ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
MASARYKOVA UNIVERZITA

Teoretická mechanika

Sbírka příkladů

Martin Šarbort
Emília Kubalová
Stanislav Petráš
Tomáš Tyc

prosinec 2011
poslední aktualizace 6. října 2017

Obsah

Označení příkladů
Příklady jsou řešené podrobně (P), stručně (S) nebo je uveden pouze výsledek (V). Dle obtížnosti jsou rozděleny na lehké (1), středně složité (2) a těžké (3). Úlohy, které byly převzaty z uvedené literatury, jsou označeny (*).

Poděkování
Tato sbírka příkladů vznikla v rámci projektu *Demonstrační experimenty a sbírka řešených příkladů pro předmět Teoretická mechanika*, podporovaného Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy ČR na základě grantu FRVŠ 491/2011.

ZADÁNÍ PŘÍKLADŮ

1 Hamiltonův princip

Příklad 1 (P1)
Uvažujte pohyb částice o hmotnosti m po svislé přímce v homogenním tíhovém poli. Poloha částice je popsána funkcí $y(t)$, přičemž v počátečním čase $t = 0$ a koncovém čase $t = T$ je poloha částice $y(0) = y(T) = 0$. Předpokládejte, že funkce $y(t)$ má tvar
a) $y(t) = a + bt + ct^2$,
b) $y(t) = a + b\sin(ct)$,
kde a, b, c jsou parametry. Ze znalosti výše uvedených podmínek vyjádřete parametry a, c pomocí času T a zbývajícího parametru b. Vypočtěte akci a určete hodnotu b_0 parametru b, pro niž je hodnota akce minimální. Srovnejte minimální hodnoty akce odpovídající dvěma předpokládaným trajektoriím. Dále určete zrychlení částice v obecném čase t pro parametr b_0. Co z toho lze usoudit?

Příklad 2 (S1)
Jednorozměrný harmonický oscilátor je tvořen částicí s hmotností m a pružinou tuhosti k. Poloha částice je popsána funkcí $x(t)$, přičemž v počátečním čase $t = 0$ je poloha částice $x(0) = 0$, v čase $t = T/2$ se částice vrátí do výchozího bodu (jedná se o první průchod tímto bodem pro $t > 0$). Předpokládejte, že funkce popisující skutečnou trajektorii má tvar $x(t) = a\sin(\omega t)$.
a) Ze znalosti výše uvedených podmínek vyjádřete parametr ω pomocí času T.
b) Napište výraz pro lagrangián a určete akci pro pohyb v časovém intervalu $t \in [0, \tau]$, kde $\tau > 0$.
c) Uvažujte trajektorii $\tilde{x}(t) = x(t) + u(t)$, která je mírně odlišná od skutečné trajektorie $x(t)$. Za předpokladu $u(0) = u(\tau) = 0$ vypočtěte první variaci akce pro $t \in [0, \tau]$. Za jaké podmínky bude první variace akce nulová?

Příklad 3 (S2)
Poloha volné částice o hmotnosti m pohybující se v jednom rozměru je popsána funkcí $x(t)$, přičemž v počátečním čase $t = 0$ je poloha částice $x(0) = 0$, v koncovém čase $t = T$ je poloha $x(T) = d$.
a) Pro uvedené podmínky nalezněte vyjádření funkce $x(t)$, která odpovídá rovnoměrnému pohybu mezi počátečním a koncovým bodem. Pro tento pohyb vypočtěte hodnotu akce.
b) Uvažujte funkci $\tilde{x}(t) = x(t) + u(t)$, kde $u(0) = u(T) = 0$, která popisuje obecný nerovnoměrný pohyb mezi počátečním a koncovým bodem. Pro obecnou funkci $u(t)$ vypočtěte akci odpovídající tomuto pohybu. Ukažte, že tato akce je vždy větší než akce pro rovnoměrný pohyb.

Příklad 4 (S3)
Ověřte přímým dosazením do Lagrangeových rovnic, že se jejich tvar nezmění, přidáme-li k lagrangiánu úplnou časovou derivaci libovolné funkce $f(q_1, \ldots, q_n, t)$ zobecněných souřadnic a času.

Příklad 5 (P3*)

Tenká struna o délkové hustotě ρ je pod napětím τ napnuta mezi dvěma pevnými body $x = 0$ a $x = l$. Výchylka struny v čase t je popsána funkcí $y(x,t)$, přičemž $y(0,t) = 0$ a $y(l,t) = 0$. Parciální derivace funkce $y(x,t)$ označme $\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t}$ a $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$. Ukažte, že lagrangián pro strunu lze napsat ve tvaru

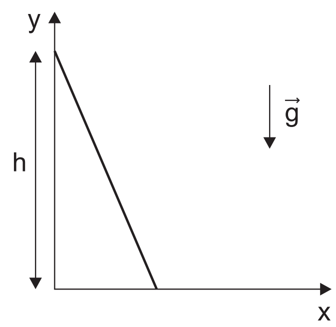
$$L = \int_0^l \left(\frac{1}{2}\rho \dot{y}^2 - \frac{1}{2}\tau y'^2 \right) \mathrm{d}x \,.$$

Z tohoto lagrangiánu odvoďte vlnovou rovnici popisující pohyb struny. Určete rychlost c šíření vlny na struně.

2 Vazby a stabilita

Příklad 6 (S3)

Homogenní tyč délky l se opírá o dokonale hladkou stěnu (viz obrázek 1) a je v této poloze udržována vnější silou. V určitém okamžiku tyč uvolníme, takže začne bez tření klouzat po podlaze i po stěně. V jaké výšce bude horní konec tyče, když se oddělí od stěny? Původní výška tohoto konce nad podlahou je h.



Obrázek 1

Příklad 7 (V2*)

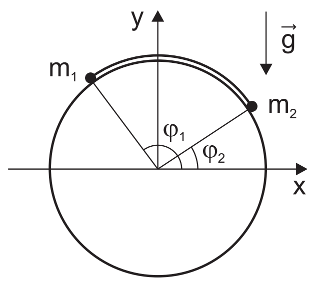
Tělísko začne klouzat z nejvyššího bodu dokonale hladké koule o poloměru r. V jaké výšce se od koule oddělí?

Příklad 8 (V2)

Uvažujte válec o poloměru R nacházející se v tíhovém poli, jehož osa symetrie je vodorovná. Svislý řez válcem je na obrázku 2. Přes vrchol válce je nataženo nehmotné vlákno délky $l = \frac{1}{2}\pi R$, na jehož koncích jsou upevněna tělíska o hmotnostech m_1 a m_2. Určete rovnovážnou polohu těles na válci.

Příklad 9 (V2*)

O vnitřní stěny rotačního paraboloidu $x^2 + y^2 = 2pz$ se opírá homogenní tyč délky a. Určete její rovnovážnou polohu.

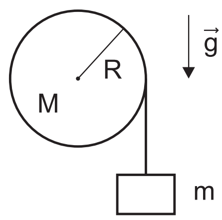


Obrázek 2

3 Eulerovy-Lagrangeovy rovnice

Příklad 10 (V1)

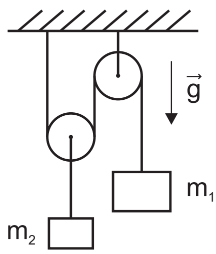
Těleso o hmotnosti m je spojené s lanem, které se bez tření odvinuje z kladky o hmotnosti M a poloměru R. Tíhová síla působí vertikálně směrem dolů. Určete zrychlení tělesa o hmotnosti m (viz obrázek 3).



Obrázek 3

Příklad 11 (S2)

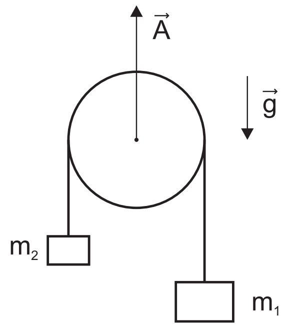
Pomocí Lagrangeových rovnic určete zrychlení kostky o hmotnosti m_1 z obrázku 4. Kladky i lano považujte za nehmotné.



Obrázek 4

Příklad 12 (S2)

Pomocí Lagrangeových rovnic určete zrychlení tělesa o hmotnosti m_1 z obrázku 5 vzhledem k Zemi. Kladka se pohybuje směrem nahoru se zrychlením o velikosti A vzhledem k Zemi. Hmotnost kladky zanedbejte.



Obrázek 5

Příklad 13 (V1*)

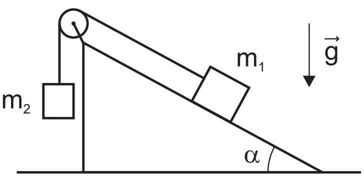
Válec o hmotnosti m a poloměru R se valí bez klouzání dolů po nakloněné rovině s úhlem sklonu α. Určete zrychlení válce.

Příklad 14 (V1)

Válec o poloměru r_1 a hustotě ρ_1 a koule o poloměru r_2 a hustotě ρ_2 se valí po téže nakloněné rovině s úhlem sklonu α. Které z obou těles dosáhne většího zrychlení? Jak závisí odpověď na hodnotách $\rho_{1,2}$ a $r_{1,2}$?

Příklad 15 (V1*)

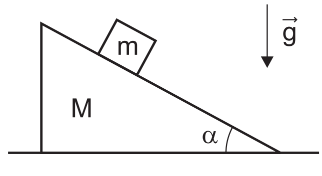
Určete zrychlení tělesa o hmotnosti m_1 z obrázku 6. Nakloněná rovina je v klidu, kladku považujte za nehmotnou, tření neuvažujte.



Obrázek 6

Příklad 16 (S2)

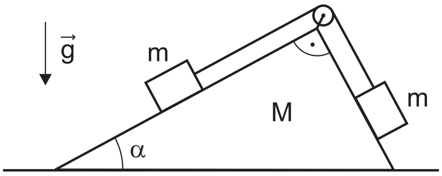
Blok o hmotnosti m klouže bez tření po tělese ve tvaru nakloněné roviny o hmotnosti M, které se může pohybovat v horizontální rovině také bez tření (viz obrázek 7). Určete pohybové rovnice a zrychlení bloku a nakloněné roviny.



Obrázek 7

Příklad 17 (V3)

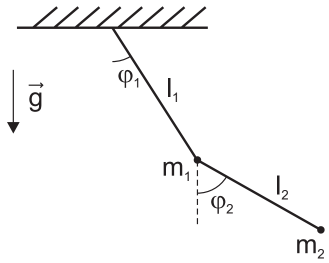
Určete zrychlení klínu o hmotnosti M z obrázku 8. Všechna tření zanedbejte, kladku považujte za nehmotnou.



Obrázek 8

Příklad 18 (P2*)

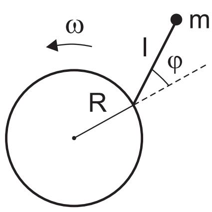
Uvažujte dvojité kyvadlo znázorněné na obrázku 9 – hmotné body mají hmotnosti m_1 a m_2, hmotnost vláken zanedbejte. Určete Lagrangián soustavy a odvoďte Lagrangeovy rovnice. Pro případ malých kmitů je linearizujte a vypočtěte vlastní frekvence kmitů soustavy.



Obrázek 9

Příklad 19 (S2)

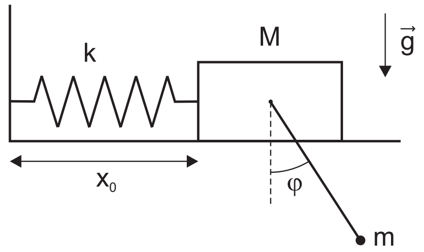
Těleso o hmotnosti m je upevněno na jednom konci nehmotné tyče délky l (viz obrázek 10). Druhý konec tyče je připevněn k otočnému čepu tak, že tyč se může kývat v rovině. Otočný čep rotuje ve stejné rovině úhlovou rychlostí ω v kruhu o poloměru R. Ukažte, že toto "kyvadlo" se chová jako matematické kyvadlo v tíhovém poli $g = R\omega^2$ pro všechny hodnoty l a všechny amplitudy oscilací, a to jednak pomocí Lagrangeových pohybových rovnic, jednak úvahou.



Obrázek 10

Příklad 20 (V3)

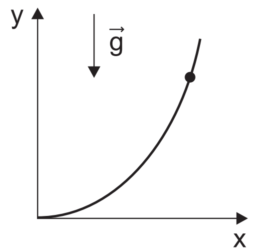
Harmonický oscilátor tvořený pružinou o tuhosti k a kvádrem hmotnosti M může bez tření kmitat ve vodorovné rovině (viz obrázek 11). Délka pružiny v nenapjatém stavu je x_0. Na kvádru je dále připevněno matematické kyvadlo délky l a hmotnosti m. Napište Lagrangeovy rovnice soustavy, linearizujte je pro případ malých kmitů a najděte vlastní frekvence kmitů soustavy.



Obrázek 11

Příklad 21 (V1)

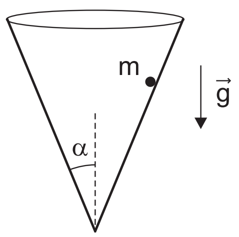
Korálek o hmotnosti m klouže bez tření podél drátu, který má v kartézské soustavě souřadnic (x, y) tvar paraboly $y = Ax^2$ (viz obrázek 12). Zapište Lagrangeovu pohybovou rovnici popisující pohyb korálku.



Obrázek 12

Příklad 22 (S1*)

Částice o hmotnosti m klouže po vnitřní ploše kuželu (viz obrázek 13), osa kuželu je orientovaná vertikálně. Zapište Lagrangeovy pohybové rovnice a vyjádřete složku momentu hybnosti částice ve vertikálním směru (osa z).



Obrázek 13

Příklad 23 (P2*)
Lagrangeova funkce částice o hmotnosti m a elektrickém náboji q v elektromagnetickém poli popsaném skalárním potenciálem φ a vektorovým potenciálem $\vec{A}$ je

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + q\vec{A}\vec{v} - \varphi\,.$$

Nalezněte Lagrangeovy pohybové rovnice a ukažte, že pro zrychlení částice platí

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\,,$$

kde $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ a $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$.

Příklad 24 (P2)
Řetěz délky l je položen rovně na stole tak, že jeho úsek délky a visí volně přes hranu stolu. V okamžiku $t = 0$ řetěz uvolníme, takže začne bez tření klouzat ze stolu. Vyšetřete pohyb řetězu. Za jakou dobu sklouzne řetěz celý ze stolu, je-li $l = 2\,\mathrm{m}$, $a = 0,2\,\mathrm{m}$?

Příklad 25 (S2)
Uvažujte kuličku o hmotnosti m uzavřenou v trubce rotující v rovině xy kolem svislé osy z konstantní úhlovou rychlostí ω. Odvoďte pohybovou rovnici kuličky v radiálním směru a nalezněte její řešení, jestliže v čase $t = 0$ byla rychlost kuličky vzhledem k trubce nulová a její vzdálenost od osy otáčení byla r_0.

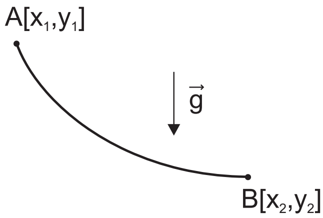
Příklad 26 (S2*)
Najděte pohybové rovnice sférického kyvadla (jde o matematické kyvadlo, které nemusí kývat v rovině). Za zobecněné souřadnice zvolte úhly θ, φ známé ze sférických souřadnic. Jaká veličina související s rotací se zachovává během pohybu? Zdůvodněte nejméně dvěma způsoby.

Příklad 27 (V1)
Najděte pohybové rovnice matematického kyvadla o hmotnosti m, jehož délka závěsu $l(t)$ se v čase mění podle předepsané funkce $l(t)$.

4 Variační počet

Příklad 28 (P2)
Nalezněte křivku, která při dané délce h obepíná největší plochu. Výpočet proveďte v polárních souřadnicích (r, φ).

Příklad 29 (P2*)
Pomocí variačního počtu nalezněte křivku, po které se částice v homogenním tíhovém poli dostane z bodu A$[x_1, y_1]$ do bodu B$[x_2, y_2]$ za nejmenší čas (viz obrázek 14). V bodě A má částice nulovou počáteční rychlost.



Obrázek 14

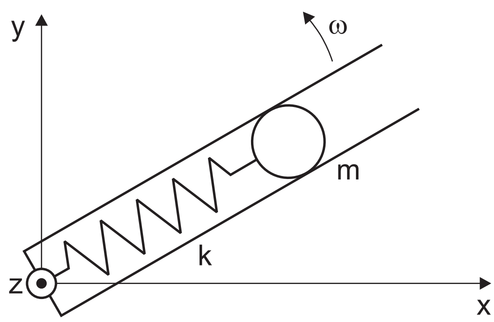
Příklad 30 (P2)
Uvažujte pohyb částice o hmotnosti m a energii $E = mgh$, kde h je konstanta, ve svislé rovině xy v tíhovém poli Země. Tíhové zrychlení je orientováno proti směru osy y. Pomocí Maupertuisova principu dokažte, že trajektorie částice je parabola.

Příklad 31 (V2)
Uvažujte pohyb částice o hmotnosti m a energii E v centrálním silovém poli s potenciální energií $V = -\frac{\alpha}{r}$, kde α je kladná konstanta. Pomocí Maupertuisova principu dokažte, že trajektorie částice je kuželosečka.

Příklad 32 (P2)
Z Fermatova principu odvoďte diferenciální rovnici popisující trajektorii paprsku v prostředí se spojitým rozložením indexu lomu $n(\vec{r})$.

5 Řešení pohybových rovnic

Příklad 33 (P3)
Uvažujte kuličku o hmotnosti m připevněnou na pružině tuhosti k a uzavřenou v trubce rotující v rovině xy kolem osy z konstantní úhlovou rychlostí ω (viz obrázek 15). Odvoďte rovnici popisující pohyb kuličky v radiálním směru a nalezněte její řešení. Jaký tvar má efektivní potenciál? Dále porovnejte vztah pro celkovou a zobecněnou energii soustavy a rozhodněte, která z nich se zachovává.



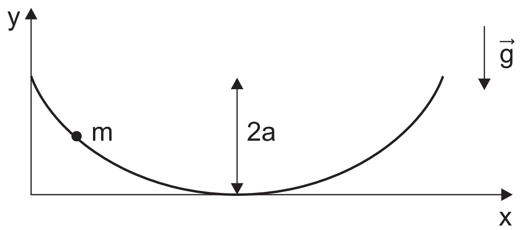
Obrázek 15

Příklad 34 (S1)

Částice o hmotnosti m se pohybuje v centrálním silovém poli s potenciální energií $V = -\frac{\alpha}{r^2}$, kde $\alpha > 0$ je konstanta. Celková energie nechť je $E = 0$. Ukažte, že trajektorie částice má tvar logaritmické spirály, tj. poloměr r závisí na polárním úhlu φ exponenciálně.

Příklad 35 (P3*)

Korálek o hmotnosti m klouže bez tření podél drátu, který má tvar cykloidy (viz obrázek 16). Parametrické rovnice cykloidy jsou $x = a(\varphi - \sin\varphi)$ a $y = a(1 + \cos\varphi)$, kde $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Určete Lagrangián soustavy, odvoďte Lagrangeovy rovnice a vyřešte je. Ukažte, že perioda kmitů nezávisí na amplitudě.



Obrázek 16

Příklad 36 (P2)

V kartézských souřadnicích uvažujte dvourozměrný harmonický oscilátor, tj. částici o hmotnosti m v potenciálu $V = \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2)$, kde α je kladná konstanta. Celková energie soustavy je $E > 0$. Napište Lagrangián, odvoďte Lagrangeovy pohybové rovnice a vyřešte je. Dokažte, že trajektorie oscilátoru jsou elipsy, nalezněte vztahy mezi jejich poloosami a energií E a velikostí momentu hybnosti l oscilátoru.

Příklad 37 (S2)

Částice o hmotnosti m se pohybuje v odpudivém potenciálu $V = -\frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2)$, kde α je kladná konstanta a (x, y) kartézská soustava souřadnic. Celková energie soustavy je E. Řešením Lagrengeových pohybových rovnic dokažte, že trajektorie částice je hyperbola.

Příklad 38 (S3*)

Keplerova úloha. Popište pohyb částice o hmotnosti m v centrálním silovém poli s potenciální energií $V = -\frac{\alpha}{r}$, kde $\alpha > 0$ je konstanta. Diskutujte tvar trajektorií v závislosti na hodnotě celkové energie E.

Příklad 39 (S2)

Dokažte, že při pohybu částice o hmotnosti m po kruhové trajektorii v Newtonově potenciálu $V = -\frac{\alpha}{r}$, kde $\alpha > 0$, je celková energie soustavy rovna záporně vzaté kinetické energii částice.

Příklad 40 (P3)

Na základě řešení Keplerovy úlohy spočtěte dobu oběhu Země kolem Slunce. Výsledek srovnejte s hodnotou, která vyjde, jestliže ve výsledném vztahu pro oběžnou dobu místo redukované hmotnosti použijeme hmotnost Země.

Příklad 41 (S2)

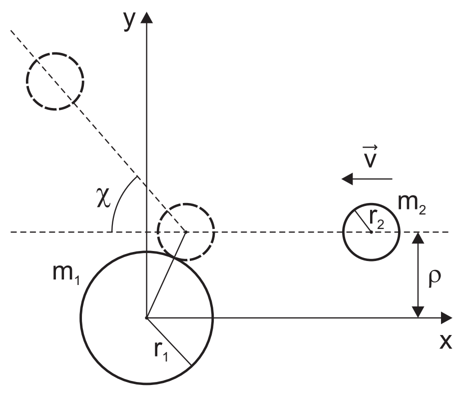
Jednorozměrný pohyb částice o hmotnosti m v potenciálu $V(y)$ je popsán funkcí $y(t)$. Napište výraz pro celkovou energii E a využijte jej pro obecné vyjádření funkce $t(y)$ pomocí metody separace proměnných. Pro konkrétní potenciál $V(y) = mgy$ odpovídající homogennímu tíhovému poli a energii $E = mgy_0$, kde y_0 je konstanta, vypočtěte funkci $t(y)$. Výsledek invertujte a vyjádřete funkci $y(t)$. Jaký pohyb popisuje?

Příklad 42 (V2)

Jednorozměrný pohyb částice o hmotnosti m v potenciálu $V(x)$ je popsán funkcí $x(t)$. Napište výraz pro celkovou energii E a využijte jej pro obecné vyjádření funkce $t(x)$ pomocí metody separace proměnných. Pro konkrétní potenciál $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ a energii $E = \frac{1}{2}kA^2$, kde A je konstanta, vypočtěte funkci $t(x)$. Výsledek invertujte a vyjádřete funkci $x(t)$. Jaký pohyb popisuje?

Příklad 43 (P3*)

Uvažujte případ pružné srážky mezi dvěma dokonale tvrdými koulemi o poloměrech r_1, r_2. Předpokládejte, že střed koule o poloměru r_1 je pevně umístěn v počátku kartézské soustavy souřadnic (x, y, z). Koule o poloměru r_2 se před srážkou pohybuje rychlostí o velikosti v po přímce, jejíž rovnoběžka procházející počátkem se od této přímky nachází ve vzdálenosti ρ. Tuto vzdálenost nazveme impaktním parametrem (viz obrázek 17). Nalezněte závislost rozptylového úhlu χ na impaktním parametru ρ. Dále určete diferenciální účinný průřez rozptylu $d\sigma$ a jeho integrací přes celý prostorový úhel dopočtěte celkový účinný průřez rozptylu σ.



Obrázek 17

Příklad 44 (V3*)

Nalezněte závislost rozptylového úhlu χ na impaktním parametru ρ pro rozptyl částice o hmotnosti m v odpudivém Coulombově potenciálu $V = -\frac{\alpha}{r}$, kde $\alpha < 0$ je konstanta. Dále určete diferenciální účinný průřez rozptylu $d\sigma$ a jeho integrací přes celý prostorový úhel dopočtěte celkový účinný průřez rozptylu σ. Očekávali byste pro σ tak velkou hodnotu?

6 Inverzní problém

Příklad 45 (P2)
Částice se pohybuje v jedné dimenzi v (zatím neznámém) silovém poli popsaném potenciální energií $V(x)$, která je rostoucí funkcí souřadnice x a platí, že $V(0) = 0$. Pohyb s energií $E \geq 0$, který začíná z klidu v bodě $x \geq 0$ a pokračuje až do bodu $x = 0$, trvá dobu $\tau(E) = K\sqrt{E}$, kde K je konstanta. Určete tvar funkce $V(x)$.

Příklad 46 (P3)
Nalezněte průběh potenciální energie $V(x)$ stacionárního silového pole, jestliže znáte periodu oscilací testovací částice v tomto poli v závislosti na celkové energii testovací částice $T(E)$. Dále řešte pro speciální případ, kdy T je konstantna. Předpokládejte přitom, že hledaná potenciální energie má v oblasti, ve které hledáme její tvar, pouze jedno minimum.

Příklad 47 (P3*)
Nalezněte průběh potenciální energie $V(r)$, jestliže znáte závislost účinného průřezu na úhlu rozptylu pro danou energii E nalétávající částice. Předpokládejte přitom, že $V(r)$ je monotónní klesající funkcí r (odpudivé pole) a $V(0) > E$, $V(\infty) = 0$.

7 Hamiltonovy rovnice

Příklad 48 (V2*)
Napište Hamiltonovu funkci volného hmotného bodu v kartézských, sférických a válcových souřadnicích.

Příklad 49 (S1*)
Sestavte Hamiltonovy rovnice pro pohyb volného hmotného bodu v poli konzervativních sil (v kartézských souřadnicích) a ukažte, že získané rovnice jsou ekvivalentní s rovnicemi Newtonovými.

Příklad 50 (V1*)
Určete Hamiltonovu funkci a Hamiltonovy rovnice pro rovinné matematické kyvadlo délky l.

Příklad 51 (S2)
Napište Hamiltonovu funkci lineárního harmonického oscilátoru. Dále najděte řešení Hamiltonových rovnic $p(t)$, $q(t)$ obecně a pro počáteční podmínky $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$. Zjistěte, jaký tvar má trajektorie ve fázovém prostoru a ověřte platnost Liouvilleovy věty.

Příklad 52 (V2*)
Ve sférických souřadnicích sestavte Hamiltonovy rovnice pro pohyb volného hmotného bodu v centrálním silovém poli s potenciálem $V(r)$. Určete integrály pohybu.

Příklad 53 (S3)
Pro Lagrangeovu funkci $L = \frac{1}{2}mv^2 + e\vec{v}\vec{A} - e\phi$, kde $\varphi(\vec{r}, t)$ a $\vec{A}(\vec{r}, t)$ jsou skalární a vektorový potenciál elektromagnetického pole, odvoďte Hamiltonovu funkci. Pomocí Hamiltonových rovnic pak dokažte, že jde o Hamiltonián částice s nábojem e a hmotností m v daném vnějším elektromagnetickém poli.

Příklad 54 (P2)
Napište Lagrangeovu a Hamiltonovu funkci částice v neinerciální souřadné soustavě rotující s konstantní úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$.

Příklad 55 (V1*)
Ve speciální teorii relativity je Lagrangeova funkce pro volnou částici $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, kde c je rychlost světla. Najděte odpovídající Hamiltonovu funkci.

Příklad 56 (S2*)
Hmotný bod o hmotnosti m je vázán na válcovou plochu $x^2 + y^2 = R^2$ a pohybuje se pod vlivem centrální elastické síly $\vec{F} = -k\vec{r}$. Určete Hamiltonovu funkci, sestavte Hamiltonovy rovnice a řešte je.

8 Poissonovy závorky

Příklad 57 (P3*)
Dokažte Jacobiho identitu $\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0$, kde $F_i = F_i\,(p_j, q_j, t)$ a její pomocí Poissonovu větu: Poissonova závorka dvou integrálů pohybu je opět integrálem pohybu.

Příklad 58 (V1*)
Vypočtěte Poissonovu závorku $\left\{\mathrm{e}^{\alpha q}, \mathrm{e}^{\beta p}\right\}$, kde α, β jsou konstanty.

Příklad 59 (V2)
Vypočtěte Poissonovy závorky pro různé kombinace složek momentu hybnosti L_i s kartézskými souřadnicemi x_i a složkami hybnosti částice p_i, tedy závorky $\{L_i, x_j\}$ a $\{L_i, p_j\}$.

Příklad 60 (V2)
Vypočítejte Poissonovy závorky $\{L_i, L_j\}$ a $\{L_i, L^2\}$, kde $L^2 = \sum_{i=1}^{3} L_i^2$. Dále dokažte, že jsou-li L_1, L_2 integrály pohybu, potom i L_3 je integrálem pohybu.

