Proseminář z matematických metod fyziky - I

• zápočet: - za účast

Derivace

- "míra změny"

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \text{chyby řádu } \Delta x$$

(musí být spojitá funkce)

• Pravidla:

1) $(h+g)' = h' + g'$
2) $(a \cdot f)' = a f'$
3) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
4) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
5) "složená funkce" $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$

$f(x) = f(g(x))$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

6) inverzní funkce: $\tilde{f}' = \frac{1}{f' \circ \tilde{f}}$ kde $\tilde{f}$ je inverzní funkce f

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \left(\text{taky } \frac{dz}{dx}(x) = \frac{dz}{dy}(y(x))\,\frac{dy}{dx}(x)\right)$$

$$\frac{dx}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}(x(y))}$$

• Derivace funkcí:

1) $(\text{konst.})' = 0$
2) $(x^n)' = n x^{n-1}$ $\quad (x' = 1)$
3) $\cos' x = -\sin x$ $\quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$

   $\sin' x = \cos x$
4) $\exp'(x) = \exp(x)$, kde $\exp(x) = e^x$
5) $\log'(x) = \frac{1}{x}$, kde $\log(x) = \log_e(x) = \ln(x)$
6) $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Př: $(x^x)' = \left[\left(e^{\log x}\right)^x\right]' = \left(e^{x \log x}\right)'$

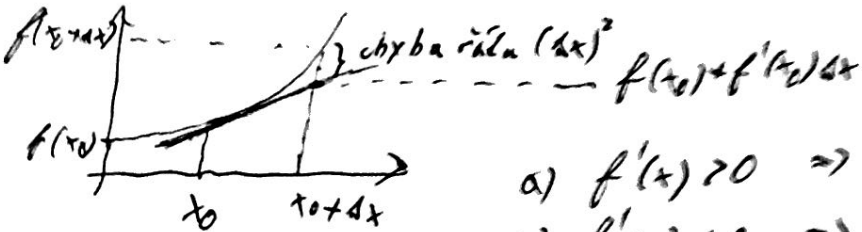
$$= e^{x \log x} \cdot \left(\log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = \underline{\underline{x^x \cdot (\log(x) + 1)}}$$

• Př.: $\log_x a$

• 2 definice derivace:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \text{chyba řádu } (\Delta x)^2$$

= "<u>lineární aproximace funkce</u>"



a) $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ roste v x

b) $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ klesá v x

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow$ kandidát na extrém

Druhá derivace:

$$f(x) \mapsto f'(x) \mapsto f''(x)$$

a) $f''(x) > 0 \Rightarrow f'$ roste

f je konvexní

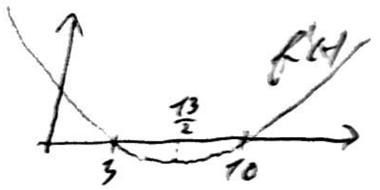
b) $f''(x) < 0 \Rightarrow f'$ klesá

f je konkávní

Průběh funkce

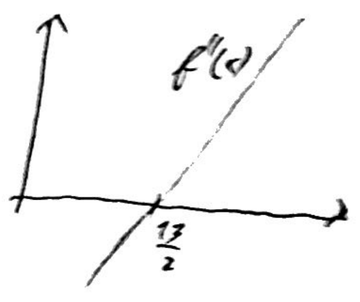
Př.: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{13}{2}x^2 + 30x$, kořeny: $0, \frac{15}{2}, 12$

$f'(x) = x^2 - 13x + 30$, kořeny: $3, 10$



$f''(x) = 2x - 13$

kořen: $\frac{13}{2}$



$x = \frac{13}{2}$ je inflexní bod

• 2 definice:

$f(x_0+\varepsilon) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\varepsilon$ + chyba řádu ε^2

⇒ lze aproximovat lépe:

<u>Taylorův rozvoj:</u>

$$f(x_0+\varepsilon) = f_0 + f_1\varepsilon + f_2\varepsilon^2 + f_3\varepsilon^3 + f_4\varepsilon^4 + \dots$$

$$\boxed{f(x_0+\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} f_n\varepsilon^n + \underbrace{O(\varepsilon^{N+1})}}$$

"chyba řádu ε^{N+1}"

• platí $\boxed{f_n = \frac{1}{n!} f^{[n]}(x_0)}$ $f^{[n]}$ značí n-tou derivaci

• koeficienty: $f_0 = f(x_0)$ (derivace rozvoje podle ε)

1) $f'(x_0+\varepsilon) = f_1 + 2f_2\varepsilon + 3f_3\varepsilon^2 + 4f_4\varepsilon^3 + \dots$

pro $\varepsilon = 0$

$f'(x_0) = f_1$

2) $f''(x_0+\varepsilon) = 2f_2 + 6f_3\varepsilon + 12f_4\varepsilon^2 + \dots$

pro $\varepsilon = 0$

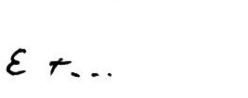
$f''(x_0+\varepsilon) = 2f_2 \Rightarrow f_2 = \frac{f''(x_0 \cancel{\varepsilon})}{2!}$

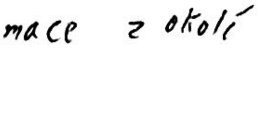
3) $f'''(x_0+\varepsilon) = 6f_3 + 4\cdot3\cdot2\cdot f_4\varepsilon + \dots$

pro $\varepsilon = 0$

$f'''(x_0 \cancel{\varepsilon}) = 6f_3 \Rightarrow f_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$

• Lze posčítat? $f(x_0+\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\varepsilon^n$?

