frac{z-1}{(z+1)^3}\right|\right) \in (-\infty; -\ln 27)$, tedy $X \in (-\frac{1}{27}e^{-2c};0)$ nebo $X \in (0;\frac{1}{27}e^{-2c})$. Označíme-li $e^{2c} = k > 0$, dostaneme vztah $k = \frac{|z-1|}{|X^2\cdot(z+1)^3|} = \frac{|Xz-X|}{|(Xz+X)^3|}$. Protože $Xz = Y$, máme $|Y-X| = k|Y+$

$X|^3$. Po zpětné substituci $X = x + 1$ a $Y = y - 2$ dostaneme závěrečný implicitní vztah $|x-y+3| = k|x+y-1|^3$, $k \in [0;+\infty]$, kde pro případ $k = 0$ je $y = x+3$ ($z = 1$) a pro případ $k = +\infty$ je $y = 1-x$ ($z = -1$). Tento vztah určuje řešení pro $x \in (-\infty;-1)$, pro $x \in (-1;+\infty)$, pro $x \in (-1 - \frac{1}{27k};0)$ a pro $x \in (0;-1+\frac{1}{27k})$. Ze vztahu $|x - y + 3| = k|x + y - 1|^3$ můžeme pro $x \to -1$ usoudit, že $y \to 2$ nebo (pro $k > 0$) $y \to 2 \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$. První možnost odporuje podmínce $2x - y + 4 \neq 0$. Podíváme-li se ale na druhou možnost, pak máme $y'(-1) = \lim\limits_{x\to-1} \frac{2y(x)-x-5}{2x-y(x)+4} = \frac{4\pm2/\sqrt{k}+1-5}{-2-2\mp1/\sqrt{k}+4} = -2$, takže řešení definované na intervalu $(-\infty;-1)$, jehož graf leží ve druhém kvadrantu, lze v bodě $x = -1$ napojit s řešením definovaným na intervalu $(-1;-1+\frac{1}{27k})$, a stejně tak řešení definované na intervalu $(-1-\frac{1}{27k};-1)$ lze v bodě $x = -1$ napojit s řešením definovaným na intervalu $(-1;+\infty)$, jehož graf je převážně ve čtvrtém kvadrantu. Získáme tak maximální řešení definovaná na intervalech $(-\infty;-1+\frac{1}{27k})$, $(-1-\frac{1}{27k};+\infty)$, $(-\infty;-1)$, $(-1;+\infty)$, $(-1-\frac{1}{27k};-1)$ a $(-1;-1+\frac{1}{27k})$.

68) Řešíme na množině $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x + y - 1 \neq 0\}$. Substitucí $x = X + 3$ a $y = Y - 2$ převedeme zadanou rovnici na homogenní rovnici $Y' = \frac{2Y^2}{(X+Y)^2}$ pro $Y \neq -X$. Použijeme substituci $Y = X \cdot z$ ($z \neq -1$). Po úpravě přejde rovnice do tvaru $(z + 1)^2 X z' = -z(1 + z^2)$, která má stacionární řešení $z = 0$. Pro $X \neq 0$ a $z \neq 0$ máme $z'\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2+1}\right) = -\frac{1}{X}$. Po integraci dostáváme $\ln|z| + 2\operatorname{arctg}|z| = -\ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Pro $z \in (-\infty;0) \setminus \{-1\}$ je $\ln|z| + 2\operatorname{arctg}|z| \in (-\infty;+\infty) \setminus \{-\frac{\pi}{2}\}$, tedy $X \in (-\infty;-e^{c+\frac{\pi}{2}})$ nebo $X \in (-e^{c+\frac{\pi}{2}};0)$ nebo $X \in (0;e^{c+\frac{\pi}{2}})$ nebo $\in (e^{c+\frac{\pi}{2}};+\infty)$, pro $z \in (0;+\infty)$ je $\ln|z| + 2\operatorname{arctg}|z| \in (-\infty;+\infty)$, tedy $X \in (-\infty;0)$ nebo $X \in (0;+\infty)$. Po zpětném dosazení $z = \frac{Y}{X}$, $X = x - 3$, $Y = y + 2$ a úpravě dostaneme závěrečný implicitní vztah $\ln|y + 2| + 2\operatorname{arctg}(\frac{y+2}{x-3}) = c$, $c \in \mathbb{R}$, který určuje maximální řešení na intervalech $x \in (-\infty;3)$, $x \in (-\infty;3-\exp(\frac{\pi}{2}+c))$, $x \in (3-\exp(\frac{\pi}{2}+c);3)$, $x \in (3;3+\exp(\frac{\pi}{2}+c))$, $x \in (3+\exp(\frac{\pi}{2}+c);+\infty)$, $x \in (3;+\infty)$, a dále máme stacionární řešení $y(x) = -2$ pro $x \in (-\infty;3)$ a pro $x \in (3;+\infty)$. Řešení nejdou nikde napojovat, neboť vyloučené body leží spolu s vyloučenými hodnotami na přímce $x + y - 1 = 0$, na níž není zadaná rovnice definována.