Příklad 61 (V3*)
Ověřte, že pro Hamiltonián částice v Newtonově potenciálu $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}$, kde $\alpha > 0$, splňují složky momentu hybnosti $\vec{L}$ a Runge-Lenzova vektoru $\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} + \alpha\frac{\vec{r}}{r}$ vztahy $\{L_i, A_j\} = \epsilon_{ijk}A_k$, $\{A_i, A_j\} = \epsilon_{ijk}(-2H)L_k$.

9 Kanonické transformace

Příklad 62 (P2*)

Určete podmínku, kterou musí splňovat lineární transformace $Q = \alpha q + \beta p$, $P = \gamma q + \delta p$, kde α, β, γ, δ jsou konstanty, aby byla transformací kanonickou, a nalezněte příslušnou vytvořující funkci $F(q, Q)$.

Příklad 63 (S2)

Ukažte, že kanonická transformace $(x_1, x_2, p_1, p_2) \to (Q_R, Q_\varphi, P_R, P_\varphi)$ s vytvořující funkcí

$$F(x_1, x_2, P_R, P_\varphi) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} P_R + \left(\arctan \frac{x_2}{x_1}\right) P_\varphi$$

převádí souřadnice kartézské na polární.

Příklad 64 (S2*)

Dokažte, že transformace $Q = \frac{q^2}{2\alpha} + \frac{\alpha p^2}{2}$, $P = \arctan \frac{\alpha p}{q}$, kde α je konstanta, je kanonická. Nakreslete ve fázovém prostoru křivky konstantních Q a P a diskutujte.

Příklad 65 (S3*)

Uvažujte Hamiltonovu funkci lineárního harmonického oscilátoru ve tvaru $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$. Nalezněte takovou kanonickou transformaci a jí příslušnou vytvořující funkci, aby v nových proměnných P, Q bylo $H' = \omega P$, tj. aby Q bylo cyklickou souřadnicí.

Příklad 66 (S2)

Ukažte, že transformace $q = -\sqrt{\frac{\bar{Q}}{m\omega}} \sin \bar{P}$, $p = \sqrt{2\bar{Q} m\omega} \cos \bar{P}$ je kanonická a nalezněte její vytvořující funkci. Jak souvisí s kanonickou transformací z předchozího příkladu?

Příklad 67 (S2*)

Uvažujte transformaci $(q, p) \mapsto (Q, P)$, $Q = q^\alpha \cos \beta p$, $P = q^\alpha \sin \beta p$. Určete reálné hodnoty α, β tak, aby transformace byla kanonická. Dále odvoďte její vytvořující funkci.

Příklad 68 (V2*)

Ukažte, že dané transformace jsou kanonické.

a) $Q = \sqrt{\frac{2q}{K}} \cos p, P = \sqrt{2qK} \sin p$

b) $Q = \log \left(\frac{1}{q} \sin p\right), P = q \cot p$

c) $Q = \log \left(1 + \sqrt{q} \cos p\right), P = 2 \left(1 + \sqrt{q} \cos p\right) \sqrt{q} \sin p$

Příklad 69 (P2*)

Ukažte, že ve fázovém prostoru $\mathbb{R}^6$ bodové bezsilové částice $H = \frac{p^2}{2m}$ funkce $G_1 = p_1$ generuje jednoparametrickou grupu transformací $F_\varepsilon^{p_1} : (x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \mapsto (x_1 + \varepsilon, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$, která ponechává H invariantní (zákon zachování hybnosti).

Dále ukažte, že funkce $G_2 = L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1$ generuje jednoparametrickou grupu transformací $F_\varepsilon^{L_3} : (x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \mapsto (x_1 \cos \varepsilon - x_2 \sin \varepsilon, x_1 \sin \varepsilon + x_2 \cos \varepsilon, x_3, p_1 \cos \varepsilon - p_2 \sin \varepsilon, p_1 \sin \varepsilon + p_2 \cos \varepsilon, p_3)$, která ponechává H invariantní (zákon zachování momentu hybnosti).

10 Hamiltonova-Jacobiho rovnice

Příklad 70 (P3*)

Napište a řešte Hamiltonovu-Jacobiho rovnici pro lineární harmonický oscilátor. ($H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2$)

Příklad 71 (V1*)

Zkonstruujte hlavní funkci Hamiltonovu integrací Lagrangeovy funkce $L = \sum_i \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2$ od nuly do t po skutečné trajektorii bezsilového hmotného bodu $x_i = v_i t + x_{0i}$.

Příklad 72 (S2*)

Řešte problém volného pádu v homogenním tíhovém poli pomocí Hamiltonovy-Jacobiho rovnice.

11 Tuhé těleso

Příklad 73 (P2)

Odvoďte vztah pro rotační kinetickou energii tuhého tělesa jako funkci úhlové rychlosti a rozložení hmoty v tělese.

Příklad 74 (S2)

Spočtěte momenty setrvačnosti pro následující případy:
a) tenký kruhový disk poloměru r vzhledem k jeho ose symetrie vedoucí jeho středem,
b) tenký kruhový disk poloměru r vzhledem k ose svírající úhel α s osou symetrie vedoucí jeho středem,
c) krychle o hraně a vzhledem k obecné šikmé ose procházející jejím těžištěm.

Příklad 75 (P1*)

Spočtěte hlavní momenty setrvačnosti pro čtyřatomovou molekulu s konfigurací čtyřstěnu výšky h, jehož základnou je rovnostranný trojúhelník o hraně a.

Příklad 76 (P3*)

Řešte Eulerovy rovnice pro případ volné rotace symetrického setrvačníku (zachovává se moment hybnosti).

Příklad 77 (P3*)

Nalezněte přibližné řešení Eulerových rovnic pro případ volné rotace asymetrického setrvačníku, počáteční hodnotu momentu hybnosti L zvolte blízkou jeho hodnotě vzhledem k některé z hlavních os.

Příklad 78 (V1)

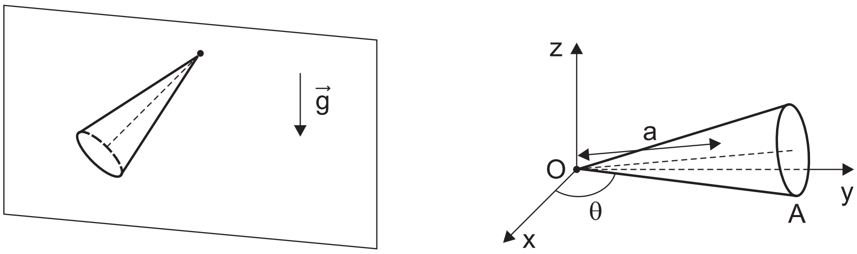
Najděte takový poloměr podstavy R a výšku válce h, aby se choval jako kulový setrvačník (tj. tenzor momentu setrvačnosti je násobkem jednotkové matice).

Příklad 79 (V2*)

Spočtěte kinetickou energii válce o poloměru R valícího se po rovině. Rozložení hmotnosti válce je takové, že jedna z hlavních os tenzoru setrvačnosti je rovnoběžná s osou válce a je od něj vzdálená o a, moment setrvačnosti vzhledem k této ose je J.

Příklad 80 (P3)

Spočtěte frekvenci malých kmitů kužele valícího se po svislé stěně a upevněného k ní za vrchol, viz obrázek 18a. Návod: Spočtěte kinetickou energii homogenního kužele valícího se po rovině oběma rozklady pohybu (přes těžište i přes bod dotyku). Výška kužele je h, těžište leží ve vzdálenosti a od vrcholu kužele na hlavní ose, viz obrázek 18b.



(a) (b)

Obrázek 18

12 Pružnost

Příklad 81 (P2)

Spočtěte tenzor deformace v rovině pro následující případy (a to nejen pro malé deformace, ale rovněž velké). Jednotlivé členy interpretujte.

a) $u = (Ax, Ay)$
b) $u = (Ax, 0)$
c) $u = (Ay, 0)$
d) $u = (Ay, Ax)$
e) $u = (-Ay, Ax)$
f) $u = (x(\cos\alpha - 1) - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y(\cos\alpha - 1))$

Příklad 82 (S2)

Nechť jsou síly působící na deformované těleso rozloženy tak, že problém můžeme považovat za rovinný. V určitém bodě P tělesa je znám tenzor napětí $\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$. Určete normálovou a tečnou složku napětí na rovině, která svírá s osou x úhel α.

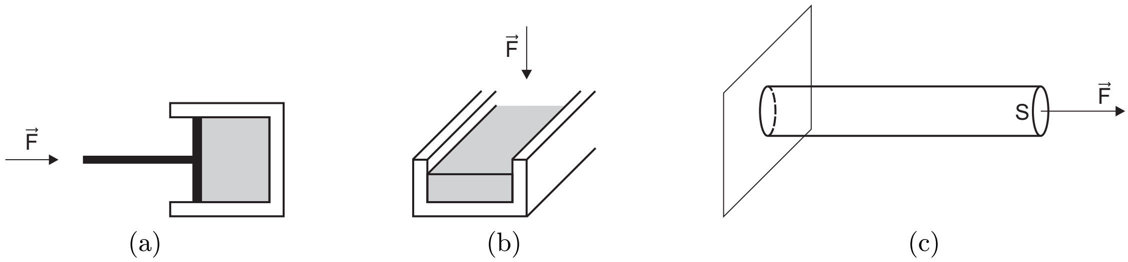
Příklad 83 (P2)

Řešte stlačování tělesa obklopeného pevnými stěnami, kde

a) těleso je uzavřeno v kvádru s pěti pevnými stěnami, šestou 'stěnou' je pohyblivý píst, viz obrázek 19a,

b) těleso je uloženo na traverze – profil se třemi pevnými stěnami (dvě boční a spodní stěna), tělesu, na které tlačíme shora pístem, je tedy umožněno rozpínat se v jedné ose, viz obrázek 19b.

c) Srovnejte tyto deformace s natahováním tyče řešeném v přednášce, viz obrázek 19c.



Obrázek 19

Příklad 84 (P3*)

Určete deformaci a diskutujte s tím spojenou změnu objemu pro tyč poloměru r a délky l visící v tíhovém poli Země.

Příklad 85 (P3*)

Koule poloměru R je deformována vlastní gravitací, najděte tuto deformaci a diskutujte změnu objemu.

Příklad 86 (P3*)

Kulová skořepina vnitřního poloměru r_1 a vnějšího poloměru r_2 je deformována tlakem. Tlak uvnitř, resp. vně skořepiny je p_1, resp. p_2. Určete deformaci a diskutujte změnu objemu. Může hustota materiálu skořepiny klesnout? Pokud ano, za jakých podmínek?

Příklad 87 (V2*)

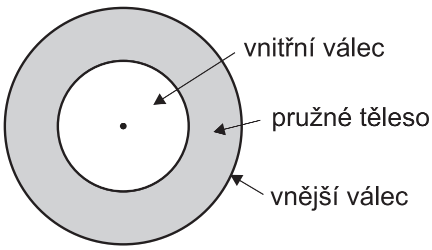
Určete deformaci válcové trubky s vnitřním, resp. vnějším poloměrem R_1, resp. R_2, na kterou působí zevnitř tlak p a tlak vně trubky je nulový.

Příklad 88 (S2*)

Určete deformaci homogenního válce, který se rovnoměrně otáčí kolem své osy symetrie. Předpokládejte, že rozměr ve směru osy rotace se nezmění.

Příklad 89 (P3*)

Válcové mezikruží je vyplněno elastickým materiálem, který je pevně přichycen ke stěnám vnějšího a vnitřního válce o poloměrech $R_1 > R_2$, viz obrázek 20. Kroucením rozumíme pootočení vnějšího válce o úhel α, přičemž vnitřní válec zůstává nehybný. Najděte moment síly, který se přenáší ve vrstvách tělesa. Závisí moment na r?



Obrázek 20

13 Tekutiny

Příklad 90 (V1)

Najděte tok hmotnosti z koule o poloměru R se středem v počátku pro radiální proudění zadané polem rychlosti

a) $\vec{v} = A(x, y, z)$,

b) $\vec{v} = A\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$,

c) $\vec{v} = A\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$,

kde A je konstanta.

Příklad 91 (P2*)

Popište rychlostní pole a najděte jeho divergenci a rotaci pro kapalinu o dynamické viskozitě η proudící nekonečnou trubkou kruhového průřezu o poloměru R_2.

Příklad 92 (S2*)

Jak se situace v předchozí úloze změní, když do trubky souose umístíme nekonečný válec o poloměru $R_1 < R_2$?

Příklad 93 (P3*)

Pro kapalinu o dynamické viskozitě η proudící v trubce trojúhelníkového průřezu o délce strany a najděte rychlostní pole, které situaci popisuje.

Příklad 94 (V2*)

Pro kapalinu o dynamické viskozitě η proudící v trubce eliptického průřezu o délce strany a najděte rychlostní pole, které situaci popisuje a jeho hmotnostní tok.

Příklad 95 (P2*)

Kapalina o dynamické viskozitě η je umístěná mezi dvěma souosými trubkami o poloměrech $R_1 < R_2$. Vnější trubka rotuje konstantní rychlostí ω. Popište rychlostní pole v kapalině a najděte jeho divergenci a rotaci.

Příklad 96 (P3)

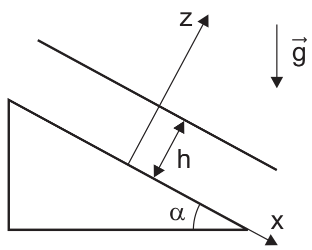
Pomocí Eulerovy rovnice nalezněte tvar hladiny pro ideální vír. Rovněž ukažte, že se celková energie částic zachovává. U ideálního víru proudnice tvoří kružnice kolmé na osu víru (vírovou čáru), jejichž středy leží na vírové čáře.

Příklad 97 (P3)

Pomocí Eulerovy rovnice nalezněte tvar volné hladiny kapaliny rotující jako celek, závislost obvodové rychlosti na poloměru je $\vec{v} = \vec{v}(r)$.

Příklad 98 (P2*)

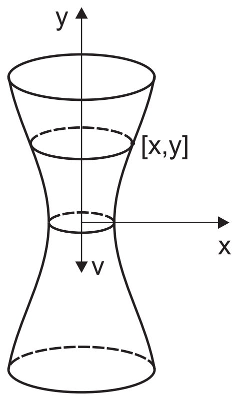
Řešte proudění v řece. Toto proudění můžeme aproximovat viskózní kapalinou proudící po nakloněné rovině se sklonem α, viz obrázek 21. Určete závislost rychlosti kapaliny $\vec{v}$ na vzdálenosti h od nakloněné roviny. Jaký je celkový objemový tok?



Obrázek 21

Příklad 99 (P2*)

Určete tvar rotačně symetrické nádoby na obrázku 22 tak, aby se při výtoku vody nejužším průřezem ve dně nádoby o plošném obsahu q hladina vody snižovala rovnoměrně, tj. konstantní rychlostí v_1.



Obrázek 22

Příklad 100 (P3)

Řešte výbuch hlubinné bomby. Hlubinnou bombu si můžete představit jako dutinu poloměru R zvětšující svůj objem v nestlačitelné kapalině rozprostírající se donekonečna. Spočtěte tlak v obecném místě kapaliny.

ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ

1 Hamiltonův princip

Příklad 1
a) Z počáteční podmínky pro polohu částice $y(t)$ plyne hodnota parametru $a = 0$, z koncové podmínky dostáváme $c = -\frac{b}{T}$. Potom funkce

$$y(t) = bt\left(1 - \frac{t}{T}\right) \qquad \text{a} \qquad \dot{y}(t) = b\left(1 - \frac{2t}{T}\right).$$

Kinetická energie částice je $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$, její potenciální energie v tíhovém poli je mgy. Lagrangián L definovaný jako rozdíl kinetické a potenciální energie má tvar

$$L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy = mb^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2t}{T} + \frac{2t^2}{T^2}\right) - mgb\left(t - \frac{t^2}{T}\right).$$

Vypočtěme akci:

$$S = \int_0^T L\,\mathrm{d}t = mb^2\left[\frac{t}{2} - \frac{t^2}{T} + \frac{2t^3}{3T^2}\right]_0^T - mgb\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3T}\right]_0^T = \frac{1}{6}\,mb^2T - \frac{1}{6}mgbT^2.$$

Hodnotu parametru $b = b_0$, pro niž je akce mimimální, určíme z podmínky $\frac{\partial S}{\partial b}|_{b=b_0} = 0$. Tedy

$$\frac{1}{3}mb_0T - \frac{1}{6}mgT^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b_0 = \frac{1}{2}gT.$$

Hodnota minimální akce je

$$S_0 = \frac{1}{6}\,m\left(\frac{1}{2}gT\right)^2 T - \frac{1}{6}\,mg\left(\frac{1}{2}\,gT\right)T^2 = -\frac{1}{24}\,mg^2T^3,$$

trajektorie s minimální akcí je dána funkcí

$$y(t) = \frac{1}{2}\,gt(T - t).$$

Odtud zrychlení částice $\ddot{y}(t) = -g$, což odpovídá zrychlení v homogenním tíhovém poli, které jsme uvažovali. Opravdu, skutečná trajektorie v homogenním poli patří do třídy trajektorií, které jsme uvažovali, proto nám tato trajektorie vyšla přesně.

b) Z počáteční podmínky pro polohu částice plyne $a = 0$, z koncové podmínky $c = \pi/T$. Potom

$$y(t) = b\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \qquad \text{a} \qquad \dot{y}(t) = \frac{b\pi}{T}\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right).$$

Vypočtěme akci

$$\begin{aligned} S &= \int_0^T L\,\mathrm{d}t = \int_0^T \left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy\right)\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^T \left(\frac{1}{2}m\frac{b^2\pi^2}{T^2}\cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) - mgb\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right)\mathrm{d}t = \\ &= \frac{mb^2\pi^2}{2T^2}\left[\frac{t}{2} + \frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]_0^T + \frac{mgbT}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right]_0^T = \frac{m\pi^2b^2}{4T} - \frac{2mgbT}{\pi}. \end{aligned}$$

Hodnota parametru $b = b_0$, pro niž je akce mimimální, vyjde z podmínky minima akce

$$\frac{m\pi^2 b_0}{2T} - \frac{2mgT}{\pi} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b_0 = \frac{4gT^2}{\pi^3}.$$

Hodnota minimální akce je

$$S_0 = \frac{m\pi^2}{4T}\left(\frac{4gT^2}{\pi^3}\right)^2 - \frac{2mgT}{\pi}\left(\frac{4gT^2}{\pi^3}\right) = \frac{2mg^2T^3}{\pi^4},$$

trajektorie s minimální akcí je popsána funkcí

$$y(t) = \frac{4gT^2}{\pi^3}\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right).$$

Zrychlení částice

$$\ddot{y}(t) = -\frac{4g}{\pi}\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

závisí na čase a mění se během pohybu v rozmezí od 0 do $-\frac{4}{\pi}g \approx -1{,}27g$. Je vidět, že tato trajektorie neodpovídá fyzikálnímu pohybu v uvažovaném homogenním tíhovém poli. To není překvapivé, protože skutečná fyzikální trajektorie není ve třídě uvažovaných trajektorí popsaných funkcí sinus.

Ze srovnání hodnot minimální akce vypočtené v případech a) a b) rovněž podle očekávání plyne, že minimální akce je menší pro pohyb po parabole, jež odpovídá skutečné trajektorii.

Příklad 2

a) Z podmínky $x(\frac{T}{2}) = 0$ dostaneme

$$0 = a\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

vzhledem k tomu, že se jedná o první průchod bodem $x = 0$ pro $t > 0$.

b) Lagrangián pro harmonický oscilátor má tvar

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

Pohybu oscilátoru v časovém intervalu $t \in [0, \tau]$ odpovídá akce

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\tau L\,\mathrm{d}t = \int_0^\tau \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right)\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\tau \left(\frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2(\omega t) - \frac{1}{2}ka^2\sin^2(\omega t)\right)\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\left[\frac{\tau}{2} + \frac{\cos(2\omega\tau)}{4\omega} - \frac{1}{4\omega}\right] - \frac{1}{2}ka^2\left[\frac{\tau}{2} - \frac{\cos(2\omega\tau)}{4\omega} + \frac{1}{4\omega}\right]. \end{aligned}$$

c) První variace akce je

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_0^\tau \left(u\frac{\partial L}{\partial x} + \dot{u}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\tau \left(-uka\sin(\omega t) + \dot{u}ma\omega\cos(\omega t)\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Integrací prvního členu metodou per-partes a využitím předpokladů $u(0) = u(\tau) = 0$ dostaneme

$$\delta S = \int_0^\tau \dot{u} \left(-\frac{ka}{\omega} + ma\omega \right) \cos(\omega t) \, \mathrm{d}t.$$

První variace akce je nulová pro $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, což odpovídá úhlové frekvenci kmitů harmonického oscilátoru.

Příklad 3

a) Rovnoměrný pohyb je popsán obecnou funkcí $x(t) = a + bt$, kde a, b jsou konstanty. Z počáteční podmínky pro polohu částice plyne $a = 0$, z koncové podmínky dostáváme $b = \frac{L}{T}$, potom funkce $x(t) = \frac{L}{T} t$. Akce pro rovnoměrný pohyb je

$$S_0 = \int_0^T \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \, \mathrm{d}t = \frac{mL^2}{2T}.$$

b) Nerovnoměrný pohyb je popsán funkcí $\tilde{x}(t) = x(t) + u(t) = \frac{L}{T} t + u(t)$. Akce pro nerovnoměrný pohyb je

$$S = \int_0^T \frac{1}{2} m \dot{\tilde{x}}^2 \, \mathrm{d}t = \frac{m}{2} \int_0^T \left(\frac{L^2}{T^2} + \frac{2L}{T} \dot{u} + \dot{u}^2 \right) \mathrm{d}t = \frac{mL^2}{2T} + \left[\frac{2L}{T} u \right]_0^T + \frac{m}{2} \int_0^T \dot{u}^2 \, \mathrm{d}t.$$

Prostřední člen je roven nule, protože $u(0) = u(T) = 0$, a integrál je pro nenulové $u(t)$ kladný. Proto je akce pro nerovnoměrný pohyb vždy větší než pro pohyb rovnoměrný.

Příklad 4

Pro lagrangián $L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$, který je funkcí zobecněných souřadnic, jejich časových derivací a času, lze z Hamiltonova principu odvodit soubor Lagrangeových rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

kde index $i = 1, \ldots n$. Nahradíme-li v nich lagrangián součtem $L + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, kde $f(q_1, \ldots, q_n, t)$ je libovolná funkce zobecněných souřadnic a času, dostaneme

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \right] = 0.$$

Výraz v první hranaté závorce je zřejmě roven nule, nulovost druhé hranaté závorky musíme ověřit. Upravujme tedy:

$$\begin{aligned}
\left[\cdots \right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial q_n \partial q_i} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t} \right)
\end{aligned}$$

Díky záměnnosti pořadí parciálních derivací je tento výraz identicky roven nule. Přidání úplné derivace libovolné funkce zobecněných souřadnic a času k lagrangiánu tedy Lagrangeovy rovnice skutečně nezmění.

Příklad 5
Budeme-li přepokládat, že se malý element struny délky $\mathrm{d}x$ pohybuje pouze ve směru osy y, pak jeho kinetická energie je $\frac{1}{2}(\rho\,\mathrm{d}x)\dot{y}^2$. Celková kinetická energie struny tedy je

$$T = \int_0^l \frac{1}{2}\rho\dot{y}^2\,\mathrm{d}x.$$

V rovnovážné poloze má struna délku l, při vychýlení z této polohy se struna prodlouží a její délka je

$$l + \Delta l = \int_0^l \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

V případě malých výchylek můžeme použít přibližné vyjádření $\sqrt{1+y'^2} \approx 1 + \frac{1}{2}y'^2$. Po dosazení do předchozího integrálu a po jeho výpočtu dostaneme

$$\Delta l = \int_0^l \frac{1}{2}y'^2\,\mathrm{d}x.$$

Při prodlužování struny je vykonána práce $\tau\Delta l$, která je rovna potenciální energii struny V, tedy

$$V = \int_0^l \frac{1}{2}\tau y'^2\,\mathrm{d}x.$$

Pro lagrangián definovaný jako rozdíl kinetické a potenciální energie pak vyjde hledaný vztah

$$L = T - V = \int_0^l \underbrace{\left(\frac{1}{2}\rho\dot{y}^2 - \frac{1}{2}\tau y'^2\right)}_{f(y,\dot{y},y')}\mathrm{d}x,$$

kde jsme pro účely dalších výpočtů označili integrand jako funkci $f(y,\dot{y},y')$. K odvození vlnové rovnice využijeme Hamiltonův princip nejmenší akce. Pohybu struny v časovém intervalu od t_1 do t_2 odpovídá akce

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l f(y,\dot{y},y')\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Uvažujme nyní malou variaci výchylky struny $\delta y(x,t)$, jejíž hodnota je nulová v časech t_1, t_2 a také v bodech $x=0$ a $x=l$, v nichž je struna upevněna. Variace akce je

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial(\delta y)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial(\delta y)}{\partial x}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Integrací druhého členu podle času t a třetího členu podle souřadnice x metodou per-partes dostaneme

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\delta y(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

neboť variace δy je nulová v krajních bodech intervalů integrace přes x i t. Dle Hamiltonova principu má být nulová první variace akce δS pro libovolnou variaci δy, která splňuje podmínku nulovosti v krajních bodech. To je možné splnit pouze pokud je výraz v hranatých závorkách z předchozí rovnice roven nule, dostáváme tedy Lagrangeovu rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0.$$

Příslušné parciální derivace pro funkci $f(y, \dot{y}, y')$ odpovídající struně jsou

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \rho \dot{y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = -\tau y'.$$

Po dosazení do Lagrangeovy rovnice dostaneme hledanou vlnovou rovnici

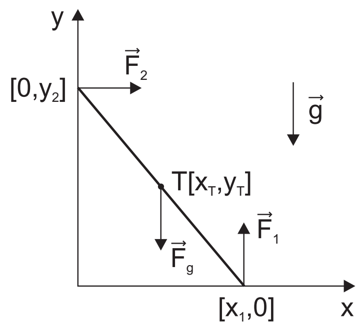
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

kde $c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ je rychlost šíření vln na struně.

2 Vazby a stabilita

Příklad 6

V kartézské soustavě souřadnic (x, y) zvolené dle obrázku 23 má dolní konec tyče souřadnice $[x_1(t), 0]$ a horní konec tyče souřadnice $[0, y_2(t)]$, úhel sevřený osou x a tyčí označme $\varphi(t)$. Na horní konec tyče působí vodorovně síla $\vec{F_2}$ od svislé stěny, na dolní konec tyče působí svisle vzhůru síla $\vec{F_1}$ od podlahy. V těžišti T$[x_T(t), y_T(t)]$ má působiště tíhová síla $\vec{F_g}$. V okamžiku, kdy se horní konec tyče oddělí od stěny, bude velikost síly $\vec{F_2}$ působící na horní konec tyče nulová. Tím pádem bude nulové i zrychlení tyče ve směru osy x, neboť zbývající dvě síly působí pouze ve svislém směru. Tuto myšlenku je třeba využít pro vyřešení celé úlohy.



Obrázek 23

Lagrangián soustavy má tvar

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}_T^2 + \dot{y}_T^2) + \frac{1}{2} J_T \dot{\varphi}^2 - mgy_T,$$

kde jednotlivé členy reprezentují po řadě kinetickou energii translačního pohybu těžiště, kinetickou energii rotace tyče kolem osy procházející těžištěm (moment setrvačnosti tyče vůči této ose je $J_T = \frac{1}{12}ml^2$) a tíhovou potenciální energii. S využitím následujících vztahů plynoucích z geometrického uspořádání soustavy

$$x_T = \frac{x_1}{2}, \qquad y_T = \frac{y_2}{2}, \qquad x_1^2 + y_2^2 = l^2, \qquad \varphi = \arctan \frac{y_2}{x_1},$$

dostaneme

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{l^2 - x_1^2}}{x_1}, \qquad \dot{\varphi} = -\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{l^2 - x_1^2}}.$$

Po dosazení do lagrangiánu

$$L = \frac{1}{6}m\dot{x}_1^2 \frac{l^2}{l^2 - x_1^2} - \frac{1}{2}mg\sqrt{l^2 - x_1^2}.$$

Z Lagrangeovy rovnice $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1}$ vyjde pro okamžik oddělení tyče od svislé stěny, kdy $\ddot{x}_1 = 0$, vztah

$$\frac{l^2\dot{x}_1^2}{l^2 - x_1^2} = \frac{3}{2}g\sqrt{l^2 - x_1^2}. \tag{1}$$

Nyní využijeme zákona zachování mechanické energie, který má tvar

$$\frac{1}{6}m\dot{x}_1^2 \frac{l^2}{l^2 - x_1^2} + \frac{1}{2}mg\sqrt{l^2 - x_1^2} = mg\frac{h}{2}.$$

Po dosazení z rovnice (1) a vyjádření x_1 jako funkce h dojdeme k výsledku

$$y_2 = \sqrt{l^2 - x_1^2} = \frac{3}{2}\,h\,.$$

Horní konec tyče se oddělí od stěny ve výšce $\frac{4}{5}h$ nad podlahou. Je zajímavé, že výsledek nezávisí na délce tyče.
Poznámka: Řešení úlohy by bylo jednodušší, kdybychom místo nezávisle proměnné x_1 použili úhel φ.