- neplatí obecně
- platí pro <u>analytické funkce</u>: "Když známe v okolí bodu x_0, tak ji známe všude"
- informace z okolí bodu x_0 NEBO "funkce zadané pomocí 1 předpisu" (stejné pro $x<0$, $x>0$, ...)
  - patří sem expon., mocniny, ...
  - neplatí pro nespojitou funkci  NEBO

- pozor: $\theta(x)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$  } přesto v bodě $x=0$ není analytická

(analytické jsou speciální, ale potkáme často)

Př.: $\frac{1}{1-x}$ Rozvoj v bodě $x_0 = 0$, $\varepsilon = x$

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

$$f(0) = 1, \quad b_0 = \underline{1}$$

$$f'(x) = (-1)\cdot(1-x)^{-2}\cdot(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f'(0) = 1, \quad b_1 = \underline{\underline{1}}$$

$$f''(x) = +2 \cdot (1-x)^{-3}\cdot(-1) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f''(0) = 2, \quad b_2 = 1$$

$$f'''(x) = 2\cdot(-3)(1-x)^{-4}\cdot(-1) = \frac{6}{(1-x)^4}, \quad f'''(0) = 6, \quad b_3 = 1 \quad \text{atd.}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

(pouze pro malá x?)

Př.: $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$f(0) = 1, \quad b_0 = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f'(0) = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} = \cancel{1}\ \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(1+x)^{-\frac{3}{2}}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}, \quad b_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{8}}}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(1+x)^{-\frac{5}{2}}, \quad f'''(0) = \frac{3}{8}, \quad b_3 = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$$

Př.: $f(x) = (1+x)^\alpha \qquad (1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}1^{n-1}x^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}1^0 x^n$

$$f(0) = 1, \quad b_0 = 1$$

$$f'(x) = \alpha\cdot(1+x)^{\alpha-1}, \quad f'(0) = \alpha, \quad b_1 = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1), \quad b_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = \binom{\alpha}{2}$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}, \quad f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2), \quad b_3 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-3)}{3\cdot2\cdot1} = \binom{\alpha}{3}$$

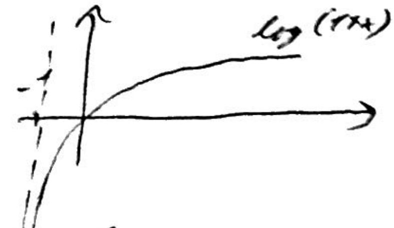
$$\binom{3}{2} = \cancel{\frac{3!}{1!\,2!}}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots}$$

– zastaví se pro $\alpha \in \mathbb{N}$, ne pro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\binom{n}{n+1} = \frac{n(n-1)\dots0}{1\cdot2\dots n\cdot(n+1)} = \underline{\underline{0}}$$

Př: $f(x) = \log(1+x)$



$f(0) = \ln 1 = 0, \; f_0 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \; f'(0) = 1, \; f_1 = 1$

$f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}, \; f''(0) = -1, \; f_2 = -\frac{1}{2}$

$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}, \; f'''(0) = 2, \; f_3 = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$

$f''''(x) = 2 \cdot (-3)(1+x)^{-4}, \; f''''(0) = -6, \; f_4 = \frac{1}{6 \cdot 4} \cdot (-6) = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$

$\log(1+x) = 1x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$

Taky: $\log(1-x) = -\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots\right)$

Př: $f(x) = e^x$

$f(0) = 1, \; f_0 = 1$

$f'(x) = e^x \quad f'(0) = 1 \quad f_1 = 1$

$f''(x) = e^x, \; f''(0) = 1 \quad f_2 = \frac{1}{2}$

$\Big\} \; f^{[n]}(0) = 1 \Rightarrow f_n = \frac{1}{n!}$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$

Př: $\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$ "polynom lze spočítat i pro komplexní č."

"anal. funkce = dlouhý polynom"

$z = x + iy$

$z = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

Př: $\exp(ix) = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + i\frac{1}{5!}x^5 - \dots$

$= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right)}_{\cos(x)} + i\underbrace{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5\right)}_{\sin(x)}$

$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \dots$

$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$

Př.: $\cos(ix) = ?$

$$\left.\begin{aligned} \exp(ix) &= \cos x + i\sin(x) \\ \exp(-ix) &= \cos x - i\sin(x) \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}$$

$$\boxed{\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$$

$$\cos(ix) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \Rightarrow \text{reálné číslo}$$

$$\boxed{\cosh(x) = \cos(ix) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}$$ Hyperbolický kosinus

$$\sin(ix) = i\underbrace{\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}_{\text{ryze imaginární}} = i\sinh(x) \qquad \boxed{\sinh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}$$

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cosh' x &= \sinh(x) \\ \sinh'(x) &= \cosh(x) \end{aligned}}$$

Proseminář z mat. metod fyziky II

$\vec{x} = f(\vec{x}_0, \vec{v}_0, t)$ - hodnoty $\vec{x}_0, \vec{v}_0$ značí počáteční podmínky

$\vec{v} = f'(\vec{x}_0, \vec{v}_0, t)$

$\vec{a} = f''(\vec{x}_0, \vec{v}_0, t)$ } diferenciální rovnice

Věta o existenci a jednoznačnosti soustavy diferenciálních rovnic

- Nechť $f_i(x, y_i)$
spojité v nějaké oblasti a mají tam spojité derivace y_i.
Pak každým bodem oblasti prochází právě jedno řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\underbrace{\frac{dy_i}{dx}}_{\text{1 neznámá}} = \underbrace{f_i(x, y_i)}_{\text{závisí na všech ostatních proměnných}} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

- Newtonovy pohybové rovnice = diferenciální rovnice 2. řádu

$$x'' = F(x, x', t) \qquad (1)$$

položme

$$x' = y \qquad (2)$$

pak

$$y' = F(x, y, t) \qquad (3)$$

$(1) \Leftrightarrow (2) + (3)$

rovnice 2. řádu
$\Rightarrow$ 2x rovnice 1. řádu

- Newtonovy rovnice přepisujeme

$$x' = \frac{p}{m} \quad p' = F(x, p, t)$$

- Lineární diferenciální rovnice &
(později)

• Metoda substituční pro integraci

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \qquad F = \int f\,dx$$

Př: $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

Taylorova řada

– chyba $R_{n+1} = \frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$

= Lagrangeův výraz pro R_{n+1}

• Problém: konstanta v diferenciálních rovnic

- důkaz jednoznačnosti:

- pro: ~~$f(x)$~~ $y''(t) = f(y, y')$ (někdy $f(y, y', t)$)

- řešení bude určeno 2 konstantama (počáteční poloha, rychlost) $y(0)$ a $y'(0)$

- předpoklad: $y(t)$ se dá rozvinout do Taylorovy řady v bodě $t = 0$

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{1!} y'(0)t + \underbrace{\frac{1}{2!} y''(0) t^2 + \frac{1}{3!} y'''(0) t^3 + \ldots}_{\text{neznáme}}$$

$$= y_0 + v_0 t + \ldots$$

- $y''(0)$ zjistím z dif. rovnice

- d. rovnici zderivuji => zjistím $y'''(0)$, atd.