69) Řešíme na množině $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 4x+2y+9 \neq 0\}$. Substitucí $z = 2x+y$ ($z \neq -4\frac{1}{2}$) a $z' = 2 + y'$ a úpravou převedeme zadanou rovnici na rovnici $(2z + 9)z' = 5z + 20$, která má stacionární řešení $z = -4$. Po integraci $2z+\ln(|z+4|) = 5x+c$, $c \in \mathbb{R}$.Pro $z \in (-\infty;-4)\setminus\{-4\frac{1}{2}\}$ je $2z+\ln(|z+4|) \in (-\infty;-9-\ln 2)$, tedy $x \in (-\infty;-\frac{9}{5}-\frac{1}{5}\ln(2)-\frac{c}{5})$, pro $z \in (-4;+\infty)$ je $2z + \ln(|z + 4|) \in (-\infty;+\infty)$, a tedy $x \in (-\infty;+\infty)$. Po zpětné substituci $z = y + 2x$ dostaneme závěrečný implicitní vztah $2y + \ln(|y + 2x + 4|) =$

$x + c$, $c \in \mathbb{R}$, který určuje řešení na intervalech $x \in (-\infty; -\frac{9}{5} - \frac{1}{5}\ln 2 - \frac{c}{5})$ a $x \in (-\infty; +\infty)$, a řešení $y(x) = -2x - 4$ pro $x \in \mathbb{R}$. Vyloučenému bodu $x = -\frac{9}{5} - \frac{1}{5}\ln 2 - \frac{c}{5}$ odpovídá vyloučená hodnota $y = -\frac{9}{10} + \frac{2}{5}\ln 2 + \frac{2c}{5}$, jež leží na vyloučené přímce $4x + 2y = -9$, tedy řešení nelze prodloužit. Nalezli jsme tedy maximální řešení.

70) Řešíme na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x+2y+1 \neq 0\}$. Substitucí $z = x+2y$ a $z' = 1+2y'$ převedeme zadanou rovnici na rovnici $z' - 1 = \frac{4-z}{1+z}$ pro $z \neq -1$. Po itegraci $z + \frac{1}{2}z^2 = 5x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $z = -1 \pm \sqrt{1 + 2c + 10x}$. Po zpětné substutici $y = \frac{1}{2}(z - x)$ dostaneme závěr:

$$y(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2c + 10x}, x \in (-\frac{2c+1}{10}; +\infty), c \in \mathbb{R}$$

71) Řešíme na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4y-2x+6 \neq 0\}$. Substitucí $z = 2y-x$ a $z' = 2y' - 1$ převedeme zadanou rovnici na rovnici $z' + 1 = \frac{z+1}{z+3}$ pro $z \neq -3$. Po itegraci $\frac{1}{2}z^2 + 3z = -2x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $z + 3 = \pm\sqrt{9 + 2c - 4x}$. Po zpětné substutici $y = \frac{1}{2}(z + x)$ dostaneme závěr:

$$y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 + 2c - 4x}, x \in (-\infty; \frac{2c+9}{4}), c \in \mathbb{R}$$