Příklad 7
Tělísko se oddělí ve výšce $\frac{1}{3}r$ pod vrcholem koule.

Příklad 8
V rovnovážné poloze je úhel $\varphi_2 = \arctan \frac{m_2}{m_1}$, úhel $\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{\pi}{2}$.

Příklad 9
Pro $a \leq 2p$ je v rovnovážné poloze tyč vodorovná. Pro $a > 2p$ existují dvě rovnovážné polohy – v jedné je tyč vodorovná, ve druhé tyč prochází ohniskem paraboly.

3 Eulerovy-Lagrangeovy rovnice

Příklad 10
Vzhledem k inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí, jejíž osa y je orientována svisle dolů, se těleso o hmotnosti m pohybuje se zrychlením o velikosti

$$\ddot{y} = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}}.$$

Příklad 11
Vzhledem k inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí, jejíž osa y je orientována svisle dolů, je poloha kostek o hmostnosti m_1 a m_2 určena souřadnicemi y_1 a y_2. Z uspořádání kladek vyplývá, že při infinitezimálním posunutí první kostky o vzdálenost $\mathrm{d}y_1$ se druhá kostka posune o vzdálenost $\mathrm{d}y_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{d}y_1$. Integrací tohoto vztahu dostaneme

$$y_2 = -\frac{1}{2}(C + y_1) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{y}_2 = -\frac{1}{2}\dot{y}_1,$$

kde C je konstanta. Dosazením do vztahů pro kinetickou a potenciální energii

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2, \qquad\qquad V = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2$$

dostaneme lagrangián ve tvaru

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + \frac{1}{4}m_2)\dot{y}_1^2 + m_1 g y_1 - \frac{1}{2}m_2 g(C + y_2).$$

Po výpočtu Lagrangeovy rovnice vyjádříme zrychlení kostky o hmotnosti m_1 vztahem

$$\ddot{y}_1 = \frac{m_1 - \frac{1}{2}m_2}{m_1 + \frac{1}{4}m_2}\, g.$$

Příklad 12
Vzhledem k neinerciální vztažné soustavě pohybující se svisle vzhůru se zrychlením o velikosti A, jejíž osa y_k je orientována svisle dolů, je poloha kostek o hmostnosti m_1 a m_2 určena souřadnicemi y_{k1} a y_{k2}. Při infinitezimálním posunutí první kostky o vzdálenost $\mathrm{d}y_{k1}$ vzhledem ke kladce se druhá kostka vzhledem ke kladce posune o vzdálenost $\mathrm{d}y_{k2} = -\mathrm{d}y_{k1}$. Integrací tohoto vztahu dostaneme

$$y_{k2} = C - y_{k1} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{y}_{k2} = -\dot{y}_{k1},$$

kde C je konstanta.

Vzhledem k inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí, jejíž osa y je orientována svisle dolů, je poloha kostek o hmostnosti m_1 a m_2 určena souřadnicemi

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{01} + v_{01}t - \frac{1}{2}At^2 + y_{k1}, \\ y_2 &= y_{02} + v_{02}t - \frac{1}{2}At^2 - y_{k1}, \end{aligned}$$

kde y_{01}, y_{02}, v_{01}, v_{02} jsou konstanty určující polohu a rychlost kostek v čase $t = 0$. Po výpočtu časových derivací a dosazením do vztahů pro kinetickou a potenciální energii

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2, \qquad V = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2$$

dostaneme lagrangián ve tvaru

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2} m_1 [(v_{01} - At) + \dot{y}_{k1}]^2 + \frac{1}{2} m_2 [(v_{02} - At) - \dot{y}_{k1}]^2 + \\ &\quad + m_1 g (y_{01} + v_{01} t - \frac{1}{2} A t^2 + y_{k1}) + m_2 g (y_{02} + v_{02} t - \frac{1}{2} A t^2 - y_{k1}). \end{aligned}$$

Po výpočtu Lagrangeovy rovnice $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{k1}} = \frac{\partial L}{\partial y_{k1}}$ vyjádříme zrychlení

$$\ddot{y}_{k1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (g + A).$$

Pro zrychlení kostky o hmotnosti m_1 vzhledem k Zemi pak dostaneme vztah

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y}_{k1} - A = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (g + A) - A.$$

Poznámka: Uvedený výsledek zůstává v platnosti i tehdy, jestliže zrychlení A není konstantní, ale mění se v čase.

Příklad 13

Vzhledem k inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí, jejíž osa x je orientována šikmo dolů podél nakloněné roviny, je velikost zrychlení těžiště válce

$$\ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$

Příklad 14

Vzhledem k inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí, jejíž osa x je orientována šikmo dolů podél nakloněné roviny, je velikost zrychlení težiště válce $\ddot{x}_v = \frac{2}{3} g \sin \alpha$, velikost zrychlení těžiště koule je $\ddot{x}_k = \frac{5}{7} g \sin \alpha$. Koule dosáhne většího zrychlení než válec, zrychlení těles nezávisí na $\rho_{1,2}$ ani na $r_{1,2}$.

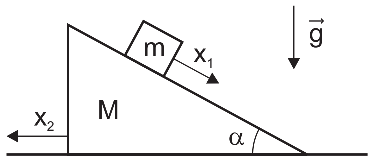
Příklad 15

Vzhledem k inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí, jejíž osa x je orientována šikmo dolů podél nakloněné roviny, je velikost zrychlení tělesa o hmotnosti m_1

$$\ddot{x} = \frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Příklad 16

Zobecněné souřadnice zvolme tak, že x_1 je poloha bloku vzhledem k nakloněné rovině



Obrázek 24

(měřená směrem dolů podél nakloněné roviny) a x_2 je poloha nakloněné roviny měřená podél vodorovné roviny zprava doleva (viz obrázek 24). Kinetická energie má tvar

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\left[(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\cos\alpha)^2 + (\dot{x}_1\sin\alpha)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2\cos\alpha + \dot{x}_1^2). \end{aligned}$$

Potenciální energie je

$$V = C - mgx_1\sin\alpha,$$

kde C je konstanta. Pro lagrangián pak dostáváme výraz

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2\cos\alpha + \dot{x}_1^2) - C + mgx_1\sin\alpha.$$

Po jeho dosazení do Lagrangeových rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial L}{\partial x_2}$$

vyjde

$$\begin{gathered} m\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_2\cos\alpha = mg\sin\alpha, \\ (M+m)\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_1\cos\alpha = 0. \end{gathered}$$

Odtud můžeme vyjádřit zrychlení $\ddot{x}_1$ (tj. zrychlení bloku podél nakloněné roviny) i zrychlení $\ddot{x}_2$ (tj. zrychlení nakloněné roviny ve vodorovném směru) ve tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \left(\frac{m\sin\alpha\cos^2\alpha}{M + m\sin^2\alpha} - \sin\alpha\right)g, \\ \ddot{x}_2 &= \frac{m\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}\,g. \end{aligned}$$

Příklad 17

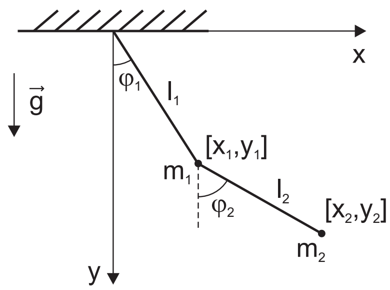
Vzhledem k inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí, jejíž osa x je orientována vodorovně zleva doprava, se klín o hmotnosti M pohybuje se zrychlením o velikosti

$$\ddot{x} = \frac{mg(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}{2M + 4m - m(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}\,.$$

Příklad 18
Počátek kartézské soustavy souřadnic (x, y) pevně spojené se Zemí umístíme do bodu závěsu dvojitého kyvadla (viz obrázek 25). Poloha částic o hmotnosti m_1 a m_2 je určena dvojicemi souřadnic x_1, y_1 a x_2, y_2. Z geometrického uspořádání pro ně dostaneme vztahy

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin\varphi_1, \\ y_1 &= l_1 \cos\varphi_1, \\ x_2 &= l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2, \\ y_2 &= l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2. \end{aligned}$$

Jejich časové derivace jsou



Obrázek 25

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1, \\ \dot{y}_1 &= -l_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1, \\ \dot{x}_2 &= l_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2, \\ \dot{y}_2 &= -l_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 - l_2\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2. \end{aligned}$$

S využitím těchto vztahů upravíme vztah pro kinetickou energii

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \\ &= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)]. \end{aligned}$$

a potenciální energii

$$V = -m_1gy_1 - m_2gy_2 = -m_1gl_1\cos\varphi_1 - m_2g(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2).$$

Lagrangián

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + \\ &\quad + m_1gl_1\cos\varphi_1 + m_2g(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2). \end{aligned}$$

Po dosazení lagrangiánu do Lagrangeových rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1} = \frac{\partial L}{\partial\varphi_1}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_2} = \frac{\partial L}{\partial\varphi_2}.$$

a výpočtu příslušných derivací dostaneme pohybové rovnice popisující pohyb dvojitého kyvadla

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) &= -(m_1+m_2) g l_1 \sin\varphi_1,\\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1-\varphi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) &= -m_2 g l_2 \sin\varphi_2.\end{aligned}$$

Pro případ malých amplitud kmitů lze tyto rovnice linearizovat – siny nahradíme jejich argumentem, cosiny nahradíme jedničkou a zanedbáme vyšší řády funkcí $\dot{\varphi}_1$ a $\dot{\varphi}_2$. Vyjde

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 &= -(m_1+m_2) g l_1 \varphi_1,\\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 &= -m_2 g l_2 \varphi_2.\end{aligned} \tag{2}$$

Nyní vypočteme vlastní frekvence ω kmitů dvojitého kyvadla. Předpokládejme, že funkce φ_1, φ_2 mají tvar

$$\varphi_1 = A_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \qquad \varphi_2 = A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

kde A_1, A_2 jsou komplexní konstanty. Potom

$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega^2 A_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \qquad \ddot{\varphi}_2 = -\omega^2 A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

Dosazením do rovnic (2) a úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}A_1[(m_1+m_2)(g-l_1\omega^2)] + A_2[-m_2 l_2 \omega^2] &= 0,\\ A_1[-m_2 l_1 \omega^2] + A_2[m_2(g-l_2\omega^2)] &= 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Tuto soustavu rovnic pro amplitudy A_1, A_2 můžeme přepsat do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} (m_1+m_2)(g-l_1\omega^2) & -m_2 l_2 \omega^2 \\ -m_2 l_1 \omega^2 & m_2(g-l_2\omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Vlastní frekvence kmitů ω vypočteme z podmínky nulovosti determinantu matice soustavy, tedy

$$\begin{vmatrix} (m_1+m_2)(g-l_1\omega^2) & -m_2 l_2 \omega^2 \\ -m_2 l_1 \omega^2 & m_2(g-l_2\omega^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Po vypočtení determinantu a úpravě dojdeme k rovnici

$$m_1 l_1 l_2 \omega^4 - (m_1+m_2)(l_1+l_2) g \omega^2 + (m_1+m_2) g^2 = 0,$$

která vzhledem k proměnné ω^2 představuje kvadratickou rovnici. Její řešení je

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(m_1+m_2)(l_1+l_2)g}{2 m_1 l_1 l_2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 m_1 l_1 l_2}{(m_1+m_2)(l_1+l_2)^2}}\right).$$

Pro speciální případ, kdy $m_1 = m_2 = m$ a $l_1 = l_2 = l$ dostaneme

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l}(2 \pm \sqrt{2}).$$

Dosazením do rovnic (3) vyjdou pro tento případ vztahy mezi amplitudami

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{g}{l}(2+\sqrt{2}) &\Rightarrow&\qquad A_2 = -\sqrt{2} A_1,\\ \omega_2^2 &= \frac{g}{l}(2-\sqrt{2}) &\Rightarrow&\qquad A_2 = \sqrt{2} A_1.\end{aligned}$$

Nižší vlastní frekvence odpovídá kmitání částic ve fázi, vyšší frekvence pak kmitání v protifázi.

Příklad 19

Výchylku kyvadla od osy dané středem čepu a bodem závěsu kyvadla popisuje zobecněná souřadnice φ. Polohu tělesa o hmotnosti m v kartézské soustavě souřadnic (x, y), jejíž střed je shodný se středem čepu a jež je pevně spojena se Zemí, lze vyjádřit vztahy

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos(\omega t) + l\cos(\omega t + \varphi), \\ y(t) &= R\sin(\omega t) + l\sin(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Potenciální energie je nulová, proto má lagrangián tvar

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m[R^2\omega^2 + 2R\omega l(\omega + \dot{\varphi})\cos\varphi + l^2(\omega + \dot{\varphi})^2].$$

Lagrangeova rovnice popisující pohyb rotujícího kyvadla

$$l\ddot{\varphi} + R\omega^2 \sin\varphi = 0$$

je formálně shodná s rovnicí popisující pohyb matematického kyvadla se stejnou délkou závěsu l

$$l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$$

Ze srovnání obou rovnic plyne, že rotující kyvadlo se chová jako matematické kyvadlo v tíhovém poli $g = R\omega^2$.

K tomuto výsledku lze dospět i úvahou, jestliže budeme situaci popisovat v neinerciální rotující soustavě spojené s čepem. Na těleso pak působí odstředivá síla, která má vzhledem k čepu nenulový moment. Není těžké ukázat (nejlépe geometrickou úvahou využívající dvojí vyjádření plochy trojúhelníka s vrcholy danými čepem, tělesem a středem rotace), že tento moment je roven $\omega^2 Rl\sin\varphi$, tedy je stejný, jako moment působící na matematické kyvadlo v homogenním gravitačním poli intenzity $\omega^2 R$. Na těleso působí v uvedené neinerciální soustavě rovněž Coriolisova síla $\vec{F_c} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$, ta je však kolmá na rychlost tělesa $\vec{v}$ vzhledem k této soustavě, má tedy směr tyče l, její moment vhledem k čepu je proto nulový a kývání tělesa tak neovlivní.

Příklad 20

Počátek kartézské soustavy souřadnic (x, y) pevně spojené se Zemí umístíme do bodu, v němž je závěs kyvadélka v okamžiku, kdy je pružina v nenapjatém stavu. Za zobecněné souřadnice popisující soustavu zvolíme polohu kvádru danou souřadnicí x a odchylku kyvadla od svislého směru danou úhlem φ.

Lagrangeovy rovnice jsou

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi &= -kx, \\ ml\ddot{x}\cos\varphi + ml^2\ddot{\varphi} &= -mgl\sin\varphi, \end{aligned}$$

linearizované Lagrangeovy rovnice

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} &= -kx, \\ m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} &= -mg\varphi. \end{aligned}$$

Pro vlastní frekvence vyjdou dvě hodnoty

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{k}{M} + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{g}{l} \pm \sqrt{\left[\frac{k}{M} + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{g}{l}\right]^2 - 4\frac{k}{M}\frac{g}{l}}\right\}.$$

Příklad 21
Lagrangeova rovnice

$$(1 + 4A^2x^2)\ddot{x} + 4A^2x\dot{x}^2 = -2Agx.$$

Příklad 22
Ve válcové soustavě souřadnic (r, φ, z), kdy osa z je shodná s osou kuželu, lze popsat kužel rovnicí $z = r\cot\alpha$. Lagrangián má tvar

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\cot^2\alpha) - mgr\cot\alpha.$$

Lagrangeovy rovnice jsou

$$\begin{aligned} (1 + \cot^2\alpha)m\ddot{r} &= mr\dot{\varphi}^2 - mg\cot\alpha, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\varphi}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Velikost složky momentu hybnosti ve směru osy z se zachovává a je dána výrazem $l_z = mr^2\dot{\varphi}$.

Příklad 23
Výpočet provedeme v kartézské soustavě souřadnic (x, y, z). Polohový vektor $\vec{r}$ a vektor rychlosti částice $\vec{v}$ rozepíšeme do složek

$$\vec{r} = (x, y, z), \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Skalární potenciál φ a každá ze složek vektorového potenciálu $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ je funkcí souřadnic a času, tj.

$$\varphi = \varphi(x, y, z, t), \qquad A_x = A_x(x, y, z, t), \qquad A_y = A_y(x, y, z, t), \qquad A_z = A_z(x, y, z, t).$$

Rozepsáním Lagrangeovy rovnice $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m\dot{x} + qA_x] &= q\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ m\ddot{x} + q\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) &= q\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned}$$

Po úpravě

$$m\ddot{x} = q\left(-\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + q\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}\right).$$

Zavedeme-li vektor intenzity elektrického pole $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ a vektor magnetické indukce $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ vztahy

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t})\right), \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right), \end{aligned}$$

rovnici (5) přepsat

$$m\ddot{x} = qE_x + q(B_z\dot{y} - B_y\dot{z}).$$

Přímým výpočtem ověříme, že výraz $B_z\dot{y} - B_y\dot{z}$ je roven z-ové složce vektoru

$$\vec{v} \times \vec{B} = (B_z\dot{y} - B_y\dot{z}, B_x\dot{z} - B_z\dot{x}, B_y\dot{x} - B_x\dot{y}),$$

Analogickým rozepsáním zbývajících dvou Lagrangeových rovnic ověříme platnost vektorového vztahu

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

Příklad 24

Za zobecněnou souřadnici popisující pohyb řetězu zvolme vertikální polohu jeho konce visícího přes hranu stolu (viz obrázek 26), označme ji $y(t)$. Rovinu stolu zvolme za hladinu nulové potenciální energie v tíhovém poli. Kinetická energie řetězu je $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$. Potenciální energie části řetězu, která leží na stole, je nulová. Potenciální energie části řetězu visící přes hranu stolu, jejíž hmotnost je $m\frac{y}{l}$, má tvar $V = -mg\frac{y}{l}\frac{y}{2}$. Lagrangián soustavy tedy je

$$L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}mg\frac{y^2}{l},$$

Po dosazení do Lagrangeovy rovnice $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y}$ vyjde

Obrázek 26

$$\ddot{y} - \omega^2 y = 0,$$

kde $\omega^2 = \frac{g}{l}$. Obecné řešení této diferenciální rovnice má tvar

$$y(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t},$$

kde A, B jsou reálné konstanty, jejichž hodnoty určíme z počátečních podmínek. V čase $t = 0$ visí přes hranu stolu část řetězu délky a, tedy $y(0) = 0$, zároveň jeho rychlost je nulová, tedy $\dot{y}(0) = 0$. Dosazením těchto podmínek do rovnice (5) a vztahu

$$\dot{y}(t) = A\omega\mathrm{e}^{\omega t} - B\omega\mathrm{e}^{-\omega t},$$

dostaneme soustavu dvou rovnic

$$a = A + B, \qquad 0 = A - B.$$

Řešením jsou hodnoty konstant $A = B = \frac{a}{2}$, potom závislost polohy konce řetězu na čase je dána funkcí

$$y(t) = \frac{a}{2}(\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t}) = a\cosh(\omega t) = a\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right).$$

Invertováním získáme závislost času na poloze konce řetězu

$$t(y) = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{arccosh}\left(\frac{y}{a}\right).$$

Řetěz sjede ze stolu v okamžiku, kdy $y = l$. Pro zadané číselné hodnoty vychází $t = 1{,}35$ sekundy.

Příklad 25
Lagrangián soustavy je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2),$$

Z Lagrangeovy rovnice $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r}$ dostaneme diferenciální rovnici

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0,$$

jejíž obecné řešení je

$$r(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t},$$

kde A, B jsou reálné konstanty. Jejich hodnoty určíme dosazením počátečních podmínek $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$ do rovnice (5) a její časové derivace

$$\dot{r}(t) = A\omega\mathrm{e}^{\omega t} - B\omega\mathrm{e}^{-\omega t}.$$

Hodnoty konstant vyjdou $A = B = \frac{r_0}{2}$, výsledná funkce popisující radiální polohu kuličky je

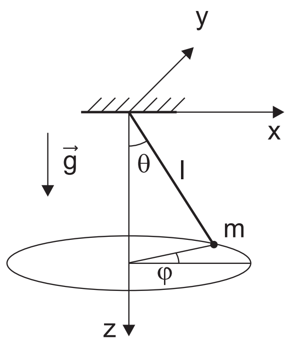
$$r(t) = r_0\cosh(\omega t).$$

Příklad 26
Poloha částice o hmotnosti m zavěšené na nehmotném závěsu délky l je popsána dvojicí zobecněných souřadnic – úhly φ a θ, které jsou znázorněny na obrázku 27. Pomocí nich lze vyjádřit polohu částice v kartézské soustavě souřadnic (x, y, z) s počátkem v bodě závěsu kyvadla (viz obrázek 27) vztahy

$$\begin{aligned} x &= l\cos\varphi\sin\theta, \\ y &= l\sin\varphi\sin\theta, \\ z &= l\cos\theta. \end{aligned} \tag{5}$$

Lagrangián soustavy je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + mgl\cos\theta.$$



Obrázek 27

Pohybové rovnice pak jsou

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta\right) &= 0, \\ ml^2\ddot{\theta} &= ml^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta. \end{aligned}$$

Z první pohybové rovnice vyplývá, že se zachovává složka momentu hybnosti ve směru osy z daná vztahem $l_z = ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta$. Existenci tohoto zákona zachování lze zdůvodnit různými argumenty:
1) z-ová složka výsledného momentu sil působících na částici je nulová, proto musí být z-ová složka momentu hybnosti konstantní,
2) úhel φ je cyklická souřadnice, musí se tedy zachovávat příslušná zobecněná hybnost,
3) lagrangián je invariantní vůči otočení soustavy kolem osy z, proto se zachovává z-ová složka momentu hybnosti.

Kromě toho se zachovává zobecněná energie $E = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) - mgl\cos\theta$.

Příklad 27
Lagrangeova rovnice je

$$l\ddot{\varphi} + 2\dot{l}\dot{\varphi} + g\sin\varphi = 0,$$

kde φ je výchylka kyvadla od svislé osy.

4 Variační počet

Příklad 28
Hledanou křivku budeme parametrizovat v kartézských souřadnicích jako $(x(t), y(t))$, kde t je parametr. Plochu uvnitř křivky můžeme vyjádřit jako $S = \frac{1}{2}\left|\oint \vec{r}\times \mathrm{d}\vec{r}\right|$, protože $\left|\frac{1}{2}\vec{r}\times \mathrm{d}\vec{r}\right|$ je očividně plocha infinitezimálního trojúhelníčka opsaného polohovým vektorem $\vec{r}$ při jeho změně o $\mathrm{d}\vec{r}$. Přepsáním pomocí parametru t můžeme plochu a délku křivky po řadě vyjádřit jako

$$S = \frac{1}{2}\left|\oint \vec{r}\times \mathrm{d}\vec{r}\right| = \frac{1}{2}\left|\oint \vec{r}\times \dot{\vec{r}}\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{2}\oint (x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathrm{d}t\,, \qquad l = \oint \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Tečky značí derivace podle parametru t.

Maximální plochu při podmínce pevné délky křivky (tj. $l = h$) budeme hledat metodou Lagrangeových multiplikátorů. Budeme tedy maximalizovat veličinu

$$A = S - \lambda(l - h) = \lambda h + \oint \underbrace{\left(\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{2} - \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right)}_{f(x,y,\dot{x},\dot{y})} \mathrm{d}t \,,$$

kde λ je Lagrangeův multiplikátor. Eulerovy-Lagrangeovy rovnice pak jsou

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \dot{y} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \dot{x} = 0 \tag{7}$$

Tyto rovnice by bylo poměrně obtížné řešit obecně. Využijeme proto volnost, kterou nám nabízí volba parametru t, a vybereme t jako délku měřenou podél hledané křivky. Díky tomu platí $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}t^2$ a proto $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 1$. Rovnice (6) a (7) pak přejdou na jednoduchou soustavu

$$\lambda\ddot{x} + \dot{y} = 0 \,, \qquad \lambda\ddot{y} - \dot{x} = 0 \,, \tag{8}$$

kterou můžeme řešit např. zderivováním jedné rovnice, dosazením do druhé, nalezením funkcí $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ a následnou integrací. Obecné řešení soustavy pak je

$$x(t) = x_0 + R\cos\left(\frac{t}{\lambda} + \varphi_0\right) \,, \qquad y(t) = y_0 + R\sin\left(\frac{t}{\lambda} + \varphi_0\right) \,, \tag{9}$$

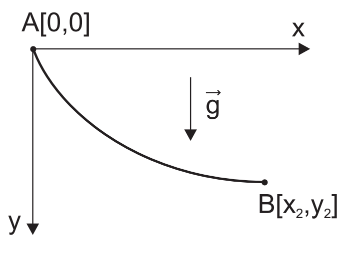
což je rovnice kružnice s poloměrem R a středem (x_0, y_0). Křivka obepínající největší plochu při dané délce je tedy podle očekávání kružnice.

Příklad 29

Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit kartézskou soustavu souřadnic tak, že její počátek je shodný s bodem A (viz obrázek 28) a osa x odpovídá nulové hladině potenciální energie v tíhovém poli. Protože v bodě A má částice také nulovou rychlost, je její celková energie rovna nule. Při pohybu podél hledané trajektorie je kinetická energie částice $T = \frac{1}{2}mv^2$, kde v je velikost její rychlosti, a potenciální energie $V = -mgy$. Potom platí

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2gy}.$$

Má-li se částice dostat z bodu A do B za nejmenší čas, je třeba najít funkci $x(y)$, pro niž



Obrázek 28

nabývá minima funkcionál

$$t=\int_A^B \frac{\mathrm{d}l}{v}=\int_A^B \sqrt{\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{2gy}}=\int_{y_1}^{y_2} \underbrace{\sqrt{\frac{1+x'^2}{2gy}}}_{f}\,\mathrm{d}y,$$

kde $\mathrm{d}l$ je element délky trajektorie a čárka značí derivaci podle y. Hledanou funkci $x(y)$ získáme z Eulerovy rovnice $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\partial f}{\partial x'}=\frac{\partial f}{\partial x}$, která je formálně shodná s dříve používanou Eulerovou-Lagrangeovou rovnicí, avšak místo času t je nyní nezávislou proměnnou souřadnice y. Po výpočtu příslušných parciálních derivací vyjde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{x'}{\sqrt{y(1+x'^2)}}\right]=0.$$

Integrací této rovnice podle proměnné y dostaneme

$$\frac{x'}{\sqrt{y(1+x'^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2a}},$$

kde pravá strana představuje vhodně zapsanou integrační konstantu. Řešení této diferenciální rovnice vyjádříme pomocí parametru φ. Zavedeme-li substituci $x'=\cot\frac{\varphi}{2}$, po umocnění celé rovnice a vyjádření y dostaneme

$$y=\frac{2ax'^2}{1+x'^2}=\frac{2a\cot^2\frac{\varphi}{2}}{1+\cot^2\frac{\varphi}{2}}=2a\cos^2\frac{\varphi}{2}=a(1+\cos\varphi).$$

S využitím tohoto výsledku upravíme vztah $x'=\cot\frac{\varphi}{2}$, tedy

$$\mathrm{d}x=\cot\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}y=a\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}(-\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi=-a(1+\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Po integraci

$$x=-a(\varphi+\sin\varphi)+b,$$

kde b je integrační konstanta. Přechodem od proměnné φ k proměnné θ podle vztahu $\varphi=\pi-\theta$ a s využitím podmínky průchodu křivky bodem A$[0,0]$ dostaneme parametrické rovnice cykloidy

$$x=a(\theta-\sin\theta),\qquad\qquad y=a(1-\cos\theta).$$

Hodnotu konstanty a lze určit z podmínky průchodu křivky bodem B$[x_2,y_2]$. Můžeme také jednoduše ověřit, že v počátku souřadnic má cykloida svislou tečnu.