Integrál energie pohybových rovnic

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)$$

- Nechť platí $f(x) = -\frac{dU}{dx}$ Pak funkce U je potenciál síly f

$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} = -\frac{dU}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\frac{dU}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + U\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + U = E = \text{konst.}$$

= zákon zach. mech. energie

Př: $f = -mg$
lze odhadnout $U = -\int f\,dx$ $\quad U = mgx + C$

Př: $f = -\frac{GmM}{x^2}$ $\quad U = -\int f\,dx = \underbrace{-\frac{\cancel{x}GmM}{x} + C}$

Taylorův rozvoj $\rightarrow$ první člen dá mgx ?

POZN: $\cancel{\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\ddot{x}\cdot\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}}(\dot{x}^2) = \frac{1}{2}2\cdot\dot{x}\cdot\ddot{x}$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x})^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}\ddot{x}$$

také $\cancel{\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}U(x)}$ $\ \frac{dU}{dt} = \cancel{\frac{d}{dt}(U(x)) = \frac{dU}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}}$

$$\frac{dU}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(U(x(t))\right) = \frac{dU}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

Př: $\frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{x} = E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GmM}{R}$ "první integrál pohybových rovnic"

1) $E \geq 0$ pohyb do nekonečna
2) $E <$ existuje bod obratu

(rychlost při $E=0$ = úniková rychlost)

- K silám tření neexistuje potenciál
- Pohyb náboje v el. poli = složitější

Prosem. z mat. metod fyziky III

Diferenciální rovnice: parciální (více proměnných), $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$; obyčejné (1 nezávislá)

- obyčejné: $F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, f(x)) = 0$
- řád rovnice = nejvyšší derivace

rov.: lineární (konstantní koeficienty), potom máme více řešení, i lin. kombinace je řešení; nelineární

př.: $y'' + ay' + by = 0$

y_1, y_2 … 2 řešení

$y = Ay_1 + By_2$ … také řešení

homogenní, nehomogenní; autonomní, neautonomní

Obyčejné dif. rovnice

a) lineární $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = \underbrace{f(x)}_{\text{nehomogenní}}$

b) lineární s konstantními koeficienty

$a_{n-1}, a_{n-2}, \dots a_0$ jsou konstanty

obecné řešení $y = y_H + y_P$

y_H … řešení homogenní rov.; y_P … partikulární řešení

1) řešení homogenní dif. rovnice

- hledáme ve tvaru $e^{\lambda x}$
- dosadíme do $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_0 \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x} \cdot (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0) = 0$$

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0) = 0$$

charakteristický polynom

$\Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$ kořenů

např.: $n = 5$

$$\cancel{y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + x \cdot C_3 e^{\lambda_3 x} + x^2 C_4 e^{\lambda_3 x} + C_5 e^{\lambda_3 x}}$$

$(\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2)$

$$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 x e^{\lambda_3 x} + C_5 x^2 e^{\lambda_3 x}$$

! Když $\lambda_3 = \lambda_4$, musíme násobit x!

2) řešení nehomogenní rovnice

viz. příklady

Př: Lineární harmonický oscilátor

k ... tuhost pružiny

$t=0$ ~~rov~~

$x(t=0)=x_0$

$\dot{x}(t=0)=0$

$$m\ddot{x}=-kx$$

$$\ddot{x}+\underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega^2}x=0 \qquad \ddot{x}+\omega^2x=0$$

- předpoklad: $x=e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2+\omega^2=0$

$$\lambda_{1,2}=\pm i\omega$$

$$x(t)=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}$$

poč. podmínky $x(0)=x_0=C_1+C_2$

$\dot{x}(0)=0=C_1i\omega-C_2i\omega \Rightarrow C_1=C_2$

$$\frac{x_0}{2}=C_1=C_2$$

dosadíme zpátky:

$$x(t)=x_0\cdot\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} e^{i\alpha}&=\cos\alpha+i\sin\alpha\\ e^{-i\alpha}&=\cos\alpha-i\sin\alpha\end{aligned}\right\}\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \quad \Rightarrow x(t)=x_0\cdot\cos(\omega t)$$

Př: $y''-4y'+4y=x^2$

1) homogenní: $\lambda^2-4\lambda+4=0$

$$(\lambda-2)^2=0$$

$$\lambda_{1,2}=2 \Rightarrow y_H=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}=e^{2x}\cdot(c_1+c_2x)$$

- zkouška $y_H'=2c_1e^{2x}+c_2e^{2x}+c_22xe^{2x}$

$y_H''=c_14e^{2x}+2c_2e^{2x}+c_2\cdot2e^{2x}+c_2\cdot4xe^{2x}$

$=4c_1e^{2x}+4c_2e^{2x}+4cxe^{2x}$

$4c_1e^{2x}+4c_2e^{2x}(1+x)-4\cdot(2c_1e^{2x}+c_2e^{2x}+2c_2xe^{2x})$

$+4c_1e^{2x}+4c_2xe^{2x}=0$

$\cancel{4c_1e^{2x}}+\cancel{4c_2e^{2x}}+\cancel{4c_2xe^{2x}}-\cancel{8c_1e^{2x}}-\cancel{4c_2e^{2x}}-\cancel{8c_2xe^{2x}}$

$+\cancel{4c_1e^{2x}}+\cancel{4c_2xe^{2x}}=0$

$$0=0$$

2) nehomogenní

"variace konstant"

- podmínka:

~~$A'+B'=0$~~

$A'+xB'=0$

$$y_p=(A(x)+xB(x))e^{2x}$$

$$y_p'=2\cdot(A+xB)e^{2x}+e^{2x}\cdot(A'+B+xB')$$

$$y_p''=2(A'+B+xB')e^{2x}\left(\cancel{+(A+xB)4e^{2x}}\right)$$

$$+B'e^{2x}+2Be^{2x}$$

- dosadíme do rovnice, vyřešíme pro A, B

$$y_p=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}$$

NEBO $y_p=\alpha x^2+\beta x+\gamma \qquad 4\alpha=1 \quad 4\beta-8\alpha=0 \quad 2\alpha-4\beta+4\gamma=0$

Mat. metody fyziky – IV

Př: $y'' - 4y' + 4y = x^2$

$$y_H = (a + xb)e^{2x} = (c_1 + xc_2)e^{2x}$$

partikulární řešení:

buď: a) – předpoklad: $y_p = Ax^2 + Bx + C$

nebo: b) – variace konstant:

$$y_p = (A(x) + B(x)x)e^{2x}$$

$$y_p' = \underbrace{(A' + B'x)}_{0} e^{2x} + 2(A + Bx)e^{2x} + Be^{2x}$$

podmínka: $A' + B'x = 0$

$$y_p'' = 4(A+Bx)e^{2x} + 2e^{2x}\cdot\underbrace{(A' + B'x)}_{0} + 2Be^{2x} + B'e^{2x} + 2Be^{2x}$$

dosadíme:

$$\cancel{4(A+Bx)e^{2x}} + 4Be^{2x} + B'e^{2x} - 4\cdot\left(\cancel{2\cdot(A+Bx)e^{2x}} + \cancel{Be^{2x}}\right) + \cancel{4(A+Bx)e^{2x}} = x^2$$

$$B'e^{2x} = x^2$$

"tam kde není A', B' se vykrátí" (– protože to musí řešit homogenní rov.)

$$B' = x^2 e^{-2x}$$

$$B = \int x^2 e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \int x e^{-2x}\,dx \quad \left| \begin{matrix} u = x & v' = e^{-2x} \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{2} \end{matrix} \right.$$

$$\left| \begin{matrix} u = x^2 & v' = e^{-2x} \\ u' = 2x & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \right|$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \int \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$

$$B = e^{-2x}\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$$

$$A' + xB' = 0$$

$$A' = -xB'$$

$$A = \int -x^3 e^{-2x}\,dx = -\left[-x^3\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}\int x^2 e^{-2x}\,dx\right]$$

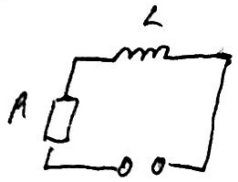
$$A = e^{-2x}\left[\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}\right]$$

$$y_p = (A + xB)e^{2x} = \cancel{\frac{x^3}{2}} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8} - \cancel{\frac{x^3}{2}} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x$$

$$y_p = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow y = (c_1 + xc_2)e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$$

Př: elektrický RL obvod



$$L\frac{dI}{dt} + RI = U$$

U: konstanta (pro baterku); střídavé (v zásuvce)

1. homogenní řešení $I_H = e^{\lambda t}$ ← předpoklad

$$L.\lambda + R = 0$$

$$\lambda = -\frac{R}{L} \qquad I_H = c\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

2. nehomogenní: a) $U(t) = U_0$, kde U_0 je konstanta

- předpoklad: ~~$I_p(t) = \ldots$~~

$$I_p = \text{konst}$$

$$R \cdot I_p = U_0$$

$$I_p = \frac{U_0}{R} \quad \Rightarrow \quad I = c\, e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R}$$

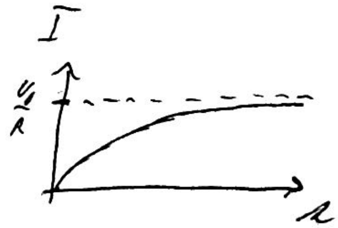
počáteční podmínky: $I(0) = 0$

$$0 = c + \frac{U_0}{R}$$

$$c = -\frac{U_0}{R}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R}$$

$$I = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



b) $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$

- předpoklad: $I_p = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$, kde A, B jsou konst.

dosadíme:

$$L\left[A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t)\right] + R\left[A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)\right] = U_0 \sin(\omega t)$$

$$(R.A - LB\omega) \sin(\omega t) + (LA.\omega + RB) \cos(\omega t) = U_0 \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow LA\omega + RB = 0 \rightarrow A = \frac{-RB}{L\omega}$$

$$-LB\omega + RA = U_0 \rightarrow -LB\omega + R.\frac{(-RB)}{L\omega} = U_0 \rightarrow B = \frac{-U_0}{L\omega + \frac{R^2}{L\omega}}$$

$$B = \frac{-L\omega U_0}{R^2 + L^2\omega^2}$$

$$A = -\frac{R}{L\omega} \cdot \frac{(-L\omega) U_0}{R^2 + L^2\omega^2} = \frac{R.U_0}{R^2 + L^2\omega^2}$$

$$I = c \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + A \sin \omega t + B \cdot \cos \omega t$$

Př: řešte ODR $\ddot{x} + \underbrace{2\varkappa\dot{x}}_{\text{tlumení}} + \omega_0^2 x = \underbrace{a \cdot \sin(\omega t)}_{\text{vnější síla}}$

1) homogenní řešení: $\lambda^2 + 2\varkappa\lambda + \omega_0^2 = 0$

$x \sim e^{\lambda t}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\varkappa \pm \sqrt{4\varkappa^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\varkappa \pm \sqrt{\varkappa^2 - \omega_0^2}$$

předpoklad: $\varkappa^2 - \omega_0^2 < 0$ (tlumení je menší než vlastní oscilace)

$\varkappa^2 < \omega_0^2$

$$\rightarrow \Omega^2 = \omega_0^2 - \varkappa^2 > 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\varkappa \pm \sqrt{-\Omega^2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\varkappa \pm i\Omega$$

$$x_H = c_1 e^{(-\varkappa + i\Omega)t} + c_2 e^{(-\varkappa - i\Omega)t}$$

$$= \underbrace{e^{-\varkappa t}}_{\text{určuje amplitudu}} \cdot \underbrace{(c_1 e^{i\Omega t} + c_2 e^{-i\Omega t})}_{\text{řešení netlumeného kmitání}}$$