72) Řešíme na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y + 3 \neq 0\}$. Substitucí $x = X - 2$ a $y = Y + 1$ převedeme zadanou rovnici na homogenní rovnici $Y' = \frac{X+Y}{X-Y}$ pro $Y \neq X$. Použijeme substituci $Y = X \cdot z$ ($z \neq 1$). Po úpravě přejde rovnice do tvaru $z'\frac{1-z}{1+z^2} = \frac{1}{X}$. Po integraci dostaneme $\mathrm{arctg}(z) - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \ln(|X|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Tento vztah lze splnit jen pro $\ln(|X|) \in (-\infty; \frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2}) - c)$. Po zpětné substituci $z = \frac{Y}{X}$ a $X = x + 2$ a $Y = y - 1$ dostaneme závěrečný implicitní vztah $\mathrm{arctg}(\frac{y-1}{x+2}) - \ln(\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Tento vztah určuje řešení pro $x \in (-2 - \frac{\exp(\frac{\pi}{4}-c)}{\sqrt{2}}; -2)$ a pro $x \in (-2; -2 + \frac{\exp(\frac{\pi}{4}-c)}{\sqrt{2}})$. V bodě $x = -2$ dostáváme ze vztahu $\mathrm{arctg}(z) - \frac{1}{2}\ln(1 + z^2) = \ln(|X|) + c$, že pro $X \to 0$ je $z \to \pm\infty$, a tedy ze vztahu $\mathrm{arctg}(z) - \ln(\sqrt{X^2 + Y^2}) = c$ dostáváme $|Y| \to e^{\pm\frac{\pi}{2}-c}$, tedy řešení určené konstantou c_1 definované na intervalu $(-2 - \frac{\exp(\frac{\pi}{4}-c_1)}{\sqrt{2}}; -2)$ lze v bodě $x = -2$ spojit hodnotou $y = \pm e^{-\frac{\pi}{2}-c_1} = \pm e^{\frac{\pi}{2}-c_2}$, resp. $y = \pm e^{\frac{\pi}{2}-c_1} = \pm e^{-\frac{\pi}{2}-c_2}$ s řešením určeným konstantou c_2 definovaným na intervalu $(-2; -2 + \frac{\exp(\frac{\pi}{4}-c_2)}{\sqrt{2}})$, pokud $c_1 + \pi = c_2$, resp. $c_1 - \pi = c_2$. Dostáváme tak maximální řešení definovaná na intervalech $(-2 - \frac{\exp(\frac{\pi}{4}-c_1)}{\sqrt{2}}; -2 + \frac{\exp(\frac{\pi}{4}-c_2)}{\sqrt{2}})$ pro $c_1 \pm \pi = c_2$.

Další rovnice převoditelné na separované proměnné

Příklad 7. Řešte rovnici $y' = \sin(x + y)$.

Řešení. Substitucí $z = x + y$ dostaneme

$$z' = y' + 1 = \sin z + 1,$$

což je rovnice se separovanými proměnnými. Tato rovnice má stacionární řešení $z = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ a na intervalech mezi těmito nulovými body pravé strany můžeme rovnici vydělit $\sin z + 1$ a zintegrovat na

$$\frac{\cos z}{\sin z + 1} = x + c. \tag{8}$$

Protože funkce na levé straně zobrazuje každý z intervalů $(2k\pi - \pi/2, 2k\pi + 3\pi/2)$ monotónně na $\mathbb{R}$, dává nám rovnost (8) implicitně definovanou funkci z s definičním oborem $\mathbb{R}$. Tato řešení jsou jistě maximální a protože vyplní celou rovinu, tak z věty o jednoznačnosti plyne, že jsou všechna. Po odsubstituování máme všechna maximální řešení původní rovnice daná implicitním vztahem

$$\frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)+1} = x + c \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Úlohy