Příklad 30

Maupertuisův princip říká, že částice se bude pohybovat po takové trajektorii, pro niž nabývá extrému (většinou minima) funcionál

$$J=\int v(x,y)\,\mathrm{d}l=\int\sqrt{\frac{2(E-V(x,y))}{m}}\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2},$$

kde $V(x,y)$ je potenciální energie soustavy částice + Země. Dosazením vztahů pro potenciální energii $V(x,y) = mgy$ a celkovou energii soustavy $E = mgh$ do funkcionálu dostaneme

$$J = \int \sqrt{\frac{2(E - V(x,y))}{m}} \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \int \underbrace{\sqrt{2g(h-y)(1+x'^2)}}_{f(x,x',y)} \, \mathrm{d}y,$$

kde $x' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Minimum funkcionálu nastane pro takovou funkci f, pro niž je splněna Eulerova rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Po výpočtu příslušných parciálních derivací vyjde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\sqrt{2g(h-y)} \cdot \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}\right) = 0.$$

Tuto rovnici můžeme integrovat podle proměnné y, výsledek je

$$\sqrt{2g(h-y)} \cdot \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} = C_1,$$

kde C_1 je integrační konstanta. Separací proměnných dostaneme výraz

$$\mathrm{d}x = \pm \frac{C_1 \mathrm{d}y}{\sqrt{2g(h-y) - C_1^2}},$$

který můžeme integrovat, tedy

$$x + C_2 = \mp \frac{C_1}{g}\sqrt{2g(h-y) - C_1^2},$$

kde C_2 je další integrační konstanta. Vyjádříme-li nyní funkci $y(x)$, dostaneme rovnici paraboly

$$y(x) = h + \frac{C_1^2}{2g} - \frac{g}{2C_1^2}(x + C_2)^2.$$

Příklad 31

Trajektorie částice v centrálním potenciálu leží v rovině, v níž zavedeme soustavu polárních souřadnic (r, φ). Podobným postupem jako v předchozí úloze ukážeme, že trajektorie je popsána rovnicí

$$r = \frac{C_1^2}{\frac{\alpha}{m} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{m^2} + \frac{2EC_1^2}{m}} \cos(\varphi + C_2)},$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty, a má tedy tvar kuželosečky.

Příklad 32
Fermatův princip říká, že paprsek světla se bude pohybovat po takové trajektorii, pro niž nabývá extrému (obvykle minima) funkcionál

$$J = \int n(\vec{r})\,\mathrm{d}l,$$

kde dl je element délky trajektorie. Výpočet proveďme v kartézské soustavě souřadnic (x, y, z), v níž souřadnice trajektorie parametrizujeme pomocí parametru τ, tedy

$$x = x(\tau), \qquad y = y(\tau), \qquad z = z(\tau).$$

Element délky trajektorie je $\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$, funkcionál J tedy můžeme přepsat

$$J = \int n(x, y, z)\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} = \int \underbrace{n(x, y, z)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}_{f}\,\mathrm{d}\tau,$$

kde tečka značí derivaci podle parametru τ. Minimum funkcionálu nastane pro takovou funkci f, pro niž je splněna trojice rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Upravujme první z nich – po výpočtu příslušných parciálních derivací vyjde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{n\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \frac{\partial n}{\partial x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Nyní od parametru τ přejdeme k parametru l, který udává délku trajektorie. S využitím vztahu $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\tau} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ dále rovnici postupně upravujme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(n\dot{x}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}l}\right) &= \frac{\partial n}{\partial x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\tau}, \\
\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}l}\right) &= \frac{\partial n}{\partial x}, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\right) &= \frac{\partial n}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Dopočteme-li analogické rovnice pro proměnné y a z, můžeme celou trojici zapsat ve vektorovém tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(n(\vec{r})\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}l}\right) = \vec{\nabla}n(\vec{r}),$$

který představuje hledanou diferenciální rovnici popisující trajektorii paprsku v prostředí se spojitým rozložením indexu lomu $n(\vec{r})$.

5 Řešení pohybových rovnic

Příklad 33

Zavedeme-li v rovině xy soustavu polárních souřadnic (r, φ), je poloha kuličky popsána vztahy

$$x = r\cos(\omega t), \qquad y = r\sin(\omega t)\,, \tag{10}$$

kde jsme kvůli zjednodušení zápisu (avšak bez újmy na obecnosti) zvolili, že v čase $t = 0$ se kulička nachází na ose x. S pomocí vyjádření časových derivací

$$\dot{x} = \dot{r}\cos(\omega t) - r\omega\sin(\omega t), \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin(\omega t) + r\omega\cos(\omega t)$$

dostaneme výraz pro kinetickou energii

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2).$$

Potenciální energie pružnosti je

$$V = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2,$$

kde r_0 je délka pružiny v nenapjatém stavu. Lagrangián soustavy pak vychází

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) - \frac{1}{2}k(r - r_0)^2.$$

Vypočtěme Lagrangeovu rovnici

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{\partial L}{\partial r}, \\ m\ddot{r} &= mr\omega^2 - k(r - r_0). \end{aligned} \tag{11}$$

Označíme-li

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \qquad \Omega^2 = \frac{k}{m} - \omega^2 = \omega_0^2 - \omega^2,$$

přepíšeme Lagrangeovu rovnici do tvaru

$$\ddot{r} + \Omega^2 r - \omega_0^2 r_0 = 0.$$

Obecné řešení této diferenciální rovnice je

$$r(t) = \frac{r_0\omega_0^2}{\Omega^2} + A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t),$$

kde A, B jsou konstanty závislé na počátečních podmínkách.

Energie E soustavy je dána součtem kinetické a potenciální energie, tedy

$$E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2.$$

Efektivní potenciál tedy má tvar

$$V_{\mathrm{ef}} = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2.$$

S využitím Lagrangeovy rovnice (11) vypočtěme časovou změnu energie soustavy

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\dot{r}\ddot{r} + mr\dot{r}\omega^2 + k(r - r_0)\dot{r} = 2mr\dot{r}\omega^2.$$

Po integraci dostaneme

$$E = mr^2\omega^2 + \text{konst.}$$

Z výsledku je vidět, že hodnota energie E není v čase konstantní. Fyzikální význam výrazu, vypočteného pro její časovou změnu, odvodíme z dynamického pohledu na tuto soustavu.

V inerciální soustavě pevně spojené s rovinou xy působí v každém okamžiku na kuličku dvě síly. V radiálním směru působí pružina silou $\vec{F_p}$, ve směru kolmém na radiální směr působí stěna trubky silou $\vec{F}$ (viz obrázek 29). Tření mezi trubkou a kuličkou neuvažujeme. Pohybové rovnice kuličky tedy budou

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F\sin(\omega t) + F_p\cos(\omega t), \\ m\ddot{y} &= F\cos(\omega t) + F_p\sin(\omega t), \end{aligned}$$

Po výpočtu druhých časových derivací z rovnic (10) dostaneme

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{r}\cos(\omega t) - 2\dot{r}\omega\sin(\omega t) - r\omega^2\cos(\omega t), \\ \ddot{y} &= \ddot{r}\sin(\omega t) + 2\dot{r}\omega\cos(\omega t) - r\omega^2\sin(\omega t) \end{aligned}$$

a využitím vztahu pro velikost pružné síly

$$F_p = -k(r - r_0)$$

přepíšeme pohybové rovnice do tvaru

$$\begin{aligned} m[\ddot{r}\cos(\omega t) - 2\dot{r}\omega\sin(\omega t) - r\omega^2\cos(\omega t)] &= -F\sin(\omega t) - k(r - r_0)\cos(\omega t), \\ m[\ddot{r}\sin(\omega t) + 2\dot{r}\omega\cos(\omega t) - r\omega^2\sin(\omega t)] &= F\cos(\omega t) - k(r - r_0)\sin(\omega t). \end{aligned}$$

Vyjádřením velikosti síly F dojdeme ke vztahu

$$F = 2m\omega\dot{r}.$$

Nyní už bude zřejmý význam výrazu vypočteného pro časovou změnu energie

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2mr\dot{r}\omega^2 = F\omega r.$$

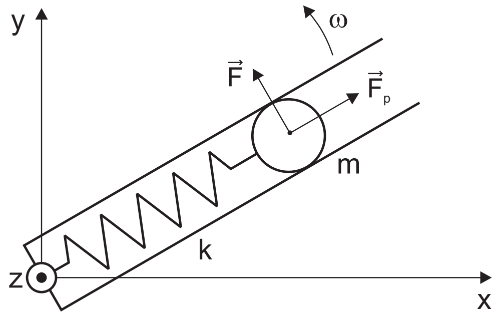
Jedná se o výkon síly $\vec{F}$, kterou působí stěna trubky na kuličku. Dále vypočtěme také zobecněnou energii ε danou vztahem

$$\varepsilon = p_r\dot{r} - L, \qquad \text{kde} \qquad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$$

je zobecněná hybnost příslušná souřadnici r. Po dosazení za lagrangián a výpočtu parciální derivace dostaneme

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 - r^2\omega^2) + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 = E - mr^2\omega^2.$$

Hodnota zobecněné energie se tedy v čase zachovává, což vyplývá z toho, že lagrangián nezávisí explicitně na čase.



Obrázek 29

Příklad 34
Trajektorie částice v centrálním potenciálu leží v rovině, v níž zavedeme soustavu polárních souřadnic (r, φ). Lagrangián má tvar $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r^2}$. Protože je souřadnice φ cyklická, zachovává se příslušná zobecněná hybnost, což je fyzikálně složka momentu hybnosti kolmá na uvedenou rovinu s hodnotou $l = mr^2\dot{\varphi}$. Celková energie

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r^2} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^2} = 0.$$

Ze vztahů pro moment hybnosti l a celkovou energii E s využitím rovností $\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ a $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ vyloučíme čas, čímž získáme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\sqrt{2m\alpha - l^2}}{l}\mathrm{d}\varphi.$$

Po integraci dostaneme funkci popisující trajektorii částice

$$r(\varphi) = r_0 \exp\left[\frac{\sqrt{2m\alpha - l^2}}{l}(\varphi - \varphi_0)\right],$$

kde konstanty r_0, φ_0 popisují počáteční polohu částice. Speciální případ představuje situace, kdy $l = 2m\alpha$, odkud dostaneme $r(\varphi) = r_0$, a trajektorií je kružnice.

Příklad 35
Pohyb korálku je plně popsán zobecněnou souřadnicí φ, která jako parametr vystupuje v parametrických rovnicích cykloidy. Lagrangián soustavy

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

přepíšeme pomocí parametrických rovnic cykloidy a jejich časových derivací

$$\begin{aligned} x &= a(\varphi - \sin\varphi), & \dot{x} &= a\dot{\varphi}(1 - \cos\varphi), \\ y &= a(1 + \cos\varphi), & \dot{y} &= -a\dot{\varphi}\sin\varphi. \end{aligned}$$

do tvaru

$$L = ma^2\dot{\varphi}^2(1 - \cos\varphi) - mga(1 + \cos\varphi).$$

Nemá-li perioda kmitů záviset na amplitudě, měl by být systém vlastně harmonickým oscilátorem. Při vhodné volbě zobecněné souřadnice q by tedy lagrangián měl vypadat jako kanonický lagrangián harmonického oscilátoru s kinetickou energií $m\dot{q}^2/2$. To naznačuje, že onou vhodnou souřadnicí by měla být délka měřená podél trajektorie částice, tedy cykloidy. Definujme proto q jako délku úseku cykloidy od 0 až do φ:

$$q(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi = a\int_0^\varphi \sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi = 4a\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Délka celého oblouku cykloidy je tedy $8a$. Přepíšeme-li lagrangián pomocí proměnné q, dostaneme

$$L = \frac{m}{2}\,\dot{q}^2 - 2mga\left(1-\frac{u}{4a}\right)^2 = \frac{m}{2}\,\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(q-q_0)^2\,,$$

kde jsme označili $\omega = \sqrt{\frac{g}{4a}}$ a $q_0 = 4a$. Z tvaru lagrangiánu vidíme, že systém se skutečně chová jako harmonický oscilátor s frekvencí ω a rovnovážnou polohou q_0, která odpovídí nejnižšímu bodu cykloidy. Perioda pohybu $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$ zřejmě nezávisí na amplitudě kmitů.

Příklad 36

Kinetická energie T a potenciální energie V jsou dány vztahy

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2), \qquad V = \frac{\alpha}{2}(x^2+y^2),$$

pro lagrangián $L = T - V$ tedy dostáváme vyjádření

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{\alpha}{2}(x^2+y^2).$$

Z výpočtu Lagrangeových rovnic vyjde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{y} + \omega^2 y = 0, \tag{13}$$

přičemž jsme označili $\omega^2 = \frac{\alpha}{m}$. Elegantní způsob, jak vyřešit obě rovnice najednou, je použít komplexní čísla. Vynásobením rovnice (13) imaginární jednotkou a přičtením k rovnici (12) dostaneme jedinou rovnici

$$(\ddot{x} + \mathrm{i}\ddot{y}) + \omega^2(x + \mathrm{i}y) = 0,$$

kterou pomocí komplexního čísla $z = x + \mathrm{i}y$ můžeme jednoduše přepsat

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0.$$

Obecné řešení této rovnice má tvar

$$z = x + \mathrm{i}y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(\frac{a+b}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \frac{a-b}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}[a\cos(\omega t) + \mathrm{i}b\sin(\omega t)], \tag{14}$$

kde a, b, φ jsou konstanty. Pro $\varphi = 0$ dostáváme

$$x = a\cos(\omega t), \qquad\qquad y = b\sin(\omega t).$$

Sečtením kvadrátů těchto rovnic vydělených po řadě a^2 a b^2 vyloučíme čas t a dostaneme

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

což je rovnice elipsy v normální poloze[1] s poloosami a, b. Pro obecné ϕ nám faktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ v rovnici (14) celou elipsu natočí o úhel φ. Dále rovnici (14) přepíšeme pomocí Eulerova vzorce pro komplexní čísla $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, tedy

$$z = x + \mathrm{i}y = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)[a\cos(\omega t) + \mathrm{i}b\sin(\omega t)].$$

Odtud po roznásobení a separaci reálné a komplexní části dostaneme

$$\begin{aligned} x &= a\cos(\omega t)\cos\varphi - b\sin(\omega t)\sin\varphi, \\ y &= a\cos(\omega t)\sin\varphi + b\sin(\omega t)\cos\varphi. \end{aligned}$$

Pro výpočet celkové energie soustavy E, která je dána vztahem

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2), \tag{15}$$

vyjádříme pro obecné φ časové derivace funkcí x, y, tedy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a\omega\sin(\omega t)\cos\varphi - b\omega\cos(\omega t)\sin\varphi, \\ \dot{y} &= -a\omega\sin(\omega t)\sin\varphi + b\omega\cos(\omega t)\cos\varphi. \end{aligned}$$

Po dosazení funkcí x, y, $\dot{x}$ a $\dot{y}$ do vztahu (15) vyjde po úpravách vztah mezi celkovou energií soustavy a poloosami elipsy

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}\alpha(a^2 + b^2).$$

Vyjáření vektoru momentu hybnosti $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$ ve složkách je

$$\vec{l} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m(x, y, 0) \times (\dot{x}, \dot{y}, 0) = m\,(0, 0, x\dot{y} - \dot{x}y).$$

Velikost momentu hybnosti l je tedy rovna velikosti jeho z-ové složky. Po dosazení za funkce x, y, $\dot{x}$ a $\dot{y}$ vyjde

$$l = m\omega ab = \sqrt{\alpha m}\,ab.$$

Příklad 37

Lagrangián soustavy je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2).$$

[1]tedy s osami rovnoběžnými se souřadnicovými osami x a y

Dvojici Lagrangeových rovnic

$$\ddot{x} - \kappa^2 x = 0, \qquad \ddot{y} - \kappa^2 y = 0\,,$$

kde $\kappa = \sqrt{\alpha/m}$, převedeme pomocí komplexního čísla $z = x + \mathrm{i}y$ na jedinou rovnici

$$\ddot{z} - \kappa^2 z = 0.$$

Obecné řešení této rovnice má tvar

$$z = x + \mathrm{i}y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(\frac{a+\mathrm{i}b}{2}\,\mathrm{e}^{\kappa t} + \frac{a-\mathrm{i}b}{2}\,\mathrm{e}^{-\kappa t}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}[a\cosh(\kappa t) + \mathrm{i}b\sinh(\kappa t)], \tag{16}$$

kde a, b, φ jsou konstanty. Pro $\varphi = 0$ dostáváme

$$x = a\cosh(\kappa t), \qquad y = b\sinh(\kappa t).$$

Sečtením kvadrátů těchto rovností vydělených po řadě a^2 a b^2 s využitím vztahu $\cosh^2(\kappa t) - \sinh^2(\kappa t) = 1$ dojdeme k rovnici

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

což je rovnice hyperboly v normální poloze s poloosami a, b. Pro obecné φ nám faktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ v rovnici (16) celou hyperbolu natočí o úhel φ.

Příklad 38

Trajektorie částice v centrálním potenciálu leží v rovině, v níž zavedeme soustavu polárních souřadnic (r, φ). Lagrangián má tvar

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r}.$$

Z Lagrangeovy rovnice $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$ dostaneme zákon zachování

$$l = mr^2\dot{\varphi} = \text{konst},$$

kde l je velikost momentu hybnosti. Celková energie soustavy je

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}.$$

Vyloučením času z předchozích dvou vztahů dostaneme rovnici trajektorie

$$\varphi = \int \frac{l\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m(E + \frac{\alpha}{r}) - \frac{l^2}{r^2}}} = \arccos\frac{l^2 - m\alpha r}{r\sqrt{2ml^2E + m^2\alpha^2}} + \text{konst}.$$

Zvolme soustavu souřadnic (r, φ) tak, že integrační konstanta je rovna nule, a označme

$$p = \frac{l^2}{m\alpha}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}}\,,$$

pak můžeme rovnici trajektorie přepsat

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}.$$

To je zřejmě rovnice kuželosečky, jejíž ohnisko leží v počátku soustavy souřadnic, přičemž parametr ε má význam číselné excentricity.

Diskutujme nyní závislost tvaru trajektorie na hodnotě energie E. Pro $E < 0$ je číselná excentricita $\varepsilon < 1$ a trajektorie má tvar elipsy; speciálnímu případu $\varepsilon = 0$ odpovídá energie $E = -m\alpha^2/(2l^2)$ a trajektorie ve tvaru kružnice. Pro $E > 0$ je $\varepsilon > 1$ a částice se bude pohybovat po hyperbole. Pro $E = 0$ je $\varepsilon = 1$ a trajektorií je parabola.

Příklad 39

Trajektorie částice v centrálním potenciálu leží v rovině, v níž zavedeme soustavu polárních souřadnic (r, φ). Lagrangián má tvar

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r}.$$

Z Lagrangeových rovnic plyne existence integrálu pohybu v podobě momentu hybnosti o velikosti $l = mr^2\dot{\varphi}$. Celková energie po vyloučení $\dot{\varphi}$ je

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}}_{U_{\text{ef}}}.$$

Kruhové trajektorii odpovídá $\dot{r} = 0$ a tedy i minimum efektivního potenciálu. Její poloměr proto zjistíme z podmínky $\partial U_{\text{ef}}/\partial r|_{r=r_0} = 0$, která dá $r_0 = l^2/m\alpha$. Po dosazení vyjde kinetická, potenciální a celková energie po řadě $T_0 = \frac{l^2}{2mr_0^2} = \frac{m\alpha^2}{2l^2}$, $V_0 = -\frac{\alpha}{r_0} = -\frac{m\alpha^2}{l^2}$ a $E_0 = T_0 + V_0 = -\frac{m\alpha^2}{2l^2}$. Platí tedy rovnosti $E_0 = -T_0$ a $V_0 = -2T_0$.

Příklad 40

Řešme problém dvou těles o hmotnostech m_1, m_2 za předpokladu, že potenciální energie interakce závisí pouze na vzdálenosti těles. V obecné inerciální vztažné soustavě je poloha těles určena polohovými vektory $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$. Lagrangián má tvar

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|).$$

Zvolíme-li nyní počátek inerciální soustavy shodný se středem hmotnosti soustavy (tzv. těžišťová soustava), bude platit $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$. Označíme-li vektor vzájemné polohy těles $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, bude v těžišťové soustavě platit

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2\vec{r}}{m_1 + m_2}, \qquad \vec{r}_2 = -\frac{m_1\vec{r}}{m_1 + m_2}.$$

Zavedeme-li ještě tzv. redukovanou hmotnost

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

dosazením do lagrangiánu dostaneme

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(r).$$

Problém dvou těles jsme tedy převedli na problém pohybu jednoho tělesa s redukovanou hmotností μ v potenciálu $V(r)$. Pro pohyb Země kolem Slunce je potenciální energie dána vztahem $V(r) = -Gm_1m_2/r$, kde m_1 je hmotnost Země, m_2 je hmotnost Slunce a G je gravitační konstanta. Označíme-li $\alpha = Gm_1m_2$, bude mít lagrangián tvar

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + \frac{\alpha}{r}.$$

Úlohu jsme tak převedli na Keplerovu úlohu virtuální částice (o hmotnosti μ), kterou jsme řešili v předchozím příkladě. Trajektorie Země kolem Slunce je elipsa s parametrem p a číselnou excentricitou ε, jejíž rovnice v polárních souřadnicích je

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}, \qquad \text{kde} \qquad p = \frac{l^2}{\mu\alpha}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}.$$

Přitom E je celková energie soustavy a l je velikost momentu hybnosti virtuální částice, který, jak lze snadno ukázat, je současně roven momentu hybnosti celé soustavy v těžišťové vztažné soustavě. Jak je známo z analytické geometrie, parametr elipsy p a číselná excentricita ε jsou svázány s poloosami elipsy a, b vztahy

$$p = \frac{b^2}{a}, \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme výrazy pro poloosy elipsy

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}.$$

Periodu oběhu T odvodíme ze zákona zachování momentu hybnosti, jehož velikost je

$$l = \mu r^2\dot{\varphi} = \text{konst.}$$

Výraz $\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\varphi$ odpovídá ploše výseče, kterou vyplní polohový vektor při pohybu částice hmotnosti μ po elementu trajektorie příslušném úhlu $\mathrm{d}\varphi$. Označíme-li tuto plochu $\mathrm{d}f$, pak velikost momentu hybnosti je

$$l = 2\mu\dot{f},$$

kde derivaci $\dot{f}$ nazveme plošnou rychlostí. Integrací této rovnice podle času od nuly do T a využitím faktu, že celková plocha elipsy je dána součinem πab, dostaneme

$$lT = 2\mu\pi ab.$$

Dosazením za poloosy a, b dostaneme periodu pohybu

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{\mu}{Gm_1m_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{(m_1+m_2)G}}.$$

Pokud bychom místo redukované hmotnosti μ dosadili pouze hmotnost Země m_1, což fyzikálně odpovídá situaci, kdy by se Slunce vůbec nepohybovalo, vyšlo by

$$T' = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m_1}{\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{m_2G}}.$$

Pro číselné hodnoty hlavní poloosy dráhy Země kolem Slunce $a = 149\,597\,887\,\mathrm{km}$, hmotnosti Země $m_1 = 5{,}9736 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, hmotnosti Slunce $m_2 = 1{,}9891 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ a gravitační konstanty $G = 6{,}67384 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3.kg^{-1}.s^{-2}}$ dojdeme k výsledku $T = 365{,}2056$ dne a $T' = 365{,}2062$ dne. Rozdíl $T' - T = 47{,}4$ sekundy, což rozhodně není zanedbatelné.

Příklad 41

Celková energie je dána vztahem $E = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + V(y)$, kde první člen odpovídá kinetické energii a druhý člen odpovídá potenciální energii. Využijeme-li rovnosti $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, separací proměnných dostaneme

$$\mathrm{d}t = \pm \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(y)]}}.$$

Pro daný potenciál $V(y) = mgy$ a energii $E = mgy_0$ získáme po dosazení do výše uvedené rovnice

$$t = \pm \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(y)]}} = \mp \sqrt{\frac{2(y_0 - y)}{g}} + t_0\,,$$

kde t_0 je integrační konstanta. Po invertování vyjde $y(t) = y_0 - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$, což je funkce popisující volný pád v tíhovém poli.

Příklad 42

Pohyb odpovídá harmonickému oscilátoru, jehož poloha je popsána funkcí

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi),$$

kde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a A, φ jsou integrační konstanty.

Příklad 43

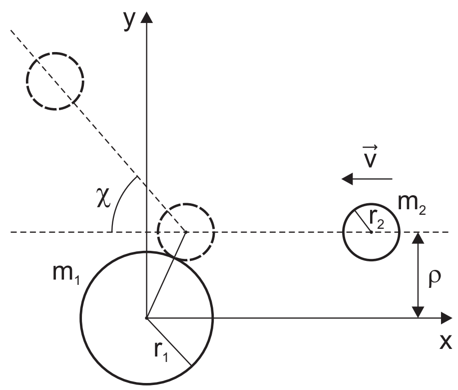
I když to nemusí být na první pohled zřejmé, jedná se vlastně o pohyb částice v centrálním silovém poli. Soustava má tři stupně volnosti, protože první koule je pevná a rotaci koulí neuvažujeme. Pro úplné určení konfigurace soustavy proto stačí zadat polohu středu S druhé koule. Označíme-li r vzdálenost tohoto středu od počátku, můžeme vyjádřit potenciální energii V pro případ srážky dokonale tvrdých koulí ve tvaru

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad r > r_1 + r_2 \\ \infty & \text{pro} \quad r < r_1 + r_2 \end{cases}$$

Centrálnost pole plyne z toho, že V závisí pouze na radiální souřadnici r.

V centrálním poli se zachovává moment hybnosti a pohyb středu S druhé koule je proto rovinný. Bez újmy na obecnosti zvolme, že tato rovina je shodná s rovinou xy a dále že se bod S pohybuje po přímce rovnoběžné s osou x. Vzdálenost této přímky od osy x je rovna impaktnímu parametru ρ (viz obrázek 30). V rovině xy zaveďme soustavu polárních souřadic (r, φ) standardními vztahy $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Miminální vzdálenost r_0 bodu S od počátku je při srážce

$$r_0 = \begin{cases} \rho & \text{pro} \quad \rho > r_1 + r_2, \\ r_1 + r_2 & \text{pro} \quad \rho < r_1 + r_2. \end{cases}$$



Obrázek 30

Rozptylový úhel χ je dán vztahem vypočteným v Poznámkách k přednáškám [5]:

$$\chi = \pi - 2\int_{r_0}^{\infty} \frac{l\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m_2[E - V(r)] - \frac{l^2}{r^2}}}, \tag{17}$$

kde l je velikost momentu hybnosti, E je celková energie soustavy a m_2 je hmotnost druhé koule. Celková energie a moment hybnosti soustavy jsou rovny kinetické energii a momentu hybnosti přilétající koule. Tedy

$$E = \frac{1}{2}m_2v^2, \qquad\qquad l = m_2\rho v.$$

Dosazením těchto výrazů do vztahu (17) dostaneme závislost rozptylového úhlu χ na impaktním parametru pro $\rho < r_1 + r_2$:

$$\chi(\rho) = \pi - 2\int_{r_1+r_2}^{\infty} \frac{\rho\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}}.$$

Výpočet tohoto integrálu provedeme pomocí substituce

$$b = \frac{\rho}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}b = -\frac{\rho}{r^2}\,\mathrm{d}r,$$

tedy

$$\chi(\rho) = \pi - 2\int_{0}^{\rho/(r_1+r_2)} \frac{\mathrm{d}b}{\sqrt{1-b^2}} = \pi - 2\arcsin\left(\frac{\rho}{r_1+r_2}\right).$$

V případě, že $\rho > r_1 + r_2$, zřejmě ke srážce vůbec nedojde a rozptylový úhel je roven nule. Lze tedy napsat

$$\chi(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad \rho > r_1 + r_2, \\ \pi - 2\arcsin\frac{\rho}{r_1+r_2} & \text{pro} \quad \rho \leq r_1 + r_2. \end{cases} \tag{18}$$

Diferenciální účinný průřez odpovídající intervalu impaktních parametrů $[\rho, \rho + \mathrm{d}\rho)$ je $\mathrm{d}\sigma = 2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho$. Podobně diferenciální prostorový úhel odpovídající intervalu rozptylových úhlů $[\chi, \chi + \mathrm{d}\chi)$ je $\mathrm{d}\Omega = 2\pi\sin\chi\,\mathrm{d}\chi$. Srovnáním obou rovnic dostaneme

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\rho}{\sin\chi}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\chi}\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{19}$$

Pro vyjádření účinného průřezu je tedy nutné invertovat vztah (18). Dostaneme výraz

$$\rho(\chi) = (r_1 + r_2) \cos \frac{\chi}{2} \, ,$$

který platí pro $\chi \in (0, \pi]$. Dosazením do vztahu (19) vyjde pro diferenciální účinný průřez

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\cos \frac{\chi}{2} \sin \frac{\chi}{2}}{2 \sin \chi} (r_1 + r_2)^2 \, \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{4} (r_1 + r_2)^2 \, \mathrm{d}\Omega.$$

S pomocí vztahu $\mathrm{d}\Omega = 2\pi \sin \chi \mathrm{d}\chi$ provedeme integraci přes celý prostorový úhel a dostaneme celkový účinný průřez

$$\sigma = \int_0^\pi 2\pi \frac{1}{4} (r_1 + r_2)^2 \sin \chi \, \mathrm{d}\chi = \pi (r_1 + r_2)^2.$$

Tuto hodnotu jsme mohli očekávat – odpovídá průřezu válce o poloměru $r_1 + r_2$, který vyplňují všechny přímky rovnoběžné s osou x, po nichž se před srážkou může pohybovat bod S, aby ke srážce vůbec došlo.