2) partikulární řešení – předpoklad: $x_p = A \sin \omega t + B \cos \omega t$

$$x_p' = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t$$

$$x_p'' = -A\omega^2 \sin(\omega t) - B\omega^2 \cos \omega t$$

dosadíme:

$$-A\omega^2 \sin(\omega t) - B\omega^2 \cos(\omega t) + 2\varkappa \cdot (A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t) + \omega_0^2 \cdot (A \sin \omega t + B \cos \omega t) = a \cdot \sin(\omega t)$$

$$(A\omega_0^2 - A\omega^2 - 2\varkappa B\omega) \sin(\omega t) + (B\omega_0^2 - B\omega^2 - 2\varkappa A\omega) \cos(\omega t) = a \cdot \sin(\omega t)$$

$$B\omega_0^2 - B\omega^2 + 2\varkappa A\omega = 0 \rightarrow B = \frac{-2\varkappa\omega A}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\varkappa\omega A}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$A\omega_0^2 - A\omega^2 - 2\varkappa B\omega = a \rightarrow$$

$$A\omega_0^2 - A\omega^2 - 2\varkappa\omega \cdot \frac{2\varkappa\omega A}{\omega_0^2 - \omega^2} = a$$

$$A \cdot \left(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\varkappa\omega \cdot \frac{2\varkappa\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) = a$$

$$A \cdot \frac{-\omega^2 \cdot (\omega^2 - \omega_0^2) + \omega_0^2 \cdot (\omega^2 - \omega_0^2) - 4\varkappa^2\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} = a$$

$$A = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{4\varkappa^2\omega^2 + \underbrace{\omega^4 + \omega_0^4 - 2\omega^2\omega_0^2}_{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} a$$

$$B = \frac{2\varkappa\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot a}{4\varkappa^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

$$B = \frac{-2\varkappa\omega \cdot a}{4\varkappa^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

Proseminář z mat. metod fyziky – přednáška V

• opakování: – násobení matic

$A = \ldots$

• inverzní matice $AA^{-1} = E$, podmínka: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$

• platí: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

• stopa: $\mathrm{tr}(A) = \sum_j A^j_j$

– vlastnost = cykličnost $\mathrm{tr}(A \cdot B \cdots Z) = \mathrm{tr}(B \cdots Z A)$

• pro diagonální matici: $\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\det \mathbb{D} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n$

$\mathrm{tr}\, \mathbb{D} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n$

– k-tá mocnina $\mathbb{D}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$

– inverzní matice: $\mathbb{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix}$

• opakování: – geometrická posloupnost

$a_0 = 1$ $a_{k+1} = \alpha \cdot a_k$, NEBO $a_k = a_0 \alpha^k$

• Fibonacciho posloupnost

$a_0 = 0$ $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$

$a_1 = 1$

– lze psát

$$\begin{matrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & & \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & \ldots \end{matrix}$$

$b_j = \begin{bmatrix} a_{j+1} \\ a_j \end{bmatrix}$ $b_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$b_k = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matice}}}{\mathbb{F}} \cdot b_{k-1}$ $\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k + a_{k-1} \\ a_k \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

– analogicky jako u geo. posloupnosti

$\underline{b_k = \mathbb{F}^k \cdot b_0}$

$\mathbb{F}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha_+^{k+1} - \alpha_-^{k+1} & \alpha_+^k - \alpha_-^k \\ \alpha_+^k - \alpha_-^k & \alpha_+^{k-1} - \alpha_-^{k-1} \end{bmatrix}$

$\alpha_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

- dostaneme $f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}\alpha_+^{k+1} - \alpha_-^{k+1} \\ \alpha_+^{k} - \alpha_-^{k}\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha_+^k - \alpha_-^k\right)$$

Př:

$x_0 = 0$ kuličky spojené pružinkami

- hmotnost kuličky m
- tuhost pružiny k
- počet kuliček n
- průměrná délka pr. $l = \frac{L}{n+1}$
- klidová délka pružinky l_0

- polohy kuliček jsou měřeny od jejich rovnovážných poloh
- platí $x_0 = 0$, $x^{n+1} = 0$ (nehýbe se)
- pohybová rovnice $m\ddot{x}_k = F_k$, kde $F_k = (x_{k+1} - x_k + l - l_0)k - (\underbrace{x_k - x_{k-1} + l - l_0}_{\text{skutečná délka pružiny}})\cdot k$
- zavedeme $\frac{k}{m} = \omega^2$

$$\ddot{x} + \omega^2(2x_k - x_{k+1} - x_{k-1}) = 0$$

- napíšeme všechny rovnice:

$$\begin{bmatrix}\ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n\end{bmatrix} + \underbrace{\omega^2\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \dots\end{bmatrix}}_{\Omega^2}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}$$

Pozn: - důležitá matice (viz. num. aproximace Laplaceova operátoru)

- zapíšeme

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + \Omega^2\cdot\vec{x} = 0$$

(pro 1 oscilátor: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
$\Rightarrow x(t) = \cos(\omega t)\cdot x_0 + \omega^{-1}\sin(\omega t)\cdot v_0$

$\Rightarrow$ lze psát $\vec{x}(t) = \cos(\Omega t)\cdot\vec{x}_0 + \Omega^{-1}\cdot\sin(\Omega t)\cdot\vec{v}_0$

Pozn: - musíme zavést funkce matic

• podobnost matic:

A, A' jsou podobné, pokud $A = T.A'.T^{-1}$

$\det(A) = \det T . \det A' . \det T^{-1} = \det A'$

$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(TT^{-1}A') = \mathrm{tr}(A')$

- interpretace: "souřadnicová transformace pro operátory"

• **Diagonalizovatelná matice**

- matice A je diagon. pokud je podobná diagonální matici

$$A = T.D.T^{-1}$$, T... invertovatelná, D... diagonální

- např.: symetrické matice jsou diagonalizovatelné

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$ d_j ... vlastní čísla matice A