73. $y' = \cos(x + 2y)$

74. $y' = \sin(x + y + 3) - 1$

75. $y' = \sqrt{(x+y)^2 + 1}$

76. $y' - \sin x = \cos(y + \cos x)$

Řešení

73) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Použijeme substituci $z = x + 2y$, $z' = 1 + 2y'$. Dostáváme tak rovnici $z' = 1 + 2\cos z$. Stacionární řešení $z = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ a $z = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro $z \in (\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi)$ řešíme rovnici $\frac{z'}{1+2\cos z} = 1$, po integraci $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{argtgh} \frac{\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{\sqrt{3}} = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $z = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tgh}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x+c)\right)\right) + 2k\pi$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro $z \in (\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2(k+1)\pi)$ řešíme rovnici $\frac{z'}{1+2\cos z} = 1$, po integraci $\frac{2}{\sqrt{3}}F(z) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$, kde

$$F(z) = \begin{cases} \operatorname{argcotg} \frac{\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{\sqrt{3}}, & z \in (\frac{2\pi}{3}; \pi) \cup (\pi; \frac{4\pi}{3}) \\ 0, & z \in \{\pi\} \end{cases}$$

Odtud $z = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{cotgh}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x+c)\right)\right) + 2(k+1)\pi$ pro $x + c \in (-\infty; 0)$, $z(-c) = \pi + 2k\pi$, $z = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{cotgh}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x+c)\right)\right) + 2k\pi$ pro $x + c \in$

$(0;+\infty)$. Po zpětné substituci $y = \frac{z-x}{2}$ dostáváme závěr:

$$y(x) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tgh}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x+c)\right)\right) + k\pi - \frac{x}{2},\ x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{cotgh}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x+c)\right)\right) + \pi + k\pi - \frac{x}{2}, & x \in (-\infty;-c) \\ \frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{c}{2}, & x \in \{-c\} \\ \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{cotgh}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x+c)\right)\right) + k\pi - \frac{x}{2}, & x \in (-c;+\infty) \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{\pi}{3} + k\pi - \frac{x}{2},\ x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{2\pi}{3} + k\pi - \frac{x}{2},\ x \in \mathbb{R}$$

$c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

74) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Použijeme substituci $z = x + y + 3$, $z' = 1 + y'$. Dostáváme tak rovnici $z' = \sin z$. Stacionární řešení $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro $z \in (k\pi; \pi + k\pi)$ řešíme rovnici $\frac{z'}{\sin z} = 1$. Po integraci $-\operatorname{argtgh}(\cos z) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravě $z = k\pi + \arccos(\operatorname{tgh}(-x-c))$, $x \in \mathbb{R}$. Po zpětném dosazení $y = z - x - 3$ dostáváme závěr:

$$y(x) = \arccos(\operatorname{tgh}(-x-c)) + k\pi - x - 3,\ x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = k\pi - x - 3,\ x \in \mathbb{R}$$

$c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

75) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Použijeme substituci $z = x + y$, $z' = 1 + y'$. Dostáváme tak po úpravě rovnici $\frac{z'}{1+\sqrt{1+z^2}} = 1$. Po integraci $F(z) = x + c$, kde

$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} - \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} + \operatorname{argsinh} z, & z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & z \in \{0\} \end{cases}$$

Protože $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, je $c \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$. Po přenásobení rovnice z a po zpětném dosazení $z = x + y$ dostáváme závěrečný vztah $(x+y)\operatorname{argsinh}(x+y) - \sqrt{1+(x+y)^2} - (x+c)(x+y) + 1 = 0$, který určuje řešení pro $x \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$.

76) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Použijeme substituci $z = y + \cos x$, $z' = y' - \sin x$. Dostáváme tak rovnici $z' = \cos z$. Stacionární řešení $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pro $x \in \mathbb{R}$. Pro $z \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$ řešíme rovnici $\frac{z'}{\cos z} = 1$. Po integraci $\operatorname{argtgh}(\sin z) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $z = \arcsin(\operatorname{tgh}(x + c)) + k\pi$. Po zpětném dosazení do vztahu $y = z - \cos x$ dostáváme závěr:

$$y(x) = \arcsin(\operatorname{tgh}(x + c)) - \cos x + k\pi, x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{\pi}{2} - \cos x + k\pi, x \in \mathbb{R}$$

$c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$