Příklad 44

Označíme-li $\rho_0 = \frac{\alpha}{m v_\infty^2}$, kde v_∞ je velikost rychlosti částice v nekonečné vzdálenosti od centra potenciálu, pak ze vztahu (17) z předchozího příkladu určíme závislost rozptylového úhlu χ na impaktním parametru ρ ve tvaru

$$\chi(\rho, v_0) = -2 \arcsin \frac{\rho_0}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2}}.$$

Rozptylový úhel je v tomto případě záporný, protože potenciál je přitažlivý a částice se jeho vlivem odchyluje na opačnou stranu než v předchozí úloze. Diferenciální účinný průřez je

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\rho_0^2}{4 \sin^2 \chi/2} \, \mathrm{d}\Omega = \frac{\rho_0^2}{(1 - \cos \chi)^2} \, \mathrm{d}\Omega = \frac{2\pi \rho_0^2 \sin \chi}{(1 - \cos \chi)^2} \, \mathrm{d}\chi.$$

Celkový účinný průřez pak je

$$\sigma = 2\pi \rho_0^2 \int_0^\pi \frac{\sin \chi \, \mathrm{d}\chi}{(1 - \cos \chi)^2} = \infty \, , \tag{20}$$

což odpovídá tomu, že k rozptylu částice dojde vždy.

6 Inverzní problém

Příklad 45
Protože potenciální energie nezávisí explicitně na čase, bude se zachovávat zobecněná energie

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + V(x) = \text{const.}\,,$$

odkud dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}\,,$$

kde znaménko mínus jsme zvolili proto, že pohyb probíhá proti směru orientace osy x. Odtud vyjádříme dobu pohybu částice

$$\tau(E) = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x(E)}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-V}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{0}^{x(E)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-V}},$$

Zde $x(E)$ značí závislost počáteční polohy na energii částice, přičemž na počátku pohybu je $E = V$ a proto $x(E) = x(V)$. Nalézt tvar potenciální energie matematicky znamená nalézt řešení předchozí rovnice, kde $V(x)$ je neznámá funkce a naopak známe $t(E)$. V předchozí rovnici nyní uvažujme x jako funkci V a přejděme k integrační proměnné V. Tedy

$$\tau(E) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{0}^{x(V)} \frac{\mathrm{d}x(V)}{\sqrt{E-V}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{0}^{E} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}V} \frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{E-V}}.$$

Nyní obě strany vydělíme výrazem $\sqrt{\alpha - E}$, kde α je parametr, a integrujeme přes E od nuly do α:

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha \frac{\tau(E)\mathrm{d}E}{\sqrt{\alpha - E}} &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{\alpha - E}} \int_0^E \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}V} \frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{E-V}}, \\
&= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}V} \mathrm{d}V \int_U^\alpha \frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{\alpha - E}\sqrt{E-V}}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Při záměně pořadí integrace se příslušným způsobem změnily integrační meze, aby se integrovalo v obou případech přes stejnou oblast roviny (E, V) (nejlépe se ke správným mezím dospěje graficky zakreslením příslušné oblasti roviny). Integrál přes E vede na funkci arcsin a je roven π. Z rovnice (21) pak dostaneme

$$\int_0^\alpha \frac{\tau(E)\mathrm{d}E}{\sqrt{\alpha - E}} = \pi\sqrt{\frac{m}{2}} \left[x(V)\right]_0^\alpha = \pi\sqrt{\frac{m}{2}}\, x(\alpha)\,,$$

kde jsme využili toho, že $x(0) = 0$. Protože parametr α byl libovolný, můžeme jej přejmenovat na V a dostaneme

$$x(V) = \frac{1}{\pi\sqrt{m/2}} \int_0^V \frac{\tau(E)\mathrm{d}E}{\sqrt{V - E}}.$$

Do tohoto výrazu dosadíme zadanou závislost doby volného pádu na energii částice $\tau(E) = K\sqrt{E}$ a určíme $x(V)$, tedy

$$\begin{aligned} x(V) &= \frac{K}{\pi\sqrt{m/2}} \int_0^V \frac{\sqrt{E}\,\mathrm{d}E}{\sqrt{V-E}} = \frac{K}{\pi\sqrt{m/2}} \int_0^V \sqrt{\frac{E}{V-E}}\,\mathrm{d}E = \\ &= \frac{K}{\pi\sqrt{m/2}} \left[V \arctan\sqrt{\frac{E}{V-E}} - \sqrt{E(V-E)} \right]_0^V = \\ &= \frac{KV}{\sqrt{2m}}. \end{aligned}$$

Inverzí získáme hledaný tvar potenciální energie

$$V = \frac{\sqrt{2m}}{K}\, x.$$

Jde tedy o homogenní pole. Případ homogenního gravitačního pole o intenzitě g by odpovídal hodnotě $K = \sqrt{\dfrac{2}{mg^2}}$ a vyšlo by $V = mgx$.

Příklad 46

Stejně jako v předchozím příkladě vyjdeme z celkové energie částice

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + V(x).$$

Integrací dostaneme

$$t(E) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-V}} + \text{konst.}$$

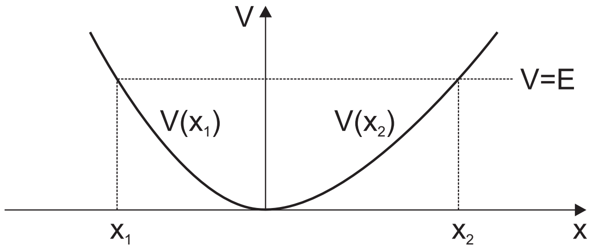
Částice tedy urazí dráhu z bodu x_1 do bodu x_2, v nichž potenciál nabývá hodnoty $V(x_1) = V(x_2) = E$ (viz obrázek 31), za čas

$$t(E) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-V}},$$

kde $x_1(E)$, $x_2(E)$ značí závislost polohy těchto bodů na energii částice. Protože kinetická energie částice v bodech x_1 a x_2 je nulová, bude částice neustále oscilovat mezi těmito krajními body s periodou oscilací

$$T(E) = 2t(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-V}}.$$

Při znalosti této periody je naším úkolem určit tvar potenciálu, ve kterém se částice pohybuje. Přitom předpokládáme, že hledaná potenciální energie má v dané oblasti pouze jedno minimum. Toto minimum rozděluje $V(x)$ na dvě oblasti, na kterých je $V(x)$ prostou funkcí x. Přijměme ještě konvenci, že v bodě minima bude umístěn počátek souřadné soustavy $x = 0$ a potenciální energie rovna nule, $V(0) = 0$. Nalézt tvar potenciální energie matematicky znamená nalézt neznámou funkci $V(x)$ s pomocí známé funkce $T(E)$.



Obrázek 31

Stejně jako v předchozím příkladě považujme x za funkci V. Jelikož $x(V)$ je nyní funkce dvojznačná, musí být integrál rozdělen do dvou částí pro oblasti, kde $x \leq 0$ a $x \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
T(E) &= \sqrt{2m}\int_{x_1(V)}^{0} \frac{\mathrm{d}x_1(V)}{\sqrt{E-V}} + \sqrt{2m}\int_{0}^{x_2(V)} \frac{\mathrm{d}x_2(V)}{\sqrt{E-V}} \\
&= -\sqrt{2m}\int_0^E \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{E-V}} + \sqrt{2m}\int_0^E \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{E-V}} \\
&= \sqrt{2m}\int_0^E \left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}V} - \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}V}\right)\frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{E-V}}.
\end{aligned}
$$

Obě strany vydělme výrazem $\sqrt{\alpha - E}$, kde α je parametr, a integrujme přes k E od nuly do α:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\alpha \frac{T(E)\mathrm{d}E}{\sqrt{\alpha-E}} &= \sqrt{2m}\int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{\alpha-E}}\int_0^E \left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}V} - \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}V}\right)\frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{E-V}}, \\
&= \sqrt{2m}\int_0^\alpha \left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}V} - \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}V}\right)\mathrm{d}V \int_V^\alpha \frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{\alpha-E}\sqrt{E-V}}.
\end{aligned}
$$

Jelikož integrál přes E je roven π a zároveň $x_1(0) = x_2(0) = 0$, dostaneme

$$
\int_0^\alpha \frac{T(E)\mathrm{d}E}{\sqrt{\alpha-E}} = \pi\sqrt{2m}\left[x_2(\alpha) - x_1(\alpha)\right] .
$$

Protože parametr α byl libovolný, můžeme ho nahradit V, a dostaneme

$$
x_2(V) - x_1(V) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\int_0^V \frac{T(E)\mathrm{d}E}{\sqrt{V-E}}. \tag{22}
$$

Nyní můžeme užít známé periody oscilací v závislosti na energii částice $T(E)$ k určení rozdílu $x_2(V) - x_1(V)$. To znamená, že funkce x_1, x_2 nejsou jednoznačné, je určen jen jejich rozdíl. Proto je ve výběru potenciálu velká volnost: můžeme např. zvolit funkci $x_2(V)$ a z rovnice (22) dopočítat $x_1(V)$; přitom ovšem musí platit, že funkce $x_1(V)$ je klesající a funkce $x_2(V)$ rostoucí.

Jednou z možných voleb je předpokládat, že funkce $V(x)$ je sudá, tedy $x_1(V) = -x_2(V) \equiv x(V)$. Pak z rovnice (22) dostaneme

$$
x(V) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int_0^V \frac{T(E)\mathrm{d}E}{\sqrt{V-E}}.
$$

Budeme nyní podle zadání uvažovat speciální případ, že $T(E)$ je konstantní funkce. Pak dostaneme po integraci

$$x(V) = \frac{T\sqrt{V}}{\pi\sqrt{2m}} \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{2\pi^2 m x^2}{T^2}\,.$$

To je kvadratický potenciál odpovídající harmonickému oscilátoru, jak jsme mohli vzhledem ke konstantní periodě oscilací očekávat. Vyjádřením periody jako $T = 2\pi/\omega$ dostaneme tvar $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

Příklad 47
Úhel rozptylu χ, o který je částice odchýlena z původního směru při pohybu v centrálním poli $V(r)$, je dán vztahem

$$\chi = \pi - 2\varphi_0,$$

viz obrázek 32. Pro φ_0 platí

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(\rho/r^2)\,dr}{\sqrt{1 - \rho^2/r^2 - V(r)/E}}.$$

Jelikož známe závislost diferenciálního účinného průřezu na úhlu rozptylu

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}\sigma(\chi)}{\mathrm{d}\chi}\,\mathrm{d}\chi$$

a víme, že platí $\mathrm{d}\sigma = 2\pi\rho\mathrm{d}\rho$, můžeme odtud integrací určit závislost $\rho(\chi)$ (a tudíž $\chi(\rho)$)

$$\int_{\chi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\sigma(\chi)}{\mathrm{d}\chi}\mathrm{d}\chi = \pi\rho^2.$$

Je výhodné zavést ve výrazu pro φ_0 následující substituce

$$s = \frac{1}{r}, \qquad x = \frac{1}{\rho^2}, \qquad w = \sqrt{1 - \frac{V}{E}}.$$

Potom

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(\rho/r^2)\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - \rho^2/r^2 - V(r)/E}} = -\int_{s_0}^{0} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{w^2(s)x - s^2}},$$

kde s_0 je kořenem rovnice $xw^2(s_0) - s_0^2 = 0$ pro libovolné x (tedy $s_0 = s_0(x)$). Dosazením za úhel rozptylu $\chi(\rho)$ obdržíme

$$\frac{1}{2}\left[\pi - \chi(x)\right] = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{w^2(s)x - s^2}}.$$

Tato rovnice je integrální rovnice pro funkci $w(s)$, kterou chceme získat (z ní pak $V(r)$). To lze udělat způsobem obdobným předchozím dvěma příkladům, tj. užitím faktu, že

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)\,(x-a)}} = \pi.$$

Vydělíme obě strany integrální rovnice výrazem $\sqrt{\alpha - x}$ a provedeme integraci podle proměnné x od nuly do α, tedy

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha \frac{(\pi - \chi(x))}{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha - x}} &= \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha - x}} \int_0^{s_0(x)} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{w^2(s)x - s^2}} = \\
&= \int_0^{s_0(\alpha)} \mathrm{d}s \int_{x(s)}^\alpha \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\alpha - x)\left(w^2(s)x - s^2\right)}} = \\
&= \int_0^{s_0(\alpha)} \mathrm{d}s \int_{x(s)}^\alpha \frac{1}{w(s)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\alpha - x)\left(x - \dfrac{s^2}{w^2}\right)}} = \\
&= \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{\mathrm{d}s}{w\,(s)},
\end{aligned}$$

kde $x(s) = s^2/w^2$. Nyní upravíme levou stranu

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha - x}} - \frac{1}{2} \int_0^\alpha \frac{\chi(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha - x}} &= \pi\sqrt{\alpha} - \left[\chi(x)\sqrt{\alpha - x}\right]_0^\alpha - \int_0^\alpha \sqrt{\alpha - x}\, \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x = \\
&= \pi\sqrt{\alpha} - \int_0^\alpha \sqrt{\alpha - x}\, \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

tím dostáváme

$$\pi\sqrt{\alpha} - \int_0^\alpha \sqrt{\alpha - x}\, \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x = \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{\mathrm{d}s}{w\,(s)}.$$

Tuto relaci diferencujme vzhledem k α. K úpravě využijeme vztahu

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_0^{\beta(\alpha)} f(y(\alpha), x)\, \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \left[F(y(\alpha), x)\right]_0^{\beta(\alpha)} = \\
&= \frac{\mathrm{d}F(y,\beta)}{\mathrm{d}y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha} - \frac{\mathrm{d}F(y,0)}{\mathrm{d}y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha} + \frac{\mathrm{d}F(y,\beta)}{\mathrm{d}\beta} \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha},
\end{aligned}$$

kde pro případ, že $\dfrac{\mathrm{d}F(y,\beta)}{\mathrm{d}\beta} = f(y,\beta) = 0$, platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_0^{\beta(\alpha)} f(y(\alpha), x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{\beta(\alpha)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} f(y(\alpha), x)\, \mathrm{d}x.$$

S pomocí těchto vztahů obdržíme

$$\pi \mathrm{d}\alpha^{1/2} - \frac{1}{2}\mathrm{d}\alpha \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha - x}} \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{w\,(s_0)} \frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}\alpha}\, \mathrm{d}\alpha.$$

Zaměníme-li formálně s_0 za s a dosadíme za libovolný parametr $\alpha = s^2/w^2$, pak

$$\pi \mathrm{d}\left(\frac{s}{w}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{s^2}{w^2}\right) \int_0^{s^2/w^2} \frac{1}{\sqrt{(s^2/w^2) - x}} \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{w} \mathrm{d}s.$$

nebo

$$-\pi \mathrm{d} \log w = \mathrm{d}\left(\frac{s}{w}\right) \int_0^{s^2/w^2} \frac{\chi'(x)\, \mathrm{d}x}{\sqrt{(s^2/w^2) - x}}.$$

Tuto rovnici můžeme ihned integrovat, neboť pro $s = 0$ ($r \to \infty$) je $w = 1$, potom máme

$$-\pi \int_1^w \mathrm{d} \log w = \int_0^{s/w} \mathrm{d}\left(\frac{s}{w}\right) \int_0^{s^2/w^2} \frac{\chi'(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(s^2/w^2) - x}}.$$

Přičemž integraci pravé strany této rovnosti provedeme následovně ($\nu = s/w$)

$$\begin{aligned}\int_0^{\nu} \mathrm{d}\nu \int_0^{\nu^2} \frac{\chi'(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\nu^2 - x}} \int_0^{\nu^2} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{\nu^2} \frac{\chi'(x)\,\mathrm{d}\nu}{\sqrt{\nu^2 - x}} &= \int_0^{\nu^2} \chi'(x)\,\mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{\nu^2} \frac{\mathrm{d}\nu}{\sqrt{\nu^2 - x}} \\ &= \int_0^{\nu^2} \chi'(x) \cosh^{-1}\left(\frac{\nu}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Výsledek je

$$-\pi \log w = \int_0^{s^2/w^2} \chi'(x) \cosh^{-1}\left(\frac{s/w}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x.$$

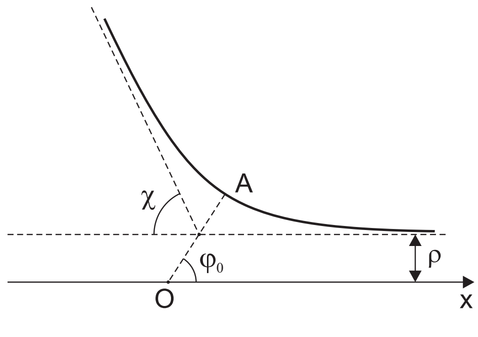
Návratem k původním proměnným r a ρ nalezneme výsledný vztah pro $w(r)$

$$w(r) = \exp\left\{\frac{1}{\pi} \int_{rw}^{\infty} \cosh^{-1}\left(\frac{\rho}{wr}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\rho}\right) \mathrm{d}\rho\right\}.$$

Integrací metodou per-partes na pravé straně rovnosti obdržíme ekvivalentní vztah

$$w(r) = \exp\left\{-\frac{1}{\pi} \int_{rw}^{\infty} \frac{\chi(\rho)\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2 w^2}}\right\}.$$

Tato a předchozí formule určuje implicitně námi hledanou funkci $w(r)$ (a tudíž $V(r)$) pro všechny $r > r_{\min}$, tj. pro všechny r, které mohou být během rozptylu dosaženy nalétávající částicí s energií E.



Obrázek 32

7 Hamiltonovy rovnice

Příklad 48

Hamiltonova funkce

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + V(x, y, z), \\ H &= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + V(r, \theta, \varphi), \\ H &= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + V(r, \varphi, z). \end{aligned}$$

Příklad 49
Hamiltonián má tvar $H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + V\left(x, y, z\right)$. Z Hamiltonových rovnic pak dostaneme například pro složky zobecněné hybnosti a souřadnice ve směru x

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \\ \dot{p_x} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}\,. \end{aligned}$$

Po dosazení za zobecněnou hybnost p_x z první rovnice do druhé obdržíme rovnici $m\ddot{x} = -\partial V/\partial x$ a podobné rovnice dostaneme pro souřadnice y a z. Všechny tři rovnice pak můžeme zapsat kompaktně jako

$$m\ddot{\vec{r}} = -\nabla V = \vec{F}\,,$$

což je druhý Newtonův zákon.

Příklad 50
Hamiltonián má tvar $H = \dfrac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi$. Hamiltonovy rovnice potom dávají

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}, \\ \dot{p_\varphi} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi. \end{aligned}$$

Příklad 51
Hamiltonián má tvar $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2}kq^2$. Hamiltonovy rovnice potom dávají

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq. \end{aligned}$$

Obecné řešení Hamiltonových rovnic pro dané počáteční podmínky je

$$\begin{aligned} q &= \frac{p_0}{m\omega}\sin\omega t + q_0\cos\omega t, \\ p &= p_0\cos\omega t - m\omega q_0\sin\omega t, \end{aligned}$$

kde $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Protože časový vývoj systému $(q_0, p_0) \to (q, p)$ můžeme považovat za kanonickou transformaci, snadno ověříme platnost Liouvilleovy věty

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial q_0} & \dfrac{\partial q}{\partial p_0} \\ \dfrac{\partial p}{\partial q_0} & \dfrac{\partial p}{\partial p_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\omega t & \dfrac{1}{m\omega}\sin\omega t \\ -m\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{vmatrix} = 1.$$

Trajektorií ve fázovém prostoru je elipsa s rovnicí

$$\frac{p^2}{\left(\sqrt{2mE}\right)^2} + \frac{q^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\right)^2} = 1.$$

Příklad 52
Hamiltonián má tvar

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + V\left(r\right).$$

Jelikož nezávisí na zobecněné souřadnici φ, je zobecněná hybnost p_φ integrálem pohybu. Dále Hamiltonián nezávisí explicitně na čase, je tedy sám integrálem pohybu a roven celkové energii. Protože jde o pohyb ve sféricky symetrickém centrálním poli, bude dalším integrálem pohybu celkový moment hybnosti soustavy, respektive jeho kvadrát $L^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}$, což lze lehce ověřit pomocí Poissonových závorek, neboť $\{L^2, H\} = 0$.

Příklad 53
Postupujeme standardním způsobem: vypočítáme zobecněnou hybnost $\vec{p} = \partial L/\partial\vec{r} = m\vec{v} + e\vec{A}$ a s její pomocí Hamiltonián

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r})\right)^2 + e\phi(\vec{r}).$$

Hamiltonovy rovnice potom dávají

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}} &= \vec{v} = \frac{\partial H}{\partial\vec{p}} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right),\\
\dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial\vec{r}} = -\nabla H =\\
&= \frac{1}{m}\left[\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)\cdot\nabla\right]e\vec{A} + \frac{1}{m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)\times\left[\nabla\times e\vec{A}\right] - e\frac{\partial\phi}{\partial\vec{r}}.
\end{aligned}$$

Při úpravě poslední rovnice jsme použili identitu

$$\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(\vec{a}\cdot\nabla\right)\vec{b} + \left(\vec{b}\cdot\nabla\right)\vec{a} + \vec{a}\times\left(\nabla\times\vec{b}\right) + \vec{b}\times\left(\nabla\times\vec{a}\right).$$

Dosazením z první Hamiltonovy rovnice do druhé dostaneme pohybové rovnice ve tvaru

$$m\ddot{\vec{r}} = e\left(-\frac{\partial\phi}{\partial\vec{r}} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + e\left[\vec{v}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right] = e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right). \tag{23}$$

Využili jsme přitom vyjádření intenzity elektrického pole a magnetické indukce prostřednictvím potenciálů ϕ a $\vec{A}$ jako

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\\
\vec{B} &= \nabla\times\vec{A} = \mathrm{rot}\vec{A}.
\end{aligned}$$

Na pravé straně rovnice (23) vystupuje Lorentzova síla, takže jsme dostali 2. Newtonův zákon pro částici v elektromagnetickém poli, což bylo naším cílem. Během úpravy bylo rovněž nutné mít na paměti, že

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\,\vec{A}.$$

Příklad 54

Nechť soustava S' koná vůči soustavě S rotační pohyb úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}(t)$ kolem osy procházející počátkem (počátky obou soustav splývají). Uvažujme nejprve, že hmotný bod je v soustavě S' v klidu. Při pootočení soustavy S' o úhel $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ se změní jeho poloha vůči soustavě S o

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{\varphi} \times \vec{r'}.$$

Formálně dělíme $\mathrm{d}t$ a dostaneme

$$\vec{v}_r = \vec{\Omega} \times \vec{r'}.$$

Pohybuje-li se dále hmotný bod v soustavě S' rychlostí $\vec{v}'$, bude jeho rychlost v soustavě S rovna

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}_r = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}'.$$

Dosazením do Lagrangeovy funkce pro soustavu S

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - V(\vec{r}),$$

dostaneme

$$L = \frac{m}{2}\,\vec{v'}^2 + \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega} \times \vec{r'}\right)^2 + m\vec{v'} \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{r'}\right) - V(\vec{r'}, t).$$

Tímto jsme nalezli Lagrangeovu funkci částice v neinerciální soustavě souřadné S' rotující s konstantní úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$. Hamiltonovu funkci obdržíme pomocí Legenderovy transformace

$$H = \frac{\partial L}{\partial \vec{v'}} \vec{v'} - L = \vec{p'}\vec{v'} - L,$$

kde za $\vec{v'}$ dosadíme ze vztahu pro zobecněnou hybnost

$$\vec{p'} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v'}} = m\vec{v'} + m\vec{\Omega} \times \vec{r'}.$$

Po dosazení a nezbytných úpravách dostaneme Hamiltonián ve tvaru

$$H = \frac{\vec{p'}^2}{2m} - \vec{\Omega} \cdot \left(\vec{r'} \times \vec{p'}\right) + V(\vec{r'}, t).$$

Zde jsme využili vektorovou identitu $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$

Příklad 55

Zobecněná hybnost má tvar

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

a Hamiltonián

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}\,.$$

Příklad 56
Potenciální energie odpovídající dané centrální elastické síle má tvar

$$V = \frac{1}{2}k\vec{r}^2 = \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \frac{1}{2}k\left(R^2 + z^2\right),$$

přičemž jsme využili zadanou vazební podmínku $x^2 + y^2 = R^2$. Díky této podmínce má systém jen dva stupně volnosti, jako zobecněné souřadnice použijeme dvě z válcových souřadnic (φ, z). Z Lagrangiánu

$$L = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(R^2 + z^2\right)$$

pak snadno najdeme Hamiltonovu funkci

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{p_\varphi^2}{R^2} + p_z^2\right) + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}kR^2.$$

Je zřejmé, že $H = \frac{1}{2m}\frac{p_\varphi^2}{R^2} + H_{\mathrm{HO}} + \mathrm{const.}$, tedy hamiltonián je součtem hamiltoniánu volné částice vázané na kružnici a hamiltoniánu harmonického oscilátoru. Pohyb se tedy bude skládat z harmonických kmitů ve směru osy z kombinovaných s obíháním částice konstantní úhlovou rychlostí kolem osy z.

8 Poissonovy závorky

Příklad 57
Problém lze řešit více způsoby. Ukážeme dva z nich, přičemž první je méně abstraktní a druhý více.
1. Méně abstraktní způsob: Jacobiho identitu lze dokázat přímým výpočtem, který je ale nepřehlený pro množství derivací, které v něm vystupují. Zvolíme proto následující zjednodušení. Zavedeme abstraktní vektor zobecněných souřadnic a hybností $\vec{\xi}$ takto:

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n).$$

Poissonovu závorku dvou veličin A, B lze pak s výhodou zapsat takto:

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right) = \sum_{i,j=1}^{2n}\sigma_{ij}\frac{\partial A}{\partial \xi_i}\frac{\partial B}{\partial \xi_j},$$

kde jsme zavedli antisymetrickou matici σ, jejíž nenulové elementy jsou $\xi_{i,i+n} = 1, \xi_{i+n,i} = -1$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, a ostatní elementy jsou nulové. S tímto vyjádřením není těžké vyjádřit levou stranu Jacobiho identity takto:

$$\begin{aligned}
&\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{2n}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\left(\frac{\partial A}{\partial \xi_k}\frac{\partial^2 B}{\partial \xi_l \partial \xi_i}\frac{\partial C}{\partial \xi_j} + \frac{\partial A}{\partial \xi_k}\frac{\partial B}{\partial \xi_i}\frac{\partial^2 C}{\partial \xi_l \partial \xi_j}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial B}{\partial \xi_k}\frac{\partial^2 C}{\partial \xi_l \partial \xi_i}\frac{\partial A}{\partial \xi_j} + \frac{\partial B}{\partial \xi_k}\frac{\partial C}{\partial \xi_i}\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_l \partial \xi_j} + \frac{\partial C}{\partial \xi_k}\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_l \partial \xi_i}\frac{\partial B}{\partial \xi_j} + \frac{\partial C}{\partial \xi_k}\frac{\partial A}{\partial \xi_i}\frac{\partial^2 B}{\partial \xi_l \partial \xi_j}\right).
\end{aligned}$$

Vidíme, že v každém členu je vždy součin dvou prvních derivací a jedné druhé derivace. Například ve 4. a 5. členu v závorce máme druhou derivaci A a první derivace B a C, ovšem v každém členu derivujeme A podle jiných proměnných. Ovšem vzhledem k tomu, že sčítáme přes všechny hodnoty indexů i, j, k, l, můžeme si tyto indexy v jednotlivých členech sumy libovolně přeznačovat. Pokusme se to provést tak, aby u zmíněných dvou členů byly derivace u A, B, C podle stejných proměnných. Toho dosáhneme přeznačením indexů $i \to l, j \to j, k \to k, l \to i$ ve 4. členu a $i \to i, j \to k, k \to l, l \to j$ v 5. členu. Tímto způsobem se samozřejmě změní i indexy elementů matice σ. Zmíněné členy tak dají

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2n} (\sigma_{lj}\sigma_{ki} + \sigma_{ik}\sigma_{lj}) \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{\partial B}{\partial \xi_k} \frac{\partial C}{\partial \xi_l} ,$$

což je ovšem nula, protože matice σ je antisymetrická a tedy $\sigma_{ki} = -\sigma_{ik}$. Podobně bychom provedli přeznačení indexů u členů obsahujících druhou derivaci B, resp. C, a ukázali, že i ty dají nulu. Tím je důkaz hotov.