$\Rightarrow \det A = \det D = d_1 d_2 \dots d_n$

$\mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, \mathbb{D} = d_1 + d_2 + \dots + d_n$

- další vlastnosti

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{e}_j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d_j \\ 0 \end{bmatrix} = d_j \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$D.\vec{e}_j = d_j.\vec{e}_j$, $\vec{e}_j$ je vlastní sloupeček (vektor) matice $\mathbb{D}$

- dále: $\vec{a}_j = T.\vec{e}_j$

$$\begin{bmatrix} T_j^1 \\ T_j^2 \\ \vdots \\ T_j^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

j-tý sloupec

- tzn. $\vec{a}_j$ je j-tý sloupec T
- takže $T = [\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n]$

- dále:

$A.\vec{a}_j = T.D.\cancel{T^{-1}}\cancel{T} e_j$

$A.\vec{a}_j = d_j T e_j$

$A.\vec{a}_j = d_j.\vec{a}_j$, $\vec{a}_j$ je vlastní sloupeček (vektor) matice A

- Bez indexů: $\boxed{A.\vec{a} = d.\vec{a}}$ $\vec{a}$... vlastní sloupeček, d... vlastní číslo

POZN: platí ekvivalence $\Leftrightarrow$ v této definici

- interpretace

- 2 speciální směry, směr se zachovává
- obecně se směr nezachovává

• Jak najít vlastní čísla?

$$A\vec{a} = \lambda \cdot \vec{a}$$
$$A\vec{a} - \lambda\vec{a} = 0$$
$$(A - \lambda \cdot E)\vec{a} = 0 \quad , E \text{ ... jednotková matice}$$

"degenerované => neexistuje inverzní matice"

$$\Rightarrow \boxed{\det(A - \lambda E) = 0}$$

$$\begin{vmatrix} A_1^1 - \lambda & A_2^1 & \dots \\ A_1^2 & A_2^2 - \lambda & \\ \vdots & \vdots & \ddots \quad A_n^n - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

=> polynom stupně $\underline{n}$ v λ => n řešení pro λ

• mocnina A:

$$A^k = \underbrace{(TDT^{-1})(TDT^{-1})\dots(TDT^{-1})}_{k\text{-krát}}$$

$$\boxed{A^k = T D^k T^{-1}}$$

$$\operatorname{tr}(A^k) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k \quad , \text{ rovnice } \quad \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$
$$\operatorname{tr} A^2 = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2$$
$$\vdots$$
$$\operatorname{tr} A^n = \lambda_1^n + \dots \lambda_n^n$$

(ekvivalentní $\det(A - \lambda E) = 0$)

• Aplikovat na Fibonacciho posl.:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(F - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0$$
$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

- najít vlastní vektory:
  - definice $F\vec{a}_\pm = \lambda_\pm \vec{a}_\pm$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_+^1 \\ a_+^2 \end{bmatrix} = \lambda_+ \begin{bmatrix} a_+^1 \\ a_+^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a_+^1 + a_+^2 &= \lambda_+ (a_+^1) \\ a_+^1 &= \lambda_+ (a_+^2) \\ \lambda_+(a_+^2) + a_+^2 &= \lambda_+^2 (a_+^2) \ \checkmark \end{aligned}$$

=> nekonečně mnoho řešení, "degenerovaný SLR"

$$\Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} \lambda_+ a_+^2 \\ a_+^2 \end{bmatrix} \quad a_+^2 \text{ může být libovolné}$$

$$\vec{a} = a_+^2 \begin{bmatrix} \lambda_+ \\ 1 \end{bmatrix}$$

- dodatečná podmínka $|\vec{a}| = 1$

$$\vec{a} = k \cdot \begin{bmatrix} \lambda_\pm \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_\pm = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2\sqrt{5}}} \\ \sqrt{\frac{\sqrt{5} \mp 1}{2\sqrt{5}}} \end{bmatrix}$$ ← tady je $\pm$ ← tady je $\mp$

- lze vypočítat T

$$\Rightarrow T = [\vec{a}_+ \ \vec{a}_-] = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}} & -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}} \\ \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}} & \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}} \end{bmatrix}$$

(na pořadí nezávisí)

- lze vypočítat F^λ:

$$F^\lambda = T D^\lambda T^{-1}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix}$$ (zde musí být stejné pořadí jako u T)

$$D^\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_+^\lambda & 0 \\ 0 & \lambda_-^\lambda \end{bmatrix}$$

- když $|\vec{a}| = 1$, platí $T^{-1} = T^T$

Proseminář z mat. metod – přednáška VII

Vlastní čísla

$A \cdot \vec{a} = \alpha \vec{a}$ $\qquad D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix}$ $\qquad T = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n]$

$A = T D T^{-1}$ $\qquad \det(A - \alpha \cdot E) = 0$

$A^j = T D^j T^{-1}$

⇒ lze zobecnit na ostatní funkce

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \cdot x^j \quad \text{(Taylorův rozvoj)}$$

$$F(A) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j A^j = \sum_{j=0}^{\infty} f_j T D^j T^{-1} = T \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j D^j\right) T^{-1}$$

$$= T \cdot F(D) \cdot T^{-1}$$

$$F(D) = \begin{bmatrix} F(\alpha_1) & & & \\ & F(\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & F(\alpha_n) \end{bmatrix}$$

• POZN.:

$$F(A) \cdot \vec{a}_k = T \cdot F(D) \cdot T^{-1} \cdot \underbrace{T \cdot \vec{e}_k}_{\vec{a}_k} = T F(D) \vec{e}_k = F(\alpha_k) \cdot T \vec{e}_k = F(\alpha_k) \vec{a}_k$$

$$\boxed{F(A) \cdot \vec{a}_k = F(\alpha_k) \cdot \vec{a}_k}$$

NEBO

$$F(A) \vec{a}_k = \sum_{j=0}^{\infty} f_j A^j \cdot \vec{a}_k = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \cdot \alpha_k^j \cdot \vec{a}_k = F(\alpha_k) \vec{a}_k$$

$$\boxed{\begin{aligned} A\vec{a} &= \alpha \vec{a} \\ F(A)\vec{a} &= F(\alpha)\vec{a} \end{aligned}}$$