2. Více abstraktní způsob: Poissonovu závorku lze vyjádřit pomocí diferenciálního operátoru

$$\hat{X}_F = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

tak, že $\{F, A\} = \hat{X}_F A$. Přitom pro koeficienty α_i platí $\alpha_i = \sum_j \sigma_{ji} \partial F / \partial \xi_j$ a ξ_i je definováno v první části řešení tohoto příkladu. První dva členy Jacobiho identity lze pak zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} &= \{F_1, \{F_2, F_3\}\} - \{F_2, \{F_1, F_3\}\} = \\ = X_{F_1} X_{F_2} F_3 - X_{F_2} X_{F_1} F_3 &= (X_{F_1} X_{F_2} - X_{F_2} X_{F_1}) F_3 . \end{aligned}$$

Součin operátorů (např. $X_{F_1} X_{F_2}$) přitom definujeme pomocí jejich postupného působení. Snadným výpočtem zjistíme, že komutátor

$$[X_{F_1}, X_{F_2}] = (X_{F_1} X_{F_2} - X_{F_2} X_{F_1}) = \sum_{i=1}^{2n} \gamma_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

je opět diferenciální operátor prvního řádu s koeficienty tvaru

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{2n} \left(\alpha_j \frac{\partial \beta_i}{\partial \xi_j} - \beta_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_j} \right) ,$$

kde α_i, resp. β_i, jsou koeficienty příslušející operátorům X_{F_1}, resp. X_{F_2}. Potom můžeme psát

$$[X_{F_1}, X_{F_2}] F_3 = \{F_1, \{F_2, F_3\}\} - \{F_2, \{F_1, F_3\}\} = \sum_{j=1}^{s} \left(A_j \frac{\partial F_3}{\partial p_j} + B_j \frac{\partial F_3}{\partial q_j} \right) , \qquad (24)$$

kde zatím neznámé koeficienty (funkce) A_j, B_j nezávisí na F_3. Koeficient A_j nalezneme, dosadíme-li za $F_3 = p_k$, potom

$$\begin{aligned} A_k &= \{F_1, \{F_2, p_k\}\} - \{F_2, \{F_1, p_k\}\} = \\ &= \left\{ F_1, \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \right\} - \left\{ F_2, \frac{\partial F_1}{\partial q_k} \right\} = \left\{ F_1, \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \right\} + \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial q_k}, F_2 \right\} = \frac{\partial}{\partial q_k} \{F_1, F_2\} . \end{aligned}$$

Obdobně nalezneme koeficient B_j dosazením za $F_3 = q_k$

$$B_k = -\frac{\partial}{\partial p_k} \{F_1, F_2\} .$$

Po dosazení za A_j, B_j do rovnice (24) tedy dostaneme

$$[X_{F_1}, X_{F_2}]\, F_3 = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \{F_1, F_2\} \frac{\partial F_3}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p_k} \{F_1, F_2\} \frac{\partial F_3}{\partial q_j} \right) = \{\{F_1, F_2\}, F_3\} .$$

Tím je Jacobiho identita dokázána. Poznamenejme, že jako vedlejší produkt jsme získali důležitý vztah

$$[X_{F_1}, X_{F_2}] = X_{\{F_1,F_2\}}.$$

Nyní zbývá dokázat Poissonovu větu. Nechť A, B jsou integrály pohybu, potom platí

$$\{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0,$$
$$\{B, H\} + \frac{\partial B}{\partial t} = 0.$$

Pro Poissonovu závorku A, B můžeme psát

$$\begin{aligned} \{\{A, B\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t} \{A, B\} &= \{\{A, B\}, H\} + \left\{ \frac{\partial A}{\partial t}, B \right\} + \left\{ A, \frac{\partial B}{\partial t} \right\} = \\ &= \{\{A, B\}, H\} - \{\{A, H\}, B\} - \{A, \{B, H\}\} . \end{aligned}$$

Poslední řádek je v důsledku Jacobiho identity roven 0, tím jsme dokázali i Poissonovu větu.

Příklad 58

Poissonova závorka je rovna $\alpha\beta \mathrm{e}^{\alpha q + \beta p}$.

Příklad 59

Poissonovy závorky dají

$$\begin{aligned} \{L_i, x_j\} &= \sum_k \varepsilon_{ijk} x_k , \\ \{L_i, p_j\} &= \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k . \end{aligned}$$

Příklad 60

Poissonovy závorky dají

$$\begin{aligned} \{L_i, L_j\} &= \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k , \\ \left\{L_i, L^2\right\} &= 2 \sum_j L_j \{L_i, L_j\} = 0 . \end{aligned}$$

K důkazu druhé části použijeme Jacobiho identitu.

Příklad 61

Využijte vlastností Poissonových závorek, například platnosti vztahu

$$\{F_1 F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} + F_2 \{F_1, G\} .$$

9 Kanonické transformace

Příklad 62

Podmínka kanoničnosti transformace se dá zapsat jako

$$p\,\mathrm{d}q - P\,\mathrm{d}Q = \mathrm{d}F(q,Q)\,,$$

kde $\mathrm{d}F(q,Q)$ je totální diferenciál. Dosazením za P a Q dostaneme

$$(p-\alpha\gamma q-\alpha\delta p)\,\mathrm{d}q + (-\beta\gamma q-\beta\delta p)\,\mathrm{d}p = \mathrm{d}F(q,p). \tag{25}$$

Aby výraz na levé straně skutečně totálním diferenciálem byl, musí být splněna podmínka integrability

$$\frac{\partial\,(p-\alpha\gamma q-\alpha\delta p)}{\partial p} = \frac{\partial\,(-\beta\gamma q-\beta\delta p)}{\partial q}\,,$$

z níž po zderivování plyne hledaná podmínka na kanoničnost transformace

$$\alpha\delta-\beta\gamma = 1\,.$$

Pro nalezení vytvořující funkce nejprve s pomocí rovnice (25) najdeme funkci $F(q,p)$. Z rovnice (25) plyne

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_p = p-\alpha\gamma q-\alpha\delta p\,,$$

odkud integrací dostaneme

$$F(q,p) = \int (p-\alpha\gamma q-\alpha\delta p)\,\mathrm{d}q = pq-\alpha\gamma\frac{q^2}{2}-\alpha\delta pq+f(p) = -\alpha\gamma\frac{q^2}{2}-\beta\gamma pq+f(p)\,, \tag{26}$$

kde $f(p)$ je zatím neznámá funkce. Abychom ji nalezli, použijeme další informaci plynoucí z rovnice (25), tedy

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_q = -\beta\gamma q-\beta\delta p\,.$$

Dosadíme-li sem z rovnice (26), dostaneme $f(p) = -\beta\delta p^2/2$, takže

$$F(q,p) = -\alpha\gamma\frac{q^2}{2}-\beta\gamma pq-\beta\delta\frac{p^2}{2}. \tag{27}$$

Nyní stačí vyjádřit z rovnice $Q = \alpha q+\beta p$ zobecněnou hybnost jako $p = p(q,Q)$ a dosadit do rovnice (27). Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$F(q,Q) = \frac{2qQ-\alpha q^2-\delta Q^2}{2\beta}\,,$$

což je hledaná vytvořující funkce.

Příklad 63

Podmínka kanoničnosti transformace v našem případě je

$$p_1\,\mathrm{d}x_1+p_2\,\mathrm{d}x_2+r\,\mathrm{d}P_r+\varphi\,\mathrm{d}P_\varphi = \mathrm{d}F(x_1,x_2,P_r,P_\varphi).$$

Dosazením za diferenciál

$$\mathrm{d}F(x_1, x_2, P_r, P_\varphi) = \frac{\partial F}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial F}{\partial P_r}\,\mathrm{d}P_r + \frac{\partial F}{\partial P_\varphi}\,\mathrm{d}P_\varphi$$

do předchozí rovnice dostaneme vztahy

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} P_r - \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} P_\varphi, \\
p_2 &= \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} P_r + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} P_\varphi, \\
r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\
\varphi &= \arctan \frac{x_2}{x_1}.
\end{aligned}$$

Poslední dvě rovnice odpovídají přechodu od kartézských souřadnic k polárním, první dvě proto musí odpovídat přechodu příslušných zobecněných hybností, protože víme, že celá transformace je kanonická. Z těchto rovnic nakonec můžeme vyjádřit staré souřadnice a hybnosti pomocí nových takto:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi\,, \\
x_2 &= r\sin\varphi\,, \\
p_1 &= P_r\cos\varphi - \frac{P_\varphi}{r}\sin\varphi\,, \\
p_2 &= P_r\sin\varphi + \frac{P_\varphi}{r}\cos\varphi\,.
\end{aligned}$$

Příklad 64

Ze zadaných transformačních rovnic plynou tyto vztahy:

$$\begin{aligned}
q &= \sqrt{2Q\alpha}\,\cos P\,, \\
p &= \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}\,\sin P\,.
\end{aligned}$$

Dosazením do podmínky kanoničnosti transformace

$$\mathrm{d}F = p\,\mathrm{d}q - P\,\mathrm{d}Q = (\sin P\cos P - P)\,\mathrm{d}Q - 2Q\sin^2 P\,\mathrm{d}P$$

O výrazu na pravé straně se snadno přesvědčíme, že se jedná o úplný diferenciál, a tudíž je transformace kanonická. Křivky konstantních P, Q nalezneme snadno položením $Q =$ const a $P =$ const v rovnicích ze zadání. Křivky konstantních Q budou elipsy, křivky konstantních P pak polopřímky vycházející z počátku.

Příklad 65

Budeme předpokládat, že vytvořující funkce nezávisí explicitně na čase, proto je nový hamiltonián roven starému, $H' = H$. Jestliže zároveň požadujeme, aby $H' = \omega P$, pak máme

$$P = \frac{H}{\omega} = \frac{p^2}{2m\omega} + \frac{1}{2}m\omega q^2 \tag{28}$$

Kritérium toho, že transformace $(q,p) \to (Q,P)$ je kanonická, lze formulovat tak, že Poissonova závorka z Q, P je rovna jedné. Dosazením

$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{p}{m\omega}\frac{\partial Q}{\partial q} - m\omega q\,\frac{\partial Q}{\partial p} = 1 \tag{29}$$

Dostali jsme parciální diferenciální rovnici pro neznámou funkci $Q(q,p)$. Vzhledem k jejímu charakteru budeme hledat řešení ve tvaru $Q = f(p/q)$. Dosazením do podmínky (29) dostaneme

$$-\frac{p^2}{m\omega q^2} f'(p/q) - m\omega f'(p/q) = 1\,,$$

kde čárka značí derivaci. Jestliže označíme $\xi = p/q$, lze tuto rovnici přepsat na již obyčejnou diferenciální rovnici

$$f'(\xi) = -\frac{1}{m\omega + \frac{\xi^2}{m\omega}}\,,$$

kterou lze snadno vyřešit integrací:

$$f(\xi) = -\arctan\frac{\xi}{m\omega} \quad \Rightarrow \quad Q = -\arctan\frac{p}{m\omega q}\,, \tag{30}$$

kde integrační konstantu jsme položili rovnu nule.

Pro nalezení vytvořující funkce musíme nejprve vyjádřit p, P jako funkce q, Q, což jde snadno z rovnic (28) a (30): $p = -m\omega q \tan Q$, $P = m\omega q^2/(2\cos^2 Q)$. Pro vytvořující funkci pak dostaneme diferenciální rovnice

$$\frac{\partial F(q,Q)}{\partial q} = p = -m\omega q \tan Q\,, \qquad \frac{\partial F(q,Q)}{\partial Q} = -P = -\frac{m\omega q^2}{2\cos^2 Q}$$

Řešením první z nich dostaneme $F = -\frac{1}{2}m\omega q^2 \tan Q + h(Q)$ a ze druhé rovnice pak pro funkci h dostaneme $\mathrm{d}h/\mathrm{d}Q = 0$, odkud bez újmy na obecnosti položíme $h = 0$. Vytvořující funkce je tedy

$$F = -\frac{1}{2}m\omega q^2 \tan Q\,.$$

Pohybové rovnice pro Q, P i jejich řešení pak budou velmi jednoduché:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega \quad \Rightarrow \quad Q = \omega t + \text{const.}\,,\\ \dot{P} &= -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \text{const.}\end{aligned}$$

Příklad 66

Přímým dosazením za p a q do Hamiltoniánu $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ z předchozího příkladu zjistíme, že v nových proměných $\bar{P}$ a $\bar{Q}$ má tvar $\bar{H} = \omega\bar{Q}$. Z tvaru kanonických transformací v obou příkladech je vidět, že proměnné P, Q a $\bar{P}$, $\bar{Q}$ spolu souvisí následovně

$$\begin{aligned} Q &= -\bar{P},\\ P &= \bar{Q}.\end{aligned}$$

Musíme ještě ověřit, zda jde o kanonickou transformaci, tj. platí-li relace

$$p\,\mathrm{d}q - \bar{P}\,\mathrm{d}\bar{Q} = \mathrm{d}F(q,\bar{Q}).$$

Po dosazení za p, q dostaneme

$$\left(\bar{P}+\sin\bar{P}\cos\bar{P}\right)\mathrm{d}\bar{Q}+2\bar{Q}\cos^2\bar{P}\,\mathrm{d}\bar{P}=-\mathrm{d}F(\bar{P},\bar{Q}),$$

a při zřejmém splnění podmínek integrability odtud integrací plyne

$$F=-\bar{Q}\sin\bar{P}\cos\bar{P}-\bar{P}\bar{Q}.$$

Užitím rovnice $q=-\sqrt{\frac{\bar{Q}}{m\omega}}\sin\bar{P}$ pak získáme konečný tvar vytvořující funkce $F(q,\bar{Q})$.

Příklad 67

Vyjdeme z podmínky kanoničnosti transformace

$$p\,\mathrm{d}q-P\,\mathrm{d}Q=-\mathrm{d}F(q,Q),$$

do níž dosadíme za P a Q ze vzorců, které plynou ze zadaných transformačních rovnic. Dostaneme

$$\left(p-\alpha q^{2\alpha-1}\sin\beta p\cos\beta p\right)\mathrm{d}q+\beta q^{2\alpha}\sin^2\beta p\,\mathrm{d}p=-\mathrm{d}F(q,p).$$

Snadno zjistíme, že podmínka integrability je splněna pouze pokud platí $\alpha=\frac{1}{2}$ a $\beta=2$. Po dosazení za α, β do předchozí rovnice obdržíme

$$\left(p-\frac{1}{2}\sin 2p\cos 2p\right)\mathrm{d}q+2q\sin^2 2p\,\mathrm{d}p=-\mathrm{d}F(q,p),$$

odtud integrací plyne

$$F=-pq+\frac{1}{4}q\sin 4p.$$

Užitím rovnice $Q=q^{1/2}\cos 2p$ pak získáme konečný tvar vytvořující funkce $F(q,Q)$.

Příklad 68

a) $P\,\mathrm{d}Q-p\,\mathrm{d}q=\mathrm{d}\left(q\sin p\cos p-pq\right)$
b) $P\,\mathrm{d}Q-p\,\mathrm{d}q=-\mathrm{d}\left[q\left(\cot p+p\right)\right]$
c) $P\,\mathrm{d}Q-p\,\mathrm{d}q=\mathrm{d}\left(q\sin p\cos p-pq\right)$

Příklad 69

Z teorie víme, že každá pozorovatelná veličina $G(q_j,p_j)$ ve fázovém prostoru je generátorem jisté infinitesimální kanonické transformace. Tyto transformace lze nalézt pomocí vztahů

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}\varepsilon}&=\frac{\partial G}{\partial p_j}(q_j,p_j)=\{q_j,G\}\,,\\ \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}\varepsilon}&=-\frac{\partial G}{\partial q_j}(q_j,p_j)=\{p_j,G\}\,.\end{aligned}$$

Integrací této soustavy lze přejít od infinitesimálních ke konečným kanonickým transformacím. Její řešení $q_j=q_j\left(\varepsilon,C_1,...\right)$, $p_j=p_j\left(\varepsilon,C_1,...\right)$ je křivka ve fázovém prostoru s parametrem ε, jejíž tečný vektor

$$\left(\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}\varepsilon},\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)$$

je v každém bodě $(q_j(\varepsilon), p_j(\varepsilon))$ roven vektoru

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p_j}(q_j(\varepsilon), p_j(\varepsilon)), -\frac{\partial G}{\partial q_j}(q_j(\varepsilon), p_j(\varepsilon)\right).$$

Takovým křivkám říkáme integrální křivky vektorového pole

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p_j}(q_j, p_j), -\frac{\partial G}{\partial q_j}(q_j, p_j)\right).$$

V obecném případě řešení existují (a jsou jednoznačná) pro všechny počáteční hodnoty v dané oblasti U fázového prostoru jen při hodnotách ε z jistého intervalu $(-a, a)$, $a > 0$. Při pevném $\varepsilon \in (-a, a)$ všem bodům oblasti U odpovídají body jisté oblasti V, tuto kanonickou transformaci označíme

$$\Phi_\varepsilon^G : U \to V.$$

Jednoparametrický systém transformací Φ_ε^G, $\varepsilon \in (-a, a)$ (generovaný funkcí G) má tyto vlastnosti

1. $\Phi_0^G =$ identická transformace
2. $\Phi_{-\varepsilon}^G = \left(\Phi_\varepsilon^G\right)^{-1} =$ inverzní transformace
3. $\Phi_\varepsilon^G \circ \Phi_{\varepsilon'}^G = \Phi_{\varepsilon'}^G \circ \Phi_\varepsilon^G = \Phi_{\varepsilon+\varepsilon'}^G$ skládání transformací

Dá-li se navíc interval $(-a, a)$ rozšířit na celou reálnou osu, pak tvoří Φ_ε^G jednoparametrickou grupu kanonických transformací.

Zapíšeme-li úvodní soustavu rovnic v symetrickém tvaru

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\varepsilon} = \{A, G\},$$

jejich řešení lze pro $\varepsilon \in (-a, a)$ psát jako součet nekonečné řady

$$A(\varepsilon) = A + \varepsilon\{A, G\} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\{\{A, G\}, G\} + ...,$$

kde na pravé straně jsou do funkcí A, G dosazeny počáteční hodnoty $(q_j(0), p_j(0))$. První dva členy tohoto rozvoje představují zmíněnou infinitesimální transformaci.

Přistupme k našemu konkrétnímu případu bodové bezsilové částice s Hamiltoniánem

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_y^2\right).$$

Začněme generující funkcí $G_1 = p_1$. Potom úvodní soustava diferenciálních rovnic, kde za G dosadíme G_1, pro souřadnice dává

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\varepsilon} &= \frac{\partial G_1}{\partial p_1} = 1,\\
\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\varepsilon} &= \frac{\partial G_1}{\partial p_2} = 0,\\
\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\varepsilon} &= \frac{\partial G_1}{\partial p_3} = 0.
\end{aligned}$$

Obecné řešení této soustavy je

$$\begin{aligned}
x_1(\varepsilon) &= \varepsilon + C_1, \\
x_2(\varepsilon) &= C_2, \\
x_3(\varepsilon) &= C_3.
\end{aligned}$$

Dosazením za počáteční podmínky $x_1(0) = x_1$, $x_2(0) = x_2$, $x_3(0) = x_3$, dostaneme

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1(\varepsilon) = x_1 + \varepsilon, \\
x_2' &= x_2(\varepsilon) = x_2, \\
x_3' &= x_3(\varepsilon) = x_3.
\end{aligned}$$

Obdobným způsobem pro hybnosti obdržíme

$$\begin{aligned}
p_1' &= p_1(\varepsilon) = p_1, \\
p_2' &= p_2(\varepsilon) = p_2, \\
p_3' &= p_3(\varepsilon) = p_3.
\end{aligned}$$

Protože x_1 je cyklickou souřadnicí, je zřejmé, že se Hamiltonián při kanonické transformaci generované funkcí $G_1 = p_1$ nezmění.

Nyní se věnujme případu s generující funkcí $G_2 = L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1$. Pro souřadnice dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\varepsilon} &= \frac{\partial G_2}{\partial p_1} = -x_2, \\
\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\varepsilon} &= \frac{\partial G_2}{\partial p_2} = x_1, \\
\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\varepsilon} &= \frac{\partial G_2}{\partial p_3} = 0.
\end{aligned}$$

Obecné řešení této soustavy je

$$\begin{aligned}
x_1(\varepsilon) &= C_1 \cos\varepsilon - C_2 \sin\varepsilon, \\
x_2(\varepsilon) &= C_1 \sin\varepsilon + C_2 \cos\varepsilon, \\
x_3(\varepsilon) &= C_3.
\end{aligned}$$

Dosazením za počáteční podmínky $x_1(0) = x_1$, $x_2(0) = x_2$, $x_3(0) = x_3$, dostaneme

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1(\varepsilon) = x_1 \cos\varepsilon - x_2 \sin\varepsilon, \\
x_2' &= x_2(\varepsilon) = x_1 \sin\varepsilon + x_2 \cos\varepsilon, \\
x_3' &= x_3(\varepsilon) = x_3.
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že v infinitesimálním tvaru

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1(\varepsilon) = x_1 - x_2\varepsilon, \\
x_2' &= x_2(\varepsilon) = x_1\varepsilon + x_2, \\
x_3' &= x_3(\varepsilon) = x_3.
\end{aligned}$$

Obdobným způsobem jako pro souřadnice obdržíme pro hybnosti

$$\begin{aligned} p_1' &= p_1(\varepsilon) = p_1 \cos\varepsilon - p_2 \sin\varepsilon, \\ p_2' &= p_2(\varepsilon) = p_1 \sin\varepsilon + p_2 \cos\varepsilon, \\ p_3' &= p_3(\varepsilon) = p_3. \end{aligned}$$

Pro nalezení odpovědi na otázku, zda kanonická transformace generovaná funkcí G_2 ponechává Hamiltonián invariantní, stačí spočítat Poissonovu závorku $\{G_2, H\}$, neboť pro infinitesimální transformaci Hamiltoniánu platí

$$\begin{aligned} H(x_j', p_j') - H(x_j, p_j) &= \sum_{j=1}^{3} \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_j} \left(x_j' - x_j \right) + \frac{\partial H}{\partial p_j} \left(p_j' - p_j \right) \right\} = \\ &= \varepsilon \sum_{j=1}^{3} \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial G_2}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial G_2}{\partial x_j} \right\} = \\ &= \varepsilon \{H, G_2\}. \end{aligned}$$

Jednoduchým výpočtem zjistíme, že $\{G_2, H\} = 0$. Tudíž transformace generovaná funkcí G_2 skutečně ponechává Hamiltonián invariantní.

10 Hamiltonova-Jacobiho rovnice

Příklad 70

Jde o konzervativní soustavu, tudíž obecná Hamiltonova-Jacobiho rovnice má tvar

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

a hlavní funkci Hamiltonovu $S(P, q, t)$ můžeme hledat v separovaném tvaru $S = S_1(t) + S_0(P, q)$. V našem případě tedy rovnice

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} k q^2 + \frac{\partial S_1}{\partial t} = 0$$

vede na dvě nezávislé rovnice pro S_1 a S_0

$$-\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t} = E \qquad \Rightarrow \qquad S_1 = Et + \text{konst},$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} k q^2 = E,$$

kde E je separační konstanta. Z druhé rovnice pak dostaneme

$$S_0 = \int \sqrt{2mE - mkq^2}\, \mathrm{d}q,$$

kde jsme vynechali integrační konstantu, neboť další operace se vztahují jen na derivace funkce S_0, obdobně tomu bude pro funkci S_1. Máme tedy

$$S = Et + \int \sqrt{2mE - mkq^2}\, \mathrm{d}q.$$

Potom můžeme psát v souladu s Hamiltonovou-Jacobiho teorií

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2mE - mkq^2}, \\ Q &= \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial S_0}{\partial E}. \end{aligned}$$

Ze druhé rovnice pak dostaneme

$$Q + t = \int \frac{m}{\sqrt{2mE - mkq^2}}\,\mathrm{d}q = \sqrt{\frac{k}{m}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}} q\right),$$

inverzí dojdeme ke vztahu

$$q = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t+Q)\right] = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin[\omega(t+Q)].$$

To je známý vzorec pro pohyb lineárního harmonického oscilátoru. Pro úplnost vypočítejme hybnost

$$p = \sqrt{2mE - mkq^2}.$$

Dosadíme-li za q, docházíme ke vztahu

$$p = \sqrt{2mE} \cos[\omega(t+Q)].$$

Jsou-li dány počáteční podmínky $q = q_0$, $p = p_0$ v čase $t = t_0$, pak z rovnic pro q a p plyne

$$\begin{aligned} q_0 &= \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin[\omega(t_0+Q)], \\ p_0 &= \sqrt{2mE} \cos[\omega(t_0+Q)], \end{aligned}$$

a odtud určíme

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\omega} \arctan\left(\frac{m\omega q_0}{p_0}\right), \\ E &= \frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_0^2. \end{aligned}$$

Nyní je vidět, že konstanta E má význam celkové energie lineárního harmonického oscilátoru.

Příklad 71

Hlavní funkce Hamiltonova je

$$S = \int_0^t L\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} m v^2 t = \frac{m}{2t} \sum_i (x_i - x_{0i})^2.$$

Příklad 72

Hamiltonián má tvar $H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + mgz$. Protože jde o konzervativní soustavu, můžeme hlavní funkci Hamiltonovu $S(P, q, t)$ hledat v separovaném tvaru $S = S_1(t) + S_0(P_i, x_i)$. Pak Hamiltonova-Jacobiho rovnice je

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2\right] + mgz + \frac{\partial S_1}{\partial t} = 0$$

a tudíž

$$-\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t} = E,$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2\right] + mgz = E.$$

Jelikož jsou x a y cyklické souřadnice, můžeme funkci S_0 separovat dále a psát

$$S_0 = P_x x + P_y y + S_z(z).$$

Dosazením za S_0 do předchozí rovnice obdržíme

$$S_z = \int \sqrt{2mE - P_x^2 - P_y^2 - 2m^2gz}\,\mathrm{d}z \;=\; \frac{\left(2mE - P_x^2 - P_y^2 - 2m^2gz\right)^{3/2}}{3m^2g}.$$

Hlavní funkce Hamiltonova je tedy tvaru

$$S = -Et + P_x x + P_y y + \frac{\left(2mE - P_x^2 - P_y^2 - 2m^2gz\right)^{3/2}}{3m^2g}.$$

Konstanty E, P_x, P_y považujme za nové obecné hybnosti, s nimi spojené nové obecné souřadnice označme Q, Q_x, Q_y. Potom v souladu s Hamiltonovou-Jacobiho teorií

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{1}{mg}N,\\
Q_x &= \frac{\partial S}{\partial P_x} = x - \frac{P_x}{m^2g}N,\\
Q_y &= \frac{\partial S}{\partial P_x} = y - \frac{P_y}{m^2g}N,
\end{aligned}$$

kde $N = \sqrt{2mE - P_x^2 - P_y^2 - 2m^2gz}$. Odtud vypočteme

$$\begin{aligned}
x &= Q_x + \frac{P_x Q}{m} + \frac{P_x}{m}t,\\
y &= Q_y + \frac{P_y Q}{m} + \frac{P_y}{m}t,\\
z &= \frac{2mE - P_x^2 - P_y^2 + (Qgm)^2}{2m^2g} - gQt - \frac{1}{2}gt^2.
\end{aligned}$$

11 Tuhé těleso

Příklad 73
Při výpočtu kinetické energie bereme tuhé těleso jako diskrétní soustavu hmotných bodů, píšeme

$$T = \sum \frac{mv^2}{2}, \tag{31}$$

kde suma probíhá všechny body tělesa. Rychlost jednotlivých bodů je možné vyjádřit prostřednictvím rychlosti postupného pohybu tělesa (rychlost těžiště) $\vec{V}$ a úhlové rychlosti jeho otáčení $\vec{\omega}$, tedy

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{32}$$

Dosazením do (31) dostaneme

$$T = \sum \frac{m}{2}(\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \sum \frac{m}{2}V^2 + \sum m\vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \sum \frac{m}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r})^2.$$

Rychlosti $\vec{V}$ a $\vec{\omega}$ jsou stejné pro všechny body tuhého tělesa. V prvním členu můžeme tedy vytknout $\frac{1}{2}V^2$ před symbol sumy a součet $\sum m$ nahradíme celkovou hmotností tělesa M. V druhém členu píšeme

$$\sum m\vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \sum m(\vec{V} \times \vec{\omega}) \cdot r = (\vec{V} \times \vec{\omega}) \cdot \sum m\vec{r}.$$

Vidíme, že pokud bychom umístili počátek souřadné soustavy do těžiště, tento člen bude nulový (v tom případě totiž $\sum m\vec{r} = 0$). Ve třetím členu rozepíšeme vektorový součin a získáváme výsledný vztah

$$T = \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m(\omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2). \tag{33}$$

Kinetickou energii tělesa tedy můžeme psát jako součet dvou částí. První člen v (33) představuje kinetickou energii translačního pohybu – ta je stejná, jako by celá hmotost tělesa byla soustředěna v těžišti. Druhý člen je kinetická energie rotačního pohybu s úhlovou rychlostí ω vzhledem k ose procházející těžištěm. Takto rozdělit kinetickou energii na dvě části je ovšem možno jen v případě, že jsme zvolili těžišťovou souřadnou soustavu. Přepišme nyní kinetickou energii otáčivého pohybu do tenzorového zápisu, tj. prostřednictvím složek vektorů $\vec{r}, \vec{\omega}$. Platí

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2}\sum m\omega_i^2 x_l^2 - \omega_i x_i \omega_k x_k = \frac{1}{2}\sum m\omega_i\omega_k\delta_{ik}x_l^2 - \omega_i\omega_k x_i x_k = \\ &= \frac{1}{2}\omega_i\omega_k \sum m(\delta_{ik}x_l^2 - x_i x_k). \end{aligned}$$

Nyní zavedeme tenzor

$$J_{ik} = \sum m(\delta_{ik}x_l^2 - x_i x_k) \tag{34}$$

a konečně dostáváme vyjádření pro kinetickou energii tuhého tělesa ve tvaru

$$T = \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2}J_{ik}\omega_i\omega_k. \tag{35}$$

Příklad 74
a) Moment setrvačnosti $J = \frac{1}{2}mr^2$.

b) Určení momentu setrvačnosti $J_{\vec{n}}$ vzhledem k obecné ose $\vec{n}$ je totožné s promítnutím tenzoru setrvačnosti J_{ik} do směru této osy, tedy

$$J_{\vec{n}} = (n_1, n_2, n_3)(J_{ik})(n_1, n_2, n_3)^T.$$

V našem případě

$$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = (\cos\alpha, \cos\beta, 0)|_{\beta=\pi/2-\alpha} = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0),$$

po dosazení do transformačního vztahu dostáváme výsledek

$$J_{\vec{n}} = \frac{mr^2}{4}(1 + \cos\alpha).$$

c) Použijeme postup z úlohy b), výsledkem je $\frac{1}{6}mr^2$. Poněvadž je krychle kulovým setrvačníkem (všechny tři hlavní momenty setrvačnosti jsou si rovny), je možné k výsledku této úlohy přijít také úvahou o momentu setrvačnosti. Pro kulový setrvačník platí, že moment setrvačnosti vzhledem k libovolné ose je rovný hlavnímu momentu setrvačnosti, v případě krychle je to právě $\frac{1}{6}mr^2$.