Příklad ~~[illegible]~~

$x_1 \quad x_2$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \ddot{\vec{x}} + \Omega^2 \vec{x} = 0, \text{ kde } \Omega^2 = \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 \dots \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 \; 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \cos(\Omega t)\, \vec{x}_0 + \Omega^{-1} \vec{v}_0 \cdot \sin(\Omega t)$$

• najdeme vlastní vektory:

$\Omega^2 \vec{m}_k + \omega_k^2 \vec{m}_k$, $\vec{m}_k$ ... vlastní vektory

ω_k ... vlastní čísla (mody)

(pozn ω_k stejné pro $\Omega \vec{m}_k + \omega_k \vec{m}_k$)

$\Rightarrow$ hledáme řešení ve tvaru

$x(t) \cdot \vec{m}_k$, $\vec{x}_0 = x_0 \vec{m}_k$, $\vec{v}_0 = v_0 \vec{m}_k$

$$\ddot{x} \vec{m}_k + \omega_k^2 x \vec{m}_k = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_k^2 x = 0 \quad \text{(dostali jsme rov. harm. oscilátoru)}$$

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_k t) + v_0 \omega_k^{-1} \cdot \sin(\omega_k t)$$

$\Rightarrow$ obecné řešení bude ~~úměrné jednotlivým modům~~

superpozice jednotlivých řešení pro řešení jednotlivých modů

Př: $n = 2$ $\quad \Omega^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \omega^2$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = 2 \pm 1$$

$$\lambda_{1,2} = \cancel{2} \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

NEBO

$\det(\Omega^2) = \det D$

$\mathrm{Tr}(\Omega^2) = \mathrm{Tr}\, D$

$\omega_+^2 \omega_-^2 = 3\omega^2$

$\omega_+^2 + \omega_-^2 = 4\omega^2$

$\Rightarrow \omega_+^2 = 3\omega^2, \; \omega_-^2 = 1\omega^2$

• vlastní vektory:

$\omega_+^2 = 3\omega^2 \quad \vec{m}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad | \rightarrow \leftarrow | \quad \omega_+ = \sqrt{3}\omega$

$\omega_-^2 = 1\omega^2 \quad \vec{m}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad | \rightarrow \rightarrow | \quad \omega_- = \omega$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{m}_- \quad \vec{m}_+$

(máme jednotkové vektory $\Rightarrow T^{-1} = T^T$

$T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$)

$$D = \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\omega_- \quad \omega_+$

$$\Omega = T D T^{-1} = \frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}+1 \\ -\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{4} \begin{bmatrix} (\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 & (3-1)^2 \\ (3-1)^2 & (\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{4} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\cos(\Omega t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos(\omega t)+\cos(\sqrt{3}\omega t) & \cos(\omega t)-\cos(\sqrt{3}\omega t)\\ \cos(\omega t)-\cos(\sqrt{3}\omega t) & \cos(\omega t)+\cos(\sqrt{3}\omega t)\end{bmatrix}$$

$$= T \cdot \cos(D t)\, T^{-1}$$

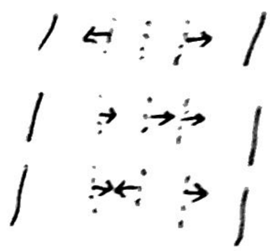
$$= T \cdot \begin{bmatrix} \cos\omega t & 0 \\ 0 & \cos(\sqrt{3}\omega t)\end{bmatrix} T^{-1}$$

Při $n=3$ $\quad \Omega^2 = \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\omega_0^2 = 2\omega^2 \qquad \vec{m}_0 = (-1, 0, 1)$

$\omega_+^2 = (2+\sqrt{2})\omega^2 \qquad \vec{m}_1 = (1, \sqrt{2}, 1)$

$\omega_-^2 = (2-\sqrt{2})\omega^2 \qquad \vec{m}_2 = (1, -\sqrt{2}, 1)$



$\sqrt{2}\,\omega$

$\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega$

$\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega$

Při $n=5$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega^2 \\ \omega_2^2 &= 2\omega^2 \\ \omega_3^2 &= 3\omega^2 \\ \omega_\pm^2 &= (2\pm\sqrt{3})\omega^2 \end{aligned}\right\}$$ vzor, platí i pro větší n

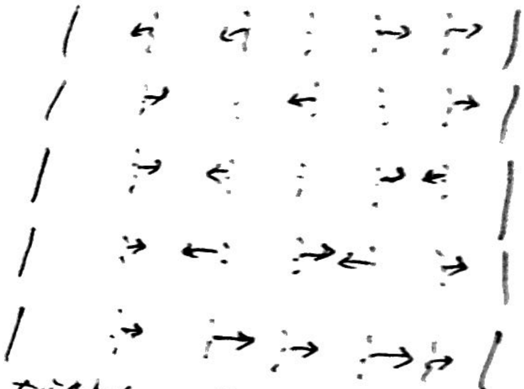
$m_1 = (-1, -1, 0, 1, 1)$

$m_2 = (1, 0, -1, 0, 1)$

$m_3 = (1, -1, 0, 1, -1)$

$m_4 = (1, -\sqrt{3}, 2, -\sqrt{3}, 1)$

$m_5 = (1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, 1)$



$\Rightarrow$ obecný pohyb bude superpozice těchto módů

• vektory: $\vec a$

- zvolíme bázi: $\vec a = \sum_i a^i \vec e_i$ $\quad \vec a = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$

"Kovektory" (**1-forma**, lineární funkcionál na vektorech)

$\underset{\rightarrow}{\alpha}(\vec a) \in R \qquad \underset{\rightarrow}{\alpha} : V \to R$

$$\underset{\rightarrow}{\alpha}(\vec a + \vec b) = \underset{\rightarrow}{\alpha}(\vec a) + \underset{\rightarrow}{\alpha}(\vec b)$$

$$\underset{\rightarrow}{\alpha}(n \cdot \vec a) = n \cdot \underset{\rightarrow}{\alpha}(\vec a)$$

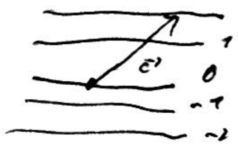
• operace: $(\underset{\rightarrow}{\alpha} + \underset{\rightarrow}{\beta})(\vec c) := \underset{\rightarrow}{\alpha}(\vec c) + \underset{\rightarrow}{\beta}(\vec c)$

$\cancel{(\underset{\rightarrow}{\alpha} \cdot \underset{\rightarrow}{\beta})(\vec c) :=}$

$(n \cdot \underset{\rightarrow}{\alpha})(\vec c) := n(\alpha(\vec c))$ } tvoří ~~vektorový~~ (duální?) prostor V^*

$\underset{\rightarrow}{\alpha}$

$\underset{\rightarrow}{\alpha}(\vec c) = ?$



$\underset{\rightarrow}{\alpha}(\vec c) = 2$ (rovinky můžeme natočit/zahustit)

$\underset{\rightarrow}{\alpha}(\vec a) = 0$ ... všechny takové $\vec a$ tvoří rovinu 0

• $V^{**} = V$ (duál duálního prostoru = původní prostor)

$\vec a(\underset{\rightarrow}{\alpha}) = \underset{\rightarrow}{\alpha}(\vec a) \Leftrightarrow \langle \underset{\rightarrow}{\alpha}, \vec a \rangle \Leftrightarrow \underset{\rightarrow}{\alpha} \cdot \vec a$

"zúžení" / "kontrakce"

• chceme:

$\underset{\rightarrow}{\alpha} \cdot \vec a \leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}$

$\underset{\rightarrow}{\alpha} \cdot \vec a = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{a}$ ... dostaneme složky kovektoru

$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \dots \alpha_n]$

• lineární operátor A $\quad A : V \to V$

$\vec b = A \vec a$

- chceme souřadnice: $\vec b = A\vec a \Leftrightarrow \mathbb{b} = \mathbb{A}\mathbb{a} \to \mathbb{A} = \begin{bmatrix} A_1^1 & \dots \\ \vdots & \end{bmatrix}$

shrnutí $\quad \vec a \xrightarrow{\vec e_i} \mathbb{a}$ $\qquad$ - pro jinou bázi $\vec e_i'$ dostaneme jiná čísla

$\underset{\rightarrow}{\alpha} \longrightarrow \boldsymbol{\alpha}$

$\underbrace{A \longrightarrow \mathbb{A}}_{\text{museli jsme zvolit bázi}}$

• souvislost bází

$\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} T_j^{\,i}\, \vec{e}_i{}'$ (vyjádřená lin. kombinace)

$\vec{a} = \sum_j a^j \vec{e}_j = \sum_i \sum_j a^j T_j^{\,i}\, \vec{e}_i{}'$

chceme čárkované souřadnice $= \sum_i a'^i\, \vec{e}_i{}'$

$\Rightarrow a'^i = \sum_j T_j^{\,i} a^j$

$\cancel{a}\ a' = Ta$, kde $T = \begin{bmatrix} T_1^{\,1} & T_2^{\,1} & \dots \\ T_1^{\,2} & & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$

$\boxed{\vec{a}' = T\vec{a}}$

• pro kovektory:

$\underset{\rightarrow}{\alpha} \cdot \vec{a} = \alpha a = \alpha' a'$

$= \alpha T a \Rightarrow \alpha = \alpha' T$

$\cancel{\alpha \alpha' = T}$ $\boxed{\alpha' = \alpha \cdot T^{-1}}$

• pro matice:

- chceme $b = Aa$

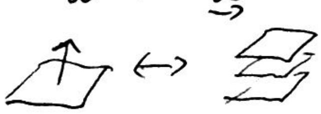
$b' = A'a' \Rightarrow T b = A' T a$ $\qquad A = T^{-1} A' T$

$b = \underbrace{T^{-1} A' T}_{A}\, a$ $\qquad \boxed{A' = T A T^{-1}}$

• Skalární součin $(\vec{a}, \vec{b})$

$(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$ $\qquad \vec{a} \leftrightarrow \underset{\rightarrow}{a}$

$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$



$\underset{\rightarrow}{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$

$(\vec{a}, \dots)$ je lineární operace ... značíme $\underset{\rightarrow}{a}$

$\underset{\rightarrow}{a} \equiv (\vec{a}, \cdot)$

$\boxed{\underset{\rightarrow}{a} \equiv (\vec{a}, \dots)}$

$\vec{a} = {}^{*}\vec{a} = \underset{\rightarrow}{a}$ $\qquad$ POZN. často se značí pouze a

$\underset{\rightarrow}{a} \to {}^{*}\underset{\rightarrow}{a} = \vec{a}$

• nové značení $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$

• Transpozice operátoru

$A \to A^T$

$(\vec{a}, A\vec{b}) = (A^T\vec{a}, \vec{b})$

- souvisí to s transponováním matic <u>pouze v ortonormální bázi</u>

• ortonormální báze

$$\boxed{(\vec{e}_i, \vec{e}_j)\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}}$$

potom $\vec{a} \to a$ $\quad \vec{a} \to a \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$\underset{\sim}{a} \to \alpha$ $\quad \underset{\sim}{a} \to a^T \ (a_1 \dots a_n)$

$A \to A$ (pokud máme skalární součin)

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \left(\sum_i a^i \vec{e}_i, \sum_j b^j \vec{e}_j\right) = \sum_{ij} a^i b^j (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \sum_i a^i b^i =$$

$$= (a^1 \dots a^n) \cdot \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = a \cdot b$$

• v ortonormální bázi: $\boxed{a^i = a_i}$

- také: $(\vec{a}, A\vec{b}) = (A^T\vec{a}, \vec{b})$

$$\sum_{ij} a^i A^i_j b^j = \sum_{ij} A^{T\,j}_{\ i} a^i \cdot b^j \qquad \forall a, b$$

$$\boxed{A^i_j = A^{T\,j}_{\ i}}$$