Příklad 75
Těžiště se nachází na ose symetrie čtyřstěnu ve vzdálenosti $X_3 = m_2h/\mu$ od jeho základny (h je výška čtyřstěnu). Momenty setrvačnosti jsou

$$J_1 = J_2 = 3m_1m_2h^2/\mu + \frac{1}{2}m_1a^2, \qquad J_3 = m_1a^2.$$

Pokud $m_1 = m_2, h = \sqrt{\frac{2a}{3}}$, molekula je pravidelný čtyřstěn a $J_1 = J_2 = J_3 = m_1a^2$.

Příklad 76
Eulerovy rovnice pro případ volné rotace, kdy $\vec{L} = 0$, jsou

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} + \frac{(J_3 - J_2)\omega_2\omega_3}{J_1} &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} + \frac{(J_1 - J_3)\omega_3\omega_1}{J_2} &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}\omega_3}{\mathrm{d}t} + \frac{(J_2 - J_1)\omega_1\omega_2}{J_3} &= 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Pro symetrický setrvačník dále platí $J_1 = J_2$. Ze třetí rovnice získáme $\dot{\omega}_3 = 0$, to znamená ω_3 je konstantní. Přepsáním prvních dvou rovnic získame soustavu

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\omega_0\omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= \omega_0\omega_1 \end{aligned} \tag{37}$$

kde $\omega_0 = \frac{\omega_3(J_3-J_1)}{J_1}$ je konstantní. Řešením soustavy (37) je

$$\omega_1 = A\cos\omega_0 t, \qquad \omega_2 = A\sin\omega_0 t.$$

Vidíme, že složka úhlové rychlosti kolmá k ose setrvačníku rotuje s úhlovou rychlostí ω_0 a má konstantní velikost $A = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$. Protože složka ω_3 podél osy setrvačníku je také konstantní, můžeme říct, že vektor $\vec{\omega}$ rotuje rovnoměrně úhlovou rychlostí ω_0 kolem osy setrvačníku.

Příklad 77

Uvažujeme asymetrický setrvačník, pro který jsou všechny tři hlavní hodnoty tenzoru setrvačnosti různé. Budeme předpokládat $J_3 > J_2 > J_1$.

Dva integrály Eulerových rovnic známe ihned ze zákonů zachování energie a momentu hybnosti. Jejich vyjádření pomocí složek vektoru $\vec{L}$ je

$$\frac{L_1^2}{J_1} + \frac{L_2^2}{J_2} + \frac{L_3^2}{J_3} = 2E, \qquad L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = L^2.$$

Tyto rovnice už leccos napovídají o pohybu setrvačníku. Pokud rovnice vezmeme jako zapsané v souřadnicích L_1, L_2, L_3, potom jsou to rovnice elipsoidu s poloosami $\sqrt{2EJ_1}$, $\sqrt{2EJ_2}$, $\sqrt{2EJ_3}$ a koule o poloměru L. Když se vektor $\vec{L}$ pohybuje relativně k osám setrvačnosti setrvačníku, jeho koncový bod se pohybuje podél průsečíku těchto dvou povrchů. Existence těchto průsečíků je zabezpečena platností nerovnosti $2EJ_1 < L^2 < 2EJ_3$, která říká, že poloměr koule leží mezi nejmenší a největší poloosou elipsoidu.

Trajektorie koncového bodu vektoru $\vec{L}$ se mění se změnou jeho velikosti L (pro danou hodnotu E). Když je L jenom o trochu větší než $2EJ_1$, sféra protíná elipsoid ve dvou malých uzavřených křivkách obepínajících osu x_1 poblíž příslušných pólů elipsoidu. Pro $L^2 \to 2EJ_1$ se tyto křivky scvrknou na body pólů. S rostoucím L^2 se křivky zvětšují a pro $L^2 = 2EJ_2$ přejdou na dvě rovinné elipsy protínající se na pólech elipsoidu na ose x_2. Jestliže L^2 roste ještě dále, objeví se znovu dvě rozdílné uzavřené křivky, nyní ovšem okolo osy x_3. Pro $L^2 \to 2EJ_3$ se tyto křivky scvrknou na body v těchto pólech.

Poněvadž jsou křivky uzavřené, pohyb vektoru $\vec{L}$ vzhledem k setrvačníku musí být periodický, počas jedné periody opíše vektor $\vec{L}$ nějaký kónický povrch a vrátí se do své počáteční polohy.

Je nutné uvědomit si zásadní rozdíl v podstatě trajektorií rozdílných pólů elipsoidu. V blízkosti os x_1 a x_3 leží trajektorie v blízkosti pólů. Avšak trajektorie procházející blízko pólů osy x_2 se odchylují do velkých vzdáleností od těchto pólů. Tento rozdíl je způsoben rozdílností stability rotace setrvačníku kolem svých tří os setrvačnosti. Rotace kolem os x_1 a x_3, kterým přísluší největší a nejmenší moment setrvačnosti, je stabilní - když setrvačník vychýlíme malinko z jeho stavu, výsledný pohyb je blízký původnímu. Rotace kolem osy x_2 je nestabilní, už i velmi malá odchylka je postačující ke změně trajektorie takovým způsobem, který vede k pohybu setrvačníku polohami značně vzdálenými od původních.

Nechť je osa x_3 blízká směru $\vec{L}$, potom $L_3 = L$ (až na hodnoty druhého a vyšších řádů malosti) a $L_1, L_2 \ll L_3$. Se stejnou přesností můžeme psát první dvě rovnice ze soustavy (36)

$$\frac{\mathrm{d}L_1}{\mathrm{d}t} = \omega_0 L_2 \left(1 - \frac{J_3}{J_2}\right), \qquad \frac{\mathrm{d}L_2}{\mathrm{d}t} = \omega_0 L_1 \left(\frac{J_3}{J_1} - 1\right),$$

kde $\omega_0 = \frac{L}{J_3}$. Řešení pro L_1, L_2 hledejme úměrné funkci $\exp(i\Omega t)$, přičemž frekvence

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{\left(\frac{J_3}{J_1} - 1\right)\left(\frac{J_3}{J_2} - 1\right)}.$$

Výsledné funkce L_1 a L_2 jsou

$$L_1 = La\sqrt{\left(\frac{J_3}{J_2} - 1\right)} \cos \Omega t, \qquad L_2 = La\sqrt{\left(\frac{J_3}{J_1} - 1\right)} \sin \Omega t,$$

kde a je integrační konstanta, z předpokladu $L_1, L_2 \ll L_3$ plyne $a \ll 1$. Tyto rovnice popisují pohyb vektoru $\vec{L}$ vzhledem k setrvačníku.

V případě $L^2 = 2EJ_2$ vystupují v řešení hyperbolické funkce, zejména

$$\Omega_1 = \Omega_0\sqrt{\frac{J_2(J_3 - J_2)}{J_1(J_3 - J_1)}} \cosh^{-1} \tau, \qquad \Omega_2 = \Omega_0 \tanh \tau, \qquad \Omega_3 = \Omega_0\sqrt{\frac{J_2(J_2 - J_1)}{J_3(J_3 - J_1)}} \cosh^{-1} \tau.$$

Příklad 78

Vztah mezi poloměrem podstavy a výškou válce je $h^2 = 3R^2$. Tenzor setrvačnosti má tvar

$$J = \frac{LR^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 79

Kinetická energie

$$T = \frac{1}{2}(a^2 + R^2 - 2aR\cos\phi)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2.$$

Příklad 80

Označme 2α vrcholový úhel kužele a dále θ úhel mezi úsečkou OA, kterou se kužel dotýká roviny a nějakým směrem v rovině. Těžiště je na ose kužele, ve vzdálenosti $a = \frac{3}{4}h$ od vrcholu, kde h je výška kužele. Momenty setrvačnosti vzhledem k osám, jejichž počátek je ve vrcholu kužele, jsou

$$J_1' = J_2' = \frac{3}{5}\mu\left(\frac{1}{4}R^2 + h^2\right), \qquad J_3' = \frac{3}{10}\mu R^2.$$

Zvolíme-li počátek souřadné soustavy v těžišti, jsou momenty setrvačnosti rovny

$$J_1 = J_2 = J_1' - \mu a^2 = \frac{3}{20}\mu\left(R^2 + \frac{1}{4}h^2\right), \qquad J_3 = \frac{3}{10}\mu R^2.$$

Výpočet kinetické energie provedeme nejdříve přes těžiště. Rychlost těžiště je $V = a\dot{\phi}\cos\alpha$, úhlová rychlost odpovídající rotaci kolem osy OA je $\Omega = \frac{V}{a\sin\alpha} = \dot{\theta}\cot\alpha$. Jedna z hlavních os setrvačnosti (x_3) je rovnoběžná s osou kuželu, druhou osu (x_2) zvolíme kolmou na osu kužele a úsečku OA. Potom složky vektoru úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$, která je rovnoběžná s OA, jsou $(\Omega\sin\alpha, 0, \Omega\cos\alpha)$. Kinetická energie je potom rovna výrazu

$$T = \frac{1}{2}\mu a^2\dot{\theta}^2\cos\alpha^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2\cos\alpha^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}^2\frac{\cos\alpha^4}{\sin\alpha^2} = \frac{3}{40}\mu h\dot{\theta}^2(1 + 5\cos\alpha^2).$$

Nyní tentýž výraz získáme z analýzy pohybu přes úsečku dotyku OA. Moment setrvačnosti vzhledem k ose, na které leží úsečka dotyku OA, získáme pootočením tenzoru setrvačnosti s počátkem ve vrcholu kužele do této osy $\vec{n} = (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$. Moment setrvačnosti je

$$J_n = \frac{3}{5}\mu(\frac{1}{4}R^2 + h^2)\sin^2\alpha + \frac{3}{10}\mu R^2\cos^2\alpha.$$

Úhlová rychlost odpovídající rotaci kolem osy OA je $\Omega = \frac{V}{a\sin\alpha} = \dot{\theta}\cot\alpha$. Kinetická energie je potom rovna výrazu

$$T = \frac{1}{2}J_n\dot{\theta}^2\cot\alpha^2 = \frac{3}{40}\mu h\dot{\theta}^2(1 + 5\cos\alpha^2).$$

Nyní spočteme potenciální energii, tato je $V = \mu ga(1-\cos\theta) = \frac{3}{4}\mu gh(1-\cos\theta)$. V aproximaci malých kmitů uvažujeme θ malé, tedy $V = \frac{3}{4}\mu gh\theta^2$. Řešením pohybových rovnic sestavených z Lagrangiánu

$$L = T - V = \frac{3}{40}\mu h\dot{\theta}^2(1 + 5\cos\alpha^2) - \frac{3}{4}\mu gh\theta^2$$

snadno určíme frekvenci malých kmitů jako

$$\omega^2 = \frac{10g}{(1 + 5\cos\alpha^2)}.$$

12 Pružnost

Příklad 81

a) Tenzor deformace je definován vztahem

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$$

Složky tenzoru spočteme jednu po druhé. Indexy i, k, l procházejí hodnoty x, y, pak místo souřadnic x_x, x_y píšeme x, y.

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(A + A + A.A + 0) = A + \frac{A^2}{2}, \\
\epsilon_{xy} &= \epsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(0 + 0 + 0 + 0) = 0, \\
\epsilon_{yy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(A + A + A.A + 0) = A + \frac{A^2}{2}.
\end{aligned}$$

Tenzor deformace v maticovém zápisu je tedy

$$\epsilon = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2A + A^2 & 0 \\ 0 & 2A + A^2 \end{pmatrix}.$$

Z jednotlivých komponent matice tenzoru deformace umíme získat informaci o relativním prodloužení (diagonální prvky matice) infinitezimální části tělesa při deformaci (tato je spojená se změnou objemu) a rovněž o smykové části (změna úhlů mezi souřadnicovými osami) deformace (nediagonální prvky matice).

Rozměr ve směru každé ze souřadnicových os se změní o $A + A^2/2$, celková změna objemu je $\mathrm{Tr}\hat{\epsilon} = 2A + A^2$ a protože nediagonální prvky jsou nulové, smyková deformace nenastává. Vektorové pole popisující tuto deformaci je znázorněno na obrázku 33a.

b) Složky tenzoru deformace

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{1}{2}(A + A + A.A + 0) = A + \frac{A^2}{2},\\
\epsilon_{xy} &= \epsilon_{yx} = \frac{1}{2}(0 + 0 + 0 + 0) = 0,\\
\epsilon_{yy} &= \frac{1}{2}(0 + 0 + 0 + 0) = 0.
\end{aligned}$$

Tenzor deformace v maticovém zápisu

$$\epsilon = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2A + A^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozměr se změní jen ve směru souřadnicové osy x a to o $A + A^2/2$, celková změna objemu je $\mathrm{Tr}\hat{\epsilon} = A + A^2/2$ a smyková deformace nenastává (nediagonální prvky jsou nulové). Vektorové pole popisující tuto deformaci je znázorněno na obrázku 33b.

c) Složky tenzoru deformace

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{1}{2}(0) = 0,\\
\epsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(A + 0 + 0 + 0) = \epsilon_{yx},\\
\epsilon_{yy} &= \frac{1}{2}(0 + 0 + A.A + 0) = \frac{A^2}{2}.
\end{aligned}$$

Tenzor deformace v maticovém zápisu je

$$\epsilon = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & A^2 \end{pmatrix}.$$

Rozměr se změní jen ve směru souřadnicové osy y a to o $A + A^2/2$, celková změna objemu je $\mathrm{Tr}\hat{\epsilon} = A + A^2/2$. Úhel odklonu nové osy x od kolmice na osu y získáme ze vztahu $\sin\alpha = 2A$ (tj. úhel mezi novými souřadnými osami je $\pi/2 - \alpha$). Vektorové pole popisující tuto deformaci je znázorněno na obrázku 33c.

d) Složky tenzoru deformace

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{1}{2}(0 + 0 + 0 + A.A) = \frac{A^2}{2},\\
\epsilon_{xy} &= \epsilon_{yx} = \frac{1}{2}(A + A + 0 + 0) = A,\\
\epsilon_{yy} &= \frac{1}{2}(0 + 0 + A.A + 0) = \frac{A^2}{2}.
\end{aligned}$$

Tenzor deformace v maticovém zápisu je

$$\epsilon = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A^2 & 2A \\ 2A & A^2 \end{pmatrix}.$$

Rozměr se změní ve směru každé ze souřadnicových os o $A^2/2$, celková změna objemu je $\mathrm{Tr}\hat{\epsilon} = A^2$, úhel odklonu nové osy x od kolmice na osu y získáme ze vztahu $\sin\alpha = 4A$ (tj. úhel mezi novými souřadnými osami je $\pi/2-\alpha$). Vektorové pole popisující tuto deformaci je znázorněno na obrázku 33d.

e) Složky tenzoru deformace

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{1}{2}(0+0+0+A.A) = \frac{A^2}{2},\\
\epsilon_{xy} &= \epsilon_{yx} = \frac{1}{2}(-A+A+0.(-A)+A.0) = 0,\\
\epsilon_{yy} &= \frac{1}{2}(0+0-A.(-A)+0) = \frac{A^2}{2}.
\end{aligned}$$

Tenzor deformace v maticovém zápisu je

$$\epsilon = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}.$$

Toto vektorové pole popisuje rotaci, se kterou je zároveň spojená i změna objemu. Prodloužení ve směru obou os je $A^2/2$, příslušná změna objemu je potom A^2. Vektorové pole popisující tuto deformaci je znázorněno na obrázku 33e.

f) Složky tenzoru deformace

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{1}{2}((\cos\alpha-1)+(\cos\alpha-1)+(\cos\alpha-1).(\cos\alpha-1)+\sin\alpha.\sin\alpha) = 0,\\
\epsilon_{xy} &= \epsilon_{yx} = \frac{1}{2}(-\sin\alpha+\sin\alpha+(\cos\alpha-1).(-\sin\alpha)+\sin\alpha.(\cos\alpha-1)) = 0,\\
\epsilon_{yy} &= \frac{1}{2}((\cos\alpha-1)+(\cos\alpha-1)-\sin\alpha.(-\sin\alpha)+(\cos\alpha-1).(\cos\alpha-1) = 0.
\end{aligned}$$

Tenzor deformace je nulový, to znamená, že jsme nalezli vektorové pole popisující čistou rotaci - při této 'deformaci' nenastává prodloužení z případu e). Vektorové pole popisující tuto deformaci je znázorněno na obrázku 33f.

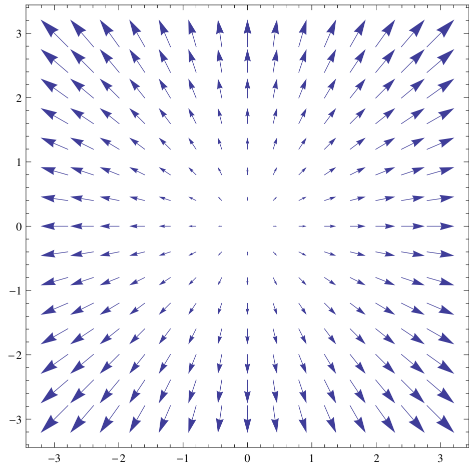
Příklad 82

Normálový vektor k rovině, která svírá úhel α s osou x je $\vec{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Tečnou složku napětí $\vec{T}$ získáme projekcí tenzoru napětí do směru normálového vektoru $\vec{n}$

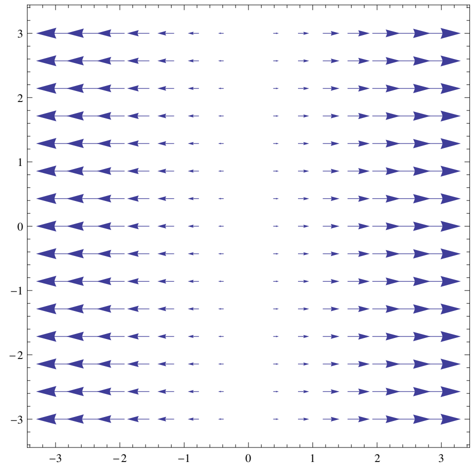
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\sigma_{xx}+\sin\alpha\sigma_{yx} & \cos\alpha\sigma_{xy}+\sin\alpha\sigma_{yy} \end{pmatrix}.$$

Normálová složka napětí $\vec{N}$ je daná výrazem

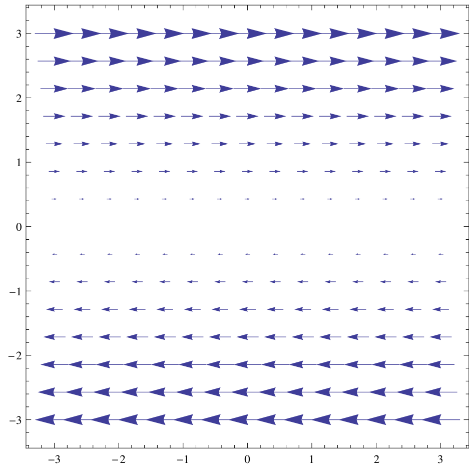
$$T_i n_i = \cos^2\alpha\sigma_{xx} + 2\cos\alpha\sin\alpha\sigma_{yx} + \sin^2\alpha\sigma_{yy}.$$



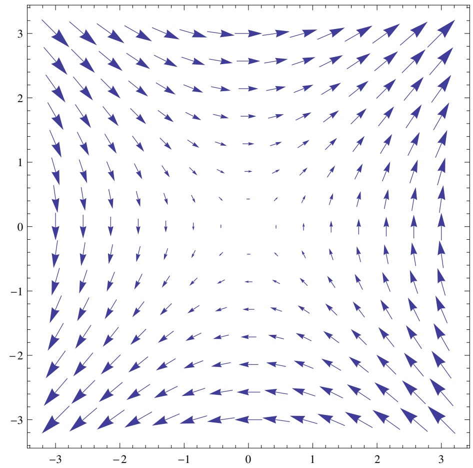
(a) pole $u = (Ax, Ay)$



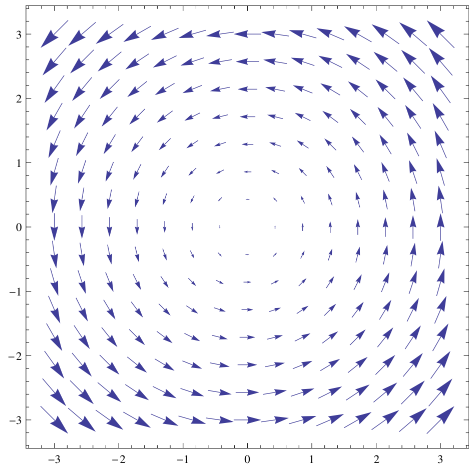
(b) pole $u = (Ax, 0)$



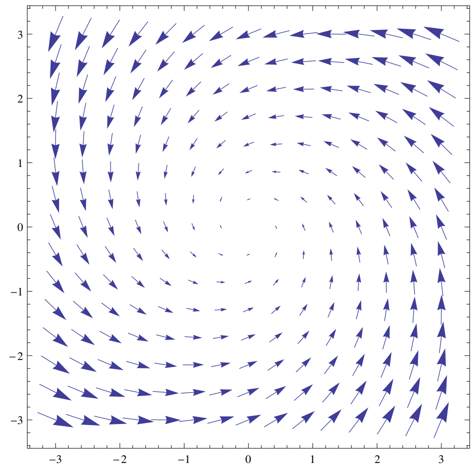
(c) pole $u = (Ay, 0)$



(d) pole $u = (Ay, Ax)$



(e) pole $u = (-Ay, Ax)$ představuje rotaci při níž dochází i ke změně vzdálenosti mezi body



(f) pole $u = (y(\cos\alpha - 1) - x\sin\alpha, x\sin\alpha + y(\cos\alpha - 1))$ představuje čistou rotaci, vzdálenosti mezi jednotlivými body se nemění

Obrázek 33: Pole deformace

Příklad 83
a) Uvažujme působení silou F na těleso uzavřeno v dutině (kvádr o rozměrech a, b, c). Působení pístu orientujeme ve směru osy x, plocha pístu je S. Tělesu je povoleno deformovat se pouze ve směru osy x, tenzor deformace a jeho objemová a smyková část nabývají tedy tvaru:

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\epsilon}_V = \begin{pmatrix} \frac{A}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{3} \end{pmatrix} \qquad \hat{\epsilon}_S = \begin{pmatrix} \frac{2A}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A}{3} \end{pmatrix}.$$

Z Hookeova zákona plynou relace mezi objemovými a smykovými složkami tenzorů deformace a napětí $\hat{\sigma}_V = 3K\hat{\epsilon}_V$ a $\hat{\sigma}_S = 2\mu\hat{\epsilon}_S$. Odtud pro rozklad tenzoru napětí platí

$$\hat{\sigma}_V = \begin{pmatrix} KA & 0 & 0 \\ 0 & KA & 0 \\ 0 & 0 & KA \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_S = \begin{pmatrix} \frac{4A\mu}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2A\mu}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2A\mu}{3} \end{pmatrix}.$$

Tenzor deformace

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} KA + \frac{4A\mu}{3} & 0 & 0 \\ 0 & KA - -\frac{2A\mu}{3} & 0 \\ 0 & 0 & KA - \frac{2A\mu}{3} \end{pmatrix}$$

Jelikož známe složku $\sigma_{xx} = \frac{F}{S}$, můžeme dopočítat konstantu A a vyjádřit tenzor deformace:

$$A = \frac{F}{S}\frac{1}{K + \frac{4\mu}{3}}, \qquad \hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{F}{S}\frac{1}{K+\frac{4\mu}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Uvažujme působení silou F na těleso uloženo na traverze (rozměry a, b, c). Působení pístu orientujeme ve směru osy z, plocha pístu je S. Těleso se deformuje ve směru osy x a z, tenzor deformace a jeho objemová a smyková část nabývají tedy tvaru

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \qquad \hat{\epsilon}_V = \begin{pmatrix} \frac{A+B}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A+B}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A+B}{3} \end{pmatrix},$$
$$\hat{\epsilon}_S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2A - B) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}(A + B) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(2B - A) \end{pmatrix}.$$

Z Hookeova zákona plyne pro rozklad tenzoru napětí

$$\hat{\sigma}_V = \begin{pmatrix} K(A + B) & 0 & 0 \\ 0 & K(A + B) & 0 \\ 0 & 0 & K(A + B) \end{pmatrix},$$
$$\hat{\sigma}_S = \begin{pmatrix} \frac{2\mu}{3}(2A - B) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\mu}{3}(A + B) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\mu}{3}(2B - A) \end{pmatrix}.$$

Tenzor napětí

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} A(K+\frac{4\mu}{3}) + B(K-\frac{2\mu}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & -(A+B)(K+\frac{2\mu}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & A(K-\frac{2\mu}{3}) + B(K+\frac{4\mu}{3}) \end{pmatrix}.$$

Jelikož známe složku $\sigma_{zz} = \frac{F}{S}$ a víme, že složka tenzoru napětí ve směru, ve kterém těleso může uhýbat (tj. podél osy y), je nulová, dopočítáme konstanty A, B a vyjádříme tenzor deformace

$$A = -B = -\frac{1}{2\mu}\frac{F}{S}, \qquad \hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\mu}\frac{F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\mu}\frac{F}{S} \end{pmatrix}.$$

c) Uvažujme tyč průřezu S, kterou natahujeme silou F ve směru osy x podél její osy. Vzhledem k tomu, že boční síly jsou nulové, bude v tenzoru napětí nenulová pouze složka $\sigma_{11} = \frac{F}{S}$. Tenzor napětí a jeho objemová a smyková část potom budou

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_V = \begin{pmatrix} \frac{F}{3S} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F}{3S} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{3S} \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_S = \begin{pmatrix} \frac{2F}{3S} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{3S} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F}{3S} \end{pmatrix}.$$

Tenzor deformace $\hat{\sigma}_V = 3K\hat{\epsilon}_V$ a jeho objemová a smyková část jsou potom

$$\hat{\epsilon}_V = \frac{F}{S}\begin{pmatrix} \frac{1}{9K} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9K} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9K} \end{pmatrix}, \quad \hat{\epsilon}_S = \frac{F}{S}\begin{pmatrix} \frac{1}{3\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6\mu} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6\mu} \end{pmatrix}, \quad \hat{\epsilon} = \frac{F}{S}\begin{pmatrix} \frac{1}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{E} \end{pmatrix}.$$

Příklad 84

Mějme tyč délky l a průřezu S zavěšenou v tíhovém poli. Ztotožníme osu z s osou tyče a rovinu xy se spodní podstavou tyče. Rovnice rovnováhy jsou

$$\partial\sigma_{xi}\partial x_i = \partial\sigma_{yi}\partial x_i = 0, \qquad \partial\sigma_{zi}\partial x_i = \rho g.$$

Po stranách pláště musí všechny komponenty tenzoru napětí vyjma σ_{zz} vymizet, na horní podstavě $(z = l)$ pak $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$. Za těchto podmínek je řešením rovnice rovnováhy $\sigma_{zz} = \rho g z$, zbylé komponenty jsou nulové. Z tenzoru napětí určíme složky tenzoru deformace jako

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\sigma\rho g z/E, \epsilon_{zz} = \rho g z/E,$$

nediagonální komponenty jsou nulové. Integrací složek tenzoru deformace konečně získáváme vektor posunutí

$$u_x = -\sigma\rho g E x z, \qquad u_y = -\sigma\rho g E x y, \qquad u_z = -\sigma\rho g E(z^2 - l^2 + \sigma(x^2 + y^2)).$$

Vidíme tedy, že kromě očekávaného prodloužení v ose z se nám tyč zužuje v příčných komponentách a to kromě spodní podstavy v celé délce – čím blíže k horní podstavě, tím více.

Příklad 85
Užijeme rovnice rovnováhy

$$\text{grad div}\,\vec{u} - \frac{(1-2\sigma)}{2(1-\sigma)}\,\text{rot rot}\,\vec{u} = -\rho\vec{g}\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}. \tag{38}$$

Gravitační síla sférického tělesa vztažená na jednotku hmotnosti je $-g\vec{r}/R$. Tento výraz dosadíme místo $\vec{g}$ do (38) a dostáváme

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r^2u)}{\mathrm{d}r}\right) = \rho\vec{g}\frac{r}{R}. \tag{39}$$

Řešení, které je konečné pro $r = 0$ a rovněž splňuje podmínku volného povrchu $\sigma_{rr} = 0$ pro $r = R$, je

$$u = -\frac{g\rho R(1+\sigma)(1-2\sigma)}{10E(1-\sigma)}r\left(\frac{3-\sigma}{1+\sigma} - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{40}$$

Tenzor deformace je určen jedinou nenulovou složkou

$$\epsilon_{rr} = -\frac{g\rho R(1+\sigma)(1-2\sigma)}{10E(1-\sigma)}\left(\frac{3-\sigma}{1+\sigma} - \frac{3r^2}{R^2}\right).$$

Všimněte si, že se látka stlačuje ($\epsilon_{rr} < 0$) uvnitř sférického povrchu o poloměru $R\sqrt{\frac{3-\sigma}{3(1+\sigma)}}$ a rozpíná ($\epsilon_{rr} > 0$) vně tohoto povrchu. Tlak ve středu koule je $\frac{(3-\sigma)\rho g R}{10(1-\sigma)}$.

Příklad 86
Využijeme symetrie úlohy a zavedeme sférické souřadnice, počátek souřadné soustavy ztotožníme se středem kulové skořepiny. Vektor posunutí je radiální a je pouze funkcí souřadnice r. Protože neuvažujeme působení externích sil, rovnici (38) můžeme psát jako

$$\text{grad div}\,\vec{u} - \frac{(1-2\sigma)}{2(1-\sigma)}\,\text{rot rot}\,\vec{u} = 0. \tag{41}$$

Další zjednodušení poskytuje dosazení vektoru posunutí. Jelikož je tento funkcí pouze radiální, platí rot $\vec{u} = 0$ a rovnice přejde na grad div $\vec{u} = 0$. Potom divergence vektoru posunutí je konstantní, kde konstantu zvolíme vhodně s ohledem na další výpočet

$$\text{div}\,\vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r^2u)}{\mathrm{d}r} = 3A. \tag{42}$$

Řešením je $u = Ar + B/r^2$. Dále určíme komponenty tenzoru deformace jako $\epsilon_{rr} = A - 2B/r^3, \epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\phi\phi} = A + B/r^3$. Radiální komponenta tenzoru napětí je pak

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}((1-\sigma)\epsilon_{rr} + 2\sigma\epsilon_{\theta\theta}) = \frac{E}{1-2\sigma}A - \frac{2E}{1+\sigma}\frac{B}{r^3}. \tag{43}$$

Tenzor deformace můžeme pomocí konstant A, B psát jako

$$\hat{\epsilon} = \text{diag}(A - 2B/r^3, A + B/r^3, A + B/r^3).$$

Změna objemu je spojená s konstantou A, změna tvaru tělesa potom s konstantou B a to přes $\hat{\epsilon}_V = \mathrm{diag}(A, A, A), \hat{\epsilon}_S = \mathrm{diag}(-2B/r^3, B/r^3, B/r^3)$. Jednotlivé složky $\hat{\sigma}_V, \hat{\sigma}_S$ a samotný tenzor napětí $\hat{\sigma}$ jsou potom rovny

$$\hat{\sigma}_V = \begin{pmatrix} \frac{AE}{(1-2\sigma)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{AE}{(1-2\sigma)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{AE}{(1-2\sigma)} \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_S = \begin{pmatrix} \frac{-2BE}{r^3E(1+\sigma)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{BE}{r^3E(1+\sigma)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{BE}{r^3E(1+\sigma)} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{AE}{(1-2\sigma)} - \frac{2BE}{r^3E(1+\sigma)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{AE}{(1-2\sigma)} + \frac{BE}{r^3E(1+\sigma)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{AE}{(1-2\sigma)} + \frac{BE}{r^3E(1+\sigma)} \end{pmatrix}.$$

Konstanty A, B určíme z okrajových podmínek: $\sigma_{rr} = -p_1$ v $r = R_1$ a $\sigma_{rr} = -p_2$ v $r = R_2$, tedy

$$A = \frac{p_1R_1^3 - p_2R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\frac{1-2\sigma}{E}, \qquad B = \frac{R_1^3R_2^3(p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3}\frac{1+\sigma}{2E}.$$

Vidíme, že pokud jsou oba tlaky stejné, nastane jenom změna objemu.

Pokud $p_1R_1^3 > p_2R_2^3$, skořepina se rozepne a toto zvětšení objemu bude mít za následek pokles hustoty matriálu skořepiny. Tato podmínka je splněna např. v kulové skořepině s tlakem $p_1 = p$ uvnitř a $p_2 = 0$ vně, rozložení napětí je dané nasledovně

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(1 - \frac{R_2^3}{r^3}\right), \qquad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = \frac{pR_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(1 + \frac{R_2^3}{2r^3}\right).$$

Je poněkud překvapivé, že zvýšením tlaku dosáhneme zvětšení objemu.

Pro tenkou skořepinu o tloušťce $h = R_2 - R_1 \ll R$ dostaneme přibližně

$$u = pR^2(1-\sigma)/2Eh, \qquad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = pr/2h, \qquad \bar{\sigma}_{rr} = p/2,$$

kde $\bar{\sigma}_{rr}$ je střední hodnotou radiálního napětí přes tloušťku skořepiny.

Příklad 87

Složky tenzoru napětí jsou

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right), \qquad \sigma_{\phi\phi} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right), \qquad \sigma_{zz} = \frac{2p\sigma R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Příklad 88

V rovnici (38) zaměníme gravitační sílu za sílu odstředivou $\rho\Omega^2 r$, kde Ω je úhlová rychlost. Potom ve válcových souřadnicích máme pro posunutí rovnici $u_r = u(r)$, tj.

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(ru)}{\mathrm{d}r}\right) = -\rho\Omega^2 r. \tag{44}$$

Řešení, které je konečné pro $r = 0$ a rovněž splňuje podmínku $\sigma_{rr} = 0$ pro $r = R$ je

$$u = \frac{\rho\Omega^2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)} r\left((3-2\sigma)R^2 - r^2\right). \tag{45}$$

Jedinou nenulovou složkou tenzoru deformace bude

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = u = \frac{\rho\Omega^2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)}\left((3-2\sigma)R^2 - 3r^2\right).$$

Příklad 89
Ztotožníme osu x s osou válce. Problém můžeme považovat za rovinný, posunutí bude závislé na vzdálenosti od osy z a bude mít nenulovou jen složku u_φ, píšeme $\vec{u} = (0, u(r), 0)$. Dosadíme do rovnice rovnováhy (38) s nulovou pravou stranou, první člen na levé straně je nulový, z rovnice tedy zůstane jen

$$\text{rot rot } \vec{u} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_\varphi)\right) = 0.$$

Obecným řešením rovnice je funkce $u_\varphi = Ar + B/r$, kde A, B jsou integrační konstanty, tyto určíme z okrajových podmínek $u_\varphi|_{R_2} = 0$ a $u_\varphi|_{R_1} = \alpha R_1$ jako

$$A = -\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\alpha, \qquad B = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\alpha.$$

Řešení tedy nabývá tvaru

$$u_\varphi = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\alpha\left(\frac{R_2}{r} - \frac{r}{R_2}\right).$$

Pro nalezení momentu síly budeme potřebovat znát tenzory deformace a napětí, zapišme tedy jejich složky

$$\epsilon_{rr} = \epsilon_{\varphi\varphi} = 0, \qquad \epsilon_{r\varphi} = -\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\alpha\frac{1}{r^2}$$

a

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0, \qquad \sigma_{r\varphi} = -\frac{2\mu R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\alpha\frac{1}{r^2}.$$

Moment síly je definován jako $\mathrm{d}\vec{M} = \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F}$, kde $\mathrm{d}\vec{F} = \hat{\sigma}\mathrm{d}\vec{S}$. Po dosazení získáme jedinou rovnici pro složku $M_z = \int r\sigma_{r\varphi}\mathrm{d}S$, kde $\mathrm{d}S = 2\pi r \mathrm{d}h$ je povrch pláště válce o poloměru $R_2 < r < R_1$ a výšce h. S využitím vztahů pro složky tenzoru napětí můžeme psát

$$M_z = -\int \frac{2\mu R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\alpha\frac{1}{r}2\pi r\,\mathrm{d}h = -\frac{\pi\mu R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\alpha h.$$

Moment síly, který se přenáší mezi jednotlivými vrstvami tělesa (plošky soustředných válců) je nezávislý na r.

13 Tekutiny

Příklad 90
Tok hmotnosti proudění v tekutině hustoty ρ proudící rychlostí $\vec{v}$ přes element $\mathrm{d}\vec{f}$ je

$$Q = \oint \rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{f} = \int \mathrm{div}(\rho\vec{v})\,\mathrm{d}V.$$

a) $\mathrm{div}\,\vec{v} = 3A,$ $\quad Q = \int_0^R \rho 3A.4\pi r^2\,\mathrm{d}r = 4\pi R^3 A\rho.$
b) $\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{2A}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2A}{r},$ $\quad Q = \int_0^R \rho\frac{2A}{r}.4\pi r^2\,\mathrm{d}r = 4\pi R^2 A\rho.$
c) $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0,$ $\quad Q = \int_0^R \rho\, 0.4\pi r^2\,\mathrm{d}r = 0.$

Příklad 91
Osu trubky ztotožníme s osou x, orientace rychlosti tekutiny je tedy podél osy x a je funkcí pouze y a z. Rovnice kontinuity je splněna identicky, y a z komponenty Navier-Stokesových rovnic dají $\partial p/\partial y = \partial p/\partial z = 0$. To znamená, že tlak je konstantní v celém průřezu trubky. x komponenta Navier-Stokesovy rovnice dá

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}. \tag{46}$$

Zde znovu vidíme, že $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x =$ konstanta. Gradient tlaku můžeme psát jako $-\Delta p/l$, kde Δp je rozdíl tlaků mezi konci trubky a l její délka. Pole rychlosti v trubce je tedy určeno dvourozměrnou rovnicí $\Delta v =$ konstanta. Rovnice musí splňovat okrajovou podmínku $v = 0$ na obvodu průřezu trubky. Využijeme symetrie problému, počátek souřadné soustavy umístíme do středu kružnice (profil trubky), zvolíme popis ve sférických souřadnicích a dostáváme $v = v(r)$. Užitím vyjádření Laplaciánu ve sférických souřadnicích rovnice přejde na

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta l}, \tag{47}$$

její integrace vede k obecnému výsledku

$$v = -\frac{\Delta p}{4\eta l}r^2 + a\ln r + b. \tag{48}$$

Konstantu a položíme rovnou nule, protože rychlost ve středu trubku musí zůstat konečná. Konstantu b určíme z okrajové podmínky $v = 0$ pro $r = R_2$ pro trubku o poloměru R_2. Konečně získáváme výraz pro rychlost a to

$$v = -\frac{\Delta p}{4\eta l}(R_2^2 - r^2).$$

Vidíme, že rozložení rychlosti napříč trubkou je parabolické. Pro výpočet divergence a rotace rychlostního pole použijeme vyjádření operátorů ve válcových souřadnicích, rozepisujeme příspěvky pouze nenulových komponent

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = -\frac{\Delta p}{4\eta l}\frac{1}{r}(R_2^2 - 3r^2), \qquad \mathrm{rot}\,\vec{v} = 0.$$

Příklad 92
Vložení válce do trubky provedeme přidáním okrajové podmínky $v = 0$ pro $r = R_1$ k obecnému řešení definovanému rovnicí (48) a dojdeme k řešení

$$v = -\frac{\Delta p}{4\eta l}\left(R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)}\ln\frac{r}{R_2}\right).$$

Divergence a rotace rychlostního pole v tomto případě jsou

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{v} &= \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = -\frac{\Delta p}{4\eta l}\frac{1}{r}\left(R_2^2 - 3r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)}\ln\frac{r}{R_2} + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)}\right),\\ \operatorname{rot}\vec{v} &= 0.\end{aligned}$$

Příklad 93
Řešíme problém za stejných předpokladů, které jsme užili v případě kruhového profilu, tj. hledáme takovou funkci v, která vyhovuje rovnici (46) a na okrajích trubky vymizí. Řešení této rovnice, které vymizí na hranici trojúhelníku je

$$v = \frac{\Delta p}{l}\frac{2}{\sqrt{3}a\eta}h_1 h_2 h_3,$$

kde h_1, h_2, h_3 jsou délky kolmic z vrcholů trojúhelníku na jeho tři strany. Každý z výrazů $\Delta h_1, \Delta h_2, \Delta h_3$ (kde $\Delta = \partial^2/\partial z^2 + \partial^2/\partial y^2$) je roven nule – to je zřejmé z úvahy, že každou z kolmic h_1, h_2, h_3 bychom mohli považovat za osu y nebo z a výsledkem aplikace Laplaciánu na souřadnici je nula. Proto máme

$$\Delta(h_1 h_2 h_3) = 2(h_1 \nabla h_2 \cdot \nabla h_3 + h_2 \nabla h_3 \cdot \nabla h_1 + h_3 \nabla h_1 \cdot \nabla h_2).$$

Dále víme, že $\nabla h_1 = \vec{n}_1, \nabla h_2 = \vec{n}_2, \nabla h_3 = \vec{n}_3$, kde $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ jsou jednotkové vektory podél kolmic h_1, h_2, h_3. Mezi kterýmikoliv dvěma vektory z $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ je úhel $2\pi/3$. Například $\nabla h_1 \cdot \nabla h_2 = \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = \cos 2\pi/3 = -\frac{1}{2}$, atd. Získáme tedy výraz

$$\Delta(h_1 h_2 h_3) = -(h_1 + h_2 + h_3) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}a$$

a vidíme, že Navier-Stokesova rovnice (46) je splněna.

Příklad 94
Rychlost proudění je dána vztahem

$$v = \frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right).$$

Příklad 95
Situaci budeme popisovat ve válcových souřadnicích (r, ϕ, z), osu z orientujeme podél osy trubek. Ze symetrie úlohy je jasné, že $v_z = v_r = 0, v_\phi = v(r), p = p(r)$. Navier-Stokesovy rovnice ve válcových souřadnicích nám dají dvě rovnice

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{\rho v^2}{r} \tag{49}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} - \frac{v}{r^2} = 0. \tag{50}$$

Řešení druhé rovnice hledáme ve tvaru r^n, substitucí získáme $n = \pm 1$, takže $v = ar + b/r$. Konstanty a, b určíme z okrajových podmínek, které požadují, aby rychlost tekutiny na vnitřním a vnějším povrchu válců byla rovna rychlosti daného válce: $v = 0$ pro $r = R_1$, $v = R_2\omega$ pro $r = R_2$.
Rychlost v 'mezitrubí' je tedy popsána vztahem

$$v = \frac{\omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} r - \frac{\omega R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}.$$

Pro $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ máme jednoduše $v = \omega r$ a kapalina rotuje spolu s válci jako celek. Pokud odstraníme vnější válec $\omega_2 = 0, R_2 = \infty$, potom máme $v = \omega_1 R_1^2 / r$.
Divergence a rotace rychlostního pole $\vec{v} = (v_r, v_\phi, v_z) = (0, v, 0)$ v tomto případě jsou

$$\begin{aligned} \text{div}\, \vec{v} &= 0, \\ \text{rot}\, \vec{v} &= \left(0, 0, \frac{1}{r}\frac{\partial(r v_\phi)}{\partial r}\right) = \left(0, 0, \frac{2\omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\right). \end{aligned}$$

Příklad 96
a) Eulerova rovnice v tíhovém poli, kde na jednotkový objem působí síla $\rho\vec{g}$, je definována následujícím způsobem

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g}. \tag{51}$$

Velikost rychlosti je nepřímo úměrná vzdálenosti od osy rotace z, tedy $v = \alpha/r$. Vektor rychlosti ve válcových souřadnicích je potom $\vec{v} = (0, \alpha/r, 0)$, vyjádřeno v kartézských souřadnicích $\vec{v} = (\frac{-\alpha y}{x^2+y^2}, \frac{\alpha x}{x^2+y^2}, 0)$.

Zkontrolujme tvar proudnic víru: Jsou-li dx, dy, dz složky elementárního oblouku proudnice v místě, kde má rychlost složky v_x, v_y, v_z, pak podle definice proudnice platí

$$\mathrm{d}x : \mathrm{d}y : \mathrm{d}z = v_x(x, y, z, t) : v_y(x, y, z, t) : v_z(x, y, z, t). \tag{52}$$

Dosazením složek rychlosti $v_x = \frac{-\alpha y}{x^2+y^2}, v_y = \frac{\alpha x}{x^2+y^2}, v_z = 0$ do vztahu (52) získáme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{y}{x}.$$

Upravme ji na $x\,\mathrm{d}x = -y\,\mathrm{d}y$ a integrujme, výsledkem je očekávaná rovnice kružnice $x^2 + y^2 =$ konstanta. Provedením operace rotace na rychlostním poli se snadno přesvědčíme, že ideální vír je příkladem nevírového proudění (rot$\vec{v} = 0$).

Dále využijeme válcové symetrie, Eulerova rovnice v cylindrických souřadnicích vede ke dvěma rovnicím

$$\frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g = 0.$$

Integrací získame obecné řešení

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{r^2} - gz + \text{const.}$$

Za předpokladu, že povrch kapaliny je volný, můžeme považovat tlak za konstantní. Potom z předchozí rovnice získáme profil víru ve tvaru

$$z = -\frac{\alpha}{2gr^2}.$$

Tato křivka je vykreslena na obrázku 34a.

Ukážeme si ještě zachování celkové energie pro částice v kapalině

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - mgz = \text{const},$$

kde nezapomínáme, že orientaci osy z jsme zvolili v protisměru konvenční osy. Po dosazení výrazů pro rychlost a výšku z z rovnice pro profil kapaliny dostáváme výsledek $\frac{m\alpha^2}{r^2} = \text{const}$.

Příklad 97

Kapalina rotuje rychlostí $\vec{v} = \vec{v}(r)$, za osu rotace budeme brát osu z. První člen v rovnici (51) nepíšeme (pro kapalinu rotující jako celek je tento nulový), druhý člen přepíšeme pomocí identity $(\vec{v} \cdot \text{grad})\,\vec{v} = \frac{1}{2}\,\text{grad}\; v^2 - \vec{v} \times \text{rot}\;\vec{v}$ a získáváme

$$\frac{1}{2}\,\text{grad}\; v^2 - \vec{v} \times \text{rot}\;\vec{v} = -\frac{\text{grad}\; p}{\rho} + \vec{g}.$$

Využití válcové symetrie problému vede na řešení trojice rovnic

$$v_r\,\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \qquad v_r\,\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_r v_\phi}{r} = 0, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g = 0.$$

Druhá rovnice nám přímo dává závislost obvodové rychlosti na poloměru jako lineární závislost na vzdálenosti r od osy rotace. Konstantou úměrnosti je úhlová rychlost rotace kapaliny, označme ji Ω. Rychlost ve vektorovém zápisu je potom $\vec{v} = (0, \Omega r, 0)$.
Dosazením tohoto výsledku do první rovnice získáme $-\frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \Rightarrow -\Omega^2 r = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$ s obecným řešením

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{1}{2}\Omega^2 r^2 + \text{const}.$$

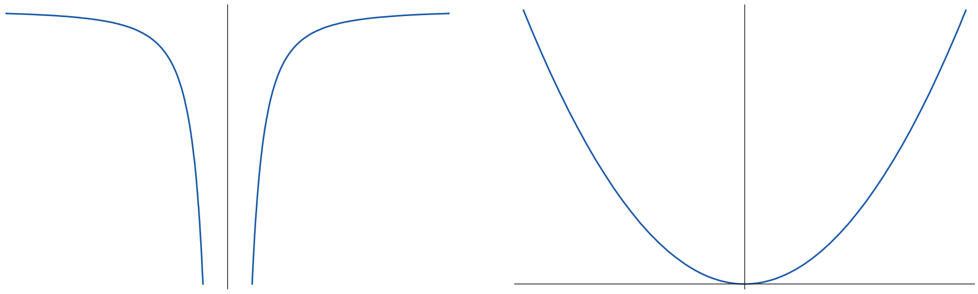
Řešení třetí rovnice je identické jako v předchozím příkladu, spojením těchto dvou řešení získáme obecný výsledek

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{1}{2}\Omega^2 r^2 - gz + \text{const}.$$

Protože zkoumáme případ volného povrchu, užijeme skutečnosti konstantního tlaku a získávame tvar povrchu kapaliny ve tvaru paraboloidu

$$z = \frac{1}{2}\frac{\Omega^2 r^2}{g}.$$

Průběh této křivky je na obrázku 34b.



(a) kapalina rotující jako ideální vír (b) kapalina rotující jako celek

Obrázek 34: Rotační profily kapalin

Příklad 98
Nakloněnou rovinu ztotožníme s rovinou xy, osu x se směrem toku kapaliny. Hledáme řešení závislé pouze na výšce z. Navier-Stokesovy rovnice s $v_x = v(z)$ v tíhovém poli jsou

$$\eta \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} + \rho g \sin\alpha = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho g \cos\alpha = 0.$$

Na volném povrchu $z = h$ musí platit $\sigma_{xz} = \eta \mathrm{d}v/\mathrm{d}z = 0, \sigma_{zz} = -p = -p_0$, kde p_0 je atmosferický tlak. Dále pro $z = 0$ musí platit $v = 0$. Řešení splňující tyto podmínky je

$$p = p_0 + \rho g(h - z)\cos\alpha, \qquad v = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta} z(2h - z).$$

Celkový objemový tok snadno získáme spočtením integrálu $\Phi = \int_0^h v\mathrm{d}z = \frac{\rho g h^3 \sin\alpha}{3v}$.

Příklad 99
Orientaci souřadných os zvolíme dle obrázku 35, počátek jsme ztotožnili se středem výtokového otvoru nádoby. Tvar nádoby je dán rotací křivky $y = y(x)$ kolem osy y. Povrch volné hladiny v určitém okamžiku je $q' = \pi x^2$, rychlost výtoku tekutiny je z počátečního předpokladu $v_1 = \text{const}$.
Řešení získáme kombinací Bernoulliho rovnice

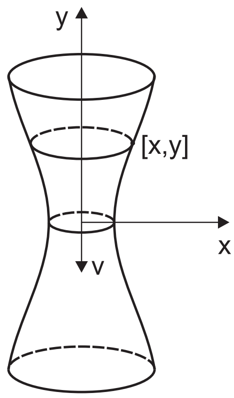
$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y + p_1 = \frac{1}{2}\rho v^2 + p$$

a rovnice kontinuity $q'v_1 = qv$, kde ρ je hustota tekutiny, y výška volné hladiny nad výtokovým otvorem, p_1, resp. p jsou tlaky v místě výtokového otvoru, resp. na volné hladině a v je rychlost tekutiny ve výtokovém otvoru. Nádobu uvažujeme otevřenou a rozdíl tlaků na volné hladině a ve výtokovém otvoru zanedbáváme.
Z předchozích rovnic potom plyne

$$v^2 = \frac{q'^2}{q'^2 - q^2} 2gy = \frac{1}{1 - \frac{q^2}{q'^2}} 2gy = 2gy,$$

kde poslední rovnost platí za předpokladu $q^2 \ll q'^2$. Získali jsme tedy vztah pro výtokovou rychlost v průřezu q jako $v = \sqrt{2gy}$, tu dosadíme do rovnice kontinuity $\pi x^2 v_1 = q\sqrt{2gy}$ a získáme hledanou závislost popisující tvar nádoby

$$y = \frac{\pi^2 v_1^2}{2gq^2} x^4.$$



Obrázek 35

Příklad 100
Uvažujme nestlačitelnou kapalinu a v ní dutinu o poloměru $R(t)$ zvětšujícím se v čase. Pro pohodlnost výpočtu jsme střed dutiny umístili do počátku souřadné soustavy. Rychlost rozpínání dutiny na její hranici je $\dot{R}$, potom rychlost kapaliny v libovolném bodě vzdáleném r od středu dutiny je dána výrazem

$$v(r) = \dot{R}\frac{R^2}{r^2}.$$

Celková kinetická energie bomby je

$$T = \frac{1}{2}\rho\dot{R}^2R^4\int_R^\infty \frac{1}{r^4}4\pi r^2\mathrm{d}r = 2\pi\rho\dot{R}^2R^3.$$

Je tedy zajímavé, že dokážeme nekonečný objem odtlačit vynaložením konečného množství energie.

Dále chceme znát tlak v libovolném bodě kapaliny vzdáleném r od středu dutiny. Využijeme sférické symetrie problému a přepíšeme Eulerovu rovnici

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}. \tag{53}$$

ve sférických souřadnicích. Do rovnice pro radiální souřadnici r dosadíme rychlost kapaliny $v(r) = \dot{R}\frac{R^2}{r^2}$ a po úpravách dostáváme

$$\frac{\ddot{R}R^2}{r^2} + \frac{2\dot{R}^2R}{r^2} - \frac{2\dot{R}^2R^4}{r^5} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{54}$$

Hledaný vztah pro tlak v libovolném bodě kapaliny dostáváme integrací rovnice (54), vyjde

$$p(r) = \rho\left(\frac{\ddot{R}R^2}{r} + \frac{2\dot{R}^2R}{r} - \frac{\dot{R}^2R^4}{2r^4}\right), \tag{55}$$

kde tlak v nekonečnu volíme roven nule. Potom například tlak na hranici dutiny $r = R$ je roven $p(R) = \rho\left(\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2\right)$.

Reference

[1] Brdička, M., Hladík, A. *Teoretická mechanika.* Academia, 1987.

[2] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B. *Mechanika kontinua.* Academia, 2005.

[3] Horský, J., Novotný, J., Štefánik, M. *Mechanika ve fyzice.* Academia, 2001.

[4] Štoll, I., Tolar, J. *Teoretická fyzika.* ČVUT 1999.

[5] Tyc, T. *Teoretická mechanika - poznámky k přednáškám.* MU 2010.

[6] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. *Mechanics.* Butterworth-Heinemann, 1976.

[7] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. *Theory of Elasticity.* Butterworth-Heinemann, 1986.

[8] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. *Fluid Mechanics.* Butterworth-Heinemann, 1987.

[9] Thornton, S. T., Marion, J. B. *Classical dynamics of particles and systems.* Brooks/Cole, 2004.